



Institut de Mathématiques de Jussieu

U.M.R. 7586 du C. N. R. S.

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Faculté de Mathématiques Pierre et Marie Curie (UFR 929)



CENTRE NATIONAL  
DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Michel Waldschmidt

Institut de Mathématiques

«Théorie des Nombres», Case 247

175, rue du Chevaleret

F-75013 PARIS

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/>

Paris, le 19 juillet 2010

**Rapport sur ma mission à l'IMPA**  
**(Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada)**  
**Rio de Janeiro (Brésil) du 12 avril au 29 juin 2010**

Cette mission s'inscrit dans le cadre des accords signés entre l'IMPA et l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

J'ai donné un cours de théorie des nombres au niveau Master intitulé *Introduction to Diophantine approximation and transcendental number theory*. Je l'ai rédigé au fur et à mesure que je le donnais, et je mettais les notes sur mon site

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/enseignement.html>

de telle sorte que les étudiants puissent le télécharger et l'imprimer. Le texte final compte un peu plus de 200 pages.

Mon premier cours a eu lieu le 14 avril. Dès le lendemain, le 15 avril, afin de faire connaître aux étudiants ce dont j'allais parler dans mon cours, j'ai donné un exposé de Colloquium (Colóquio de Pós-Graduação) intitulé *On the so-called Pell-Fermat equation*. Le fichier de ma présentation se trouve sur mon site

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/PellFermatEn2010VI.pdf>

Trois étudiants ont été inscrits à mon cours, et un certain nombre de collègues sont venus plus ou moins régulièrement m'écouter. Il s'agit notamment de Hossein Movasati, Carlos Gustavo Moreira, Claude Levesque, Yves Lequain, Arnaldo Leite Pinto Garcia, et Jose Humberto Ferreira Rosa (Universidade Federal Fluminense) - ce dernier ainsi que Joacir Lucas de Oliveira n'ont manqué aucun de mes cours.

Les trois étudiants ont donné chacun un exposé d'une heure ou un peu plus sur des sujets complétant mon cours:

- *Lundi 14 juin*: Joacir Lucas de Oliveira (Doutorado). *Transcendence of  $\pi$* , d'après le livre d'Eymard et Lafon, *Autour du nombre  $\pi$* .
- *Lundi 21 juin*: Aser Cortines Peixoto Neto (Mestrado). *Introduction to elliptic functions*.
- *Mercredi 23 juin*: Alan Gerardo Reyes Figueras (Mestrado). *Some topological properties related to the Markov spectrum*, d'après le livre de Hirzebruch et Zagier, *The Atiyah Singer Theorem and elementary number theory*.

Ils ont tous les trois été reçus. Joacir Lucas de Oliveira a obtenu une bourse pour terminer son Master à l'École Polytechnique de Palaiseau. Il arrivera en

septembre 2010 et y passera un ou deux ans.

Ce séjour m'aura permis également de discuter avec plusieurs collègues de l'IMPA. J'ai aussi travaillé avec Claude Levesque qui a fait un séjour de trois semaines pendant que j'étais là, et qui m'a proposé un problème de recherche sur les équations de Thue simultanées. J'ai bien progressé sur ce sujet pendant mon séjour à l'IMPA et je vais poursuivre avec lui en juillet au Népal et en août en Inde. Les conditions de travail à l'IMPA sont excellentes, la bibliothèque est bien fournie, les connexions internet sont rapides, la cantine me convenait parfaitement, et le café (à volonté) est spécialement bon.

J'ai aussi eu l'occasion d'échanger avec le directeur de l'IMPA, César Camacho, à propos du CIMPA. Les relations entre le CIMPA et l'IMPA sont excellentes, la coopération entre ces deux organismes va évoluer vers un soutien plus accentué de l'IMPA aux activités du CIMPA dans la région.

Les accords universitaires qui sont à l'origine de ma mission sont a priori une très bonne chose. Pour l'instant, le programme ne fait que démarrer. Le nombre d'étudiants est très réduit, mais c'est un problème général à l'IMPA. La théorie des nombres n'y est pas encore développée, mais on peut espérer qu'elle va l'être. J'ai eu de nombreux échanges avec Hossein Movasati et Carlos Gustavo Moreira qui ont des travaux en cours avec différents spécialistes d'analyse diophantienne en France. Plusieurs missions d'arithméticiens sont envisagées dans l'avenir proche, il semble raisonnable de prévoir que la théorie des nombres va prendre plus d'ampleur à l'IMPA.

**Merci** aux personnes qui sont responsables de ces accords de coopération, à Rio comme à Paris, et qui m'ont donné l'occasion d'effectuer cette mission intéressante et fructueuse. Merci aussi aux nombreux collègues rencontrés à l'IMPA et aux personnes de l'administration qui ont rendu mon séjour très agréable. Merci enfin à Paulo Ribenboim et à Sinnou David notamment, pour leurs conseils avant mon départ, qui m'ont permis de mieux préparer mon séjour.

*Michel Waldschmidt.*

Ce rapport se trouve sur mon site

<http://people.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/RptMissionIMPA2010.pdf>

avec un lien sur la page

<http://people.math.jussieu.fr/~miw/cooperations.html>

---

175, rue du Chevaleret, Bureau 7A28

Tél. : [33] (0)1 44 27 53 36

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/>

Secr. : [33] (0)1 44 27 53 44

Fax : [33] (0)1 44 27 63 25

[miw@math.jussieu.fr](mailto:miw@math.jussieu.fr)

**Cours donné à l'IMPA**  
**(Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada)**  
**Rio de Janeiro (Brésil) du 12 avril au 29 juin 2010**  
par  
**Michel Waldschmidt**

**Introduction to Diophantine approximation  
and transcendental number theory**

**Content.** The purpose of this course is to give an elementary introduction to some of the main results in Diophantine approximation and transcendence. The emphasis will be on the ideas, while technical details will be reduced to the minimum.

The course will start with rational approximation to real numbers. The main tool is the theory of continued fractions. As an application of this theory, we will study the so-called Pell-Fermat equation. We explain the relation with the units of quadratic number fields.

Rational approximation theory yields irrationality results. We give an overview of the main results of irrationality and their proofs.

Liouville introduced what is called now, in dynamical systems theory, a Diophantine condition. We study the proof of Liouville and the properties of the set of Liouville numbers.

After irrationality, the next step is transcendence. This course will include a survey of the main ideas which are used in the proofs of transcendence and algebraic independence, including the proof by Nesterenko in 1996 of the algebraic independence of values of modular functions.

**Remark.** Few prerequisites are necessary to follow this course. Depending on the audience, the necessary background will be recalled whenever it is necessary. This course will provide the interested students necessary bases if they wish to pursue on this topic and continue their studies for a thesis, for instance in Paris VI.

**References.**

N.I. Fel'dman and Y.V. Nesterenko - *Transcendental numbers, in Number Theory*, IV, Encyclopaedia Math. Sci., vol. **44**, Springer, Berlin, 1998, p.1-345.

M. Waldschmidt. *Irrationality of some constants coming from analysis.*

<http://www.institut.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/Ottawa2008part1.pdf>

—, *Historical introduction to transcendence.*

<http://www.institut.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/Ottawa2008part2.pdf>