Les relations de Lambert

Michel Waldschmidt

Première relation de Lambert :

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots=1$$

C'est une série *télescopique* : le membre de gauche s'écrit

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

Deuxième relation de Lambert :

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{11\cdot 13}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

On utilise le même argument pour voir que le membre de gauche s'écrit

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots$$

Quand on remplace x par 1 dans la série

$$\arctan x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\cdots \tag{1}$$

on trouve

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

La relation (1) donnant la série de l'arc tangente se vérifie en dérivant les deux membres : la dérivée est

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

Elle était connue du mathématicien indien Madhava au 15ème siècle, elle a été redécouverte par James Gregory au 17ème siècle.

Référence : J.P. Delahaye. Le fascinant nombre pi. Bibliothèque Pour La Science (Diffusion Belin) 1997