Les contributions de Serge Lang à la théorie des nombres transcendants [1]

Michel Waldschmidt[2]

Présenter l'ensemble des travaux de Serge Lang, même sans parler de ses fameuses controverses, nécessiterait plusieurs auteurs pour couvrir tous les domaines concernés. Dans cette présentation je vais limiter mon propos à un aspect bien particulier de son œuvre, qui est la partie concernant la théorie des nombres transcendants. Ses premières contributions remontent au début des années 1960. Depuis près d'un demi siècle le sujet a connu un développement incontestable ; S. Lang n'est certainement pas le seul à l'origine de ce renouveau du sujet, mais il y a joué un rôle de premier plan de diverses manières, comme nous allons le voir.

1. Présentation des travaux de Serge Lang

Quand S. Lang a commencé à s'intéresser à la théorie des nombres transcendants, dans les années 1960, ce sujet n'était pas encore à la mode. Il ne le deviendra que quelques années plus tard, à la suite des travaux de S. Lang certainement, mais aussi de ceux d'autres mathématiciens comme A. Baker. En dehors d'un petit nombre de spécialistes, peu de gens s'intéressaient à ces questions souvent jugées marginales et abominablement techniques. Les idées sous-jacentes n'étaient pas dégagées, les preuves restaient entourées d'un voile mystérieux : pourquoi arrivait-on à démontrer certains énoncés et pas d'autres ?

Armé d'une formidable intuition et d'un sens aigu de la clarté, S. Lang intervient alors et explique de façon limpide la stratégie des démonstrations. Il les simplifie (parfois excessivement), il simplifie aussi les énoncés, en même temps il introduit dans le sujet la théorie des groupes algébriques commutatifs. Il y avait déjà, bien sûr, des résultats sur les courbes elliptiques, et même sur les variétés abéliennes (dus à C.L. Siegel [51] et Th. Schneider [43, 44, 45] notamment), mais c'est vraiment S. Lang qui a permis le développement de la transcendance sur les groupes algébriques, qui jouent maintenant un rôle tellement important.

La source de ce travail, comme le précise S. Lang dans [14], est une conjecture de P. Cartier. S. Lang m'a raconté qu'au début des années 1960, lors d'une rencontre des membres de Bourbaki à laquelle il avait été invité (il n'en restera pas longtemps membre), P. Cartier lui avait posé deux questions. La première portait sur le théorème de Hermite-Lindemann qui concerne l'exponentielle usuelle e^z, ou si on préfère — et P. Cartier préfère — l'application exponentielle du groupe multiplicatif. Ce théorème affirme que 0 est le seul point algébrique en lequel la fonction

[1] Cette rédaction est celle d'un exposé de colloquium donné à l'Université de Caen le 15 novembre 2005. L'auteur remercie ses collègues caennais, et particulièrement Francesco Amoroso, pour leur invitation et leur accueil.

[2] Université P. et M. Curie (Paris VI), Institut de Mathématiques de Jussieu

exponentielle prenne une valeur algébrique. Est-il possible de l'étendre à l'application exponentielle d'une variété en groupe ? C'est cette question que S. Lang résout (théorème 1, voir [14]), ouvrant ainsi la voie à des développements qui ne sont pas encore épuisés. L'autre question de P. Cartier à S. Lang est un mystère : S. Lang m'en a parlé en me disant qu'elle concernait le théorème de C.L. Siegel [50, 52] sur la transcendance des valeurs de fonctions de Bessel (théorème 2), mais qu'il ne se souvenait plus de la suggestion que faisait P. Cartier pour le généraliser - qu'il ait oublié était exceptionnel chez Lang, il avait une mémoire impressionnante. Malheureusement P. Cartier ne s'en souvient plus non plus !

Un exemple spectaculaire de simplification apportée par S. Lang à la théorie des nombres transcendants est le théorème appelé *critère de Schneider-Lang* (théorème 3). Le premier énoncé dans cette direction [46] a été publié par Th. Schneider en 1949. Il porte sur les valeurs algébriques de fonctions algébriquement indépendantes : sous des hypothèses techniques convenables, ces valeurs algébriques ne peuvent pas être trop nombreuses. L'énoncé de Schneider est puissant, il contient un grand nombre de résultats antérieurs. Son principal défaut est la complication de l'énoncé : il prend une page complète des Mathematische Annalen [46]. Un énoncé légèrement simplifié de ce résultat est donné par Th. Schneider dans son livre [47], mais ce deuxième énoncé reste encore assez technique.

S. Lang a trouvé des hypothèses élégantes qui donnent un énoncé simple, profond, qui a de multiples corollaires. Il l'a d'ailleurs publié non seulement dans un de ses premiers articles [16] et dans son livre [19] sur les nombres transcendants (Chap. III, § 1), mais aussi en appendice de son livre Algebra [35].

Un des corollaires que l'on peut déduire de l'énoncé initial de Th. Schneider en 1949 est le *théorème des six exponentielles* (théorème 4 ; voir [20]). La simplification qu'a apportée S. Lang a un coût : le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles. C'est un petit paradoxe, étant donné que Th. Schneider n'a pas formulé explicitement le théorème des six exponentielles ; qu'il en ait connu l'existence est plausible, car le premier des 8 problèmes qu'il pose dans son livre [47] sur les nombres transcendants (conjecture 6) est équivalent à la conjecture des quatre exponentielles (conjecture 5). Le théorème des six exponentielles était aussi apparemment connu de C.L. Siegel : il en a communiqué un cas particulier à L. Alaoglu et P. Erdös [2] qui auraient eu besoin de la conjecture des quatre exponentielles pour préciser un argument de S. Ramanujan. A. Selberg m'a dit qu'il avait cherché à résoudre le problème des quatre exponentielles dans les années 1940, qu'il savait alors démontrer le théorème des six exponentielles, mais qu'il estimait que cela ne méritait pas d'être publié. S. Lang a été le premier à publier l'énoncé et la démonstration de ce théorème, suivi peu après par K. Ramachandra [42] (notons que K. Ramachandra remercie C.L. Siegel dans son article). Aussi bien S. Lang que K. Ramachandra ont formulé la conjecture des quatre exponentielles, qui reste un des défis majeurs de la théorie.

La démonstration par S. Lang ([19], Chap. II, § 1 et [20] du théorème des six exponentielles reste une des plus simples de la théorie des nombres transcendants. Elle permet d'expliquer clairement la stratégie, de voir quels sont les arguments qui permettent d'aboutir à la conclusion. Cette simplicité peut expliquer, au moins en partie, que les personnes qui connaissaient le résultat avant S. Lang et K. Ramachandra n'aient pas daigné publié leur preuve – ils n'avaient sans doute pas anticipé les développements ultérieurs, dont les plus récents se trouvent dans les travaux de D. Roy [54].

Une version ultramétrique du théorème des six exponentielles a été établie par J-P. Serre (avec une extension en plusieurs variables), qui l'applique à une question de représentation ℓ-adique de courbes elliptiques [48, 49].

Le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles, mais une variante, ne faisant pas intervenir d'équations différentielles, le contient. Cela a fait l'objet aussi bien de travaux de S. Lang [18] que de K. Ramachandra [42].

Il existe une version du critère de Schneider-Lang en plusieurs variables, énoncée encore une fois par S. Lang [16], reposant sur la démonstration par Th. Schneider en 1948 de la transcendance des valeurs de la fonction Beta aux points rationnels [45]. Ce critère de Schneider-Lang en plusieurs variables concerne les produits cartésiens (théorème 7 ; voir [16] et [19] Chap. IV). S. Lang dit dans [19] (Chap. IV, historical note) que M. Nagata a suggéré un énoncé plus fort faisant intervenir des hypersurfaces algébriques. Formuler une telle conjecture aurait été difficilement envisageable avec l'énoncé antérieur de Th. Schneider. Cette conjecture de Nagata a été résolue par E. Bombieri en 1970 (théorème 8). La démonstration de E. Bombieri [5] utilise la méthode des estimations L^2 de Hörmander. Elle utilise aussi une extension en plusieurs variables du lemme de Schwarz, obtenue dans un travail en commun antérieur de E. Bombieri et S. Lang [6], où la masse moyenne des zéros de Lelong est l'outil essentiel.

Un second paradoxe est que le théorème de E. Bombieri ne contient pas, dans l'état actuel des connaissances des spécialistes, de résultat concret de transcendance nouveau par rapport au critère sur les produits cartésiens, alors que les outils intervenant dans sa démonstration sont pourtant beaucoup plus sophistiqués. Une des conséquences inattendues du critère en plusieurs variables a été trouvée en 1980 par D. Bertrand et D.W. Masser [4] : ils ont montré que ce critère avec les produits cartésiens contient le théorème de Baker (théorème 9) sur l'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques, puis ont étendu ce théorème de Baker aux logarithmes elliptiques (théorème 10). Seul le cas d'une courbe elliptique à multiplication complexe avait été obtenu par D.W. Masser [37], grâce à une extension de la méthode de Baker. La généralisation du théorème de Baker aux groupes algébriques (théorème 11), après avoir fait l'objet de nombreux travaux, notamment par D.W. Masser, a finalement été obtenue par G. Wüstholz [55]. Notons que D.W. Masser d'une part [38, 39, 40], S. Lang [23], J. Coates et S. Lang [8] d'autre part, ont contribué au développement de la théorie dans le cas particulier des variétés abéliennes de type CM.

Une autre conjecture, qui est née dans les même conditions que celle de Nagata, mais qui en revanche n'est toujours pas résolue, est celle de Schanuel (conjecture 12). M. Nagata comme S. Schanuel assistaient au cours que donnait à Yale S. Lang sur les nombres transcendants, c'est alors qu'ils ont formulé ces suggestions. Ont-ils deviné l'importance de la contribution qu'ils apportaient à la théorie en proposant ces énoncés ? En tout cas ils ne les ont pas publiées eux-même, laissant à S. Lang le soin de le faire [19], et de donner à ce que devrait être la théorie un éclairage nouveau. La conjecture de Schanuel contient la conjecture selon laquelle *des logarithmes de nombres algébriques linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *sont algébriquement indépendants*. Les conjectures de Y. André [3] vont plus loin : elles contiennent aussi la conjecture de Grothendieck ([19] Chap. IV, historical note).

J'ai affirmé que les simplifications apportées par S. Lang étaient parfois excessives. En voici un exemple (voir en haut de la page 49 du livre de S. Lang [19] sur les nombres transcendants). On définit la hauteur (*usuelle* ou *naïve*) $H(P)$ d'un polynôme à coefficients entiers $P \in \mathbb{Z}[X]$ comme étant le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Il est tentant de dire qu'une fraction rationnelle $R \in \mathbb{Q}(X)$ a une hauteur $\leq H$ si on peut écrire R comme quotient $R = P/Q$ de deux polynômes P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$ qui sont tous deux de hauteur $\leq H$. Mais une telle définition n'est pas licite : le polynôme X^2-2X+1 est de hauteur 2, pourtant il est quotient de deux polynômes de hauteur 1 :

$$(X-1)^2 = \frac{X^3 - X^2 - X + 1}{X+1}.$$

De nos jours on utilise plutôt la *mesure de Mahler* que la hauteur usuelle (voir par exemple [10]), ce qui permet d'éviter cet écueil.

S. Lang utilise le même type de considérations pour définir l'ordre d'une fonction méromorphe : il a le droit de le faire dans ce cas, car si une fonction entière f peut s'écrire comme quotient de deux fonctions entières d'ordre $\leq \varrho$, alors f elle-même est d'ordre $\leq \varrho$.

L'intuition de S. Lang était spécialement bonne. Parmi les nombreuses conjectures qu'il a émises il faut bien chercher pour en trouver qui se soient révélées fausses. Voici un exemple, concernant des questions d'indépendance algébrique, où son optimisme a été excessif. Un critère de Gel'fond (théorème 13) affirme qu'il n'y a pas de suite de polynômes en une variable à coefficients entiers, qui, en un point donné $\theta \in \mathbb{C}$, prennent des valeurs suffisamment petites. Cela permet d'établir des énoncés d'indépendance algébrique de deux nombres (souvent parmi une collection de nombres). Par exemple A.O. Gel'fond a utilisé cet argument pour montrer que si α est un nombre algébrique différent de 0 et 1 et si β est un nombre algébrique de degré $d \geq 3$, alors parmi les nombres

$$\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}},$$

il y en a au moins 2 qui sont algébriquement indépendants. C'est un des exemples de théorèmes portant le qualificatif *petit degré de transcendance*. Pour obtenir de *grands degrés de transcendance*, il suffirait d'étendre le critère de Gel'fond en plusieurs variables. S. Lang a proposé un énoncé dans cette direction. Mais, comme le lui a fait remarquer E. Bombieri [21], un exemple trouvé antérieurement par A.Ya. Khintchine [12] et cité dans le livre de J.W.S. Cassels [7] - cf. théorème 14) montre qu'en dimension supérieure il faut introduire une hypothèse supplémentaire. Après les travaux de W.D. Brownawell et G.V. Čudnovs'kiĭ, la question a été résolue par P. Philippon [41] (voir le théorème 15) ; il convient de citer aussi les contributions de Yu.V. Nesterenko et G. Diaz notamment (voir par exemple [10]).

S. Lang se plaisait à imaginer quelle devait être la théorie, sans se limiter, ni aux résultats connus, ni aux méthodes existantes, même si publier des résultats numériques ne le rebutait pas [1, 36]. En théorie des approximations diophantiennes comme en transcendance, il y a un gouffre entre ce qui est connu et ce qui est attendu. Partir de l'état de ses connaissances et des méthodes disponibles pour essayer d'anticiper n'est pas forcément ce qui éclaire le mieux le sujet. S. Lang a su s'affranchir de ces limitations, ce qui lui a permis de prédire avec assurance ce que devrait être la situation. C'est spécialement évident en géométrie diophantienne : nous ne traitons pas cet aspect de son œuvre (nous renvoyons au texte de Marc Hindry dans ce numéro de La Gazette), malgré ses liens étroits avec les questions d'approximation diophantienne (il n'y a pas vraiment de frontière entre les deux sujets). Prenons l'exemple de sa conjecture sur les mesures d'indépendance linéaire des logarithmes de points algébriques sur une courbe elliptique. Elle a fait l'objet de travaux de N. Hirata, puis M. Ably, avant d'être complètement résolue (même dans le cadre des groupes algébriques) par S. David et N. Hirata d'une part [9], É. Gaudron [11] d'autre part (théorème 19). Cette question était initialement motivée par un algorithme original de S. Lang [15] pour trouver les points entiers sur une courbe elliptique.

L'analogie entre les corps de fonctions et les corps de nombres est l'une de celles qui l'ont guidé. Une autre est l'analogie entre la théorie de Nevanlinna et les fonctions complexes d'une part, la théorie des nombres d'autre part (P. Vojta a beaucoup contribué à développer ce point de vue, et l'influence qu'a eue S. Lang sur ses travaux est indéniable).

S. Lang a contribué à de nombreuses conjectures : celle de Bateman-Horn [30] sur les nombres premiers et les polynômes en plusieurs variables, celle de Rohrlich [26] (voir aussi [24] p. 66) sur les relations entre les valeurs de la fonction Γ d'Euler, celle de Grothendieck [3]...

Les conjectures de l'introduction des chapitres X et XI de [25] ont été formulées avant la conjecture *abc* ; les versions raffinées des conjectures de Pillai et Hall (conjectures 16 et 17) qu'elles impliquent peuvent aussi être déduites de la conjecture *abc* (conjecture 18, voir [29] Chap. II § 1), ce qui est un indice de la cohérence de la présentation qu'il suggère.

S. Lang a écrit plusieurs articles de synthèse, le premier dès 1960 [13], puis en 1965 [17], en 1971 [21], en 1974 [22], en 1983 [27], en 1990 [28]. On peut ajouter à cette liste le volume Number Theory III [29] qu'il a écrit en 1992 pour l'encyclopédie des sciences mathématiques de Springer-Verlag.

Ces textes étaient l'occasion pour lui de proposer des conjectures qui fournissaient un éclairage original du sujet. S. Lang est probablement un des mathématiciens qui a le mieux su deviner ce que devrait être la théorie — les pistes qu'il a proposées ouvrent des perspectives qui ne sont pas prêtes d'être épuisées.

2. Théorèmes et conjectures

Dans cette section nous énonçons, en donnant des références, les théorèmes et conjectures auxquels il a été fait allusion dans la première partie.

Voici pour commencer la généralisation par S. Lang du théorème de Hermite-Lindemann aux groupes algébriques [14], [19] Chap. III, § 4, Th. 2.

Théorème 1 (Lang)**.** *Soit G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Notons $T_G(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie à l'origine du* *groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ (T_G est aussi l'espace tangent de G à l'origine), muni de sa $\overline{\mathbb{Q}}$-structure $T_G(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\exp_G : T_G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$ l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$. Soit $\alpha \in T_G(\overline{\mathbb{Q}})$ tel que $\exp(\alpha)$ soit dans $G(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors l'application $t \to G(t\alpha)$ de $\mathbb{C}$ dans $G(\mathbb{C})$ est algébrique.*

Le théorème suivant, dû à C.L. Siegel [50, 52] concerne les valeurs des fonctions

$$K_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

qui sont reliées aux fonctions de Bessel par

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} K_\lambda(x).$$

Théorème 2 (Siegel)**.** *Soit α un nombre algébrique non nul. Soit λ un nombre rationnel différent de $\pm 1/2, -1, \pm -3/2, -2, \dots$ Alors les deux nombres $K_\lambda(\alpha)$ et $K'_\lambda(\alpha)$ sont algébriquement indépendants.*

Voici un énoncé légèrement simplifié du critère de Schneider-Lang [19] Chap. III, § 2, [35] appendix.

Théorème 3 (Critère de Schneider-Lang)**.** *Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$. On suppose que f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes et d'ordre fini. Soit K un corps de nombres. On suppose que chacune des dérivées $(d/dz)f_i$ $(1 \leq i \leq m)$ appartient à l'algèbre $K[f_1, \dots, f_m]$. Alors l'ensemble S des éléments w de $\mathbb{C}$ où chacune des fonctions f_i est définie et prend une valeur $f_i(w)$ dans K est fini.*

Le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles [20, 42], mais il existe des variantes du théorème 3 (voir notamment [18, 42]) qui n'imposent pas que les fonctions considérées satisfassent des équation différentielles à coefficients algébriques.

Théorème 4 (Théorème des six exponentielles)**.** *Soient x_1, x_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et soient y_1, y_2, y_3 trois nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des six nombres*

$$e^{x_1y_1},\ e^{x_1y_2},\ e^{x_1y_3},\ e^{x_2y_1},\ e^{x_2y_2},\ e^{x_2y_3}$$

est transcendant.

La conjecture des quatre exponentielles a été proposée par S. Lang [19], Chap. II, § 1, [20], puis K. Ramachandra [42].

Conjecture 5 (Conjecture des quatre exponentielles)**.** *Soient x_1, x_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et soient y_1, y_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des quatre nombres*

$$e^{x_1y_1},\ e^{x_1y_2},\ e^{x_2y_1},\ e^{x_2y_2}$$

est transcendant.

Le premier des 8 problèmes du livre de Th. Schneider sur les nombres transcendants [47] est équivalent à la conjecture 5.

Conjecture 6 (Premier problème de Schneider). *On considère quatre logarithmes de nombres algébriques* $\log\alpha_1$, $\log\alpha_2$, $\log\beta_1$, $\log\beta_2$. *On suppose d'une part que* $\log\alpha_1$ *et* $\log\alpha_2$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants et d'autre part que* $\log\alpha_1$ *et* $\log\beta_1$ *sont aussi* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Alors*

$$(\log\alpha_1)(\log\beta_2) \neq (\log\alpha_2)(\log\beta_1).$$

Le critère de Schneider-Lang a été étendu en plusieurs variables par S. Lang [16], [19], Chap. IV, grâce à un développement des arguments que Th. Schneider [45] avaient utilisés pour démontrer la transcendance de $B(a,b)$ quand a et b sont deux nombres rationnels.

Théorème 7 (Critère de Schneider-Lang pour les produits cartésiens). *Soient* $f_1,\dots,f_m$ *des fonctions méromorphes dans* $\mathbb{C}^n$ *et* K *un corps de nombres. On suppose que les* $n+1$ *fonctions* $f_1,\dots,f_{n+1}$ *sont algébriquement indépendantes d'ordre fini et que chacune des dérivées partielles* $(\partial/\partial z_j)f_i$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ *appartient à l'algèbre* $K[f_1,\dots,f_m]$. *Soit* $e_1,\dots,e_n$ *une base de* $\mathbb{C}^n$. *Alors l'ensemble* S *des éléments* w *de* $\mathbb{C}$ *où chacune des fonctions* f_i *est définie et prend une valeur* $f_i(w)$ *dans* K *ne contient pas de produit cartésien*

$$\bigl\{s_1e_1+\cdots+s_ne_n\ ;\ (s_1,\dots,s_n)\in S_1\times\cdots\times S_n\bigr\},$$

où chaque S_i *est infini.*

La conjecture de Nagata [19], Chap. IV, historical note, a été résolue par E. Bombieri [5].

Théorème 8 (Bombieri). *Soient* $f_1,\dots,f_m$ *des fonctions méromorphes dans* $\mathbb{C}^n$ *et* K *un corps de nombres. On suppose que* $f_1,\dots,f_{n+1}$ *sont algébriquement indépendantes d'ordre fini et que chacune des dérivées partielles* $(\partial/\partial z_j)f_i$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ *appartient à l'algèbre* $K[f_1,\dots,f_m]$. *Alors l'ensemble* S *des éléments* w *de* $\mathbb{C}$ *où chacune des fonctions* f_i *est définie et prend une valeur* $f_i(w)$ *dans* K *est contenu dans une hypersurface algébrique.*

Une des sources importantes du renouveau de la théorie des nombres transcendants à partir des années 1970 est le développement de la méthode de Baker (voir par exemple [10]).

Théorème 9 (Baker). *Soient* $\log\alpha_1,\dots,\log\alpha_n$ *des logarithmes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres* $1,\log\alpha_1,\dots,\log\alpha_n$ *sont* $\overline{\mathbb{Q}}$*-linéairement indépendants.*

Le théorème de Baker a été déduit du critère de Schneider-Lang pour les produits cartésiens (théorème 7) par D. Bertrand et D.W. Masser [4], qui obtiennent par le même argument l'analogue elliptique.

Théorème 10 (Bertrand-Masser). *Soit* E *une courbe elliptique définie sur le corps* $\overline{\mathbb{Q}}$ *des nombres algébriques, soient* $u_1,\dots,u_n$ *des éléments de* $T_E(\overline{\mathbb{Q}})$, *linéairement indépendants sur le corps des endomorphismes de* E. *On suppose que* $\exp_E(u_1),\dots,\exp_E(u_n)$ *sont des points algébriques de* E. *Alors* $1, u_1,\dots,u_n$ *sont linéairement indépendants sur le corps* $\overline{\mathbb{Q}}$.

L'extension du théorème de Baker aux groupes algébriques a fait l'objet de nombreux travaux, qui ont abouti au résultat suivant :

Théorème 11 (Wüstholz). *Soit G un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $u_1, \ldots, u_r$ des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ tels que $\exp_G(u_j) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$, $(1 \leq j \leq r)$, $V = \mathbb{C}u_1 + \cdots + \mathbb{C}u_r$ le sous-espace de $T_G(\mathbb{C})$ qu'ils engendrent, n la dimension du plus petit sous-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ contenant V. Alors $\exp_G V$ est contenu dans un sous-groupe algébrique de G de dimension $\leq n$.*

La conjecture de Schanuel ([19], Chap. III, historical note), contient essentiellement tous les énoncés de transcendance (et d'indépendance algébrique) que l'on peut espérer concernant les nombres liés à la fonction exponentielle.

Conjecture 12 (Conjecture de Schanuel). *Si $x_1, \ldots, x_m$ sont des nombres complexes qui sont linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$, alors le degré de transcendance de*

$$x_1, \ldots, x_m, \; e^{x_1}, \ldots, e^{x_m}$$

est au moins m.

L'inégalité de la taille (ou celle de Liouville) est un outil essentiel pour démontrer la transcendance de certains nombres. Quand on veut des énoncés d'indépendance algébrique de deux nombres on la remplace par le critère de Gel'fond [10]. L'énoncé simplifié que voici est dû à R. Tijdeman [53], lemma 6.

Théorème 13 (Critère de Gel'fond). *Soit $\theta \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite de polynômes P_N non nuls de $\mathbb{Z}[X]$, où P_N a un degré $\leq N$ et une hauteur (naïve) $\leq e^N$, tel que*

$$|P_N(\theta)| \leq e^{-7N^2}.$$

Alors θ est algébrique et $P_N(\theta) = 0$ pour tout $N \geq N_0$.

L'extension [41] en dimension supérieure du critère de Gel'fond, permettant de démontrer des résultats d'indépendance algébrique de plusieurs nombres, demande de la prudence (qui a manqué à S. Lang et plus tard à G.V. Čudnovs'kiĭ), comme le montre l'exemple de A.Ya. Khintchine (voir [7, 21] ainsi que l'appendice de [41]). Noter que les nombres x_1 et x_2, dont l'existence est affirmée par le théorème 14, sont algébriquement indépendants dès que la fonction ψ décroît suffisamment vite : cela résulte du critère 13 de Gel'fond.

Théorème 14 (Exemple de Khintchine et Cassels). *Soient $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ une fonction arithmétique à valeurs positives et m un entier ≥ 2. Il existe des nombres réels $\theta_1, \ldots, \theta_m$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que, pour tout entier positif N, il existe $m-1$ formes linéaires en trois variables*

$$L_i(X_0, X_1, X_i) = a_iX_0 + b_iX_1 + c_iX_i \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, X_i] \qquad (2 \leq i \leq m)$$

à coefficients entiers rationnels de valeurs absolues majorées par N, avec $c_i \neq 0$, telles que

$$|L_i(1, \theta_1, \theta_i)| \leq \varphi(N) \qquad (2 \leq i \leq m).$$

Le critère de transcendance de Gel'fond a été étendu par P. Philippon [41] en un énoncé qui permet d'obtenir de grands degrés de transcendance. Voici un exemple de tel critère.

Théorème 15 (Critère pour l'indépendance algébrique)**.** *Soient n un entier suffisamment grand, C un nombre réel suffisamment grand, $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un élément de $\mathbb{C}^n$ et η un nombre réel positif. On suppose que pour tout entier N suffisamment grand, il existe un entier $m = m(N) \geq 1$ et des polynômes $Q_1, \ldots, Q_m$ dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ satisfaisant*

$$\max_{1 \leq j \leq m} \deg Q_j \leq N, \qquad \max_{1 \leq j \leq m} H(Q_j) \leq e^N$$

et

$$0 < \max_{1 \leq j \leq m} |Q_j(\theta_1, \ldots, \theta_n)| \leq e^{-CN^\eta},$$

tels que l'ensemble des zéros communs des polynômes $Q_1, \ldots, Q_m$ dans la boule

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n \, ; \, \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - \theta_i| \leq e^{-3CN^\eta} \right\}$$

est fini. Alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est $> \eta - 1$.

L'énoncé conjectural de Pillai que voici signifie que la distance entre deux éléments consécutifs de la suite

$$1,\ 4,\ 8,\ 9,\ 16,\ 25,\ 27,\ 36,\ 49,\ 64,\ 75,\ 81,\ \ldots$$

des puissances parfaites tend vers l'infini.

Conjecture 16 (Conjecture de Pillai)**.** *Soit k un entier rationnel non nul. Il n'existe qu'un nombre fini de quadruplets (x, y, p, q) formés d'entiers ≥ 2 tels que $x^p - y^q = k$.*

Les conjectures de l'introduction des chapitres X et XI de [25] contiennent, entre autre, un raffinement de la conjecture de Pillai.

Conjecture 17 (Raffinement quantitatif de la conjecture de Pillai)**.** *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que si (x, y, p, q) sont des entiers ≥ 2 pour lesquels $x^p \neq y^q$, alors*

$$\left| x^p - y^q \right| \geq \kappa(\varepsilon) \max\left\{ x^p,\ y^q \right\}^{1-(1/p)-(1/q)-\varepsilon}.$$

On peut aussi déduire la conjecture 17 de la conjecture *abc* de Masser-Œsterlé (voir par exemple [29] Chap. II § 1).

Conjecture 18 (Conjecture **abc** de Masser-Œsterlé)**.** *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que si a, b, c sont des entiers rationnels positifs premiers entre eux satisfaisant $a + b = c$, alors le* radical

$$R(abc) = \prod_{p \mid abc} p$$

du produit abc satisfait

$$c \geq \kappa(\varepsilon) R(abc)^{1-\varepsilon}.$$

Les estimations diophantiennes conjecturées par S. Lang sur les logarithmes elliptiques ont été établies par É. Gaudron [11] d'une part, S. David et N. Hirata [9] d'autre part. Leur énoncé est valable pour des logarithmes de points algébriques sur un groupe algébrique commutatif.

Théorème 19 (Gaudron, David-Hirata)**.** *Soient G un groupe algébrique défini sur un corps de nombres K et $u_1, \dots, u_n$ des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ tels que $\exp_G(u_j) \in G(K)$ pour $1 \leq j \leq n$. Il existe un nombre positif $C = C(G, K, u_1, \dots, u_n)$ tel que, pour tout $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$ satisfaisant*

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n \neq 0,$$

on ait

$$\left|\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n\right| \geq B^{-C},$$

avec $B = \max\{2, H(\beta_1), \dots, H(\beta_n)\}$ et $H(\beta)$ est la hauteur (naïve) du polynôme minimal de β.

3. En guise de conclusion

L'influence qu'a eue Serge Lang sur le développement de la théorie des nombres transcendants ne se limite pas à ses publications. Certes, les résultats originaux qu'il a démontrés ont certainement été parmi les plus importants du XX^e siècle dans ce domaine. Il est indéniable également que ses publications, à commencer par son livre sur les nombres transcendants en 1966, ont permis à de nombreux mathématiciens de pénétrer le sujet et de comprendre la stratégie des démonstrations. Mais ce n'est pas tout : il a également contribué d'une façon moins visible (pour ceux qui ne l'ont pas connu) par ses encouragements enthousiastes aux jeunes chercheurs. Nous sommes nombreux à en avoir bénéficié et à lui en être redevables.

4. Références

[1] W. Adams & S. Lang – « Some computations in diophantine approximations », *J. reine angew. Math.* **220** (1965), p. 163–173 (= [31] p. 373–383).

[2] L. Alaoglu & P. Erdös – « On highly composite and similar numbers », *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944), p. 448–469.

[3] Y. André – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[4] D. Bertrand & D. Masser – « Linear forms in elliptic integrals », *Invent. Math.* **58** (1980), no. 3, p. 283–288.

[5] E. Bombieri – « Algebraic values of meromorphic maps », *Invent. Math.* **10** (1970), p. 267–287 (Addendum, ibid., **11** (1970), 163–166).

[6] E. Bombieri & S. Lang – « Analytic subgroups of group varieties », *Invent. Math.* **11** (1970), p. 1–14 (= [31] p. 507–520).

[7] J. Cassels – *An introduction to diophantine approximation.*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 45. Cambridge : At the University Press 1957, X, 166 p, 1957.

[8] J. Coates & S. Lang – « Diophantine approximation on Abelian varieties with complex multiplication », *Invent. Math.* **34** (1976), no. 2, p. 129–133 (= [32] p. 236–240).

[9] S. David & N. Hirata-Kohno – « Recent progress on linear forms in elliptic logarithms », in *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, p. 26–37.

[10] N. I. Fel'dman & Y. V. Nesterenko – « Transcendental numbers », in *Number theory, IV*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 44, Springer, Berlin, 1998, p. 1–345.

[11] É. Gaudron – « Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 12, p. 1059–1064.

[12] A. Khintchine – « Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen », *Rendiconti Palermo,* **50** (1926), p. 170–195.

[13] S. Lang – « Some theorems and conjectures in diophantine equations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), p. 240–249 (= [31] p. 273–283).

[14] ______, « Transcendental points on group varieties », *Topology* **1** (1962), p. 313–318 (= [31] p. 299–304).

[15] ______, « Diophantine approximations on toruses », *Amer. J. Math.* **86** (1964), p. 521–533 (= [31] p. 313–325).

[16] ______, « Algebraic values of meromorphic functions », *Topology* **3** (1965), p. 183–191 (= [31] p. 348–356).

[17] ______, « Report on diophantine approximations », *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), p. 177–192 (= [31] p. 326–341).

[18] ______, « Algebraic values of meromorphic functions. II », *Topology* **5** (1966), p. 363–370 (= [31] p. 384–391).

[19] ______, *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966 (= [31] p. 396–506).

[20] ______, « Nombres transcendants », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 9*, Exp. No. 305, Soc. Math. France, Paris, 1966, p. 407–414 (publié en 1995, oublié dans [31]).

[21] ______, « Transcendental numbers and diophantine approximations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), p. 635–677 (= [32] p. 1–43).

[22] ______, « Higher dimensional diophantine problems », *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), p. 779–787 (= [32] p. 102–110).

[23] ______, « Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication », *Advances in Math.* **17** (1975), no. 3, p. 281–336 (= [32] p. 113–168).

[24] ______, *Cyclotomic fields*, Springer-Verlag, New York, 1978, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 59.

[25] ______, *Elliptic curves : Diophantine analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 231, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[26] ______, « Relations de distributions et exemples classiques », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année : 1977/78, Théorie des nombres, Fasc. 2*, Secrétariat Math., Paris, 1978, p. Exp. No. 40, 6 (= [33] p. 59–65).

[27] ______, « Conjectured Diophantine estimates on elliptic curves », in *Arithmetic and geometry, Vol. I*, Progr. Math., vol. 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 155–171 (= [33] p. 212–228).

[28] ______, « Old and new conjectured Diophantine inequalities », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **23** (1990), no. 1, p. 37–75 (= [33] p. 355–393).

[29] ______, *Number theory. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991, Diophantine geometry.

[30] ______, « La conjecture de Bateman-Horn », *Gaz. Math.* (1996), no. 67, p. 82–84 (= [34] p. 213–216).

[31] ______, *Collected papers. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1952–1970.

[32] ______, *Collected papers. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1971–1977.

[33] ______, *Collected papers. Vol. III*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1978–1990.

[34] ______, *Collected papers. Vol. IV*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1990–1996.

[35] ______, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.

[36] S. Lang & H. Trotter – « Continued fractions for some algebraic numbers », *J. reine angew. Math.* **255** (1972), p. 112–134 ; addendum, ibid. **267** (1974), 219–220 (= [32] p. 69–92).

[37] D. W. Masser – *Elliptic functions and transcendence*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 437.

[38] ______, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. I », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), p. 499–513.

[39] ______, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. II », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), no. 1, p. 55–70.

[40] ______, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. III », *Proc. London Math. Soc.* **33** (1976), no. 3, p. 549–564.

[41] P. Philippon – « Critères pour l'indépendance algébrique », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1986), no. 64, p. 5–52.

[42] K. Ramachandra – « Contributions to the theory of transcendental numbers. I, II », *Acta Arith.* **14** (1967/68), 65-72 ; ibid. **14** (1967/1968), p. 73–88.

[43] T. Schneider – « Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II. Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* **172** (1934), p. 70–74.

[44] ______, « Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale », *Math. Ann.* **113** (1936), p. 1–13.

[45] ______, « Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale », *J. reine angew. Math.* **183** (1941), p. 110–128.

[46] ______, « Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise », *Math. Ann.* **121** (1949), p. 131–140.

[47] ______, *Introduction aux nombres transcendants*, Traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[48] J-P. Serre – « Dépendance d'exponentielles p-adiques », in *Théorie des Nombres, Sém. Delange-Pisot-Poitou* 7(1965/66), No.15, 14 p. , IHP, 1967.

[49] ______, *Abelian l-adic representations and elliptic curves*, Research Notes in Mathematics, vol. 7, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998, With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original.

[50] C. L. Siegel – « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen », *Abhandlungen Akad. Berlin* Nr. 1, 70 S (1929), p. 1–70 (see *Gesammelte Abhandlungen,* Springer-Verlag, Berlin-New York 1966 Band **I**, 209–266).

[51] ______, « Über die Perioden elliptischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* **167** (1932), p. 62–69.

[52] ______, *Transcendental Numbers*, Annals of Mathematics Studies, no. 16, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

[53] R. Tijdeman – « On the algebraic independence of certain numbers », *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **74**=*Indag. Math.* **33** (1971), p. 146–162.

[54] M. Waldschmidt – *Diophantine approximation on linear algebraic groups. transcendence properties of the exponential function in several variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[55] G. Wüstholz – « Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen », *Ann. of Math.* (2) **129** (1989), no. 3, p. 501–517.

Serge Lang, Université de Berkeley, 20 septembre 2004