par Norbert Verdier

Au cœur des nombres avec Michel Waldschmidt

Professeur à l'Université Paris 6, membre de nombreuses institutions (*European Mathematical Society, American Mathematical Society, Ramanujan Mathematical Society*, ...), ancien Président de la Société Mathématique de France jusqu'en 2004, Michel Waldschmidt nous explique ici comment quelques mathématiciens d'aujourd'hui, héritiers de ceux d'hier, traquent, sans relâche, nombres et décimales à l'aide de méthodes théoriques de plus en plus sophistiquées.

« Au sujet des nombres transcendants, il existe tellement de problèmes ouverts, faciles à énoncer, mais qui défient les chercheurs, que j'hésite à parler d'une véritable théorie mathématique. »

Tangente : Comment définir la transcendance ?

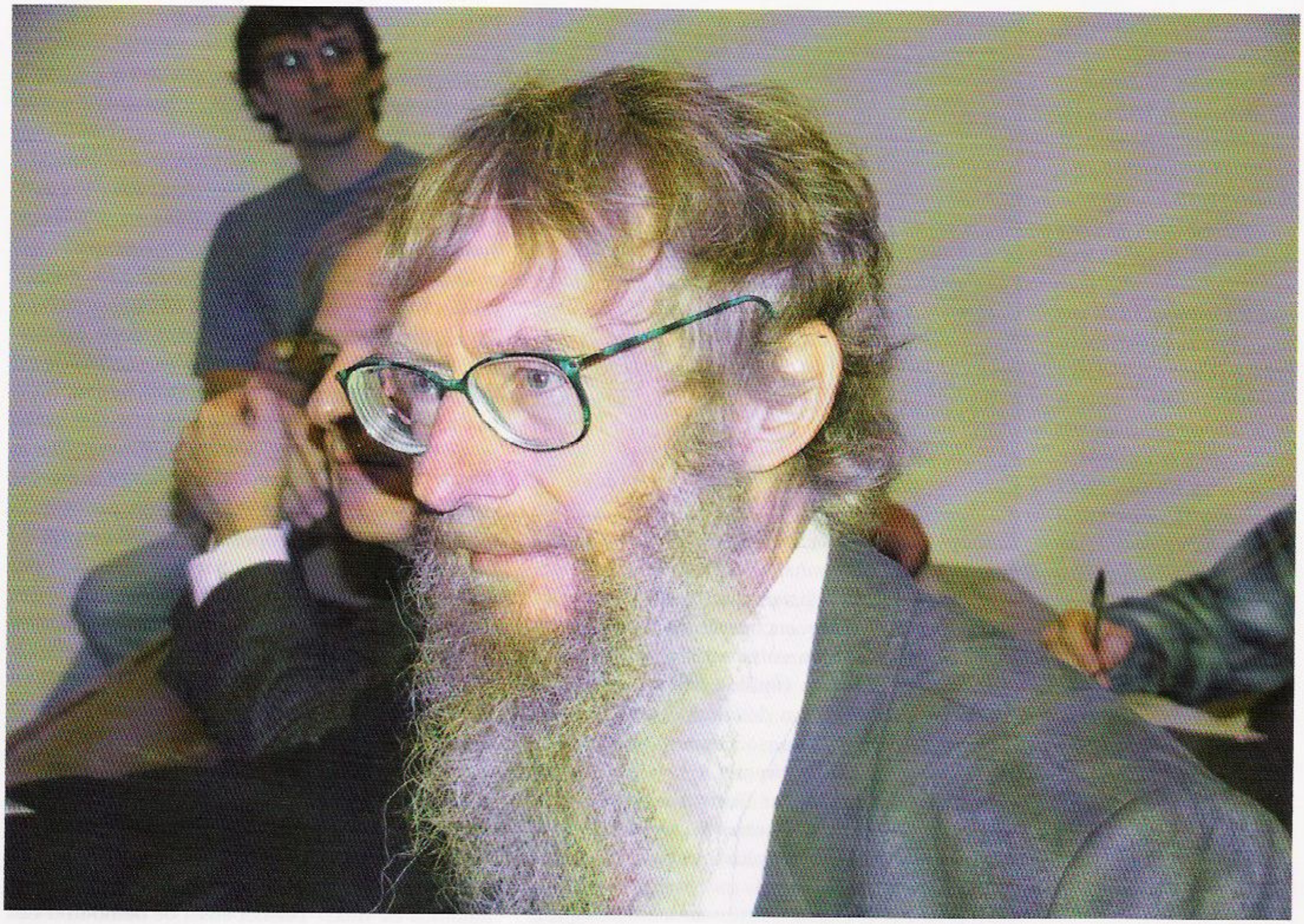
Michel Waldschmidt : Historiquement le concept de "nombre transcendant" a mis du temps à émerger. Pour les mathématiciens grecs de l'antiquité, l'idée même qu'il existe des "nombres" qui soient irrationnels était un scandale. Un des premiers exemples de nombre irrationnel qu'ils aient rencontrés était la mesure de la diagonale du carré dont le côté est l'unité : c'est le nombre $\sqrt{2}$. Pendant longtemps les mathématiciens se sont intéressés aux nombres que l'on peut exprimer par radicaux. Leibniz a introduit en mathématiques le mot "transcendant", mais c'est Lambert qui a donné le premier la définition actuelle : *un nombre est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels*. Les racines de tels polynômes sont les *nombres algébriques*, parmi lesquels sont les nombres rationnels. Il existe des nombres algébriques qui ne peuvent pas s'exprimer par des radicaux : c'est le fruit des recherches du XIX^{e} siècle, avec les contributions d'Abel et de Galois. Pour bien comprendre ce dont on parle, il faut savoir précisément ce qu'est un "nombre", réel ou complexe : c'est une notion qui a également été explicitée au XIX^{e} siècle. La démonstration par Lindemann en 1882 de la transcendance du nombre π a apporté la réponse définitive au problème de la quadrature du cercle : on ne peut pas, avec la règle et le compas, construire un carré ayant la même aire que celle d'un cercle donné. Ce qui est remarquable est que cette question académique ait conduit à l'élaboration de méthodes sophistiquées qui se révèlent aujourd'hui utiles dans des domaines qui paraissaient fort éloignés.

Des questions ouvertes

Tangente : Peut-on dire qu'avec les travaux de Hermite l'étude de la transcendance devient une véritable théorie mathématique ?

M. Waldschmidt : Les premiers travaux de Hermite sur la transcendance datent de 1872. Il existe des livres dont le titre contient les mots "théorie des nombres transcendants". Malgré cela, dire que les nombres transcendants sont actuellement l'objet d'une théorie est une affirmation controversée. Il existe quelques techniques permettant d'obtenir des résultats très partiels. J'avais participé à la rédaction d'un article il y a quelques années et j'avais été contrarié de voir qu'il était paru sous le titre *Victoires de la Transcendance*. À la suite de cet article j'ai été sollicité pour donner un exposé sur ce thème, j'ai dit à l'organisateur que je trouvais ce titre excessif, après quoi il a annoncé ma conférence en l'intitulant *Triomphe de la Transcendance*, titre que j'ai évidemment trouvé détestable.

Les techniques les plus puissantes dont on dispose à l'heure actuelle pour démontrer qu'un nombre est



Michel Waldschmidt

transcendant reposent toutes sur des propriétés "diophantiennes". Le qualificatif *diophantien* signifie que l'on fait intervenir les approximations du nombre considéré par des nombres rationnels ou algébriques. Un exemple d'inégalité diophantienne est

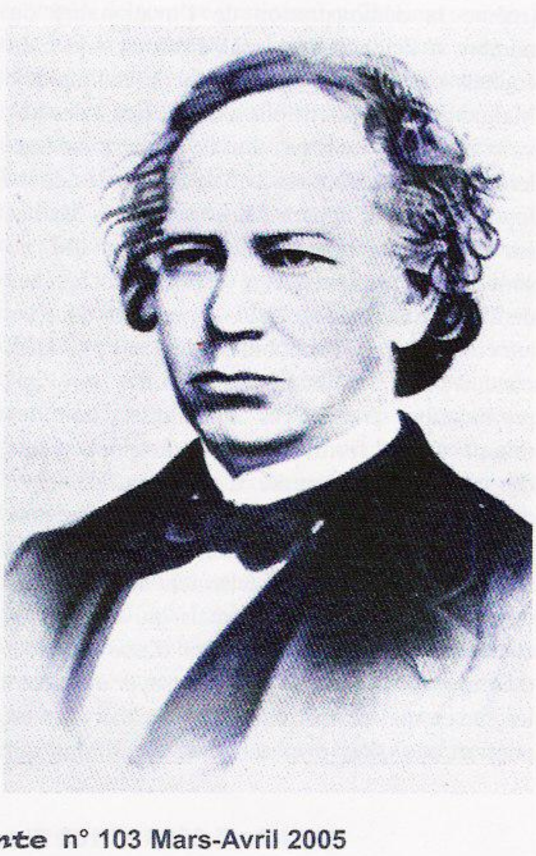
$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| \geqslant q^{\quad 8,02}$$

quand p/q est un nombre rationnel avec q suffisamment grand. Ces techniques utilisent le plus souvent les idées originales de l'article innovateur de Hermite. Sa contribution est la source de formidables développements au XIX^e^ siècle d'abord (Lindemann, Weierstrass) puis au XX^e^ (Siegel, Gel'fond, Schneider, Shidlovskii, Mahler, Lang, Baker, suivis par beaucoup d'autres plus récemment). Une autre voie pour démontrer la transcendance de certains nombres provient de la démonstration de Liouville, qui est le premier en 1844 à avoir construit explicitement des nombres transcendants. On ne savait pas encore qu'il en existait : la démonstration non constructive par Cantor de l'existence de nombres transcendants n'est venue qu'en 1873. La démonstration de Liouville est l'une des rares preuves de transcendance qui soit facile [Cf *Bibliographie*] à exposer (même la démonstration de l'irrationalité du nombre π demande pas mal d'efforts - je n'en connais pas qui soit vraiment facile et limpide). Malgré cette simplicité elle a donné lieu à des travaux profonds, mais pas tout de suite : c'est seulement au tout début du XX^e^ siècle que les développements sont apparus. Les travaux de Maillet sur ce qu'il a appelé "nombres de Liouville" ne sont pas très profonds, en revanche les recherches de Thue, puis de Siegel, suivis par Roth dans les années 1950, puis par Schmidt vingt ans plus tard, conduisent à des théorèmes difficiles sur l'approximation de nombres algébriques, dont les retombées sont formidables. Les développements des travaux de Hermite d'une part, de Thue d'autre part, fournissent les deux outils les plus puissants dont on dispose actuellement sur le sujet. Cependant il existe tellement de problèmes ouverts, faciles à énoncer, mais qui défient les chercheurs, que j'hésite à parler d'une véritable théorie mathématique. On peut essayer de spéculer sur ce que devrait être une telle théorie : on pourrait souhaiter disposer d'un algorithme qui permettrait de dire si un nombre est algébrique ou transcendant. Mais il est difficile de donner un sens précis à ce désir. Qu'est-ce qu'un nombre donné ? Une réponse possible serait de donner son développement binaire, ou décimal, ou en fraction continue; ce n'est pas le plus utile dans beaucoup de cas. Ainsi il y a de nombreux exemples de constantes de l'analyse dont on ignore si elles sont rationnelles ou non (on s'attend généralement à ce qu'elles soient transcendantes, la plupart du temps) ; la constante d'Euler, dont une des définitions est

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

est très probablement un nombre transcendant, mais on ne sait pas encore montrer que c'est un nombre irrationnel. Il y a des travaux très récents sur cette question, ils ne permettent pas encore de conclure. On ne connaît rien sur le développement d'une telle constante en base 2 ou dans n'importe quelle base, encore moins sur son développement en fraction continue. Pourtant on dispose de bons critères (faciles) sur l'irrationalité d'un nombre selon son développement. Donner un tel critère pour la transcendance est beaucoup plus délicat, mais des progrès très récents viennent d'être accomplis par Boris Adamczewski et Yann Bugeaud. Il y a d'autres façons de poser la question, un des défis les plus spectaculaires étant la conjecture de Schanuel, qui, si elle est vraie, permettrait de résoudre quasiment toutes les questions que l'on se pose sur des nombres comme e, π, ln 2. Là aussi il y a quelques résultats, certains très récents, mais on est encore très loin du but.

La question de la transcendance du nombre (ln 2) (ln 3) est un problème non résolu.



Charles Hermite démontra la transcendance du nombre e en 1873.

La transcendance et les chercheurs

Tangente : Qu'est-ce qui vous a poussé à prendre pour sujet de recherche la transcendance des nombres ?

M. Waldschmidt : La réponse est très simple : c'est mon directeur de recherches, Jean Fresnel, professeur à Bordeaux. Il travaillait à cette époque (1968) sur les fonctions L p-adiques attachées à des corps de nombres (je ne vous donnerai pas plus de précisions). Une des questions qui se posaient alors dans ce domaine avait été formulée quelques années plus tôt par Leopoldt : il s'agit de montrer qu'un certain déterminant n'est pas nul. Je venais d'être nommé assistant (sans avoir ni le DEA ni l'agrégation, je n'avais que la licence, j'étais intéressé par l'algèbre et la théorie des nombres mais j'en savais très peu sur le sujet). Fresnel m'a proposé d'étudier ce problème. C'était mon premier sujet de recherche ; j'ai d'abord essayé (avec son aide) en utilisant des méthodes élémentaires, mais je n'ai pas pu aller bien loin. Il était naturel de tenter de faire intervenir des moyens plus sophistiqués. Deux voies semblent possibles: l'une repose sur des moyens algébriques (cohomologie), l'autre sur les méthodes de transcendance. En 1968 Baker venait juste de démontrer un théorème important sur l'indépendance algébrique de logarithmes de nombres algébriques, qui permettait de résoudre un cas particulier de la conjecture de Leopoldt (la méthode de Baker permet aussi de démontrer des énoncés d'approximation diophantienne qui se révèlent extrêmement féconds, et c'est pourquoi ces travaux ont été à l'origine d'un renouveau spectaculaire des recherches sur la transcendance depuis 35 ans). J'ignorais tout du sujet. Fresnel m'a suggéré d'étudier les travaux de Baker ; j'ai essayé d'adapter sa méthode pour démontrer un nouveau cas particulier de la conjecture de Leopoldt, qui se ramène à montrer qu'une matrice 2 par 2 ayant comme coefficients des logarithmes de nombres algébriques a un rang maximal (sous des hypothèses naturelles). Ce cas particulier est aussi le premier d'une liste de 8 problèmes posées dans un livre de Schneider *Introduction aux Nombres transcendants* (traduit en français par Pierre Eymard, que j'avais eu comme professeur de Licence à Nancy) ; la même question a ensuite été posée par Lang et Ramachandra. Actuellement cette question est toujours ouverte, et je continue à en chercher la solution. Je vais en donner un cas particulier dont la solution n'est toujours pas connue : existe-t-il un nombre réel x qui ne soit pas entier tel que 2^x et 3^x soient tous deux entiers ? On s'attend à ce que la réponse soit non. En essayant de résoudre le premier problème de Schneider j'ai trouvé une solution au huitième, et c'est ainsi que j'ai débuté mes recherches sur le sujet.

Tangente : À combien estimez-vous le nombre de chercheurs travaillant sur cette thématique ?

M. Waldschmidt : Un exemple de problème ayant été résolu il y a moins de 10 ans est l'indépendance des nombres π et e^{π}, par Nesterenko. Un autre exemple auquel j'ai fait allusion tout à l'heure, qui date de l'an dernier, est le théorème de Adamczewski et Bugeaud, qui affirme qu'un nombre reel, dont le développement dans une base (développement binaire ou décimal par exemple) est donné par un automate fini, est soit rationnel, soit transcendant ; autrement dit le développement d'un nombre algébrique irrationnel n'est pas donné par un automate fini. Outre ceux que j'ai déjà énoncés, un exemple de problème non résolu est la transcendance du nombre (ln 2) (ln 3). Il faut apparemment des idées nouvelles pour répondre à la question : même l'irrationalité de ce nombre n'est pas connue.

Tangente : Comment expliqueriez-vous vos recherches à quelqu'un pour qui π = 3,14 ? et à quelqu'un pour qui π vaut environ 3,14 ?

M. Waldschmidt : L'approximation de π par 3,14 est suffisante dans la plupart des situations concrètes ; savoir que le développement de ne se termine pas est une question théorique. Pour la résoudre il a fallu développer des outils élaborés, juste pour connaître la réponse sans autre motivation. À la suite de ces travaux, il a été possible de démontrer d'autres résultats, dont certains se sont révélés très utiles pour des questions qui ne semblaient pas liées à celle de l'irrationalité de π. Un exemple que j'aime bien vient des travaux d'une équipe d'informaticiens dans le Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme de l'École Normale Supérieure de Lyon, dirigée par Jean-Michel Muller, qui a conduit à préciser une norme ISO liée à des questions d'arrondis dans les programmes informatiques. Du point de vue diophantien il s'agit de minorer la distance entre un nombre rationnel et l'exponentielle d'un nombre rationnel. C'est très lié aux travaux d'Hermite, c'est clairement utile pour les utilisateurs de l'outil informatique, et cela donne lieu à des recherches actuelles (j'ai un thésard qui va soutenir bientôt sur ce sujet). J'insiste juste que la motivation de mes recherches n'est pas informatique, elle est diophantienne, mais je suis content qu'il y ait des applications inattendues.

L'expérience montre que la recherche finalisée est souvent la plus féconde : quand on s'attaque aux questions les plus ardues, même si elles semblent gratuites, si on parvient à développer des outils puissants, on peut s'attendre à ce que les retombées dépassent le but initial.

Le nombre de Champernowne admet le développement décimal : 0,123456789101112 13141516171819202 12223... (engendré par la suite des entiers en base 10). Le mathématicien allemand Kurt Mahler souffrant d'une tuberculose du genou se fit opérer en 1937. Lors de sa convalescence, il voulut se prouver que la morphine n'avait pas altérée ses facultés intellectuelles. Il démontra que le nombre de Champernowne était transcendant et fut pleinement rassuré.

Tangente : Vous êtes, je crois, un marathonien de très bon niveau : voyez-vous un parallèle entre vos activités mathématiques et cette discipline sportive si spécifique qu'est le marathon ?

M. Waldschmidt : J'ai commencé à pratiquer la course à pied quand j'étais en classe préparatoire, c'était la méthode la plus efficace que j'avais trouvée pour évacuer le stress. Après une pause j'ai repris les entraînements vers 35 ans, et je n'ai pas arrêté depuis. Quand je veux me libérer l'esprit des soucis de la vie courante, je cours vite, quand, au contraire, je souhaite réfléchir à une question mathématique sans avoir de quoi écrire, je vais faire un footing lent. Mais c'est sûr que la dépendance fait son œuvre, et j'ai besoin de distances de plus en plus longues. J'ai fait plusieurs courses de 100 km (ultra fond), et je pense ne pas m'arrêter en si bon chemin.

Propos recueillis par **Norbert Verdier**

Bibliographie

Pour aller un peu plus loin :
Edouard Lebeau, *Nombres irrationnels, nombres transcendants*, in *Le Journal des élèves*, ENS Lyon, Volume 1, 1995, N° 3, pp. 128-133. Disponible à : www.umpa.enslyon.fr/JME/Vol1Num3/LebeauJME3/LebeauJME3.html
Pour aller beaucoup plus loin :
Michel Waldschmidt, *Nombres transcendants*, *Lecture Notes in Mathematics* 402, Ed. Springer Verlag, 1974.

Sitographie

Site de Michel Waldschmidt : http://math.jussieu.fr/~miw
Arithmétique des Ordinateurs, Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme :
http://www.ens-lyon.fr/LIP/Arenaire/
CultureMATH:
http://www.dma.ens.fr/culturemath/