AIMS Sénégal Lundi 28 mars 2016

M'Bour African Institute of Mathematical Sciences

Conjecture abc : quelques conséquences

par

Michel Waldschmidt

http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/

Résumé

D'après la revue *Nature News*, 10 septembre 2012, citant Dorian Goldfeld, la conjecture abc est "le plus important problème ouvert en analyse diophantienne". C'est en quelque sorte une grande théorie générale unifiée des courbes diophantiennes : "ce qui est remarquable dans la conjecture abc est qu'elle donne un moyen de formuler un nombre infini de problèmes diophantiens" dit Goldfeld, "et, si elle est vraie, de les résoudre." Proposée indépendamment au milieu des années 80 par David Masser de l'Université de Bâle et Joseph Œsterlé de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), la conjecture abc décrit une sorte d'équilibre ou de tension entre l'addition et la multiplication, formalisant l'observation que, quand deux nombres a et b sont divisibles par de grandes puissances de petits nombres premiers, leur somme $a + b$ a tendance à être divisible par de petites puissances de grands nombres premiers.

Résumé (suite)

La conjecture abc implique – en quelques lignes – la démonstration de nombreux théorèmes difficiles et de conjectures célèbres en théorie des équations diophantiennes - en particulier le dernier théorème de Fermat.
Cet exposé restera élémentaire, de nombreuses conséquences de la conjecture abc seront décrites. Il ne comprendra pas d'introduction à la théorie inter–universelle de Teichmüller développée par Shinichi Mochizuki.

As simple as abc

American Broadcasting Company

http://fr.wikipedia.org/wiki/American_Broadcasting_Company

Annapurna Base Camp, October 22, 2014

Mt. Annapurna (8091m) is the 10th highest mountain in the world and the journey to its base camp is one of the most popular treks on earth.

http://www.himalayanglacier.com/trekking-in-nepal/160/annapurna-base-camp-trek.htm

Le radical d'un entier positif

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) comme produit de nombres premiers :

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \qquad (a_i \geq 1).$$

Le radical d'un entier positif

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) comme produit de nombres premiers :

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \qquad (a_i \geq 1).$$

Le *radical* ou *partie sans facteur carré* $\mathrm{Rad}(n)$ de n est le produit des nombres premiers qui divisent n :

$$\mathrm{Rad}(n) = p_1 p_2 \cdots p_t.$$

Le radical d'un entier positif

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) comme produit de nombres premiers :

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \qquad (a_i \geq 1).$$

Le *radical* ou *partie sans facteur carré* $\mathrm{Rad}(n)$ de n est le produit des nombres premiers qui divisent n :

$$\mathrm{Rad}(n) = p_1 p_2 \cdots p_t.$$

Exemples :

$$\mathrm{Rad}(60\,500) = \mathrm{Rad}(2^2 \cdot 5^3 \cdot 11^2) = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 110,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(82\,852\,996\,681\,926) &= \mathrm{Rad}(2 \cdot 3^{10} \cdot 23^5 \cdot 109)\\ &= 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 109 = 15\,042.\end{aligned}$$

Triplets abc

Un triplet abc est formé de trois entiers positifs a, b, c sans facteur commun, avec $a < b$ et tels que $a + b = c$.

Triplets abc

Un triplet abc est formé de trois entiers positifs a, b, c sans facteur commun, avec $a < b$ et tels que $a + b = c$.

`Exemples:`

$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 8 = 9,$$

$$1 + 80 = 81, \quad 4 + 121 = 125,$$

$$2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5, \qquad 11^2 + 3^2 5^6 7^3 = 2^{21} \cdot 23.$$

Les bons triplets abc

Suivant F. Beukers, un bon triplet abc est un triplet abc tel que $\mathrm{Rad}(abc) < c$.

http://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/ABCpresentation.pdf

Les bons triplets abc

Suivant F. Beukers, un bon triplet abc est un triplet abc tel que $\mathrm{Rad}(abc) < c$.

http://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/ABCpresentation.pdf

`Exemple:` $(1, 8, 9)$ est un bon triplet abc car $1 + 8 = 9$, $\mathrm{pgcd}(1, 8, 9) = 1$ et

$$\mathrm{Rad}(1 \cdot 8 \cdot 9) = \mathrm{Rad}(2^3 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3 = 6 < 9.$$

Les bons triplets abc

Suivant F. Beukers, un bon triplet abc est un triplet abc tel que $\mathrm{Rad}(abc) < c$.

http://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/ABCpresentation.pdf

`Exemple:` $(1, 8, 9)$ est un bon triplet abc car $1 + 8 = 9$, $\mathrm{pgcd}(1, 8, 9) = 1$ et

$$\mathrm{Rad}(1 \cdot 8 \cdot 9) = \mathrm{Rad}(2^3 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3 = 6 < 9.$$

Mais, pour $k \geq 1$,

$$(2^k, 2^{k+3}, 2^k \cdot 3^2)$$

n'est pas un triplet abc car ces trois nombres ont un facteur commun.

Quelques bons triplets abc

$(1, 80, 81)$ est un bon triplet abc car $1 + 80 = 81$, $\operatorname{pgcd}(1, 80, 81) = 1$ et

$$\operatorname{Rad}(1 \cdot 80 \cdot 81) = \operatorname{Rad}(2^4 \cdot 5 \cdot 3^4) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30 < 81.$$

Quelques bons triplets abc

$(1, 80, 81)$ est un bon triplet abc car $1 + 80 = 81$, $\mathrm{pgcd}(1, 80, 81) = 1$ et

$$\mathrm{Rad}(1 \cdot 80 \cdot 81) = \mathrm{Rad}(2^4 \cdot 5 \cdot 3^4) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30 < 81.$$

$(4, 121, 125)$ est un bon triplet abc car $4 + 121 = 125$, $\mathrm{pgcd}(4, 121, 125) = 1$ et

$$\mathrm{Rad}(4 \cdot 121 \cdot 125) = \mathrm{Rad}(2^2 \cdot 5^3 \cdot 11^2) = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 110 < 125.$$

D'autres bons triplets abc

- $$(2, 3^{10} \cdot 109, 23^5) = (2, 6\,436\,341, 6\,436\,343)$$

est un bon triplet abc car $2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$ et
$\mathrm{Rad}(2 \cdot 3^{10} \cdot 109 \cdot 23^5) = 15\,042 < 23^5 = 6\,436\,343.$

D'autres bons triplets abc

- $$(2, 3^{10} \cdot 109, 23^5) = (2, 6\,436\,341, 6\,436\,343)$$

est un bon triplet abc car $2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$ et $\mathrm{Rad}(2 \cdot 3^{10} \cdot 109 \cdot 23^5) = 15\,042 < 23^5 = 6\,436\,343.$

- $$(11^2, 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3, 2^{21} \cdot 23) = (121, 48\,234\,275, 48\,234\,496)$$

est un bon triplet abc car $11^2 + 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3 = 2^{21} \cdot 23$ et $\mathrm{Rad}(2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 23) = 53\,130 < 2^{21} \cdot 23 = 48\,234\,496.$

D'autres bons triplets abc

- $$(2, 3^{10} \cdot 109, 23^5) = (2, 6\,436\,341, 6\,436\,343)$$

est un bon triplet abc car $2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$ et
$\mathrm{Rad}(2 \cdot 3^{10} \cdot 109 \cdot 23^5) = 15\,042 < 23^5 = 6\,436\,343.$

- $$(11^2, 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3, 2^{21} \cdot 23) = (121, 48\,234\,275, 48\,234\,496)$$

est un bon triplet abc car $11^2 + 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3 = 2^{21} \cdot 23$ et
$\mathrm{Rad}(2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 23) = 53\,130 < 2^{21} \cdot 23 = 48\,234\,496.$

- $$(1, 5 \cdot 127 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7)^3, 19^6) = (1, 47\,045\,880, 47\,045\,881)$$

est un bon triplet abc car $1 + 5 \cdot 127 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 = 19^6$ et
$\mathrm{Rad}(5 \cdot 127 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 \cdot 19^6) = 5 \cdot 127 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 506\,730.$

Triplets abc et bons triplets abc

Parmi les $15 \cdot 10^6$ triplets abc ayant $c < 10^4$, il y en a 120 qui sont bons.

Triplets abc et bons triplets abc

Parmi les $15 \cdot 10^6$ triplets abc ayant $c < 10^4$, il y en a 120 qui sont bons.

Parmi les $380 \cdot 10^6$ triplets abc avec $c < 5 \cdot 10^4$, il y en a 276 qui sont bons.

Encore plus de bons triplets abc

$$(1, 3^{16} - 1, 3^{16}) = (1, 43\,046\,720, 43\,046\,721)$$

est un bon triplet abc.

Encore plus de bons triplets abc

$$(1, 3^{16} - 1, 3^{16}) = (1, 43\,046\,720, 43\,046\,721)$$

est un bon triplet abc.

`Démonstration`.

$$\begin{aligned} 3^{16} - 1 &= (3^8 - 1)(3^8 + 1) \\ &= (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \\ &= (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \\ &= (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \end{aligned}$$

est divisible par 2^6.

Encore plus de bons triplets abc

$$(1, 3^{16} - 1, 3^{16}) = (1, 43\,046\,720, 43\,046\,721)$$

est un bon triplet abc.

Démonstration.

$$\begin{aligned} 3^{16} - 1 &= (3^8 - 1)(3^8 + 1) \\ &= (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \\ &= (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \\ &= (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \end{aligned}$$

est divisible par 2^6.

Donc

$$\mathrm{Rad}((3^{16} - 1) \cdot 3^{16}) \leq \frac{3^{16} - 1}{2^6} \cdot 2 \cdot 3 < 3^{16}.$$

Une infinité de bons triplets abc

Proposition. *Il y a une infinité de bons triplets* abc.

Une infinité de bons triplets abc

Proposition. *Il y a une infinité de bons triplets* abc.

Pour $k \geq 1$, prenons $a = 1$, $c = 3^{2^k}$, $b = c - 1$.

Une infinité de bons triplets abc

Proposition. *Il y a une infinité de bons triplets abc.*

Pour $k \geq 1$, prenons $a = 1$, $c = 3^{2^k}$, $b = c - 1$.

Lemme. 2^{k+2} *divise* $3^{2^k} - 1$.

Une infinité de bons triplets abc

Proposition. *Il y a une infinité de bons triplets* abc.

Pour $k \geq 1$, prenons $a = 1$, $c = 3^{2^k}$, $b = c - 1$.

Lemme. 2^{k+2} *divise* $3^{2^k} - 1$.

`Démonstration:` récurrence sur k.

Une infinité de bons triplets abc

Proposition. *Il y a une infinité de bons triplets abc.*

Pour $k \geq 1$, prenons $a = 1$, $c = 3^{2^k}$, $b = c - 1$.

Lemme. 2^{k+2} *divise* $3^{2^k} - 1$ *.*

`Démonstration:` récurrence sur k.

`Conséquence :`

$$\mathrm{Rad}((3^{2^k} - 1) \cdot 3^{2^k}) \leq \frac{3^{2^k} - 1}{2^{k+1}} \cdot 3 < 3^{2^k}.$$

Une infinité de bons triplets abc

Proposition. *Il y a une infinité de bons triplets abc.*

Pour $k \geq 1$, prenons $a = 1$, $c = 3^{2^k}$, $b = c - 1$.

Lemme. 2^{k+2} *divise* $3^{2^k} - 1$ *.*

`Démonstration:` récurrence sur k.

`Conséquence :`

$$\mathrm{Rad}((3^{2^k} - 1) \cdot 3^{2^k}) \leq \frac{3^{2^k} - 1}{2^{k+1}} \cdot 3 < 3^{2^k}.$$

Donc

$$(1, 3^{2^k} - 1, 3^{2^k})$$

est un bon triplet abc.

Une infinité de bons triplets abc

Cet argument, dû à F. Beukers, montre qu'il y a une infinité de triplets abc tels que

$$c > \frac{1}{6 \log 3} R \log R$$

avec $R = \mathrm{Rad}(abc)$.

Une infinité de bons triplets abc

Cet argument, dû à F. Beukers, montre qu'il y a une infinité de triplets abc tels que

$$c > \frac{1}{6\log 3} R \log R$$

avec $R = \mathrm{Rad}(abc)$.

`Question` : *Existe–t–il des triplets* abc *tels que* $c > \mathrm{Rad}(abc)^2$ *?*

Une infinité de bons triplets abc

Cet argument, dû à F. Beukers, montre qu'il y a une infinité de triplets abc tels que

$$c > \frac{1}{6\log 3} R \log R$$

avec $R = \mathrm{Rad}(abc)$.

`Question` : *Existe–t–il des triplets* abc *tels que* $c > \mathrm{Rad}(abc)^2$ *?*

`On ne connaît pas la réponse!`

Exemples

Quand a, b et c sont trois entiers positifs sans facteur commun tels que $a+b=c$, on pose

$$\lambda(a,b,c) = \frac{\log c}{\log \mathrm{Rad}(abc)}.$$

Voici les deux plus grandes valeurs connues pour $\lambda(abc)$

Exemples

Quand a, b et c sont trois entiers positifs sans facteur commun tels que $a + b = c$, on pose

$$\lambda(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \mathrm{Rad}(abc)}.$$

Voici les deux plus grandes valeurs connues pour $\lambda(abc)$

$a + b$	$=$	c	$\lambda(a, b, c)$	auteurs
$2 + 3^{10} \cdot 109$	$=$	23^5	$1,629912\ldots$	É. Reyssat
$11^2 + 3^2 5^6 7^3$	$=$	$2^{21} \cdot 23$	$1,625990\ldots$	B.M. de Weger

Exemples

Quand a, b et c sont trois entiers positifs sans facteur commun tels que $a+b=c$, on pose

$$\lambda(a,b,c) = \frac{\log c}{\log \mathrm{Rad}(abc)}.$$

Voici les deux plus grandes valeurs connues pour $\lambda(abc)$

$a+b$	$=$	c	$\lambda(a,b,c)$	auteurs
$2+3^{10}\cdot 109$	$=$	23^5	$1,629912\ldots$	É. Reyssat
$11^2+3^2 5^6 7^3$	$=$	$2^{21}\cdot 23$	$1,625990\ldots$	B.M. de Weger

Le 11 septembre 2008, on connaissait 217 triplets abc ayant $\lambda(a,b,c)\geq 1,4$. http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/tableabc.pdf

Depuis le 1 août 2015, on en connaît 238.

http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php?sort=1

Eric Reyssat : $2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$

Exemple de Reyssat $2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$

$a + b = c$

$$a = 2, \qquad b = 3^{10} \cdot 109, \qquad c = 23^5 = 6\,436\,343,$$

Exemple de Reyssat $2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$

$a + b = c$

$$a = 2, \qquad b = 3^{10} \cdot 109, \qquad c = 23^5 = 6\,436\,343,$$

$$\mathrm{Rad}(abc) = \mathrm{Rad}(2 \cdot 3^{10} \cdot 109 \cdot 23^5) = 2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 23 = 15\,042,$$

Exemple de Reyssat $2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$

$a + b = c$

$$a = 2, \qquad b = 3^{10} \cdot 109, \qquad c = 23^5 = 6\,436\,343,$$

$$\mathrm{Rad}(abc) = \mathrm{Rad}(2 \cdot 3^{10} \cdot 109 \cdot 23^5) = 2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 23 = 15\,042,$$

$$\lambda(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \mathrm{Rad}(abc)} = \frac{5 \log 23}{\log 15\,042} \simeq 1,62991.$$

Fraction continue

$$2 + 109 \cdot 3^{10} = 23^5$$

La fraction continue de $109^{1/5}$ est $[2, 1, 1, 4, 77733, \dots]$,
approximation : $[2, 1, 1, 4] = 23/9$

$$109^{1/5} = 2,555\ 555\ 39\dots$$
$$\frac{23}{9} = 2,555\ 555\ 55\dots$$

N. A. Carella. *Note on the ABC Conjecture*
http://arXiv.org/abs/math/0606221

Benne de Weger : $11^2 + 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3 = 2^{21} \cdot 23$

$$\mathrm{Rad}(2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 23) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 = 53\,130.$$

$$2^{21} \cdot 23 = 48\,234\,496 = (53\,130)^{1{,}625990\ldots}$$

Version explicite de la conjecture abc

D'après S. Laishram et T. N. Shorey, la version explicite, proposée par A. Baker, de la conjecture abc, entraîne

$$c < \mathrm{Rad}(abc)^{7/4}$$

pour tout triplet abc.

La conjecture abc

Rappelons que pour un entier positif n, le *radical* ou *partie sans facteur carré* de n est

$$\mathrm{Rad}(n) = \prod_{p|n} p.$$

La conjecture abc

Rappelons que pour un entier positif n, le *radical* ou *partie sans facteur carré* de n est

$$\mathrm{Rad}(n) = \prod_{p|n} p.$$

Conjecture abc. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *les triplets* abc *vérifiant*

$$c > \mathrm{Rad}(abc)^{1+\varepsilon}$$

sont en nombre fini.

La conjecture abc

Rappelons que pour un entier positif n, le *radical* ou *partie sans facteur carré* de n est

$$\mathrm{Rad}(n) = \prod_{p|n} p.$$

Conjecture abc. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *les triplets* abc *vérifiant*

$$c > \mathrm{Rad}(abc)^{1+\varepsilon}$$

sont en nombre fini.

Énoncé équivalent : *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\kappa(\varepsilon)$ *tel que, si* a, b *et* c *sont des entiers positifs sans facteur commun qui vérifient* $a + b = c$, *alors*

$$c < \kappa(\varepsilon)\mathrm{Rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Minoration du radical de abc

La conjecture abc est une **minoration** du radical du produit abc :

Conjecture abc. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\kappa(\varepsilon)$ *tel que, si* a, b *et* c *sont des entiers positifs sans facteur commun qui vérifient* $a + b = c$, *alors*

$$\mathrm{Rad}(abc) > \kappa(\varepsilon) c^{1-\varepsilon}.$$

La conjecture abc d'Œsterlé et Masser

La conjecture abc provient d'une discussion entre J. Œsterlé et D. W. Masser au milieu des années 80.

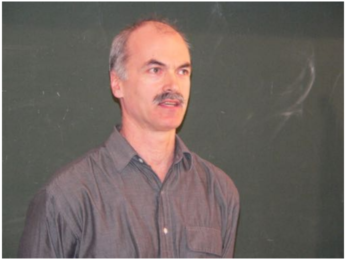
C.L. Stewart et Yu Kunrui

Le meilleur énoncé actuellement démontré en direction de la conjecture abc est dû à C.L. Stewart et Yu Kunrui (1991, 2001) :

$$\log c \leq \kappa R^{1/3}(\log R)^3.$$

avec $R = \mathrm{Rad}(abc)$:

$$c \leq e^{\kappa R^{1/3}(\log R)^3}.$$



Lucien Szpiro

J. Œsterlé et A. Nitaj ont montré que la conjecture abc implique une conjecture antérieure de L. Szpiro sur le conducteur de courbes elliptiques.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que, pour toute courbe elliptique de discriminant minimal Δ et de conducteur N, on ait

$$|\Delta| < C(\varepsilon) N^{6+\varepsilon}.$$

Autres exemples

Quand a, b et c sont trois entiers positifs sans facteur commun satisfaisant $a+b=c$, on pose

$$\varrho(a,b,c) = \frac{\log abc}{\log \operatorname{Rad}(abc)}\cdot$$

Autres exemples

Quand a, b et c sont trois entiers positifs sans facteur commun satisfaisant $a+b=c$, on pose

$$\varrho(a,b,c) = \frac{\log abc}{\log \mathrm{Rad}(abc)}.$$

Voici les deux plus grandes valeurs connues de $\varrho(abc)$, trouvées par A. Nitaj.

$a+b$	$=$	c	$\varrho(a,b,c)$
$13\cdot 19^6 + 2^{30}\cdot 5$	$=$	$3^{13}\cdot 11^2\cdot 31$	$4,41901\ldots$
$2^5\cdot 11^2\cdot 19^9 + 5^{15}\cdot 37^2\cdot 47$	$=$	$3^7\cdot 7^{11}\cdot 743$	$4,26801\ldots$

Autres exemples

Quand a, b et c sont trois entiers positifs sans facteur commun satisfaisant $a+b=c$, on pose

$$\varrho(a,b,c) = \frac{\log abc}{\log \operatorname{Rad}(abc)}\cdot$$

Voici les deux plus grandes valeurs connues de $\varrho(abc)$, trouvées par A. Nitaj.

$a+b$	$=$	c	$\varrho(a,b,c)$
$13\cdot 19^6 + 2^{30}\cdot 5$	$=$	$3^{13}\cdot 11^2\cdot 31$	$4,41901\ldots$
$2^5\cdot 11^2\cdot 19^9 + 5^{15}\cdot 37^2\cdot 47$	$=$	$3^7\cdot 7^{11}\cdot 743$	$4,26801\ldots$

Le 19 mars 2003, on connaissait 47 triplets (a,b,c) sans facteur commun avec $0<a<b<c$ et $a+b=c$ satisfaisant $\varrho(a,b,c)>4$.

http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/tableszpiro.pdf

Abderrahmane Nitaj عبدالرحمان نتاج

http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html

THE ABC CONJECTURE HOME PAGE

ABC

La conjecture abc est aussi difficile que la conjecture ... xyz. (P. Ribenboim
(read the story)

The abc conjecture is the most important unsolved problem in diophantine analysis. (D. Goldfeld)

Created and maintained by Abderrahmane Nitaj

Last updated May 27, 2010

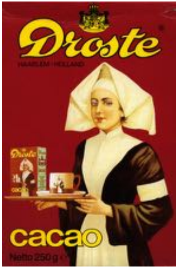
Index

- The abc conjecture
- Generalizations
- Consequences
- Tables
  - The top ten good abc examples
  - The top ten good abc-Szpiro examples
  - The top ten good algebraic abc examples
  - New good abc examples new
  - New hunters of abc examples rekenmeemetabc, abc@home new
  - Largest good abc examples new
  - The list of good triples up to 20 digits is now complete new
- Bibliography

Bart de Smit

http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/

Escher and the Droste effect



http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/

www.abcathome.com

ABC@home, projet de calcul réparti afin de démontrer la conjecture abc en trouvant tous les triplets (a, b, c) jusqu'à 10^{18}, voire plus.

Le dernier théorème de Fermat $x^n + y^n = z^n$ pour $n \geq 6$

Pierre de Fermat
1601 – 1665

Andrew Wiles
1953 –

Démontré en 1994

Le dernier théorème de Fermat pour $n \geq 6$ comme conséquence de la conjecture abc

Supposons $x^n + y^n = z^n$ avec x, y, z sans facteur commun et $x < y$.

Le dernier théorème de Fermat pour $n \geq 6$ comme conséquence de la conjecture abc

Supposons $x^n + y^n = z^n$ avec x, y, z sans facteur commun et $x < y$. Alors (x^n, y^n, z^n) est un triplet abc avec

$$\mathrm{Rad}(x^n y^n z^n) \leq xyz < z^3.$$

Le dernier théorème de Fermat pour $n \geq 6$ comme conséquence de la conjecture abc

Supposons $x^n + y^n = z^n$ avec x, y, z sans facteur commun et $x < y$. Alors (x^n, y^n, z^n) est un triplet abc avec

$$\mathrm{Rad}(x^n y^n z^n) \leq xyz < z^3.$$

Si la conjecture abc explicite $c < \mathrm{Rad}(abc)^2$ est vraie, alors

$$z^n < z^6,$$

Le dernier théorème de Fermat pour $n \geq 6$ comme conséquence de la conjecture abc

Supposons $x^n + y^n = z^n$ avec x, y, z sans facteur commun et $x < y$. Alors (x^n, y^n, z^n) est un triplet abc avec

$$\mathrm{Rad}(x^n y^n z^n) \leq xyz < z^3.$$

Si la conjecture abc explicite $c < \mathrm{Rad}(abc)^2$ est vraie, alors

$$z^n < z^6,$$

donc $n \leq 5$ (et par conséquent $n \leq 2$).

Carrés, cubes...

- Une puissance parfaite est un entier positif de la forme a^b où $a \geq 1$ et $b > 1$ sont des entiers positifs.

- Carrés :

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196, \dots$$

- Cubes :

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,\ 1\,000,\ 1\,331, \dots$$

- Puissances cinquièmes :

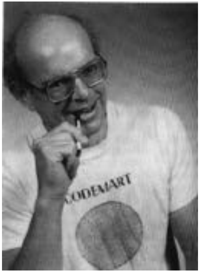
$$1,\ 32,\ 243,\ 1\,024,\ 3\,125,\ 7\,776,\ 16\,807,\ 32\,768, \dots$$

Puissances parfaites

$$1,\ 4,\ 8,\ 9,\ 16,\ 25,\ 27,\ 32,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 125,$$
$$128,\ 144,\ 169,\ 196,\ 216,\ 225,\ 243,\ 256,\ 289,\ 324,\ 343,$$
$$361,\ 400,\ 441,\ 484,\ 512,\ 529,\ 576,\ 625,\ 676,\ 729,\ 784,\ldots$$

Puissances parfaites

$1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196, 216, 225, 243, 256, 289, 324, 343, 361, 400, 441, 484, 512, 529, 576, 625, 676, 729, 784, \ldots$



Encyclopédie de Neil J. A. Sloane
http://oeis.org/A001597

Puissances parfaites proches

- Différence 1 : $(8, 9)$
- Différence 2 : $(25, 27), \ldots$
- Différence 3 : $(1, 4)$, $(125, 128), \ldots$
- Différence 4 : $(4, 8)$, $(32, 36)$, $(121, 125), \ldots$
- Différence 5 : $(4, 9)$, $(27, 32)$,...

Deux conjectures

Subbayya Sivasankaranarayana Pillai (1901-1950)

Eugène Charles Catalan (1814 – 1894)

• Conjecture de Catalan : Dans la suite des puissances parfaites, $8, 9$ est le seul exemple de deux entiers consécutifs.

• Conjecture de Pillai : Dans la suite des puissances parfaites, la différence entre deux termes consécutifs tend vers l'infini.

Conjecture de Pillai :

- Conjecture de Pillai : Dans la suite des puissances parfaites, la différence entre deux termes consécutifs tend vers l'infini.

- Énoncé équivalent : Soit k un entier positif. L'équation

$$x^p - y^q = k,$$

où les inconnues x, y, p et q sont des entiers ≥ 2, n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y, p, q).

Résultats

P. Mihăilescu, 2002.

Catalan avait raison :
l'équation $x^p - y^q = 1$, *où les inconnues* x, y, p *et* q *prennent des valeurs entières* ≥ 2, *n'a qu'une solution* $(x, y, p, q) = (3, 2, 2, 3)$.

Travaux antérieurs sur la conjecture de Catalan

J.W.S. Cassels, Rob Tijdeman

$$x^p < y^q < \exp\exp\exp\exp(730)$$

Michel Langevin

Travaux antérieurs sur la conjecture de Catalan

Maurice Mignotte

Yuri Bilu

Conjecture de Pillai et conjecture abc

Il n'y a pas de valeur de $k \geq 2$ pour laquelle on sache démontrer que l'équation de Pillai $x^p - y^q = k$ n'a qu'un nombre fini de solution.

Conjecture de Pillai et conjecture abc

Il n'y a pas de valeur de $k \geq 2$ pour laquelle on sache démontrer que l'équation de Pillai $x^p - y^q = k$ n'a qu'un nombre fini de solution.

La conjecture de Pillai est une conséquence de la conjecture abc :
si $x^p \neq y^q$, *alors*

$$|x^p - y^q| \geq c(\epsilon) \max\{x^p, y^q\}^{\kappa-\epsilon}$$

avec

$$\kappa = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Un énoncé qui n'est pas conséquence de la conjecture abc

$p = 3$, $q = 2$

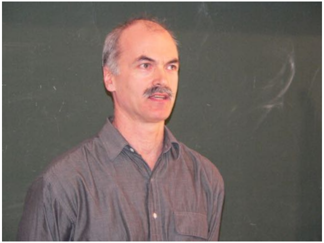
Conjecture de Hall (1971) :

si $x^3 \neq y^2$, *alors*

$$|x^3 - y^2| \geq c \max\{x^3, y^2\}^{1/6}.$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_Hall,_Jr

Conjecture de F. Beukers et C.L. Stewart (2010)



Soient p, q *des entiers positifs sans facteur commun avec* $p > q \geq 2$. *Alors, pour tout* $c > 0$, *il existe une infinité d'entiers positifs* x, y *tels que*

$$0 < |x^p - y^q| < c \max\{x^p, y^q\}^\kappa$$

avec $\kappa = 1 - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$.

Équation de Fermat généralisée $x^p + y^q = z^r$

Considérons l'équation $x^p + y^q = z^r$ en entiers positifs (x, y, z, p, q, r) tels que x, y, z n'ont pas de facteur commun et p, q, r sont ≥ 2.

Équation de Fermat généralisée $x^p + y^q = z^r$

Considérons l'équation $x^p + y^q = z^r$ en entiers positifs (x, y, z, p, q, r) tels que x, y, z n'ont pas de facteur commun et p, q, r sont ≥ 2.

Si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1,$$

alors (p, q, r) est une permutation d'un des triplets

$$(2, 2, k), \quad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5),$$

$$(2, 4, 4), \quad (2, 3, 6), \quad (3, 3, 3)$$

Dans chacun de ces cas on connaît toutes les solutions (x, y, z).

Frits Beukers et Don Zagier

Quand
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1,$$
on connaît 10 solutions (x,y,z,p,q,r) (à symétrie près) à l'équation
$$x^p+y^q=z^r.$$

Équation de Fermat généralisée

Pour

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

l'équation

$$x^p + y^q = z^r$$

possède les 10 solutions suivantes avec x, y, z sans facteur commun :

$$1 + 2^3 = 3^2, \quad 2^5 + 7^2 = 3^4, \quad 7^3 + 13^2 = 2^9, \quad 2^7 + 17^3 = 71^2,$$

$$3^5 + 11^4 = 122^2, \quad 33^8 + 1\,549\,034^2 = 15\,613^3,$$

$$1\,414^3 + 2\,213\,459^2 = 65^7, \quad 9\,262^3 + 15\,312\,283^2 = 113^7,$$

$$17^7 + 76\,271^3 = 21\,063\,928^2, \quad 43^8 + 96\,222^3 = 30\,042\,907^2.$$

Conjecture de Beal, Granville et Tijdeman–Zagier

L'équation $x^p + y^q = z^r$ n'a pas de solution en entiers positifs (x, y, z, p, q, r) avec chacun des 3 nombres p, q et r au moins 3 et x, y, z sans facteur commun.

Sur l'hypothèse de coprimalité de x, y, z

$$1 + 2^3 = 3^2 \quad \Longrightarrow \quad 3^6 + 18^3 = 3^8$$

.

Sur l'hypothèse de coprimalité de x, y, z

$$1 + 2^3 = 3^2 \quad \Longrightarrow \quad 3^6 + 18^3 = 3^8$$

.

Partant de $a^p + b^q = c$, on multiplie par c^{pq} pour obtenir

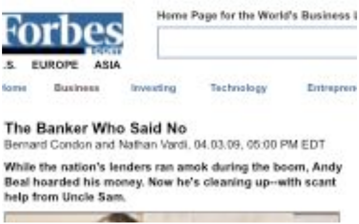
$$(ac^q)^p + (bc^p)^q = c^{pq+1}.$$

http://mathoverflow.net/

Communication de Henri Darmon via Claude Levesque.

Andrew Beal

Trouver une solution avec tous les exposants ≥ 3, ou démontrer qu'il n'y en a pas.



Forbes

Home Page for the World's Business L

.S. EUROPE ASIA

Home Business Investing Technology Entrepren

The Banker Who Said No

Bernard Condon and Nathan Vardi, 04.03.09, 05:00 PM EDT

While the nation's lenders ran amok during the boom, Andy Beal hoarded his money. Now he's cleaning up--with scant help from Uncle Sam.

http://www.forbes.com/2009/04/03/banking-andy-beal-business-wall-street-beal.html

Le prix Beal : $50,000\$$ US

Mauldin, R. D. – *A generalization of Fermat's last theorem : the Beal Conjecture and prize problem.* Notices Amer. Math. Soc. **44** N°11 (1997), 1436–1437.

The prize. Andrew Beal is very generously offering a prize of $5,000 for the solution of this problem. The value of the prize will increase by $5,000 per year up to $50,000 until it is solved. The prize committee consists of Charles Fefferman, Ron Graham, and R. Daniel Mauldin, who will act as the chair of the committee. All proposed solutions and inquiries about the prize should be sent to Mauldin.

Beal's Prize : $1,000,000\$$ US

An AMS-appointed committee will award this prize for either a proof of, or a counterexample to, the Beal Conjecture published in a refereed and respected mathematics publication. The prize money – currently US$1,000,000 – is being held in trust by the AMS until it is awarded. Income from the prize fund is used to support the annual Erdős Memorial Lecture and other activities of the Society.

Beal's Prize : $1,000,000\$$ US

An AMS-appointed committee will award this prize for either a proof of, or a counterexample to, the Beal Conjecture published in a refereed and respected mathematics publication. The prize money – currently US$1,000,000 – is being held in trust by the AMS until it is awarded. Income from the prize fund is used to support the annual Erdős Memorial Lecture and other activities of the Society.

One of Andrew Beal's goals is to inspire young people to think about the equation, think about winning the offered prize, and in the process become more interested in the field of mathematics.

http://www.ams.org/profession/prizes-awards/ams-supported/beal-prize

Henri Darmon, Andrew Granville

Conjecture de "Fermat-Catalan" (H. Darmon et A. Granville), conséquence de la conjecture abc : *l'ensemble des solutions* (x, y, z, p, q, r) *de l'équation* $x^p + y^q = z^r$ *avec* $(1/p) + (1/q) + (1/r) < 1$ *est fini.*

`Indication` $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ implique $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{41}{42}$.

1995 (H. Darmon et A. Granville) : quand (p, q, r) sont fixés, il n'y a qu'un nombre fini de (x, y, z).

Le petit théorème de Fermat

Pour $a > 1$, tout nombre premier p qui ne divise pas a divise $a^{p-1} - 1$.

Donc si p est un nombre premier impair, il divise $2^{p-1} - 1$.

Nombres premiers de Wieferich (1909) : p^2 divise $2^{p-1} - 1$

Les seuls nombres premiers de *Wieferich* inférieurs à $4 \cdot 10^{12}$ sont 1093 et 3511.

Une infinité de nombres premiers ne sont pas de Wieferich si la conjecture abc est vraie

Joseph H. Silverman

J.H. Silverman : si la conjecture abc est vraie, étant donné un entier positif $a > 1$, il y a une infinité de nombres premiers p tels que p^2 ne divise pas $a^{p-1} - 1$.

Entiers consécutifs ayant le même radical

Entiers consécutifs ayant le même radical

Remarquons que

$$75 = 3 \cdot 5^2 \quad \text{et} \quad 1215 = 3^5 \cdot 5$$

donc

$$\mathrm{Rad}(75) = \mathrm{Rad}(1215) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Entiers consécutifs ayant le même radical

Remarquons que

$$75 = 3 \cdot 5^2 \quad \text{et} \quad 1215 = 3^5 \cdot 5$$

donc

$$\mathrm{Rad}(75) = \mathrm{Rad}(1215) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Mais aussi

$$76 = 2^2 \cdot 19 \quad \text{et} \quad 1216 = 2^6 \cdot 19$$

ont le même radical

$$\mathrm{Rad}(76) = \mathrm{Rad}(1216) = 2 \cdot 19 = 38.$$

Entiers consécutifs ayant le même radical

Pour $k \geq 1$, les deux nombres

$$x = 2^k - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$$

et

$$y = (2^k - 1)^2 - 1 = 2^{k+1}(2^{k-1} - 1)$$

ont le même radical

Entiers consécutifs ayant le même radical

Pour $k \geq 1$, les deux nombres

$$x = 2^k - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$$

et

$$y = (2^k - 1)^2 - 1 = 2^{k+1}(2^{k-1} - 1)$$

ont le même radical, mais aussi

$$x + 1 = 2^k - 1 \quad \text{et} \quad y + 1 = (2^k - 1)^2$$

ont le même radical.

Entiers consécutifs ayant le même radical

Existe–il d'autres exemples de $x \neq y$ avec

$$\mathrm{Rad}(x) = \mathrm{Rad}(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rad}(x+1) = \mathrm{Rad}(y+1)?$$

Entiers consécutifs ayant le même radical

Existe–il d'autres exemples de $x \neq y$ avec

$$\mathrm{Rad}(x) = \mathrm{Rad}(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rad}(x+1) = \mathrm{Rad}(y+1)?$$

Peut–on trouver deux entiers distincts x, y tels que

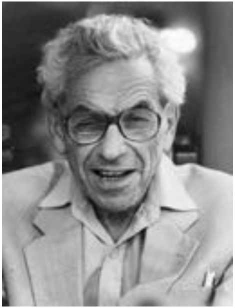
$$\mathrm{Rad}(x) = \mathrm{Rad}(y),$$

$$\mathrm{Rad}(x+1) = \mathrm{Rad}(y+1)$$

et

$$\mathrm{Rad}(x+2) = \mathrm{Rad}(y+2)?$$

Conjecture d'Erdős – Woods



http://school.maths.uwa.edu.au/~woods/

Il existe une constante k telle que, si x et y sont des entiers positifs qui vérifient

$$\mathrm{Rad}(x+i) = \mathrm{Rad}(y+i)$$

pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$, alors $x = y$.

Erdős – Woods conséquence de abc

M. Langevin : La conjecture abc implique qu'il existe une constante absolue k telle que, si x et y sont des entiers positifs tels que

$$\mathrm{Rad}(x+i) = \mathrm{Rad}(y+i)$$

pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$, alors $x = y$.

Conjecture d'Erdős sur $2^n - 1$

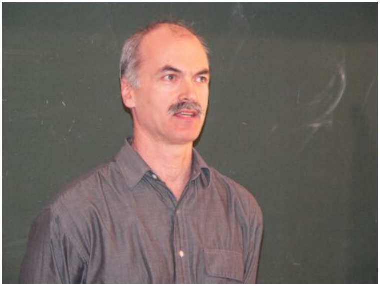
En 1965, P. Erdős a conjecturé que le plus grand facteur premier $P(2^n - 1)$ vérifie

$$\frac{P(2^n - 1)}{n} \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

En 2002, R. Murty et S. Wong ont montré que c'était une conséquence de la conjecture abc.
En 2012, C.L. Stewart a démontré la conjecture d'Erdős (dans le cadre plus général des suites de Lucas et de Lehmer) :

$$P(2^n - 1) > n \exp\bigl(\log n / 104 \log\log n\bigr).$$

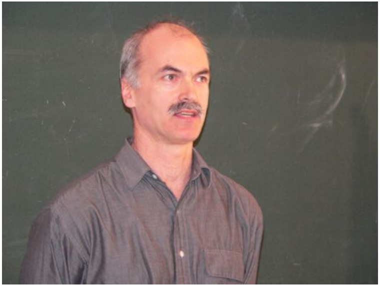
La conjecture abc est–elle optimale ?



Soit $\delta > 0$. En 1986, C.L. Stewart et R. Tijdeman ont montré qu'il existe une infinité de triplets abc pour lesquels

$$c > R \exp\left((4-\delta) \frac{(\log R)^{1/2}}{\log\log R} \right).$$

La conjecture abc est–elle optimale ?



Soit $\delta > 0$. En 1986, C.L. Stewart et R. Tijdeman ont montré qu'il existe une infinité de triplets abc pour lesquels

$$c > R \exp\left((4-\delta)\frac{(\log R)^{1/2}}{\log\log R}\right).$$

Meilleur que $c > R \log R$.

Conjectures par Machiel van Frankenhuijsen, Olivier Robert, Cam Stewart et Gérald Tenenbaum

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\kappa(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout triplet abc vérifiant $R = \mathrm{Rad}(abc) > 8$,

$$c < \kappa(\varepsilon) R \exp\left((4\sqrt{3} + \varepsilon) \left(\frac{\log R}{\log\log R} \right)^{1/2} \right).$$

Conjectures par Machiel van Frankenhuijsen, Olivier Robert, Cam Stewart et Gérald Tenenbaum

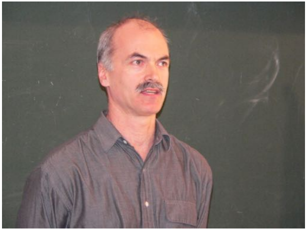
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\kappa(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout triplet abc vérifiant $R = \mathrm{Rad}(abc) > 8$,

$$c < \kappa(\varepsilon) R \exp\left((4\sqrt{3} + \varepsilon) \left(\frac{\log R}{\log \log R} \right)^{1/2} \right).$$

De plus, il existe une infinité de triplets abc tels que

$$c > R \exp\left((4\sqrt{3} - \varepsilon) \left(\frac{\log R}{\log \log R} \right)^{1/2} \right).$$

Machiel van Frankenhuijsen, Olivier Robert, Cam Stewart et Gérald Tenenbaum



Heuristique

Quand a et b sont des entiers positifs premiers entre eux, $R(a+b)$ est indépendant de $R(a)$ et $R(b)$.

O. Robert, C.L. Stewart and G. Tenenbaum, *A refinement of the abc conjecture*, Bull. London Math. Soc. (2014) **46** (6) : 1156-1166.

http://blms.oxfordjournals.org/content/46/6/1156.full.pdf

http://iecl.univ-lorraine.fr/~Gerald.Tenenbaum/PUBLIC/Prepublications_et_publications/abc.pdf

Problème de Waring

Edward Waring
(1736 - 1798)

En 1770, quelques mois avant que J.L. Lagrange ne résolve une conjecture de Bachet (1621) et Fermat (1640) en montrant que tout entier positif est somme d'au plus quatre carrés, E. Waring a écrit :

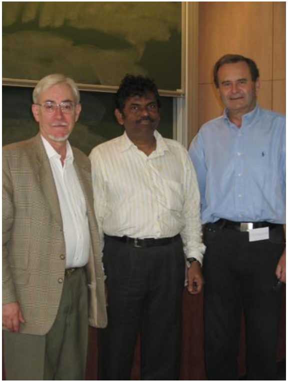
"Omnis integer numerus vel est cubus, vel e duobus, tribus, 4, 5, 6, 7, 8, vel novem cubis compositus, est etiam quadrato-quadratus vel e duobus, tribus, &, usque ad novemdecim compositus, & sic deinceps"

"Tout entier est un cube, ou la somme de deux, trois, . . .neuf cubes ; tout entier est aussi le carré d'un carré, ou la somme de deux, trois, . . .ou au plus dix neuf carrés de carrés ; et ainsi de suite."

$$n = x_1^4 + \cdots + x_{19}^4 : g(4) = 19$$

Tout entier positif est somme d'au plus 19 *bicarrés*

R. Balasubramanian, J-M. Deshouillers, F. Dress (1986).



François Dress, R. Balasubramanian, Jean-Marc Deshouillers

Les fonctions de Waring $g(k)$ et $G(k)$

• La fonction de Waring g est définie de la manière suivante :
Pour tout entier $k \geq 2$, $g(k)$ *est le plus petit des entiers positifs* s *tels que tout entier positif* N *puisse être écrit sous la forme* $x_1^k + \cdots + x_s^k$.

Les fonctions de Waring $g(k)$ et $G(k)$

• La fonction de Waring g est définie de la manière suivante : *Pour tout entier $k \geq 2$, $g(k)$ est le plus petit des entiers positifs s tels que tout entier positif N puisse être écrit sous la forme $x_1^k + \cdots + x_s^k$.*

• La fonction de Waring G est définie ainsi : *Pour tout entier $k \geq 2$, $G(k)$ est le plus petit des entiers positifs s tels que tout entier positif N suffisamment grand puisse être écrit sous la forme $x_1^k + \cdots + x_s^k$.*

$g(k) \geq I(k)$

Pour chaque entier $k \geq 2$, posons $I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$.

$g(k) \geq I(k)$

Pour chaque entier $k \geq 2$, posons $I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$. On vérifie facilement que $g(k) \geq I(k)$. (J. A. Euler, fils de Leonhard Euler).

$g(k) \geq I(k)$

Pour chaque entier $k \geq 2$, posons $I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$. On vérifie facilement que $g(k) \geq I(k)$. (J. A. Euler, fils de Leonhard Euler). Pour cela, écrivons

$$3^k = 2^k q + r \quad \text{avec} \quad 0 < r < 2^k, \quad q = \lfloor (3/2)^k \rfloor$$

et considérons le nombre entier

$$N = 2^k q - 1 = (q-1)2^k + (2^k - 1)1^k.$$

$g(k) \geq I(k)$

Pour chaque entier $k \geq 2$, posons $I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$. On vérifie facilement que $g(k) \geq I(k)$. (J. A. Euler, fils de Leonhard Euler). Pour cela, écrivons

$$3^k = 2^k q + r \quad \text{avec} \quad 0 < r < 2^k, \quad q = \lfloor (3/2)^k \rfloor$$

et considérons le nombre entier

$$N = 2^k q - 1 = (q-1)2^k + (2^k - 1)1^k.$$

Comme $N < 3^k$, aucune écriture de N comme somme de puissances k–ièmes ne peut faire intervenir de terme 3^k.

$g(k) \geq I(k)$

Pour chaque entier $k \geq 2$, posons $I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$. On vérifie facilement que $g(k) \geq I(k)$. (J. A. Euler, fils de Leonhard Euler). Pour cela, écrivons

$$3^k = 2^k q + r \quad \text{avec} \quad 0 < r < 2^k, \quad q = \lfloor (3/2)^k \rfloor$$

et considérons le nombre entier

$$N = 2^k q - 1 = (q-1)2^k + (2^k - 1)1^k.$$

Comme $N < 3^k$, aucune écriture de N comme somme de puissances k–ièmes ne peut faire intervenir de terme 3^k. De plus, comme $N < 2^k q$, il y a au plus $(q-1)$ termes de la forme 2^k, et tous les autres sont de la forme 1^k ;

$g(k) \geq I(k)$

Pour chaque entier $k \geq 2$, posons $I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$. On vérifie facilement que $g(k) \geq I(k)$. (J. A. Euler, fils de Leonhard Euler). Pour cela, écrivons

$$3^k = 2^k q + r \quad \text{avec} \quad 0 < r < 2^k, \quad q = \lfloor (3/2)^k \rfloor$$

et considérons le nombre entier

$$N = 2^k q - 1 = (q-1)2^k + (2^k - 1)1^k.$$

Comme $N < 3^k$, aucune écriture de N comme somme de puissances k–ièmes ne peut faire intervenir de terme 3^k. De plus, comme $N < 2^k q$, il y a au plus $(q-1)$ termes de la forme 2^k, et tous les autres sont de la forme 1^k ; donc le nombre de termes est au moins $(q-1) + (2^k - 1) = I(k)$.

Le théorème de Waring idéal : $g(k) = I(k)$

La conjecture, qui remonte à 1853 (C.A. Bretschneider), est $g(k) = I(k)$ pour tout $k \geq 2$ avec

$$I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2.$$

Le théorème de Waring idéal : $g(k) = I(k)$

La conjecture, qui remonte à 1853 (C.A. Bretschneider), est $g(k) = I(k)$ pour tout $k \geq 2$ avec

$$I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2.$$

On sait que le reste $r = 3^k - 2^k q$ vérifie $r < 2^k$. Il suffirait d'améliorer un tout petit peu cette majoration pour démontrer le résultat attendu. L.E. Dickson et S.S. Pillai ont démontré indépendamment en 1936 que $g(k) = I(k)$, à condition que r vérifie

$$r \leq 2^k - q - 2 \quad \text{avec} \quad q = \lfloor (3/2)^k \rfloor.$$

Le théorème de Waring idéal : $g(k) = I(k)$

La conjecture, qui remonte à 1853 (C.A. Bretschneider), est $g(k) = I(k)$ pour tout $k \geq 2$ avec

$$I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2.$$

On sait que le reste $r = 3^k - 2^k q$ vérifie $r < 2^k$. Il suffirait d'améliorer un tout petit peu cette majoration pour démontrer le résultat attendu. L.E. Dickson et S.S. Pillai ont démontré indépendamment en 1936 que $g(k) = I(k)$, à condition que r vérifie

$$r \leq 2^k - q - 2 \quad \text{avec} \quad q = \lfloor (3/2)^k \rfloor.$$

Cette condition $r \leq 2^k - q - 2$ est satisfaite pour $4 \leq k \leq 471\ 600\ 000$.

La contribution de Mahler

- L'inégalité

$$r \leq 2^k - q - 2$$

est vraie pour tout entier k suffisamment grand.

Kurt Mahler
(1903 - 1988)

Donc le théorème de Waring idéal

$$g(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$$

est vrai pour tout entier k suffisamment grand.

Le problème de Waring et la conjecture abc

S. David : l'inégalité

$$r \leq 2^k - q - 2$$

pour k suffisamment grand résulte de la conjecture abc.

S. Laishram : le théorème de Waring idéal $g(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$ résulte de la conjecture abc explicite.

Conjecture d'Alan Baker (1996)

Soit (a, b, c) un triplet abc est soit $\epsilon > 0$. Alors

$$c \leq \kappa \big(\epsilon^{-\omega} R\big)^{1+\epsilon}$$

où κ est une constante absolue, $R = \mathrm{Rad}(abc)$ et $\omega = \omega(abc)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de abc.

Conjecture d'Alan Baker (1996)

Soit (a, b, c) un triplet abc est soit $\epsilon > 0$. Alors

$$c \leq \kappa\left(\epsilon^{-\omega} R\right)^{1+\epsilon}$$

où κ est une constante absolue, $R = \mathrm{Rad}(abc)$ et $\omega = \omega(abc)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de abc.

Remarque de Andrew Granville : la fonction de $\epsilon > 0$ à droite atteint son minimum essentiellement pour $\epsilon = \omega / \log R$. Ceci conduit à une forme légèrement plus précise de la conjecture :

$$c \leq \kappa R \frac{(\log R)^{\omega}}{\omega!}.$$

Alan Baker : conjecture abc explicite (2004)

Soit (a, b, c) un triplet abc.
Alors

$$c \leq \frac{6}{5} R \frac{(\log R)^{\omega}}{\omega!}$$

où $R = \mathrm{Rad}(abc)$ est le radical de abc et $\omega = \omega(abc)$ le nombre de facteurs premiers distincts de abc.

Shanta Laishram et Tarlok Shorey


L'équation de Nagell–Ljunggren est l'équation

$$y^q = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

en entiers $x > 1$, $y > 1$, $n > 2$, $q > 1$.

En base x, tous les chiffres de la puissance parfaite y^q sont égaux à 1.
Si la conjecture abc explicite de Baker est vraie, les seules solutions sont

$$11^2 = \frac{3^5 - 1}{3 - 1}, \quad 20^2 = \frac{7^4 - 1}{7 - 1}, \quad 7^3 = \frac{18^3 - 1}{18 - 1}.$$

La conjecture abc pour les corps de nombres

Andrea Surroca

Méthodes de transcendance et géométrie diophantienne,
A. Surroca, Thèse Université de Paris 6, 2003.

La conjecture abc pour les corps de nombres (suite)

David Masser

Noam Elkies

http://www.math.harvard.edu/~elkies/

La conjecture abc pour les corps de nombres (suite)

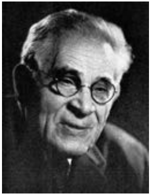
Kálmán Győry
http://www.math.klte.hu/algebra/gyorya.htm

Jerzy Browkin

La conjecture de Mordell (théorème de Faltings)

En utilisant la conjecture abc étendue aux corps de nombres, N. Elkies obtient le théorème de Faltings sur la finitude de l'ensemble des points rationnels sur une courbe algébrique de genre ≥ 2.

L.J. Mordell (1922) G. Faltings (1984) N. Elkies (1991)



Théorème de Thue–Siegel–Roth (Bombieri)

De la conjecture abc pour les corps de nombres, E. Bombieri (1994) déduit un raffinement du théorème de Thue–Siegel–Roth sur l'approximation rationnelle de nombres algébriques :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{2+\varepsilon}};$$

il remplace ε par

$$\kappa(\log q)^{-1/2}(\log\log q)^{-1}$$

où κ ne dépend que du nombre algébrique irrationnel α.

Zéros de Siegel (A. Granville et H.M. Stark)

La conjecture uniforme abc pour les corps de nombres entraîne une minoration pour le nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire, et K. Mahler a démontré que cette minoration implique que la fonction L associée n'a pas de zéro de Siegel.

Autres conséquences de la conjecture abc

• Erdős : Conjecture sur les nombres puissants consécutifs.
• Conjecture de Dressler : entre deux nombres positifs ayant le même radical, il y a toujours un nombre premier.
• Valeurs sans facteurs carrés et sans facteurs puissances de polynômes.
• Conjectures de Lang : minoration de hauteurs, nombre de points entiers sur des courbes elliptiques.
• Bornes pour l'ordre du groupe de Tate–Shafarevich.
• Conjectures de Vojta pour les courbes.
• Conjecture de Greenberg sur les invariants d'Iwasawa λ et μ dans des extensions cyclotomiques.
• Exposants des groupes de classes de corps quadratiques imaginaires.
• Unités fondamentales dans des corps quadratiques et biquadratiques.

abc et corps de fonctions méromorphes

Nevanlinna value distribution theory.

Travaux récents de Hu, Pei–Chu et Yang, Chung-Chun.

La conjecture de la hauteur de Vojta implique abc

Paul Vojta

La conjecture de Vojta sur les points algébriques de degré borné sur une variété algébrique sur un corps global de caractéristique nulle implique la conjecture abc.

Le théorème ABC pour les polynômes

Soit K un corps algébriquement clos. Le *radical* ou *partie sans facteur carré* d'un polynôme unitaire

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{a_i} \in K[X]$$

où les α_i sont deux–à–deux distincts est

$$\mathrm{Rad}(P)(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \in K[X].$$

Le théorème ABC pour les polynômes

Théorème ABC
(A. Hurwitz, W.W. Stothers,
R. Mason).
Soient A, B, C trois polynômes sans facteur commun dans $K[X]$ avec $A + B = C$ et soit $R = \mathrm{Rad}(ABC)$. Alors

$$\max\{\deg(A), \deg(B), \deg(C)\} < \deg(R).$$

Adolf Hurwitz (1859–1919)

Cet énoncé peut être comparé à la conjecture abc, le degré remplaçant le logarithme.

Le radical d'un polynôme vu comme un pgcd

Les zéros communs de

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{a_i} \in K[X]$$

et de sa dérivée P' sont les α_i ayant $a_i \geq 2$. Ce sont des zéros de P' de multiplicité $a_i - 1$. Donc

$$\mathrm{Rad}(P) = \frac{P}{\mathrm{pgcd}(P, P')}.$$

Démonstration du théorème ABC pour les polynômes

Supposons $A + B = C$ avec A, B, C sans facteur commun.

Démonstration du théorème ABC pour les polynômes

Supposons $A + B = C$ avec A, B, C sans facteur commun.

Notons que l'on a

$$\mathrm{Rad}(ABC) = \mathrm{Rad}(A)\mathrm{Rad}(B)\mathrm{Rad}(C).$$

Démonstration du théorème ABC pour les polynômes

Supposons $A + B = C$ avec A, B, C sans facteur commun.

Notons que l'on a

$$\mathrm{Rad}(ABC) = \mathrm{Rad}(A)\mathrm{Rad}(B)\mathrm{Rad}(C).$$

On peut supposer que A, B, C sont unitaires, et, disons, $\deg(A) \leq \deg(B) \leq \deg(C)$.

Démonstration du théorème ABC pour les polynômes

Supposons $A + B = C$ avec A, B, C sans facteur commun.

Notons que l'on a

$$\mathrm{Rad}(ABC) = \mathrm{Rad}(A)\mathrm{Rad}(B)\mathrm{Rad}(C).$$

On peut supposer que A, B, C sont unitaires, et, disons, $\deg(A) \leq \deg(B) \leq \deg(C)$.

Écrivons

$$A + B = C,$$

Démonstration du théorème ABC pour les polynômes

Supposons $A + B = C$ avec A, B, C sans facteur commun.

Notons que l'on a

$$\mathrm{Rad}(ABC) = \mathrm{Rad}(A)\mathrm{Rad}(B)\mathrm{Rad}(C).$$

On peut supposer que A, B, C sont unitaires, et, disons, $\deg(A) \leq \deg(B) \leq \deg(C)$.

Écrivons

$$A + B = C, \qquad A' + B' = C',$$

Démonstration du théorème ABC pour les polynômes

Supposons $A + B = C$ avec A, B, C sans facteur commun.

Notons que l'on a

$$\mathrm{Rad}(ABC) = \mathrm{Rad}(A)\mathrm{Rad}(B)\mathrm{Rad}(C).$$

On peut supposer que A, B, C sont unitaires, et, disons, $\deg(A) \leq \deg(B) \leq \deg(C)$.

Écrivons

$$A + B = C, \qquad A' + B' = C',$$

et

$$AB' - A'B = AC' - A'C.$$

Démonstration du théorème ABC pour les polynômes

Rappelons que $\mathrm{pgcd}(A, B, C) = 1$. Comme $\mathrm{pgcd}(C, C')$ divise $AC' - A'C = AB' - A'B$, il divise aussi

$$\frac{AB' - A'B}{\mathrm{pgcd}(A, A')\mathrm{pgcd}(B'B')}$$

qui est un polynôme de degré

$$< \deg\bigl(\mathrm{Rad}(A)\bigr) + \deg\bigl(\mathrm{Rad}(B)\bigr) = \deg\bigl(\mathrm{Rad}(AB)\bigr).$$

Donc

$$\deg\bigl(\mathrm{pgcd}(C, C')\bigr) < \deg\bigl(\mathrm{Rad}(AB)\bigr)$$

et

$$\deg(C) < \deg\bigl(\mathrm{Rad}(C)\bigr) + \deg\bigl(\mathrm{Rad}(AB)\bigr) = \deg\bigl(\mathrm{Rad}(ABC)\bigr).$$

Shinichi Mochizuki

INTER-UNIVERSAL
TEICHMÜLLER THEORY
IV :
LOG-VOLUME
COMPUTATIONS AND
SET-THEORETIC
FOUNDATIONS
by
Shinichi Mochizuki

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/∼motizuki/

Articles de Shinichi Mochizuki

- General Arithmetic Geometry
- Intrinsic Hodge Theory
- p–adic Teichmüller Theory
- Anabelian Geometry, the Geometry of Categories
- The Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves
- Inter-universal Teichmüller Theory

Shinichi Mochizuki

[1] Inter-universal Teichmüller Theory I : Construction of Hodge Theaters. PDF

[2] Inter-universal Teichmüller Theory II : Hodge-Arakelov-theoretic Evaluation. PDF

[3] Inter-universal Teichmüller Theory III : Canonical Splittings of the Log-theta-lattice. PDF

[4] Inter-universal Teichmüller Theory IV : Log-volume Computations and Set-theoretic Foundations. PDF

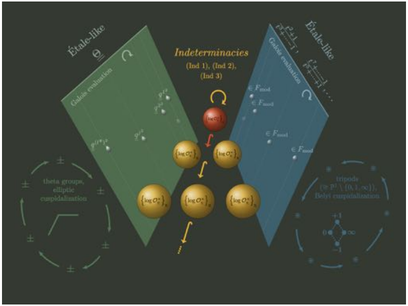
https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_abc

En août 2012, le mathématicien japonais Shinichi Mochizuki a publié un article sur sa page personnelle où il annonce avoir démontré cette conjecture.

https://en.wikipedia.org/wiki/Abc_conjecture

In August 2012, Shinichi Mochizuki released a series of four preprints containing a serious claim to a proof of the abc Conjecture.

When an error in one of the articles was pointed out by Vesselin Dimitrov and Akshay Venkatesh in October 2012, Mochizuki posted a comment on his website acknowledging the mistake, stating that it would not affect the result, and promising a corrected version in the near future. He proceeded to post a series of corrected papers of which the latest dated March 2013.



Workshop on IUT Theory of Shinichi Mochizuki, December 7-11 2015

CMI Workshop supported by Clay Math Institute and Symmetries and Correspondences

Organisers : Ivan Fesenko, Minhyong Kim, Kobi Kremnitzer
Finding the speakers and the program of the workshop : Ivan Fesenko

CMI Workshop supported by Clay Math Institute and Symmetries and Correspondences

The work (currently being refereed) of SHINICHI MOCHIZUKI on inter-universal Teichmüller theory (also known as arithmetic deformation theory) and its application to famous conjectures in diophantine geometry became publicly available in August 2012. This theory, developed over 20 years, introduces a vast collection of novel ideas, methods and objects. Aspects of the theory extend arithmetic geometry to a non-scheme-theoretic setting and, more generally, have the potential to open new fundamental areas of mathematics.

The workshop aims to present and analyse key principles, concepts, objects and proofs of the theory of Mochizuki and study its relations with existing theories in different areas, to help to increase the number of experts in the theory of Mochizuki and stimulate its further applications.

Speakers

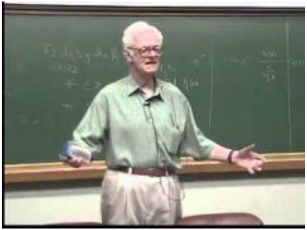
Shinichi Mochizuki will answer questions during skype sessions of the workshop. He also responds directly to emailed questions.

Invited speakers : Oren Ben-Bassat, Weronika Czerniawska, Yuichiro Hoshi, Ariyan Javanpeykar, Kiran Kedlaya, Robert Kucharczyk, Ulf Kühn, Lars Kuehne, Emmanuel Lepage, Chung Pang Mok, Jakob Stix, Tamás Szamuely, Fucheng Tan, Go Yamashita, Shou-Wu Zhang.

Participants

Participants:
Julio Andrade (Univ. Oxford), Federico Bambozzi (Univ. Regensburg), Alexander Beilinson (Univ. Chicago),
Oren Ben-Bassat (Univ. Haifa), Brian Birch (Univ. Oxford), Francis Brown (Univ. Oxford),
Martin Bridson (Univ. Oxford), Olivia Caramello (Univ. Paris 7), Brian Conrad (Stanford Univ.),
Weronika Czerniawska (Univ. Nottingham), Ishai Dan-Cohen (Univ. Duisburg-Essen),
Jamshid Derakhshan (Univ. Oxford), Taylor Dupuy (Univ. California Los Angeles), Gerd Faltings (MPIM, Bonn),
Ivan Fesenko (Univ. Nottingham), Gerhard Frey (Univ. Duisburg-Essen), Adam Gal (Univ. Oxford),
Lena Gal (Univ. Oxford), Dorian Goldfeld (Columbia Univ.), Nigel Hitchin (Univ. Oxford),
Yuichiro Hoshi (RIMS, Kyoto Univ.), Alexander Ivanov (Techn. Univ. München), Artur Jackson (Purdue Univ.),
Ariyan Javanpeykar (Univ. Mainz), Kiran Kedlaya (Univ. California San Diego), Minhyong Kim (Univ. Oxford),
Kobi Kremnitzer (Univ. Oxford), Robert Kucharczyk (ETH, Zurich), Ulf Kühn (Univ. Hamburg),
Lars Kuehne (MPIM, Bonn), Laurent Lafforgue (IHES, Bures-sur-Yvette), Emmanuel Lepage (Univ. Paris 7),
Junghwan Lim (Univ. Oxford), Angus Macintyre (Univ. Oxford), Nils Matthes (Univ. Hamburg),
Chung Pang Mok (Morningside Center Mathematics Beijing and Purdue Univ.), Alexander Cruz Morales (MPIM, Bonn),
Sergey Oblezin (Univ. Nottingham), Alexander G. Oldenziel (Utrecht Univ.), Thomas Oliver (Univ. Bristol),
Florian Pop (Univ. Pennsylvania at Philadelphia), Damian Rossler (Univ. Oxford),
Thomas Scanlon (Univ. California Berkeley), Francisco Simkievich (Univ. Oxford), Jakob Stix (Univ. Frankfurt),
Tamás Szamuely (Rényi Inst. Math., Budapest), Fucheng Tan (Shanghai Cent. Math. Sc. & Shanghai Jiao Tong Univ.),
Dinesh Thakur (Rochester Univ.), Ulrike Tillmann (Univ. Oxford), Wester van Urk (Univ. Nottingham),
Felipe Voloch (Univ. Texas Austin), Matthew Waller (Univ. Nottingham), Andrew Wiles (Univ. Oxford),
Bora Yalkinoglu (Univ. Strasbourg), Go Yamashita (RIMS, Kyoto Univ.), Fernando Garcia Yamauti (Univ. Sao Paulo),
Shou-Wu Zhang (Princeton Univ.), Boris Zilber (Univ. Oxford), Lorenzo Lane (Univ. Edinburgh)

Paulo Ribenboim



La conjecture abc est aussi difficile que la conjecture xyz.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Paulo_Ribenboim

AIMS Sénégal

M'Bour African Institute of Mathematical Sciences

Lundi 28 mars 2016

Conjecture abc : quelques conséquences

par

Michel Waldschmidt

http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/