Université Paris 7 Denis Diderot
Institut de Mathématiques de Jussieu

**Géométrie des Variétés et Transversalité**

par Pierre Vogel

## Introduction

Ce cours est destiné à l'étude des variétés différentiables et de divers invariants géométriques globaux. L'outil essentiel pour construire ces invariants et montrer certaines de ses propriétés est la transversalité. Grâce aux théorèmes de Sard et de Thom, on montre qu'il existe beaucoup d'applications transverses, ce qui permet de construire de nouvelles variétés qui ont souvent un sens géométrique profond. Lorsque ces variétés sont de dimension 0, on obtient des nombres, comme le degré d'une application, le nombre d'intersection algébrique de deux sous-variétés ou deux applications ou le nombre d'auto-intersection d'une application entre deux variétés en dimension moitié.

Comme autre application de l'existence de ces applications transverses, on montre l'existence des fonctions de Morse, ce qui permet de décrire une variété différentiable compacte en termes géométriques. On montre aussi que toute variété différentiable de dimension $n$ est difféomorphe à une sous-variété fermée de $\mathbf{R}^{2n+1}$.

## 1. Variétés différentiables

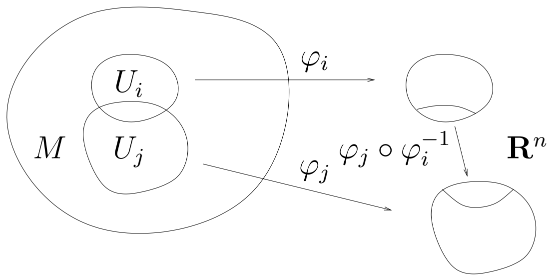
**1.1 Définition.** *Soit $n \geq 0$ un entier et $k$ un élément de $\mathbf{N} \cup \infty$. On appelle variété de dimension $n$ et de classe $C^k$ un espace topologique $M$ muni d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ et d'une famille d'applications continues $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbf{R}^n$ tels que :*

*— $M$ est séparé et dénombrable à l'infini (i.e. il est recouvert par une famille dénombrable de compacts)*

*— pour chaque $i$, l'application $\varphi_i$ est un homéomorphisme de $U_i$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$*

*— pour tout $i$ et $j$, l'application de changement de carte $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un difféomor-*

*phisme de classe $C^k$ de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.*




Les applications $\varphi_i$ sont appelées les cartes de $M$. L'ensemble des ouverts $U_i$ et des cartes est appelé l'atlas de $M$.

Dans la plupart des situations, on s'intéressera au cas où $k$ est infini. On dira alors que $M$ est une variété différentiable.

**1.2 Définition.** *Soient $M$ et $M'$ deux variétés de classes $C^k$ et $f$ une application continue de $M$ dans $M'$. Soient $\varphi_i$ et $\psi_j$ les cartes de $M$ et $M'$. On dit que $f$ est de classe $C^k$ si les applications $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ sont de classe $C^k$ sur leurs ouverts de définition. On dit que $f$ est différentiable si $k$ est infini et $f$ de classe $C^\infty$.*

**Remarques.** Comme tout ouvert d'une variété de classe $\mathrm{C}^k$ est évidemment une variété de classe $\mathrm{C}^k$, on peut définir une application de classe $\mathrm{C}^k$ d'un ouvert d'une variété de classe $C^k$ dans un ouvert d'une variété de classe $C^k$.

On définit aussi des difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^k$. Ce sont des des applications de classe $\mathrm{C}^k$ dont l'application réciproque est également de classe $\mathrm{C}^k$. Si $k$ est infini, on parlera simplement de difféomorphisme.

Les cartes d'une variété de classe $\mathrm{C}^k$ sont des applications de classe $\mathrm{C}^k$ et les cartes d'une variété différentiable sont différentiables.

Une variété $M$ de classe $\mathrm{C}^k$ est définie par un atlas. Il y a cependant beaucoup d'atlas différents qui donnent la même notion d'application de classe $\mathrm{C}^k$. Mais tout atlas $\mathcal{A}$ est contenu dans un nouvel atlas $\mathcal{A}'$ où les cartes $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ sont tous les difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^k$ d'un ouvert $U$ de $M$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Dans la pratique on ne considèrera que les atlas maximaux, c'est-à-dire les atlas $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Ceux-ci sont suffisant pour étudier les variétés différentables.

**1.3 Définition.** *Soit $M$ une variété de dimension $n$ et de classe $C^k$. Soit $N$ un sous-espace de $M$. On dit que $N$ est une sous-variété de $M$ de dimension $p$ si $N$ possède une structure de variété de dimension $p$ et de classe $C^k$ et si pour tout $x \in N$ il existe une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ de $M$ définie en $x$ et une carte $\psi : U \cap N \longrightarrow \mathbf{R}^p$ de $N$ telles* *que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} U \cap N & \hookrightarrow & U \\ \psi \big\downarrow & & \varphi \big\downarrow \\ \mathbf{R}^p & \hookrightarrow & \mathbf{R}^n \end{array}$$

**Remarque.** On peut définir une notion de variété en un sens beaucoup plus général. Considérons une famille d'espaces topologiques $U_i$, et pour chaque couple $(i, j)$ une famille d'homéomorphismes de $U_i$ sur $U_j$. On appelle modèles les espaces $U_i$ et isomorphismes admissibles les homéomorphismes de ces familles. On suppose que tout ouvert d'un modèle est encore un modèle et que les isomorphismes admissibles sont stables par composition et par passage à la fonction réciproque. Enfin on supposera que si $f$ est un homéomorphisme d'un modèle $U$ sur un modèle $V$ et si $U$ est recouvert par des ouverts $U_i$, $f$ est un isomorphisme admissible si et seulement si $f$ induit pour chaque $i$ un isomorphisme admissible de $U_i$ sur $f(U_i)$.

Si $\mathcal{S}$ est une telle structure, on appelle $\mathcal{S}$-variété, un espace topologique séparé et dénombrable à l'infini $M$ muni d'une famille d'homéomorphismes appelés cartes entre un ouvert $U$ de $M$ et un modèle de $\mathcal{S}$, tel que les applications de changement de cartes soient des isomorphismes admissibles.

Les ouverts des espaces $\mathbf{R}^n$ et les difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^k$ entre ces ouverts sont un exemple de telle structure et les variétés correspondant à cette structure sont les variétés de classe $\mathrm{C}^k$.

On peut aussi considérer les ouverts des espaces $\mathbf{C}^n$ et les isomorphismes holomorphes entre ces ouverts. Les variétés correspondant à cette structure sont appelées variétés holomophes.

Un autre exemple important est donné par les ouverts des espaces $\mathbf{R}^n$ et les ouverts des espaces $[0, \infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$ et les difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^k$ (un difféomorphisme de classe $\mathrm{C}^k$ dans ce cas étant un homéorphisme qui se prolonge en un difféomorphisme de classe $\mathrm{C}^k$ entre deux ouverts de $\mathbf{R}^n$). On appelle variété à bord de classe $\mathrm{C}^k$ une variété correspondant à cette structure. Ainsi une variété à bord de classe $\mathrm{C}^k$ et de dimension $n$ est recouvert par des ouverts qui sont difféomorphes (par des difféomorphismes de classe $C^k$) à des ouverts de $\mathbf{R}^n$ ou des ouverts de $[0, \infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$. Si $k$ est infini, on dira simplement que $M$ est une variété différentiable à bord de dimension $n$.

Soit $M$ une variété à bord de classe $\mathrm{C}^k$ et de dimension $n$. Notons $\partial M$ le sous-espace de $M$ formé des points $x$ de $M$ qui sont envoyé par une carte dans le sous-espace $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}$ du modèle $[0, \infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$. Ce sous-espace est appelé le bord de $M$.

**1.4 Proposition.** *Soit $M$ une variété à bord de classe $C^k$ et de dimension $n$. Alors son bord $\partial M$ est une variété de classe $C^k$ et de dimension $n - 1$. De plus $M$ est une* *variété de classe $C^k$ et de dimension $n$ (au sens classique) si et seulement si son bord est vide.*

**Démonstration :** Montrons tout d'abord le lemme suivant :

**Lemme.** *Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbf{R}^n$ ou de $[0,\infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$. Soit $f$ un difféomorphisme de classe $C^k$ entre $U$ et $V$. Alors, si $U$ est un ouvert de $[0,\infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$ et $x$ un point de $U$ appartenant à $\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$, $V$ est aussi un ouvert de $[0,\infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$ et le point $f(x)$ appartient à $\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$.*

**Démonstration du lemme :** Supposons que $U$ soit un ouvert de $[0,\infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$ et que $x$ appartienne à $U\cap\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$. Par hypothèse, $f$ se prolonge en une application de classe $\mathrm{C}^k$ d'un voisinage $U'$ de $x$ dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage $V'$ de $f(x)$ dans $\mathbf{R}^n$. Or $x$ est adhérant à l'ensemble des points de $U'$ qui ne sont pas dans $U$. Il en résulte de $f(x)$ est adhérant à l'ensemble des points de $V'$ qui ne sont pas dans $V$ et $V$ n'est pas un voisinage de $f(x)$ dans $\mathbf{R}^n$, ce qui signifie que $V$ est un ouvert de $[0,\infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$ et que $f(x)$ appartient à $\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$. □

Comme conséquence de ce lemme, on voit que si $x$ est un point de $\partial M$, toute carte $\varphi$ définie sur un voisinage ouvert $U$ de $x$ envoie $x$ en un point $\varphi(x)$ de $\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$ et $\varphi(U)$ en un ouvert de $[0,\infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$. On en déduit que $\varphi$ envoie $U\cap\partial M$ en l'ouvert $\varphi(U)\cap\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$. Les restrictions de ces cartes forment alors un système de cartes de $\partial M$ à valeurs dans les ouverts de $\mathbf{R}^{n-1}$, ce qui montre que $\partial M$ est une variété de classe $\mathrm{C}^k$ et de dimension $n-1$.

Il est clair qu'un variété de dimension $n$ et de classe $\mathrm{C}^k$ (au sens classique) est une variété à bord de dimension $n$ et de classe $\mathrm{C}^k$ dont le bord est vide. Réciproquement, soit $M$ une variété à bord de dimension $n$ et de classe $\mathrm{C}^k$ dont le bord est vide. Grâce au lemme précédent, on voit que les images des cartes de $M$ sont des ouverts de $\mathbf{R}^n$ ou des ouverts de $[0,\infty[\times\mathbf{R}^{n-1}$ qui ne rencontrent pas le sous-espace $\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$. Ce sont donc, dans tous les cas des ouverts de $\mathbf{R}^n$ et $M$ est une variété au sens classique.
□

**Exercices.**

1) Montrer qu'une variété différentiable connexe de dimension 1 est difféomorphe au cercle $S^1$ si elle est compacte et à $\mathbf{R}$ sinon.

2) Montrer qu'une variété différentiable connexe de dimension 1 avec un bord non vide est difféomorphe à l'intervalle $[0,1]$ ou à $[0,+\infty[$.

## 2. Espace tangent

### 2.1 Définitions.

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$. Soit $x$ un point de $M$. Soit $E$ l'ensemble des couples $(u,\varphi)$ où $\varphi$ est une carte de $M$ définie en $x$ et $u$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Il existe sur $E$ une relation d'équivalence : deux couples $(u,\varphi)$ et $(v,\psi)$ sont équivalents si la différentielle de $\psi\circ\varphi^{-1}$ au point $\varphi(x)$ envoie $u$ en $v$. L'espace quotient est appelé l'*espace tangent* en $x$ à $M$. On le note $\tau(M,x)$. Les éléments de $\tau(M,x)$ sont appelés les vecteurs tangents en $x$ à $M$. Si $\varphi$ est une carte définie sur un ouvert $U$ de $M$ contenant $x$ l'application $u \mapsto (u,\varphi)$ induit une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur l'espace tangent $\tau(M,x)$. Par transport de structure, on obtient sur $\tau(M,x)$ une structure d'espace vectoriel réel de dimension $n$. Il est facile de vérifier que cette structure est indépendante du choix de la carte.

Si $M$ est un ouvert de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, la carte $M \subset \mathbf{R}^n$ induit une bijection de $\tau(M,x)$ sur $\mathbf{R}^n$ pour tout point $x$ de $M$. On identifiera souvent, via cette bijection les espaces tangents de $M$ avec l'espace $\mathbf{R}^n$.

Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables. Soit $f$ une application différentiable de $M$ dans $N$. Soit $x$ un point de $M$ et $y$ le point $f(x)$. Soient $\varphi$ et $\psi$ des cartes de $M$ et $N$ définies aux points $x$ et $y$. Alors la différentielle de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x)$ induit une application linéaire de $\tau(M,x)$ dans $\tau(N,y)$. Cette application est appelée différentielle de $f$ au point $x$ et notée $df(x)$ ou $\tau(f,x)$.

Avec ces conventions, il est facile de vérifier le résultat suivant :

**2.2 Proposition.** *Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une carte d'une variété différentiable $M$ de dimension $n$ définie sur un ouvert $U$. Alors la différentielle de $\varphi$ en un point $x \in U$ est une application linéaire bijective de $\tau(M,x)$ sur l'espace tangent $\tau(\mathbf{R}^n,\varphi(x)) = \mathbf{R}^n$.*

### 2.3 Fibré tangent

On peut considérer tous les espaces tangents d'une variété $M$. On obtient ainsi un objet mathématique appelé fibré tangent. Le fibré tangent de $M$ est formé d'un espace topologique $E$ appelé espace total du fibré et d'une application continue $p$ de $E$ dans $M$. L'espace total $E$ est l'ensemble des couples $(x,u)$ où $x$ est un point de $M$ et $u$ un vecteur tangent en $x$ à $M$ et $p$ n'est autre que la première projection.

**2.4 Proposition.** *L'espace total $E$ du fibré tangent d'une variété différentiable $M$ est muni canoniquement d'une structure de variété différentiable. De plus la projection $p : E \mapsto M$ est différentiable.*

**Démonstration :** Notons $n$ la dimension de $M$ et $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbf{R}^n$ les cartes de $M$. Soit $E_i$ le sous-espace $p^{-1}(U_i)$ de $E$ formé des couples $(x,u)$ avec $x \in U_i$. Il est facile de vérifier que $\varphi_i$ induit une bijection $\psi_i$ de $E_i$ sur le sous-espace $\varphi_i(U_i) \times \mathbf{R}^n$ de $\mathbf{R}^{2n}$. On définit ainsi des cartes sur l'ensemble $E$. Les applications de changement de carte sont les applications :

$$(y,u) \mapsto (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y), d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y).u)$$

qui sont évidemment différentiables.

Il reste à définir la topologie de $E$. Une partie $P$ de $E$ est dite ouverte si pour tout $i$, $\psi_i$ envoie $P \cap E_i$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$. Avec cette topologie, les parties $E_i$ sont des ouverts et $E$ est une variété différentiable. On vérifie facilement que $p$ est différentiable. $\square$

## 3. Orientation

### 3.1 Orientation des espaces vectoriels

Si $E$ est un espace vectoriel réel non nul de dimension finie, une orientation de $E$ est une classe d'équivalence de bases, deux bases étant dites équivalentes si l'une est directe par rapport à l'autre, ou, ce qui est équivalent, si la matrice de changement de base est de déterminant positif. Les bases de cette classe d'équivalence sont appelées les bases directes. Un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\mathbf{R}$ possède deux orientations. Si $\omega$ est l'une de ces orientations, l'autre sera notée $-\omega$. Si $E$ est nul, on convient qu'une orientation de $E$ est un élément de $\{\pm 1\}$, 1 correspondant à l'unique base de $E$.

On appelle espace vectoriel orienté un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ muni d'une orientation. Si $E$ est un espace vectoriel orienté, on notera $-E$ l'espace vectoriel $E$ muni de l'orientation opposée.

Si $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels orientés, le produit $E \times F$ et la somme directe $E \oplus F$ sont canoniquement orientés. Si $E$ et $F$ sont non nuls, l'orientation de $E \times F$ ou $E \oplus F$ est obtenue en juxtaposant une base directe de $E$ avec une base directe de $F$. Si $E$ ou $F$ est nul, on prend le produit des orientations. Avec ces conventions, on a la formule suivante, lorsque $E$ et $F$ sont de dimension $p$ et $q$ :

$$F \times E = (-1)^{pq} E \times F$$

Cette formule signifie en fait que l'application $(y, x) \mapsto (x, y)$ de $F \times E$ dans $E \times F$ est directe si et seulement si $pq$ est pair.

**Notation.** Considérons une suite exacte :

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} E' \xrightarrow{\beta} E'' \longrightarrow 0$$

où $E$, $E'$ et $E''$ sont trois espaces vectoriels de dimension finie orientés. Les applications $\alpha$ et $\beta$ sont respectivement injective et surjective et le noyau de $\beta$ est l'image de $\alpha$. On choisit une section $f$ de $\beta$. C'est une application linéaire de $E''$ dans $E'$ telle que $\beta \circ f$ est l'identité de $E''$. On vérifie que $\alpha \oplus f$ est un isomorphisme $\varepsilon$ de $E \oplus E''$ sur $E'$. On dira que la suite exacte $(S)$ est directe si $\varepsilon$ est directe.

Si l'on choisit une autre section $g$, il existe une application linéaire $h$ de $E''$ dans $E$ telle que $g$ soit de la forme $g = f + \alpha \circ h$, et l'on vérifie que le nouvel isomorphisme $\varepsilon'$ de $E \oplus E''$ sur $E'$ est de la forme :

$$(x, z) \mapsto \varepsilon'(x, z) = \varepsilon(x + h(z), z)$$

et comme l'application $(x, z) \mapsto (x + h(z), z)$ est définie par une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale, elle est directe, ce qui signifie que $\varepsilon$ est directe si et seulement si $\varepsilon'$ l'est. Ainsi, le fait que la suite exacte soit directe, est indépendant du choix de la section $f$.

**3.2 Proposition.** *Soit*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

*une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que deux des trois espaces vectoriels $E$, $E'$ et $E''$ sont orientés. Alors il existe une unique orientation du troisième espace vectoriel telle que la suite exacte soit directe.*

**Démonstration :** Choisissons une orientation $\omega$ du troisième espace vectoriel. Si la suite exacte est directe on pose $\omega' = \omega$, sinon on pose $\omega' = -\omega$. Il est alors facile de vérifier que la suite exacte est directe si et seulement si le troisième espace vectoriel est orienté par $\omega'$. □

**Définition.** *Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n > 0$. On dit que $M$ est orientée si les différentielles des applications de changement de cartes sont directes en tout point.*

Si $M$ est une variété orientée de dimension $n > 0$, les bijections entre les espaces tangents de $M$ et $\mathbf{R}^n$ fournies par les cartes induisent une orientation sur chaque espace tangent. Comme $M$ est orientée, ces orientations sont indépendantes des choix des cartes. Ainsi chaque espace tangent à une variété orientée est naturellement orienté et les différentielles des cartes sont directes en tout point où elles sont définies.

**3.3 Définition.** *Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$. On appelle orientation de $M$, la donnée, en chaque point $x \in M$, d'une orientation $\omega_x$ de l'espace tangent $\tau(M, x)$ possédant la propriété suivante :*

*Il existe des cartes $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbf{R}^n$ définies sur des ouverts $U_i$ qui recouvrent $M$ et des signes $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ tels que les applications $\varepsilon_i d\varphi_i$ soient directes en tout point de $U_i$.*

**Remarque.** Si la dimension de $M$ est strictement positive, on peut composer les cartes $\varphi_i$ avec des symétries hyperplanes, et supposer que les signes $\varepsilon_i$ sont tous égaux à 1. Ce n'est évidemment pas le cas si $n$ est nul. Dans ce cas une orientation de $M$ est simplement la donnée d'un signe en chaque point de $M$.

On peut de la même façon orienter les variétés à bord.

**3.3 Proposition.** *Soit $M$ une variété différentiable à bord orientée de dimension $n$. Alors son bord possède une structure canonique de variété différentiable orientée de dimension $n - 1$.*

**Démonstration.** Si $M$ est orientée, en chaque point $x$ de $M$, l'espace tangent $\tau(M, x)$ est orienté. Soit $x$ un point du bord de $M$, et $\varphi$ une carte de $M$ définie en $x$. Cette carte est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert $U$ de $x$ sur un ouvert $V$ de $[0, \infty[ \times \mathbf{R}^{n-1}$.

Soit $u$ un vecteur de $\tau(M, x)$ dont la première coordonnée de $d\varphi(x).u$ est strictement négative (on dit que $u$ est un vecteur sortant). On a la décomposition suivante en somme directe : $\tau(M, x) = \mathbf{R}u \oplus \tau(\partial M, x)$. Il existe alors une unique orientation de $\tau(\partial M, x)$ telle que l'égalité ci-dessus soit une égalité entre espaces vectoriels orientés, $\mathbf{R}u$ étant orienté par $u$.

Il est facile de vérifier que l'orientation de $\tau(\partial M, x)$ est indépendant de la carte et du vecteur sortant et que ces orientations définissent bien une orientation du bord de $M$.

**Exercices.**

1) Soit $M$ une variété différentiable. On suppose que $M$ a $n$ composantes connexes. Montrer que $M$ possède $2^n$ ou 0 orientations.

2) Montrer qu'il existe une unique fonction $\lambda$ qui à toute variété compacte orientée $M$ de dimension 0 associe un entier $\lambda(M)$ et qui vérifie :

— si $M$ est un point muni de son orientation standard, on a $\lambda(M) = 1$

— si $M$ est union disjointe de deux variétés $M_1$ et $M_2$, on a : $\lambda(M) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$

Montrer que $\lambda(M)$ est nul si et seulement si $M$ est le bord d'une variété différentiable compacte orientée de dimension 1.

3) Soient $M_1$ et $M_2$ deux variétés différentiables à bord de dimension $p$ et $q$. On suppose que $\partial M_1$ ou $\partial M_2$ est vide. Montrer que $M_1 \times M_2$ est une variété différentiable orientée à bord dont le bord orienté est $\partial M_1 \times M_2$ ou $(-1)^p M_1 \times \partial M_2$ selon que $\partial M_2$ ou $\partial M_1$ est vide.

4) Soit $M$ une variété différentiable à bord de dimension $n$. Soit $W$ la variété différentiable obtenue en privant $M$ de son bord. Montrer que toute orientation de $W$ se prolonge de façon unique en une orientation de $M$.

## 4. Transversalité

**4.1 Définition.** *Soient $M$, $M'$ et $W$ trois variétés différentiables. Soient $f$ et $g$ deux applications différentiables de $M$ et $M'$ dans $W$. On dit que $f$ et $g$ sont transverses en un point $(x, y)$ de $M \times M'$ si l'on a l'une des deux conditions suivantes :*

*— $f(x) \neq g(y)$*

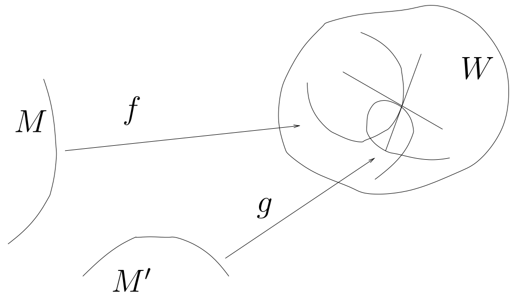
*— $f(x) = g(y)$ et les images de $df(x)$ et $dg(y)$ engendrent l'espace tangent $\tau(W, f(x))$.*

*On dit que $f$ et $g$ sont transverses si $f$ et $g$ sont transverses en tout point de $M \times M'$.*

Si $f$ et $g$ sont deux applications de deux espaces $M$ et $M'$ dans un espace $W$, on appelle produit fibré de $f$ et de $g$ le sous-espace de $M \times M'$ formé des couples $(x, y)$ tels que $f(x) = g(y)$.

**4.2 Théorème.** *Soient $M$, $M'$ et $W$ trois variétés différentiables. Soient $f$ et $g$ deux applications différentiables transverses de $M$ et $M'$ dans $W$. Alors le produit fibré $E$ de $f$ et de $g$ est une sous-variété différentiable de $M \times M'$. De plus, pour tout point $(x, y)$ de $E$, l'espace tangent en $(x, y)$ à $E$ est le noyau de l'application $df(x) - dg(y)$ de $\tau(M \times M', (x, y)) = \tau(M, x) \oplus \tau(M', y)$ dans $\tau(W, f(x))$.*

*Si $M$, $M'$ et $W$ sont orientées, le produit fibré $E$ est aussi naturellement orientée.*




**Démonstration :** Soient $p$, $q$ et $n$ les dimensions de $M$, $M'$ et $W$. Notons $E$ le produit fibré de $f$ et $g$. Soit $(x, y)$ un point de $E$. Posons : $z = f(x) = g(y)$. Il s'agit de montrer que $M \times M'$ possède un voisinage $U$ de $(x, y)$ tel que $E \cap U$ soit une sous-variété différentiable de $U$.

Quitte donc à remplacer $M$, $M'$ et $W$ par des ouverts plus petits, on peut supposer que $M$, $M'$ et $W'$ sont difféomorphes à des ouverts de $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$ et $\mathbf{R}^n$. Quitte encore à remplacer ces variétés par des variétés difféomorphes, on peut supposer que $M$, $M'$ et $W$ sont des ouverts de $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$ et $\mathbf{R}^n$ et que l'on a : $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Dans ce cas, $df(0)$ et $dg(0)$ sont des applications linéaires de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$ dans $\mathbf{R}^n$. Par hypothèse l'application $df(0) - dg(0)$ de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ dans $\mathbf{R}^n$ est surjective. Soit $F$ son noyau. C'est un espace vectoriel de dimension $r = p + q - n$. Choisissons une application linéaire $\alpha$ de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ dans $\mathbf{R}^r$ qui induise une application bijective de $F$ sur $\mathbf{R}^r$.

Considérons l'application suivante de $M \times M'$ dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ :

$$(u, v) \mapsto h(u, v) = (f(u) - g(v), \alpha(u, v))$$

La différentielle de $h$ en $(0, 0)$ est $(df(0) - dg(0), \alpha)$. Cette application est clairement injective et donc bijective. D'après le théorème d'inversion locale, $h$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$. On en déduit que $E$ qui est, au voisinage de $(0, 0)$, égal à $h^{-1}(\{0\} \times \mathbf{R}^r)$, est une sous-variété de $M \times M'$ de dimension $r$ et $h$ induit une carte de $E$ à valeurs dans $\mathbf{R}^r$. Comme ceci a lieu en pour tout $(x, y)$ de $E$, $E$ est une sous-variété différentiable de $M \times M'$ de dimension $r$.

Supposons maintenant $M$, $M'$ et $W$ orientées. Il est clair que $M \times M'$ est naturellement orientée. Il s'agit de montrer que $E$ est une sous-variété orientée de $M \times M'$. Commençons par orienter chaque espace tangent de $E$. Soit $z = (x, y)$ un point de $E$. L'espace tangent en $(x, y)$ à $E$ est le noyau de l'application $df(x) - dg(y)$ de $\tau(M, x) \oplus \tau(M', y)$ dans $\tau(W, f(x))$. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tau(E, z) \longrightarrow \tau(M, x) \oplus \tau(M', y) \longrightarrow \tau(W, f(x)) \longrightarrow 0$$

Or les espaces vectoriels $\tau(M, x) \oplus \tau(M', y)$ et $\tau(W, f(x))$ sont orientés. On en déduit une unique orientation de $\tau(E, z)$ telle que la suite exacte soit directe (voir proposition 3.2).

Pour définir les cartes de $E$, il suffit alors de procéder comme précédemment en choisissant l'application linéaire $\alpha$ telle qu'elle induise une application linéaire bijective directe de $F$ sur $\mathbf{R}^r$. Cela définit effectivement sur $E$ une structure de variété différentiable orientée telle que les orientations des espaces tangents soient les orientations définies précédemment. Ceci du moins si $r$ est strictement positif. Dans le cas contraire les orientations des espaces tangents sont des signes et donnent une orientation de l'espace discret $E$. $\square$

**Remarque.** On peut étendre la notion de transversalité de la façon suivante : Si $M$ et $M'$ sont deux sous-variétés différentiables d'une variété différentiable $W$, on dit qu'elles sont transverses si les deux inclusions $M \subset W$ et $M' \subset W$ le sont. On peut de la même façon définir ce qu'est une application de $M$ dans $W$ transverse à une sous-variété $M'$ de $W$. Plus précisément, on dit qu'une application $f$ de $M$ dans $W$ est transverse en un point $x$ de $M$ à une sous-variété $M'$ de $W$ si, pour tout $y \in M'$, $f$ est transverse à l'inclusion $M' \subset W$ en $(x, y)$.

Enfin, supposons que $M'$ est une sous-variété différentiable d'une variété différentiable $W$, que $f$ est une application différentiable d'une variété différentiable $M$ dans $W$ et que $X$ et $Y$ sont deux parties de $M$ et $M'$. On dira que $f$ est transverse à $M'$ en $(X, Y)$ si $f$ est transverse à l'inclusion $M' \subset W$ en tout point de $X \times Y$.

## 5. Espaces des jets

Les espaces tangents et les différentielles donnent les informations sur les fonctions à l'ordre 1. Si l'on veut aller à un ordre plus grand, il faut remplacer le fibré tangent par un espace plus complexe appelé espace des jets.

**5.1 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $k \geq 0$ un entier. Soient $x$ et $y$ deux points de $M$ et $W$. Soit $\mathrm{C}^\infty(M, W, x, y)$ l'ensemble des applications différentiables de $M$ dans $W$ qui envoient $x$ en $y$. Soient $\varphi$ et $\psi$ deux cartes de $M$ et $W$ définies au voisinage de $x$ et $y$. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathrm{C}^\infty(M, W, x, y)$ suivante : deux fonctions $f$ et $g$ sont équivalentes si les deux fonctions $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ ont les mêmes dérivées partielles à tout ordre $\leq k$ en $\varphi(x)$.*

*Alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est indépendante des choix des cartes $\varphi$ et $\psi$.*

**Démonstration :** Soient $\varphi'$ et $\psi'$ deux autres cartes de $M$ et $W$ définies en $x$ et $y$. Notons $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les relations d'équivalences correspondant à $(\varphi, \psi)$ et $(\varphi', \psi')$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathrm{C}^\infty(M, W, x, y)$ qui sont équivalentes par la relation $\mathcal{R}$. Alors les dérivées partielles à tout ordre $\leq k$ de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ sont les mêmes en $\varphi(x)$. En composant à gauche et à droite par $\psi' \circ \psi^{-1}$ et $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ qui sont des fonctions de classe $\mathrm{C}^k$ définies au voisinage de $\psi(y)$ et $\varphi'(x)$, on voit que les dérivées partielles à l'ordre $k$ de $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ et $\psi' \circ g \circ \varphi'^{-1}$ sont les mêmes en $\varphi'(x)$. On en déduit que $f$ et $g$ sont équivalentes pour la relation $\mathcal{R}'$. $\square$

Deux fonctions $f$ et $g$ de $\mathrm{C}^\infty(M, W, x, y)$ qui sont équivalentes pour la relation $\mathcal{R}$ sont dites équivalentes à l'ordre $k$ en $x$.

**5.2 Définitions.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. On appelle jet à l'ordre $k$ de $M$ dans $W$ un triplet $(x, y, u)$ où $x$ est un point de $M$, $y$ un point de $W$ et $u$*

*une classe d'équivalence à l'ordre $k$ en $x$ de fonctions de $C^\infty(M,W,x,y)$.*

*Si $\omega = (x,y,u)$ est un jet à l'ordre $k$ de $M$ dans $W$, on appelle source et but de $\omega$ les points $x$ et $y$.*

*On appelle espace des jets à l'ordre $k$ de $M$ dans $W$ l'ensemble $J^k(M,W)$ des jets à l'ordre $k$ de $M$ dans $W$.*

**5.3 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. Soit $k$ un entier. Alors $J^k(M,W)$ a une structure de variété différentiable.*

**Démonstration :** Soient $p$ et $n$ les dimensions de $M$ et $W$. Soit $E$ l'espace vectoriel $\mathbf{R}^p \times F$, où $F$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ de degré inférieur ou égal à k. C'est un espace vectoriel réel de dimension finie. Soient $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ et $\psi : V \longrightarrow \mathbf{R}^n$ deux cartes de $M$ et $W$. Soit $\Omega$ l'ensemble des jets $(x,y,u)$ de $J^r(M,W)$ où $x$ et $y$ appartiennent à $U$ et $V$. Supposons que $u$ soit la classe à l'ordre $k$ d'une fonction $f$. On associe à $(x,y,u)$ le couple $(\varphi(x),P)$, où $P$ est le développement de Taylor à l'ordre $k$ de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x)$. On note $\Phi$ cette application. Il est clair que $\Phi$ est une bijection de $\Omega$ sur un ouvert de $E$. Ces applications $\Phi$ sont les cartes d'une structure de variété différentiable sur l'espace des jets $J^r(M,W)$. $\square$

Les applications source et but induisent une application $p$ de $J^k(M,W)$ dans $M \times W$ qui est différentiable. De plus si $f$ est une application différentiable de $M$ dans $W$, on a une application $J^k(f)$ de $M$ dans $J^k(M,W)$. Cette application associe à un point $x$ de $M$ le triplet $(x,y,u)$, $y$ étant l'image de $x$ par $f$ et $u$ la classe à l'ordre $k$ de $f$ en $x$. Il est clair que $J^k(f)$ est différentiable. Enfin on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & J^k(M,W) \arrow[d, "p"] \\
M \arrow[ur, "J^k(f)"] \arrow[r, "\Gamma(f)"'] & M \times W
\end{tikzcd}$$

$\Gamma(f)$ étant le graphe de la fonction $f$.

**Remarque.** Chaque image réciproque par $p$ d'un point de $M \times W$ est isomorphe à l'ensemble $E$ des fonctions polynomiales de degré $k$ de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ qui s'annulent en 0, mais ce n'est pas naturellement un espace vectoriel comme dans le cas du fibré tangent. En effet, si l'on change de carte, l'isomorphisme induit entre la fibre $p^{-1}(x,y)$ et $E$ est modifiée de façon non linéaire.

## 6. Topologie des espaces fonctionnels.

Pour étudier les topologies des espaces fonctionnels, on aura besoin tout d'abord d'étudier les propriétés topologiques des variétés différentiables.

**6.1 Proposition.** *Une variété topologique est complètement métrisable.*

**Démonstration :** Soit $M$ une variété topologique. Il s'agit de montrer qu'il existe une métrique complète sur $M$ compatible avec la topologie de $M$.

Commençons par construire une métrique sur $M$. On sait que $M$ est l'union d'une suite de compacts $K_p$ et que tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbf{R}^n$, $n$ étant la dimension de $M$. On en déduit qu'il existe une suite d'ouverts $(V_p)_{p\geq 0}$ difféomorphes à $\mathbf{R}^n$ qui recouvrent $M$. On choisira pour chaque $p$ un difféomorphisme $\varphi_p$ de $V_p$ sur $\mathbf{R}^n$.

Comme $M$ est localement compact et dénombrable à l'infini, $M$ est paracompact et il existe une partition de l'unité associée au recouvrement des $V_p$, c'est-à-dire qu'il existe une suite de fonctions continues $\alpha_p$ de $M$ dans $[0, 1]$ possédant les propriétés suivantes :

— le support de $\alpha_p$ (adhérence de l'ensemble des points ou $\alpha_p$ ne s'annule pas) est, pour tout $p$, contenu dans $V_p$

— la famille des supports des fonctions $\alpha_p$ est localement finie (tout compact de $M$ ne renconte qu'un nombre fini de ces supports)

— la somme des fonctions $\alpha_p$ est égale à 1.

D'autre part, soient $F$ l'espace vectoriel réel de base $\{e_p\}$, $p \geq 0$, et $E$ l'espace vectoriel $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) \otimes F$. L'espace $E$ est muni d'une base formée des vecteurs $\varepsilon_j \otimes e_p$, où $\{\varepsilon_j\}$ est la base canonique de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. On munit alors $E$ du produit scalaire pour lequel la base ci-dessus est orthonormée. Ainsi $E$ est un espace vectoriel euclidien.

Considérons l'application $f$ de $M$ dans $E$ définie par :

$$\forall x \in M \qquad f(x) = \sum_p \alpha_p(x)(1, \varphi_p(x)) \otimes e_p$$

$\varphi_p$ étant prolongée de façon quelconque par 0 en dehors de $V_p$. Les applications $\alpha_p\varphi_p$ sont continues ainsi que $f$.

On vérifie que $f$ est injective. De plus, pour tout point $x$ de $M$, $f$ envoie un voisinage de $x$ sur un voisinage de $f(x)$ dans $f(M)$. On peut alors définir une métrique $d_0$ sur $M$ en posant :

$$\forall x, y \in M \qquad d_0(x, y) = ||f(x) - f(y)||$$

Cette métrique $d_0$ est compatible avec la topologie de $M$, mais il n'est pas clair qu'elle soit complète. Pour construire une métrique complète, on aura besoin du résultat suivant :

**6.2 Lemme.** *Soit $M$ une variété différentiable. Alors il existe une application continue propre de $M$ dans* $[0, \infty[$.

**Démonstration du lemme.** Comme $M$ est dénombrable à l'infini, il existe une suite de compacts $(K_p)_{p\geq 0}$ qui recouvrent $M$, chacun étant contenu dans l'intérieur du suivant. Pour des raisons de commodité, on posera : $K_p = \emptyset$ pour tout $p < 0$.

Notons, pour tout $p$, $L_p$ l'adhérence dans $M$ du complémentaire de $K_p$. Pour tout $p \geq 0$ désignons par $g_p$ la fonction de $M$ dans $[0, 1]$ suivante :

$$\forall x \in M \qquad g_p(x) = \frac{d_0(x, K_{p-1} \cup L_{p+2})}{d_0(x, K_{p-1} \cup L_{p+2}) + d_0(x, K_{p+1} \cap L_p)}$$

$d_0(x, H)$ désignant la distance d'un point $x$ à un fermé $H$, c'est-à-dire la borne inférieure de $d_0(x, y)$ pour $y$ parcourant $H$. La fonction $g_p$ est continue ; elle est nulle sur $K_{p-1}$ et en dehors de $K_{p+2}$. De plus elle est égale à 1 sur $K_{p+1} \cap L_p$. On en déduit que la fonction $g : x \mapsto \sum_{p \geq 0} p g_p(x)$ est continue sur $M$ et supérieure ou égale à $p$ sur le fermé $L_p$. Elle est donc propre (l'image réciproque d'un compact est compact). $\square$

On est maintenant en mesure de construire une métrique complète. On choisit une fonction continue propre $g$ de $M$ dans $[0, \infty[$ et on pose pour tout $x$ et $y$ dans $M$ : $d(x, y) = d_0(x, y) + |g(x) - g(y)|$. On vérifie que $d$ est une métrique sur $M$ compatible avec la topologie de $M$. De plus, toute boule fermée dans $M$ est compacte car $g$ est propre. Cette métrique est donc complète. $\square$

**La topologie de Whitney.** Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. On choisit pour tout $k \geq 0$ une métrique complète $d_k$ sur l'espace des jets $J^k(M, W)$. Soient $f$ une fonction différentiable de $M$ dans $W$ et $\alpha$ une fonction continue de $M$ dans $]0, \infty[$. On note $\mathcal{V}_k(f, \alpha)$ l'ensemble des fonctions différentiables $g$ de $M$ dans $W$ telles que :

$$\forall x \in M \qquad d_k(J^k(f)(x), J^k(g)(x)) \leq \alpha(x)$$

On appelle topologie de Whitney la topologie sur l'espace $\mathrm{C}^\infty(M, W)$ des applications différentiables de $M$ dans $W$, où une base de voisinage d'une fonction $f$ est formé des ensembles $\mathcal{V}_k(f, \alpha)$, $k$ étant un entier quelconque et $\alpha$ une fonction continue quelconque de $M$ dans $]0, \infty[$. On vérifie que cette topologie est indépendante du choix des métrique $d_k$.

**Remarque.** Si $M$ n'est pas compact, cette topologie n'est pas métrisable, car dans ce cas aucune fonction ne possède de base dénombrable de voisinages. Par contre, si $M$ est compact, la topologie de Whitney est la topologie de la convergence uniforme pour tous les jets. C'est-à-dire qu'une suite de fonctions $f_n$ converge vers une fonction $f$ si et seulement si $J^k(f_n)$ converge uniformément vers $J^k(f)$ pour tout entier $k$.

**6.3 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $k$ un entier. Soient $F$ un fermé de $M$ et $U$ un ouvert de l'espace des jets $J^k(M, W)$. Alors l'ensemble des fonctions différentiables $f$ de $M$ dans $W$ telles que $J^k(f)(F)$ soit contenu dans $U$ est un ouvert de $C^\infty(M, W)$.*

**Démonstration.** Notons $V$ l'ensemble des fonctions différentiables $f$ de $M$ dans $W$ telles que $J^k(f)(F)$ soit contenu dans $U$. Soit $f$ une fonction de $V$. Choisissons une métrique complète $d$ sur l'espace des jets $J^k(M, W)$ et une métrique $d'$ sur $M$. Soit $\alpha$ la fonction : $x \mapsto d(J^k(f)(x), G) + d'(x, F)$, $G$ étant le complémentaire de $U$ dans l'espace des jets. C'est une fonction continue de $M$ dans $]0, +\infty[$. L'ensemble $\mathcal{V}_k(f, \alpha/2)$ est formé des fonctions $g$ telles que :

$$\forall x \in F \qquad d(J^k(f)(x), J^k(g)(x)) \leq \alpha(x)/2$$

c'est un voisinage de $f$ contenu dans $V$. Ainsi $V$ est un voisinage de chacun de ses points. C'est donc un ouvert. $\square$

**6.4 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $k$ un entier. Alors l'application $J^k$ de $C^\infty(M,W)$ dans $C^\infty(M,J^k(M,W))$ qui à une fonction $f$ associe son jet à l'ordre $k$ est continue pour les topologies de Whitney.*

**Démonstration :** Soit $l \geq 0$ un entier. Désignons par $J^{l,k}(M,W)$ le sous-espace de $J^l(M,J^k(M,W))$ formé des jets $(x,z,v)$, $v$ étant le jet à l'ordre $l$ en $x$ d'une application $g$ de $M$ dans $J^k(M,W)$ de la forme $g = J^k(f)$, $f$ étant une fonction différentiable définie sur un voisinage de $x$ dans $M$ et à valeurs dans $W$. Il est clair que si $f$ est une application différentiable de $M$ dans $W$, l'application $J^l(J^k(f))$ est à valeurs dans $J^{l,k}(M,W)$.

Le sous-espace $J^{l,k}(M,W)$ est en fait une sous-variété différentiable fermée de $J^l(M,J^k(M,W))$. Pour vérifier cela, il suffit de le faire lorsque $M$ et $W$ sont difféomorphes à $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$. Mais dans ce cas, $J^{l,k}(M,W)$ apparaît comme un sous-espace vectoriel de $J^l(M,J^k(M,W))$.

Comme le jet d'ordre $l$ du jet d'ordre $k$ d'une fonction ne dépend que du jet d'ordre $k+l$, l'espace $J^{l,k}(M,W)$ est difféomorphe à l'espace des jets $J^{k+l}(M,W)$. Le difféomorphisme réciproque est donné par : $(x, J^{k+l}(f)(x)) \mapsto (x, J^l(J^k(f))(x))$.

Choisissons pour chaque $i < k$ une métrique complète $d_i$ sur $J^i(M,W)$. Choisissons également des métriques complètes $d'_l$ pour les espaces de jets $J^l(M,J^k(M,W))$. Par restriction, ces métriques induisent des métriques complètes sur $J^{l,k}(M,W)$ et donc sur $J^{k+l}(M,W)$. On notera $d_{k+l}$ cette dernière métrique.

Par construction, si $f$ et $g$ sont deux applications différentiables de $M$ dans $W$ et si $x$ est un point de $M$, on a pour tout $l \geq 0$ :

$$d'_l(J^l(J^k(f))(x), J^l(J^k(g))(x)) = d_{k+l}(J^{k+l}(f)(x), J^{k+l}(g)(x))$$

et ceci signifie que $f \mapsto J^k(f)$ est continue. $\square$

**6.5 Théorème.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $C^\infty(M,W)$ l'espace des fonctions différentiables de $M$ dans $W$ muni de la topologie de Whitney. Alors tout sous-espace fermé de $C^\infty(M,W)$ est un espace de Baire.*

**Démonstration.** Soit $F$ un fermé de $\mathrm{C}^\infty(M,W)$. Considérons une suite d'ouverts denses $(V_p)_{p\geq 0}$ dans $F$. Il s'agit de montrer que l'intersection de ces ouverts est une partie dense de $F$. Par définition, chaque $V_p$ est la trace sur $F$ d'un ouvert $V'_p$ de $\mathrm{C}^\infty(M,W)$.

Choisissons tout d'abord des métriques complètes $d'_k$ sur les espaces $J^k(M,W)$. Si $k \leq l$ sont deux entiers, on a des applications canoniques $\pi_{kl}$ de $J^l(M,W)$ dans $J^k(M,W)$. Pour tout $k \geq 0$ et tout $u,v \in J^k(M,W)$, on pose :

$$d_k(u,v) = \sum_{0\leq i\leq k} d'_i(\pi_{ik}(u), \pi_{ik}(v))$$

On a ainsi de nouvelles métriques complètes $d_k$ qui sont compatibles entr'elles, c'est-à-dire qu'elles vérifient la propriété suivante :

$$\forall k < l, \quad \forall u,v \in J^l(M,W), \qquad d_k(\pi_{kl}(u), \pi_{kl}(v)) \leq d_l(u,v)$$

Soit $f$ une fonction différentiable de $M$ dans $W$, $k$ un entier et $\alpha$ une fonction continue de $M$ dans $]0,\infty[$. On note $\mathcal{V}_k(f,\alpha)$ l'ensemble des fonctions différentiables $g$ de $M$ dans $W$ telles que :

$$\forall x \in M \qquad d_k(J^k(f)(x), J^k(g)(x)) \leq \alpha(x)$$

Ces ensembles forment une base de voisinage pour la topologie de Whitney. De plus si $k < l$ sont deux entiers, on a pour tout $f$ et tout $\alpha$ : $\mathcal{V}_l(f,\alpha) \subset \mathcal{V}_k(f,\alpha)$.

Soient $f$ une fonction différentiable de $M$ dans $W$ appartenant à $F$, $k$ un entier et $\alpha$ une fonction continue de $M$ dans $]0,\infty[$. Comme chaque ouvert $V_p$ est dense, il existe des fonctions différentiables $g_p \in F$, des entiers $k_p$ et des fonctions continues $\alpha_p$ de $M$ dans $]0,\infty[$ telles que :

— $g_0 \in \mathcal{V}_k(f,\alpha)$
— $\alpha_0 \leq \alpha$
— $k < k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$
— $\forall p \geq 0 \quad \alpha_{p+1} \leq \alpha_p/2$
— $\forall p \geq 0 \quad g_p \in V_p$
— $\forall p \geq 0 \quad g_{p+1} \in \mathcal{V}_{k_p}(g_p, \alpha_p)$
— $\forall p \geq 0 \quad \mathcal{V}_{k_p}(g_p, 2\alpha_p) \subset V'_p$.

On construit par récurrence $g_p$, $k_p$ et $\alpha_p$ en utilisant le fait que les parties $V_p$ sont ouvertes et denses. Si $p < q$ sont deux entiers, on vérifie l'inégalité :

$$\forall x \in M \qquad d_{k_p}(J^{k_p}(g_p)(x), J^{k_p}(g_q)(x)) \leq 2\alpha_p(x) \leq \frac{\alpha(x)}{2^{p-1}}$$

Pour tout entier $r$ et tout $x \in M$, la suite $J^r(g_p)(x)$ est une suite de Cauchy dans $J^r(M,W)$. Comme cet espace est complet, la suite converge vers un élément $G_r(x)$ de $J^r(M,W)$. Cette convergence dans le cas $r = 0$ implique que la suite $g_p$ converge point par point vers une fonction $g$ de $M$ dans $W$.

On va montrer que $g$ est une fonction différentiable qui appartient à chaque ouvert $V_p$ ainsi qu'à l'ouvert $\mathcal{V}_k(f, 2\alpha)$, ce qui terminera la démonstration.

Soient $x$ un point de $M$ et $y$ son image par $g$. Quitte à remplacer $M$ et $W$ par des ouverts de $\mathbf{R}^n$ difféomorphes à des voisinages ouverts de $x$ et de $y$, on peut supposer que $M$ est l'espace $\mathbf{R}^n$, que $W$ est l'espace $\mathbf{R}^m$, que $x$ et $y$ sont nuls et que les fonctions $g_p$ sont définies pour $p$ assez grand sur la boule unité $B$ de $\mathbf{R}^n$. L'espace des jets $J^r(M,W)$ est alors l'espace $\mathbf{R}^n \times \Pi_r$, $\Pi_r$ étant l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ de degré $\leq r$. Par hypothèse, la suite $g_p$ converge en tout point de $B$ vers $g$. De plus le développement de Taylor à l'ordre $r$ de $g_p$ converge uniformément sur $B$. On en déduit que $g$ est de classe $\mathrm{C}^r$ au voisinage de 0 et que son développement de Taylor à l'ordre $r$ est la limite du développement de Taylor de $g_p$. Comme ceci a lieu pour tout entier $r$, $g$ est différentiable au voisinage de 0.

On en déduit que la fonction $g$ de $M$ dans $W$ est différentiable et que pour tout $r$ et tout $x \in M$ la suite $J^r(g_p)(x)$ converge vers $J^r(g)(x)$. Plus précisément, on a pour tout $x \in M$ et tout $p$ assez grand : $d_r(J^r(g_p)(x), J^r(g)(x)) \leq 2\alpha_p(x)$, et $g$ appartient à l'ouvert $V_p$. On a également pour tout $x \in M$ :

$$d_k(J^k(f)(x), J^k(g)(x)) \leq d_k(J^k(f)(x), J^k(g_0)(x)) + d_k(J^k(g_0)(x), J^k(g)(x)) \leq 2\alpha(x)$$

et $g$ appartient au voisinage $\mathcal{V}_k(f, 2\alpha)$. □

**6.6 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $Z$ une sous-variété différentiable de $W$. Soient $M_0$ un fermé de $M$ et $Z_0$ un fermé de $W$ contenu dans $Z$. Alors l'ensemble des applications différentiables de $M$ dans $W$ qui sont transverses à $Z$ en $(M_0, Z_0)$ est un ouvert de $C^\infty(M, W)$.*

**Démonstration :** Considérons l'espace des jets $J^1(M, W)$ comme l'ensemble des triplets $(x, y, u)$ où $x$ et $y$ sont des points de $M$ et $W$ et où $u$ est une application linéaire de $\tau(M, x)$ dans $\tau(W, y)$. Notons $U$ le sous-espace de $J^1(M, W)$ formé des triplets $(x, y, u)$ tels que la source $x$ n'appartient pas à $M_0$ ou que le but $y$ n'appartient pas à $Z_0$ ou tels que :

$x$ et $y$ appartiennent à $M_0$ et à $Z_0$ et $\mathrm{Im}(u) + \tau(Z, y)$ est égal à $\tau(W, y)$.

Il est clair que $U$ est un ouvert de $J^1(M, W)$. Choisissons une métrique complète $d$ sur l'espace des jets $J^1(M, W)$.

Soit $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$ qui est transverse à $Z$ en $(M_0, Z_0)$. Alors $J^1(f)(x)$ appartient à $U$ pour tout $x \in M$. Soit $\alpha$ l'application qui à un point $x \in M$ associe la distance de $f(x)$ au complémentaire de $U$. Cette fonction est continue de $M$ dans $]0, \infty[$ et $\mathcal{V}_1(f, \alpha)$ est formé de fonctions qui sont transverses à $Z$ en tout point de $(M_0, Z_0)$. □

On peut aussi considérer l'espace des fonctions continues entre deux variétés. Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. On choisit une métrique complète $d$ sur $W$. Si $f$ est une fonction continue de $M$ dans $W$ et si $\alpha$ est une fonction continue de $M$ dans $]0, \infty[$, on note $\mathcal{V}_0(f, \alpha)$ l'ensemble des fonctions continues $g$ de $M$ dans $W$ qui vérifient :

$$\forall x \in M \qquad d(f(x), g(x)) < \alpha(x)$$

Cet ensembles forment une base de voisinages de $f$ pour une topologie appelée la topologie de la convergence forte.

**6.7 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. Soit $F$ un fermé de $M$. Soit $f$ une fonction continue de $M$ dans $W$ qui est différentiable sur un voisinage de $F$. Soit $X$ l'ensemble des fonctions continues de $M$ dans $W$ qui coïncident avec $f$ sur $F$. Alors l'ensemble des fonctions différentiables de $M$ dans $W$ qui coïncident avec $f$ sur $F$ est dense dans $X$ pour la topologie de la convergence forte.*

**Démonstration :** Soit $\mathrm{C}^0(M, W)$ l'espace des fonctions continues de $M$ dans $W$ muni de la topologie de la convergence forte. L'espace $X$ est un fermé de $\mathrm{C}^0(M, W)$. Choisissons une métrique complète $d$ sur $W$. Soit $g$ une fonction de $X$ et $\alpha$ une fonction continue de $M$ dans $]0, \infty[$. Il s'agit de construire une fonction différentiable $h$ de $M$ dans $W$ qui coïncide avec $f$ sur $F$ et qui appartienne à $\mathcal{V}_0(g, \alpha)$.

Soient $p$ et $n$ les dimensions de $M$ et $W$. Notons $B$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^p$.

**Lemme.** *Il existe une suite $(U_k, V_k, \varphi_k, \psi_k)$ telle que :*

*— $U_k$ et $V_k$ sont des ouverts de $M$ et $W$*

— *$\varphi_k$ est un difféomorphisme de $U_k$ sur $\mathbf{R}^p$*
— *$\psi_k$ est un difféomorphisme de $V_k$ sur $\mathbf{R}^n$*
— *les intérieurs des fermés $B_k = \varphi_k^{-1}(B)$ recouvrent $M$*
— *$g(U_k)$ est pour tout $k$ contenu dans l'ouvert $V_k$*
— *un compact de $M$ ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts $U_k$.*

**Démonstration du lemme :** Choisissons une métrique complète sur $M$ telle que toutes les boules fermées soient compactes. Pour chaque $x \in M$ il existe un ouvert $U_x$ de $M$ contenant $x$, contenue dans une boule ouverte de rayon 1 et difféomorphe à $\mathbf{R}^p$ par un difféomorphisme $\varphi_x$ et un ouvert $V_x$ de $W$ contenant $g(x)$ difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ par un difféomorphisme $\psi_x$ tel que $g(U_x)$ soit contenu dans $V_x$. Notons $B_x$ le fermé $\varphi_x^1(B)$. Les intérieurs des fermés $B_x$ recouvrent $M$ et, comme $M$ est une union dénombrable de compacts, on peut extraire de cette famille une famille dénombrable telle que les intérieurs des fermés correspondants $B_{x_k}$ recouvrent toujours $M$ et que pour chaque compact $K$ de $M$ il n'y a qu'un nombre fini de fermés $B_{x_k}$ qui rencontrent $K$. Comme chaque ouvert $U_{x_k}$ est contenu dans une boule de rayon 1, un tel ouvert $U_{x_k}$ ne peut rencontrer $K$ que si $B_{x_k}$ rencontre l'ensemble des points à distance au plus 2 de $K$. Cet ensemble est compact car il est contenu dans une boule fermée. On en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini d'ouvert $U_{x_k}$ qui rencontrent un compact donné. □

Choisissons une telle suite $(U_k, V_k, \varphi_k, \psi_k)$ (définie pour $k > 0$) et notons $F_k$ le fermé $F \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots B_k$. On va construire une suite de fonction $g_k$ telle que :
— $g_0 = g$
— pour tout $k > 0$, $g_k$ coïncide avec $g_{k-1}$ sur $F_{k-1}$ et sur un voisinage du complémentaire de $U_k$.
— pour tout $k > 0$, $g_k$ est différentiable sur un voisinage de $F_k$
— pour tout $k > 0$, $g_k$ appartient à l'ensemble $\mathcal{V}_0(g_{k-1}, \alpha/2^k)$.

Si une telle suite est construite, on voit que la suite $g_k$ est stationnaire sur tout compact et converge (dans la topologie de la convergence forte) vers une fonction différentiable $h$ appartenant à $X \cap \mathcal{V}_0(g, \alpha)$, ce qui donne le résultat.

Pour construire $g_k$ à partir de $g_{k-1}$, il suffit de construire $g_k$ sur l'ouvert $U_k$. Quitte à composer avec les difféomorphismes $\varphi_k$ et $\psi_k$, on pourra supposer que $g_{k-1}$ est définie de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ et que $G = F_{k-1} \cap U_k$ est un fermé de $\mathbf{R}^p$. La fonction $g_{k-1}$ est différentiable sur un voisinage de $G$. Soit $B'$ la boule fermée de $\mathbf{R}^p$ centrée en l'origine de rayon 2. D'après le théorème de Stone-Weiestrass, les coordonnées de $g_k$ peuvent être approchées par des fonctions différentiables, et ceci uniformément sur $B'$. On en déduit qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction différentiable $g'$ de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ qui coïncide avec $g_{k-1}$ sur $G$ et telle que $d(g_{k-1}(x), g'(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in B'$.

Choisissons une fonction différentiable $\beta$ de $[0, \infty[$ dans $[0, 1]$ qui prenne la valeur 1 sur un voisinage de $[0, 1]$ et 0 sur un voisinage de $[2, \infty[$. On pose alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}^p \qquad g''(x) = \beta(||x||)g'(x) + (1 - \beta(||x||))g_{k-1}(x)$$

On vérifie que $g''$ est une fonction continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ qui est égale à $g_{k-1}$ sur $G$ et en dehors de $B''$ et qui est différentiable sur un voisinage de $B$. Si l'on choisit

$\varepsilon$ suffisamment petit, la fonction qui est égale à $g_{k-1}$ en dehors de $U_k$ et à $g''$ sur $U_k$ est la fonction $g_k$ cherchée. $\square$

**Exercices.**

1) Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $f$ une application continue de $M$ dans $W$. Soit $F$ un fermé de $M$ tel que $f$ soit différentiable au voisinage de $F$. Montrer que $f$ est homotope à une application différentiable dans une homotopie constante sur $F$, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $h$ de $M \times [0,1]$ dans $W$ telle que :

— pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in F$, $h(x,t)$ est égal à $f(x)$

— pour tout $x \in M$, on a $h(x,0) = f(x)$

— la fonction $x \mapsto h(x,1)$ est différentiable

## 7. Le théorème de Sard.

**7.1 Définition.** *Soit $M$ et $W$ deux variétés différentiables de dimensions $p$ et $n$ et $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$. On appelle point critique de $f$ un point $x$ de $M$ tel que le rang de $df(x)$ soit strictement inférieur à $\inf(p,n)$. On appelle valeur critique de $f$ l'image par $f$ d'un point critique de $f$. Un point de $W$ qui n'est pas une valeur critique de $f$ est appelé valeur régulière de $f$.*

**7.2 Définition.** *Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$. Soit $X$ une partie de $M$. On dit que $X$ est Lebesgue-négligeable si, pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$, l'image $\varphi(X \cap U)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$.*

**7.3 Théorème (Sard).** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$. Alors l'ensemble des valeurs critiques de $f$ est Lebesgue-négligeable.*

Avant de démontrer ce théorème, nous allons montrer tout d'abord quelques propriétés des ensembles Lebesgue-négligeables.

**7.4 Proposition.** *Soit $X$ une partie d'une variété différentiable $M$. Soient $\varphi_i$ des cartes de $M$ définies sur des ouverts $U_i$ de $M$ qui recouvrent $X$. Alors $X$ est Lebesgue-négligeable si et seulement si les images $\varphi_i(X \cap U_i)$ sont négligeables pour la mesure de Lebesgue.*

**Démonstration :** Il est clair que si $X$ est Lebesgue-négligeable, chaque partie $\varphi_i(X \cap U_i)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Réciproquement, supposons que chaque partie $\varphi_i(X \cap U_i)$ soit négligeable pour la mesure de Lebesgue. Soit $\varphi$ une carte de $M$ définie sur un ouvert $U$ de $M$. Pour tout indice $i$, on pose : $Y_i = X \cap U \cap U_i$.

Pour tout $i$, on a : $\varphi(Y_i) = (\varphi \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_i(Y_i)$. Par hypothèse, $\varphi_i(Y_i)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. L'application de changement de carte $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ étant différentiable, son image $\varphi(Y_i)$ est également négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Notons $n$ la dimension de $M$. La partie $Y = \varphi(X \cap U)$ de $\mathbf{R}^n$ a donc la propriété suivante : $Y$ est recouvert par des ouverts $V_i$ (les ouverts $\varphi(U \cap U_i)$) et chaque partie $Y \cap V_i$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. On peut extraire de ce recouvrement un recouvrement dénombrable qui a la même propriété et $Y$, union dénombrable de négligeables est, lui aussi, négligeable.

Ainsi $\varphi(X \cap U)$ est négligeable et, comme cela a lieu pour toute carte $\varphi$ de $M$, $X$ est Lebesgue-négligeable. □

**7.5 Proposition.** *Une union dénombrable de parties Lebesgue-négligeables d'une variété différentiable $M$ est Lebesgue-négligeable.*

**Démonstration :** Ce résultat provient directement du fait qu'une union dénombrable de parties négligeables pour la mesure de Legesgue est négligeable. □

**Démonstration du théorème de Sard :** On va montrer ce théorème par récurrence sur la dimension $p$ de $M$. Le cas $p = 0$ est facile à vérifier car il n'y a pas de point critique dans ce cas.

On suppose donc que la variété source est de dimension $p$ et que le théorème de Sard est démontré dès que la variété source est de dimension strictement inférieure à $p$.

Pour tout entier $r > 0$, notons $X_r$ l'ensemble des points $x$ de $M$ tels que le jet $J^r(f)$ soit nul en $x$. Notons également $X_0$ l'ensemble des points critiques de $f$. On a les inclusions suivantes :

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$$

**Lemme 1.** *Si $r$ est un entier tel que $rn \geq p$, $f(X_r)$ est Lebesgue-négligeable.*

**Démonstration :** Soit $r$ un entier tel que : $rn \geq p$. Pour montrer que $f(X_r)$ est Lebesgue-négligeable, il suffit de montrer que tout point $x$ de $X_r$ possède un voisinage $U$ dans $M$ tel que $f(X_r \cap U)$ soit Lebesgue-négligeable. Soit $x$ un point de $X_r$. Notons $y$ le point image $y = f(x)$. Il existe deux cartes $\varphi$ et $\psi$ de $M$ et $W$ définies en $x$ et $y$ telles que $f$ envoie l'ouvert de définition $U$ de $\varphi$ en l'ouvert de définition $V$ de $\psi$.

Quitte à composer $f$ à gauche et à droite par $\psi$ et $\varphi^{-1}$, on peut supposer que $U$ est un ouvert de $\mathbf{R}^p$, que $V$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, que $\varphi$ et $\psi$ sont les inclusions et que $f$ est une application différentiable de $U$ dans $V$.

Notons $|| \ \ ||$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$. Par hypothèse, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ un réel $a > 0$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in X_r \cap U, \quad \forall y \in U \qquad ||y - x|| < a \Rightarrow ||f(y) - f(x)|| < \varepsilon ||y - x||^r$$

De plus, quitte à remplacer $U$ et $V$ par des ouverts plus petits, on peut supposer que le nombre $a$ ne dépend que de $\varepsilon$. On supposera également que les ouverts $U$ et $V$ sont des pavés ouverts de côtés $r_1$ et $r_2$, c'est-à-dire que $U$ est un produits d'intervalles ouverts de longueurs $r_1$ et $V$ un produits d'intervalles ouverts de longueurs $r_2$. Soient $\varepsilon$ un réel strictement positif et $a$ le réel donné par la formule précédente. Soit $b$ le plus grand réel tel qu'un pavé de côté $b$ ait un diamètre inférieur ou égal à $a$. On vérifie que : $b = a/\sqrt{p}$. On peut recouvrir $U$ par $N^p$ pavés de côtés $b$ dès que : $Nb > r_1$. Soit

$N$ le plus petit de ces nombres. Le nombre $N$ est équivalent à $r_1\sqrt{p}/a$ lorsque $a$ tend vers 0. Il est clair que $X_r \cap U$ est recouvert par au plus $N^p$ pavés de diamètre $a$. On en déduit que $f(X_r \cap U)$ est recouvert par au plus $N^p$ boules ouvertes de rayon $\varepsilon a^r$. Soit $\mu$ la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ et $\mu_0$ la mesure de la boule unité de $\mathbf{R}^n$. On a alors :

$$\mu(f(X_r) \cap U) \leq N^p \mu_0 \varepsilon^n a^{rn}$$

Notons $\alpha(\varepsilon)$ le membre de droite de cette inégalité. Ce qu'on a vu montre que $\alpha$ est équivalent à :

$$r_1^p \sqrt{p}^p a^{rn-p} \varepsilon^n \mu_0$$

Comme $a$ tend vers 0 lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 et que $rn - p$ est positif ou nul, $\alpha(\varepsilon)$ tend vers 0 lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, ce qui montre que $f(X_r \cap U)$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Comme ceci a lieu pour tout point de $X_r$, l'ensemble $f(X_r)$ est Lebesgue-négligeable. □

**Lemme 2.** *L'ensemble $f(X_1)$ est Lebesgue-négligeable.*

**Démonstration :** Si $n$ est nul, il n'y a pas de point critique et $f(X_1)$ est Lebesgue-négligeable. Sinon $f(X_r)$ est Lebesgue-négligeable pour $r$ assez grand et il suffit de montrer que $f(X_r - X_{r+1})$ est Lebesgue-négligeable pour tout $r > 0$. Soit $r > 0$ un entier et $x$ un point de $X_r - X_{r+1}$. Quitte à remplacer $M$ et $W$ par des variétés difféomorphes à des voisinages de $x$ et $y = f(x)$, on peut supposer que $M$ est un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et que $W$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On supposera aussi que $y$ est nul. Par hypothèse, il existe une fonction $g$ qui soit une dérivée partielle d'ordre $r$ d'une composante de $f$ dont la différentielle dg ne soit pas nulle en $x$. Cette fonction $g$ est une fonction de $M$ dans $\mathbf{R}$ nulle sur $X_r$ et sa différentielle n'est pas nulle en $x$. On en déduit que $g$ est transverse au voisinage de $x$ à $f(x) = 0$. Soit $M_1$ l'image réciproque $g^{-1}(0)$. Cet ensemble est au voisinage de $x$ une sous-variété de $M$ de dimension $p-1$ qui contient $X_r$ (au voisinage de $x$). Notons $f_1$ la restriction de $f$ à $M_1$. On vérifie que $f(X_r)$ est, au voisinage de $0 = f(x)$, contenu dans l'ensemble des valeurs critiques de $f_1$. Par hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de $f_1$ est Lebesgue-négligeable, ce qui implique que $f(X_r - X_{r+1})$ est également Lebesgue-négligeable, ce qui termine la démonstration du lemme. □

**Lemme 3.** *L'ensemble $f(X_0 - X_1)$ est Lebesgue-négligeable.*

Soit $x$ un point de $X_0 - X_1$ et $y$ son image par $f$. Quitte à remplacer $M$ et $W$ par des variétés difféomorphes à des voisinages de $x$ et $y = f(x)$, on peut supposer que $M$ est un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et que $W$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soit $F$ un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$ passant par $y$ dont la direction soit un supplémentaire de l'image de $df(x)$ dans $\mathbf{R}^n$. Soit $q$ sa dimension. Comme $x$ est un point critique de $f$ $df(x)$ n'est pas surjective et $q$ est strictement positif. Par construction, $f$ est transverse à $F$ au voisinage de $x$ et $f^{-1}(F)$ est, au voisinage de $x$, une sous-variété $M_1$ de $M$ de dimension strictement inférieure à la dimension de $M$. Soit $f_1$ la restriction de $f$ à $M_1$. On vérifie, comme précédemment, que $f(X_0)$ est, au voisinage de $y = f(x)$, contenu dans l'ensemble des valeurs critiques de $f_1$. Ceci implique, d'après l'hypothèse de récurrence, que

$f(X_0 - X_1)$ est Lebesgue-négligeable, ce qui termine la démonstration du lemme et celle du théorème. $\square$

Le théorème de Sard a quelques conséquences immédiates :

**Corollaire.** *Soit $f$ une application différentiable d'une variété différentiable $M$ dans une variété différentiable $W$. Alors, si $f$ est surjective, la dimension de $M$ est supérieure ou égale à celle de $W$.*

**Démonstration :** Soit $g$ l'application $(x,t) \mapsto f(x)$ de $M \times \mathbf{R}$ dans $W$. D'après le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de $g$ est Lebesgue-négligeable et il existe un point $y$ de $W$ qui n'est pas valeur critique de $g$. Comme $f$ est surjective, $y$ est de la forme $f(x) = g(x,0)$ et $(x,0)$ n'est pas un point critique. Comme $dg$ n'est pas injective en $(x,0)$, $dg$ est surjective en $(x,0)$ ce qui implique que $df$ est surjective en $x$.

On en déduit que la dimension de $M$ est supérieure ou égale à celle de $W$. $\square$

**Corollaire.** *Soit $f$ une application différentiable d'une variété différentiable $M$ de dimension $p$ dans la sphère $S^n$ de dimension $n > p$. Alors $f$ est homotope à une application constante.*

**Démonstration :** D'après le corollaire précédent, $f$ n'est pas surjective et il existe un point $y$ de la sphère qui ne soit pas dans l'image de $f$. Soit $U$ le complémentaire de $y$ dans la sphère $S^n$. La projection stéréographique donne un difféomorphisme $\varphi$ de $U$ sur l'espace $\mathbf{R}^n$. Soit $g$ la fonction de $M \times [0,1]$ dans $U \subset S^n$ qui envoie le couple $(x,t)$ en $\varphi^{-1}(t\varphi(f(x))$. On a clairement les propriétés suivantes :

$$\forall x \in M \quad g(x,1) = f(x)$$

$$\forall x, y \in M \quad g(x,0) = g(y,0)$$

et $g$ est une homotopie entre $f$ et l'application constante $x \mapsto g(x,0)$. $\square$

## 8. Les théorèmes de transversalité de Thom.

**8.1 Théorème (Thom).** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. Soit $k$ un entier et $J^k(M,W)$ l'espace des jets d'ordre $k$ de $M$ dans $W$. Soit $Z$ une sous-variété différentiable de $J^k(M,W)$. Alors l'ensemble des applications différentiables $f$ de $M$ dans $W$ telles que $J^k(f)$ soit transverse à $Z$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $C^\infty(M,W)$. Si de plus $Z$ est fermée, cette partie est un ouvert dense.*

En pratique, on a souvent besoin d'une version relative plus précise de ce théorème :

**8.2 Théorème.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. Soit $k$ un entier et $Z$ une sous-variété différentiable de $J^k(M,W)$. Soit $F$ un fermé de $M$. Soit $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$ telle que son jet d'ordre $k$ soit transverse à*

*$Z$ en tout point de $F$. Soit $X$ l'ensemble des applications différentiables de $M$ dans $W$ qui coïncident avec $f$ sur $F$. Alors l'ensemble des fonctions différentiables de $M$ dans $W$ qui coïncident avec $f$ sur $F$ et dont le jet d'ordre $k$ est transverse à $Z$, est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $X$.*

Le théorème précédent n'est en fait que le cas particulier $F = \emptyset$.

**Démonstration :** Considérons un fermé $Z_0$ de $J^k(M, W)$ contenu dans $Z$ et un compact $K$ de $M$. Notons $V(K, Z_0)$ l'ensemble des fonctions différentiables $g$ de $M$ dans $W$ telles que $J^k(g)$ soit transverse à $Z$ en tout point de $K \cap J^k(g)^{-1}(Z_0)$.

**Lemme 1.** L'ensemble $V(K, Z_0)$ est ouvert.

**Démonstration :** Cela est conséquence du fait que $g \mapsto J^k(g)$ est continue (proposition 6.4) et de la proposition 6.6. □

Soit $g$ une fonction différentiable de $M$ dans $W$ tel que $J^k(g)$ soit transverse à $Z$ en $(F \cap K, Z_0)$. On note $X(g)$ l'espace des fonctions différentiables de $M$ dans $W$ qui coïncident avec $g$ sur $F$.

**Lemme 2.** L'ensemble $V(K, Z_0) \cap X(g)$ est dense dans $X(g)$.

**Démonstration :** Considérons tout d'abord le cas où $M$ et $W$ sont difféomorphes à $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$, et où $F$ contient le complémentaire d'un compact. Quitte à composer avec des difféomorphismes, on pourra supposer que $M$ est $\mathbf{R}^p$, que $W$ est $\mathbf{R}^n$, que $K$ est contenu dans une boule fermée $B$ centrée en l'origine et que $F$ contient le complémentaire d'une boule fermée $B'$ centrée en l'origine. On supposera que $B$ est strictement contenue dans $B'$.

Soit $\Pi$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ de degré au plus $k$. L'espace des jets $J^k(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^p \times \Pi$. Le difféomorphisme réciproque envoie un couple $(x, P)$ de $\mathbf{R}^p \times \Pi$ en le triplet $(x, y, u)$, où $y$ est égal à $P(x)$ et où $u$ est la classe à l'ordre $k$ de $P$ en $x$. On identifiera $J^k(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$ avec $\mathbf{R}^p \times \Pi$ via ce difféomorphisme. Ainsi $Z$ est une sous-variété différentiable de $\mathbf{R}^p \times \Pi$. De même, si $g$ est une fonction différentiable de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$, son jet à l'ordre $k$ est la fonction $x \mapsto (x, P_x)$, où $P_x$ est la fonction qui à $y \in \mathbf{R}^p$ associe le développement de Taylor de $g(y)$ en $x$ à l'ordre $k$.

Soit $h$ une fonction de $X(g)$. Considérons l'application $\varphi$ de $\mathbf{R}^p \times \Pi$ dans l'espace de jets $J^k(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^p \times \Pi$ qui à un couple $(x, P)$ de $\mathbf{R}^p \times \Pi$ associe le couple $(x, P_x)$, $P_x$ étant le développement de Taylor à l'ordre $k$ au point $x$ de la fonction $y \mapsto h(y) + P(y)$. On vérifie que pour tout $x \in \mathbf{R}^p$ et tout polynôme $P$ de $\Pi$, on a : $\varphi(x, P) = \varphi(x, 0) + (0, P)$. Comme de plus la première coordonnée de $\varphi(x, 0)$ est égale à $x$, l'application $\varphi$ est un difféomorphisme et $Z' = \varphi^{-1}(Z)$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^p \times \Pi$.

Notons *pr* la projection de $Z'$ dans $\Pi$. Soit $(x_0, P)$ un point de $\mathbf{R}^p \times \Pi$. L'application $x \mapsto \varphi(x, P)$ est transverse en $x_0$ à $Z$ si et seulement si l'application $x \mapsto (x, P)$ est transverse en $x_0$ à $Z'$. Et ceci est équivalent à dire que l'espace tangent de $Z'$ en $(x_0, P)$ se surjecte sur $\Pi$ via la différentielle de *pr* ou que l'application *pr* est transverse en $(x_0, P)$ à $P$. En conséquence, l'application $x \mapsto \varphi(x, P)$ est transverse à $Z$

si et seulement si $pr$ est transverse au point $P$.

D'après le théorème de Sard, il existe un polynôme $P$ de $\Pi$ aussi proche de 0 que l'on veut tel que $pr$ soit transverse à $P$. Alors le jet d'ordre $k$ de la fonction $h + P$ est transverse à $Z$.

D'autre part, la fonction $J^k(h)$ est transverse à $Z$ en $(F \cap K, Z_0)$. Soit $U$ l'ensemble des points $x$ de $\mathbf{R}^p$ tels que $J^k(h)$ soit transverse à $Z$ en $(\{x\}, Z_0)$. L'ensemble $U$ est un voisinage de $F \cap K$. Soit $H$ un compact qui soit un voisinage de tout point de $K$ extérieur à $U$ et qui soit disjoint de $F$. Choisissons une fonction différentiable $\alpha$ de $\mathbf{R}^p$ dans $[0, 1]$ qui soit nulle sur un voisinage de $F$ et qui soit égale à 1 sur un voisinage de $H$. On pose alors $h_1 = h + \alpha P$.

La fonction $h_1$ appartient à $X(g)$ car elle est égale à $h$ et à $g$ sur $F$. Elle est transverse à $Z$ en tout point de $H$. Soit $H_1$ l'ensemble des points de $K$ qui ne sont ni dans $F$ ni dans $H$. Si l'on choisit $P$ suffisamment petit, $h_1$ est transverse à $Z$ en $(H_1, Z_0)$ car $h$ l'est. Ainsi la fonction $h_1$ appartient à $V(K, Z_0) \cap X(g)$ et elle peut être choisie aussi proche que l'on veut de $h$, ce qui prouve que $h$ est adhérant à $V(K, Z_0) \cap X(g)$. L'espace $V(K, Z_0) \cap X(g)$ est donc bien dense dans $X(g)$.

Considérons maintenant le cas général. Soit $h$ une fonction de $X(g)$. Il existe des ouverts $U_i$ $(1 \leq i \leq m)$ de $M$ difféomorphes à $\mathbf{R}^p$, des ouverts $V_i$ de $W$ difféomorphes à $\mathbf{R}^n$, et des compacts $K_i$ contenus dans $U_i$ tels que l'on ait :

— les intérieurs de $K_i$ recouvrent $K$

— $h(U_i)$ est pour tout $i$ contenu dans $V_i$.

Pour tout $i$, on pose : $F_i = F \cup K_1 \cup \cdots \cup K_i$.

On construit alors des fonctions $h_i$ de la façon suivante : on pose tout d'abord $h_0 = h$. Supposons que $h_j$ est défini pour tout $j < i$, et que l'on a :

— pour tout $1 < j < i$ $h_j$ coïncide avec $h_{j-1}$ sur $F_{j-1}$ et sur un voisinage du complémentaire de $U_j$

— pour tout $j < i$, $J^k(h_j)$ est transverse à $Z$ en $(K_j, Z_0)$.

Pour construire $h_i$, il suffit d'utiliser le cas précédent avec les ouverts $U_i$ et $V_i$, le fermé $F_{i-1} \cap U_i \cap F'$, $F'$ étant un voisinage fermé du complémentaire de $U_i$ qui soit disjoint de $K_i$, et le compact $K_i$. On obtient ainsi une fonction $h'$ de $U_i$ dans $V_i$ qui est proche de $h_{i-1}$ et qui coïncide avec $h_{i-1}$ au voisinage du complémentaire de $U_i$. On définit alors la fonction $h_i$ comme étant égale à $h_{i-1}$ en dehors de $U_i$ et à $h'$ sur $U_i$. A chaque étape, la fonction $h_i$ est aussi proche que l'on veut de $h_{i-1}$. A la fin de cette construction, on a une fonction $h_m$ qui appartient à $V(K, Z_0) \cap X(g)$ et qui est aussi proche que l'on veut de $h$. L'espace $V(K, Z_0) \cap X(g)$ est donc dense dans $X(g)$. □

**Fin de la démonstration :** Il existe une suite $K_i$ de compacts de $M$ qui recouvrent $M$ et une suite $Z_i$ de fermés de $Z$ qui recouvrent $Z$. Soit $Y$ l'espace des fonctions différentiables de $M$ dans $W$ qui coïncident avec $f$ sur $F$ et dont le jet à l'ordre $k$ soit transverse à $Z$. Il est clair que $Y$ est l'intersection des espaces $V(K_i, Z_i) \cap X(f)$. D'après le lemme précédent, $Y$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $X = X(f)$. □

**Remarque.** Les deux théorèmes de transversalités précédents donnent des informations sur les applications différentiables près de chaque point source. Si l'on veut avoir des informations sur les applications différentiables près de plusieurs points sources, par exemple près de deux points sources $x$ et $y$ qui ont même image, on doit considérer un espace de jets plus complexe.

**8.3 Définition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $r$ et $k$ deux entiers. On appelle espace des jets $r$-multiples d'ordre $k$ le sous-espace $J^k(M, W, r)$ de $J^k(M, W)^r$ formé des éléments $(u_1, \ldots, u_r)$ où les sources des jets $u_1, \ldots, u_r$ sont tous distincts.*

*Si $f$ est une application différentiable de $M$ dans $W$, on note $J^k(f, r)$ l'application $J^k(f)^r$ restreinte à $M^{(r)}$. C'est une fonction de $M^{(r)}$ dans $J^k(M, W, r)$.*

**8.4 Théorème.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $k \geq 0$ et $r > 0$ deux entiers. Soit $Z$ une sous-variété de l'espace des jets $J^k(M, W, r)$. Alors l'ensemble des applications différentiables $f$ de $M$ dans $W$ telles que $J^k(f, r)$ soit transverse à $Z$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $C^\infty(M, W)$.*

**Démonstration :** On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications différentiables $g$ de $M$ dans $W$ telles que $J^k(g, r)$ soit transverse à $Z$. Soit $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$. Notons $p$ et $n$ les dimensions de $M$ et $W$. On choisit des suites $U_i$, $V_i$ et $K_i$ telles que :

— chaque $U_i$ est un ouvert de $M^{(r)}$ de la forme $U_{i1} \times \cdots \times U_{ir}$ où les espaces $U_{is}$ sont des ouverts disjoints de $M$ difféomorphes à $\mathbf{R}^p$

— chaque $V_i$ est un ouvert de $W^r$ de la forme $V_{i1} \times \cdots \times V_{ir}$ où les $V_{is}$ sont des ouverts de $W$ difféomorphes à $\mathbf{R}^n$

— chaque $K_i$ est un compact de $U_i$ de la forme $K_{i1} \times \cdots \times K_{ir}$

— les intérieurs des compacts $K_i$ recouvrent $M^{(r)}$

— les ouverts $U_i$ sont localement finis, c'est-à-dire que tout compact de $M^{(r)}$ ne rencontre qu'un nombre fini de ces ouverts

— pour tout $i$ et tout $s$, $f$ envoie $U_{is}$ en $V_{is}$.

Choisissons également une suite de fermé $Z_j$ de $J^k(M, W, r)$ dont l'union est $Z$.

Notons $X$ l'ensemble des applications $g$ de $M$ dans $W$ telles que $g^r(K_i)$ soit contenu dans $V_i$ pour tout $i$. Comme les compacts $K_i$ sont localement finis, $X$ est un voisinage ouvert de $f$ dans $\mathrm{C}^\infty(M, W)$. Pour chaque $i$ et $j$, notons $X_{ij}$ le sous-espace de $X$ formé des applications $g$ de $M$ dans $W$ telles que $J^k(j, r)$ soit transverse à $Z$ sur $K_i \cap J^k(g, r)^{-1}(Z_j)$. On notera également $X_i$ l'intersection des $X_{ij}$. Il suffit de montrer que chaque espace $X_{ij}$ est un ouvert dense de $X$. Comme $K_i$ est compact et $Z_j$ est compact, $X_{ij}$ est un ouvert de $X$. Il reste à montrer que chaque $X_{ij}$ est dense dans $X$ et pour cela il suffit de montrer que chaque $X_i$ est dense dans $X$.

Soit $i$ un entier. Pour simplifier, on posera, pour tout $s \leq r$ :

$$U'_s = U_{is} \quad V'_s = V_{is} \quad K'_s = K_{is}$$

Soit $g$ une application de $X$. On choisit pour chaque $s$ un difféomorphisme $\varphi_s$ de $U'_s$ sur $\mathbf{R}^p$, un difféomorphisme $\psi_s$ de $V_s$ sur $\mathbf{R}^n$ et une fonction $\alpha_s$ de $M$ dans $[0, 1]$ dont le support est un compact contenu dans $U'_s$ et qui est égale à 1 sur $K'_s$. En composant $g$ par les difféomorphismes $\varphi_s^{-1}$ et $\psi_s$, on obtient une application différentiable $g_s$ de

$\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$. Soit $\Pi$ l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ de degré au plus $k$. Si $P_1, \ldots, P_r$ sont $r$ polynômes de $\Pi$, on note $F(P_1, \ldots, P_r)$ l'application de $M$ dans $W$ qui est égale à $g$ en dehors des ouverts $U'_j$, et à la fonction $\psi_j \circ (g_j + \alpha_j P_j) \circ \varphi_j^{-1}$ sur $U'_j$. Comme les ouverts $U'_j$ sont disjoints et que chaque fonction $\alpha_j$ est nulle près de la frontière de $U'_j$, cette fonction est différentiable.

Il est clair que $F(P_1, \ldots, P_r)$ tend vers $g$ si $(P_1, \ldots, P_r)$ tend vers 0. Du plus, si les polynômes $P_1, \ldots, P_r$ sont suffisamment petits, la fonction $(P_1, \ldots, P_r)$ appartient à $X$. Il suffit donc de trouver des polynômes $P_1, \ldots, P_r$ aussi petits que l'on veut tels que le jet $J^k(F(P_1, \ldots, P_r), r)$ soit transverse à $Z$ sur $K'_1 \times \ldots \times K'_r$.

Soit $J$ le sous-espace de $J^k(M, W, r)$ formé des éléments $(u_1, \ldots, u_r)$ tels que, pour tout $s \leq r$, la source du jet $u_s$ appartient à $U'_s$ et le but à $V'_s$. Les difféomorphismes $\varphi_s$ et $\psi_s$ induisent un difféomorphisme de $J$ sur $J_1 = (\mathbf{R}^p)^r \times \Pi^p$. Soit $G$ l'application de $(\mathbf{R}^p)^r \times \Pi^r$ dans $J_1$ qui à $(x_1, \ldots, x_r, P_1, \ldots, P_r)$ associe l'élément de $J_1$ correspondant au jet $r$-multiple d'ordre $k$ de $F(P_1, \ldots, P_r)$ en $(x_1, \ldots, x_r)$. On procède ensuite exactement comme dans la démonstration du théorème 8.2 (lemme 2). On montre que $G$ est un difféomorphisme, on note $Z'$ l'espace $G^{-1}(Z \cap J)$ ($J$ étant identifié à $J_1$), et on choisit une valeur régulière proche de 0 de la projection $(\mathbf{R}^p)^r \times \Pi^r \to \Pi^r$ restreinte à $Z'$. Cette valeur régulière $(P_1, \ldots, P_r)$ répond au problème. $\square$

**Remarque.** Il existe aussi une version relative du théorème 8.4, où l'on ne considère que les applications qui coïncident avec une fonction donnée sur un fermé de la source. Il existe aussi des version des théorèmes 8.1, 8.2 et 8.4 pour des variétés à bord.

Avant d'énoncé une version avec bord des théorèmes de transversalité, on aura besoin de quelques notations.

Soient $M$ et $W$ deux variétés à bord. Soient $\mathring{M}$ et $\mathring{W}$ leurs intérieurs. On note $C^\infty(M, W, \partial)$ l'espace des applications différentiables de $M$ dans $W$ qui envoie bord en bord. Comme dans le cas sans bord on munit cet espace de la topologie de Whitney et tout fermé de $C^\infty(M, W, \partial)$ est un espace de Baire. Si $k \geq 0$ et $r > 0$ sont deux entiers on a deux espaces de jets $J^k(\mathring{M}, \mathring{W}, r)$ et $J^k(\partial M, \partial W, r)$. Si $f$ est une fonction de $C^\infty(M, W, \partial)$, on a deux fonctions $J^k(f, k) : \mathring{M} \longrightarrow J^k(\mathring{M}, \mathring{W}, r)$ et $J^k(\partial f, k) : \partial M \longrightarrow J^k(\partial M, \partial W, r)$.

On a alors le résultat suivant :

**8.5 Théorème.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables à bord. Soient $F$ un fermé de $M$ et $f$ une fonction différentiable de $M$ dans $W$ qui envoie le bord de $M$ en le bord de $W$. Soient $k \geq 0$ et $r > 0$ deux entiers et $Z$ et $Z'$ des sous-variétés différentiables de $J^k(\mathring{M}, \mathring{W}, r)$ et $J^k(\partial M, \partial W, r)$. On suppose que $J^k(f, r)$ est transverse à $Z$ sur $F$ et que $J^k(\partial f, r)$ est transverse à $Z'$ sur $F \cap \partial M$. Soit $X$ l'espace des fonctions de $C^\infty(M, W, \partial)$ qui coïncident avec $f$ sur $F$ et $Y$ l'ensemble des fonctions $g \in X$ telles que $J^k(g, r)$ et $J^k(\partial g, r)$ soient transverses à $Z$ et $Z'$. Alors $Y$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $X$.*

On ne démontrera pas ce théorème ici. Les techniques sont essentiellement les mêmes que celles utilisées dans les démonstrations des théorèmes de transversalité précédents.

## 9. Immersions et plongements

**9.1 Définitions.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. Soit $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$. On dit que $f$ est une immersion (resp. une submersion) si sa différentielle est injective (resp. surjective) en tout point de $M$. On dit que c'est un plongement si $f$ est un difféomorphisme de $M$ sur une sous-variété de $W$.*

**9.2 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables de dimensions $p$ et $n$, avec $n \geq 2p$. Alors l'ensemble des immersions de $M$ dans $W$ est dense pour la convergence forte dans l'ensemble des applications continues de $M$ dans $W$.*

**Démonstration :** Remarquons tout d'abord que l'ensemble des applications différentiables de $M$ dans $W$ est dense pour la convergence forte dans l'ensemble des applications continues. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des immersions de $M$ dans $W$ est dense dans $\mathrm{C}^\infty(M, W)$.

Rappelons que l'espace des jets $J^1(M, W)$ peut être considéré comme formé des triplets $(x, y, u)$ où $x$ est un point $M$, $y$ un point de $W$ et $u$ une application linéaire de $\tau(M, x)$ dans $\tau(W, y)$.

Considérons le sous-ensemble $Z$ de $J^1(M, W)$ formé des triplets $(x, y, u)$ où $u$ n'est pas injective. L'ensemble $Z$ est l'union $Z_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_{p-1}$, $Z_i$ étant l'ensemble des triplets $(x, y, u)$, $u$ étant de rang $i$. Or l'ensemble des applications linéaires de rang $i$ entre deux espaces vectoriels $E_1$ et $E_2$ est une sous-variété de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ de dimension $i(\dim(E_1) + \dim(E_2) - i)$. On en déduit que $Z_i$ est pour tout $i$ une sous-variété différentiable de $J^1(M, W)$ de codimension $pn - i(n + p - i) = (n - i)(p - i)$. Notons, pour tout $i < p$, $\mathcal{F}(M, W, i)$ l'ensemble des applications différentiables $f$ de $M$ dans $W$ tels que $J^1(j)$ soit transverse à $Z_i$ et $\mathcal{F}(M, W)$ l'intersection des $\mathcal{F}(M, W, i)$. C'est une intersection dénombrable d'ouverts denses, c'est donc une partie dense de $\mathrm{C}^\infty(M, W)$.

Soit $f$ une application appartenant à $\mathcal{F}(M, W)$. Supposons que $x$ soit un point de $M$ tel que $J^1(f)(x)$ appartienne à $Z_i$ pour un certain $i < p$. Alors on a :

$$\dim \tau(M, x) + \dim \tau(Z, J^1(f)(x)) \geq \dim \tau(J^1(M, W), J^1(f)(x))$$

ce qui implique de la dimension $p$ de $M$ est supérieure ou égale à la codimension de $Z$ dans $J^1(M, W)$, c'est-à-dire : $p \geq (n - i)(p - i)$. Or le plus petit des nombres $(n - i)(p - i)$ est $n - p + 1 > p$. Ceci implique qu'un tel point n'existe pas et $J^1(f)$ ne rencontre pas $Z$ et cela signifie que la différentielle de $f$ est injective en tout point de $M$ et $f$ est une immersion. Ainsi $\mathcal{F}(M, W)$ est l'ensemble des immersions de $M$ dans $W$ et est une partie dense. D'autre part, les fonctions de $\mathcal{F}(M, W)$ ne sont autre que les fonctions $g$ telles que $J^1(g)(M)$ soit disjoint de $Z$. Comme $Z$ est fermé, l'ensemble des immersions de $M$ dans $W$ est un ouvert de $\mathrm{C}^\infty(M, W)$. □

**9.3 Corollaire.** *Soit $M$ une variété différentiable. Alors $M$ possède une structure* *riemannienne. C'est-à-dire que l'on peut munir chaque espace tangent $\tau(M,x)$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien qui dépende de façon différentiable du point $x$.*

**Démonstration :** Soit $n$ la dimension de $M$. D'après le théorème précédent, il existe une immersion $f$ de $M$ dans $\mathbf{R}^{2n}$. Pour chaque point $x$ de $M$, l'application linéaire $df(x)$ est une application linéaire injective de $\tau(M,x)$ dans $\mathbf{R}^{2n}$. La structure euclidienne standard de $\mathbf{R}^{2n}$ induit par restriction une structure d'espace euclidien sur $df(x)(\tau(M,x))$, ce qui induit, via $df(x)$, une structure d'espace vectoriel euclidien sur l'espace tangent de $M$ en $x$.

Pour montrer que cette structure dépend différentiablement du point, il faut choisir une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $U$ étant un ouvert de $M$. La carte induit pour chaque $x \in U$ un isomorphisme $d\varphi(x)$ de $\tau(M,x)$ sur $\mathbf{R}^n$. Les structures euclidiennes sur $\tau(M,x)$ induisent des structures euclidienne $\sigma(x)$ sur $\mathbf{R}^n$ définies par des produits scalaires $< \, , \, >_x$. Il faut montrer que pour tout $u$ et $v$ dans $R^n$, le produit scalaire $< u,v >_x$ dépend de façon différentiable de $x$. Or ce produit scalaire n'est autre que l'expression suivante :

$$< u,v >_x = < df(x) \circ d\varphi(x)^{-1}(u), df(x) \circ d\varphi(x)^{-1}(v) >$$

qui est évidemment différentiable en $x$.

**9.4 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables de dimension $p$ et $n$, avec $n > 2p$. Alors l'ensemble des immersions injectives de $M$ dans $W$ est dense dans l'ensemble des immersions de $M$ dans $W$.*

**Démonstration :** Soit $I(M,W)$ l'espace des immersions de $M$ dans $W$. D'après ce que l'on vient de voir, $I(M,W)$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathrm{C}^\infty(M,W)$. Soit $Z$ le sous-espace de $J^0(M,W,2)$ formé des éléments de la forme $(x_1,x_2,y_1,y_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont distincts dans $M$ et $y_1$ et $y_2$ égaux dans $W$. L'espace $Z$ est une sous-variété fermée de $J^0(M,W,2)$ de codimension $n$ et l'ensemble $V$ des fonctions $h$ de $M$ dans $W$ telles que $J^0(h,2)$ soit transverse à $Z$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathrm{C}^\infty(M,W)$.

Soit $h$ une fonction de $V$. Comme la dimension de $M$ est strictement inférieure à la codimension de $Z$, l'image de $J^0(h,2)$ ne rencontre pas $Z$ et $h$ n'a aucun point double. L'espace $V$ n'est donc autre que l'espace des fonctions différentiables injectives de $M$ dans $W$ et les immersions injectives forment une partie dense dans $I(M,W)$. □

**9.5 Théorème.** *Toute variété différentiable de dimension $n$ est difféomorphe à une sous-variété fermée de $\mathbf{R}^{2n+1}$.*

**Démonstration :** Posons $m = 2n+1$. Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$. Il existe une fonction continue propre $f$ de $M$ dans $[0,\infty[\subset \mathbf{R}^m$ (voir la démonstration de la proposition 6.1). D'après les propositions 9.2 et 9.4, il existe une immersion injective $g$ de $M$ dans $\mathbf{R}^m$ qui soit proche de $f$ pour la topologie de la convergence forte. Ceci implique que $g$ est également propre. On vérifie alors que $h$ est alors un difféomorphisme de $M$ sur une sous-variété fermée de $\mathbf{R}^m$. □

**9.6 Théorème.** *Pour toute variété différentiable $M$, il existe un difféomorphisme $f$*

*de $\partial M \times [0,1]$ sur un voisinage de $\partial M$ dans $M$ tel que $f(x,0)$ soit égal à $x$ pour tout $x \in \partial M$.*

**Démonstration :** Soit $n$ la dimension de $M$. On sait qu'il existe un difféomorphisme de $M$ sur une sous-variété différentiable fermée de $\mathbf{R}^{n+p}$ lorsque $p$ est suffisamment grand. Quitte à remplacer $M$ par son image par ce difféomorphisme, on peut supposer que $M$ est une sous-variété fermée de $\mathbf{R}^{n+p}$. Soit $E$ l'ensemble des couples $(x,u)$ où $x$ est un point de $\partial M$ et $u$ un vecteur de $\mathbf{R}^{n+p}$ normal en $x$ à $\partial M$. Cet espace $E$ est l'espace total d'un fibré vectoriel $\xi$ de dimension $p+1$. On note $E_0$ (resp. $E_1$) le sous-espace de $E$ formé des couples $(x,u)$ où $u$ est tangent (resp. normal) en $x$ à $M$. Ces espaces sont les espaces totaux de deux fibrés vectoriels $\xi_1$ et $\xi_2$ de dimension 1 et $p$. D'autre part chaque fibre de $\xi_1$ est orienté par les vecteurs rentrants et hérite de $\mathbf{R}^{n+p}$ d'une structure d'espace euclidien. Ainsi $\xi_1$ est un fibré vectoriel euclidien orienté de dimension 1 sur $\partial M$. Il est trivial. La fibre en un point $x$ de $\partial M$ de $\xi$ est de la forme $F \times \mathbf{R}$ où $F \times \{0\}$ est l'ensemble des vecteurs de la fibre appartenant à $E_2$ et $(0,1)$ est le vecteur unitaire rentrant. On en déduit que $E$ est difféomorphe à $E_2 \times \mathbf{R}$ par un difféomorphisme $\alpha$. D'autre part, l'application $\beta : (x,u) \mapsto x+u$ est une application différentiable de $E$ dans $\mathbf{R}^{n+p}$. On vérifie que la différentielle de $\beta$ en $(x,0)$ est pour tout $x \in \partial M$ un isomorphisme. On en déduit qu'il existe une fonction continue $\lambda$ de $\partial M$ dans $]0,+\infty[$ telle que $\beta$ induise un difféomorphisme de l'ensemble $V_\lambda$ des couples $(x,u)$ avec $(x,u) \in E$ et $u \in ||u|| \leq \lambda(x)$ sur un voisinage de $\partial M$ dans $\mathbf{R}^{n+p}$. On considère alors l'application $g : y \mapsto (\pi \times \mathrm{Id}) \circ \alpha \circ \beta^{-1}(y)$ définie sur un voisinage de $\partial M$ dans $M$, $\pi$ étant la projection $E_2 \to \partial M$ du fibré $\xi_2$.

On vérifie que la différentielle de $g$ en tout point de $\partial M$ est bijective. C'est donc un difféomorphisme d'un voisinage de $\partial M$ dans $M$ sur un voisinage $V$ de $\partial M \times \{0\}$ dans $\partial M \times [0,+\infty[$. Si $\mu$ est une application différentiable de $\partial M$ dans $]0,+\infty[$, on note $W_\mu$ le sous-espace de $\partial M \times [0,+\infty[$ formé des couples $(x,u)$ avec $u \leq \mu(x)$. L'espace $W_\mu$ est difféomorphe à $\partial M \times [0,1]$. Comme $V$ contient un tel voisinage, $M$ possède un voisinage de $\partial M$ difféomorphe à $\partial \times [0,1]$ par un difféomorphisme satisfaisant aux conditions du théorème. □

**9.7 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables et $f$ une application continue de $M$ dans $W$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $f$ dans la topologie de la convergence forte tel que, quel que soit la fonction continue $g$ de $\mathcal{V}$ il existe une homotopie propre entre $f$ et $g$.*

**Démonstration :** On peut supposer que $W$ est une sous-variété différentiable fermée d'un espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Soient $E$ l'ensemble des couples $(x,u)$ où $x$ est un point de $W$ et $u$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$ normal à $W$, et $E_0$ le sous-espace de $E$ formé des couples $(x,0)$. Si $\lambda$ est une fonction continue de $W$ dans $]0,+\infty[$, on note $E_\lambda$ le sous-espace de $E$ formé des couples $(x,u)$ avec $||u|| < \lambda(x)$. Les espaces $E_\Lambda$ forment une base de voisinage de $E_0$ dans $E$. L'application $f : (x,u) \mapsto x+u$ est différentiable et sa différentielle est bijective en tout point de $E_0$. On en déduit qu'il existe une fonction $\lambda$ telle que $f$ est un difféomorphisme de $E_\lambda$ sur un voisinage $W'$ de $W$ dans $\mathbf{R}^n$. Si $\pi : E \to E_0$ est la projection $(x,u) \mapsto (x,0)$, l'application $\varphi = f \circ \pi \circ f^{-1}$ est une application différentiable de $W'$ dans $W$ qui est l'identité sur $W$.

Soit $\alpha : M \rightarrow ]0, +\infty[$ l'application qui à $x \in M$ associe la distance de $f(x)$ au complémentaire de $W'$ dans $\mathbf{R}^n$. On note $\mathcal{V}$ le voisinage $\mathcal{V}_0(f, \alpha)$ de $f$. Si $g$ est une fonction de $\mathcal{V}$, le segment $[f(x), g(x)]$ est entièrement contenu dans $W'$. On définit alors la fonction $H : M \times [0, 1] \rightarrow W$ par : $H(x, t) = \varphi(tf(x) + (1 - t)g(x))$. C'est une homotopie propre entre $f$ et $g$. $\square$

**Exercices.**

1) Soit $M$ une variété différentiable à bord de dimension $n > 0$. Montrer que $M$ est difféomorphe à une sous-variété différentiable à bord fermée de $[0, \infty[\times \mathbf{R}^{2n}$ dont le bord est contenu dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{2n}$.

## 10. Le degré.

Convenons tout d'abord d'appeler nombre algébrique de points d'une variété compacte orientée $M$ de dimension 0 le nombre $\lambda(M)$ de points de $M$ muni du signe $+1$ diminué du nombre de points muni du signe $-1$.

**10.1 Définition.**

Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables compactes orientées de dimension $n$ et $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$. On suppose $W$ non vide. Soit $y$ une valeur régulière de $f$. Soit $K$ l'image réciproque de $y$ par $f$. Comme $M$ est compacte, il en est de même de $K$. Comme $f$ est transverse à $y$, $K$ est une variété de dimension $n - n = 0$. Si l'on oriente le point $y$ par son orientation canonique, $K$, qui apparaît comme le produit fibré de $f$ et de l'inclusion de $y$ dans $W$, est canoniquement orienté (théorème 4.2). On appelle degré de $f$ en $y$ le nombre algébrique de points de $K$.

**10.2 Proposition.** *Soient $M$ et $W \neq \emptyset$ deux variétés différentiables compactes orientées de dimension $n$ et $f$ une application différentiable de $M$ dans $W$. On suppose $W$ connexe. Soit $y$ une valeur régulière de $f$. Alors le degré de $f$ en $y$ est indépendant de $y$. On l'appelle le degré de $f$.*

**Démonstration :** Si $V$ est une variété compacte orientée de dimension 0, notons $\lambda(V)$ le nombre algébrique de points de $V$. Il s'agit de montrer que si $y_1$ et $y_2$ sont deux valeurs régulières de $f$, on a : $\lambda(f^{-1}(y_1)) = \lambda(f^{-1}(y_2))$.

Soit $y_0$ un point de $W$. Soit $U$ un voisinage de $y_0$ dans $W$, difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ par un difféomorphisme $\varphi$. Montrons que le degré de $f$ en une valeur régulière $y$ de $f$ contenue dans $U$ est indépendant de $y$. Soient $y_1 \in U$ et $y_2 \in U$ deux valeurs régulières de $f$. Soit $Z$ l'image réciproque par $\varphi$ de la droite joignant $\varphi(y_1)$ et $\varphi(y_2)$. Le sous-espace $Z$ de $W$ est une sous-variété de $W$ de dimension 1 contenant $y_1$ et $y_2$. Il existe donc une application différentiable $g$ de $M$ dans $W$ qui soit aussi proche de $f$ que l'on veut et qui soit transverse à $Z$. Comme $g$ est proche de $f$, $f$ et $g$ ont même degré en $y_1$ et en $y_2$. Soit $Z_0$ le sous-espace $\varphi^{-1}([\varphi(y_1), \varphi(y_2)])$. C'est une variété à bord de dimension 1. On l'oriente pour que l'on ait : $\partial Z_0 = y_2 - y_1$, c'est-à-dire que le bord orienté de $Z_0$ est formé de $y_2$ avec son orientation standard et de $y_1$ avec l'orientation opposée.

Soit $Z_1$ le sous-espace $\varphi^{-1}(Z_0)$. C'est une variété compacte à bord de $M$ de dimension 1 et l'on a, en tant que variété orientée : $\partial Z_1 = g^{-1}(y_2) - g^{-1}(y_1)$. Or toute composante connexe de $Z_1$ est difféomorphe à un cercle ou à l'intervalle $[0,1]$ et son bord orienté est soit vide soit la différence de deux points. On en déduit que le bord orienté de $Z_1$ est formé de $p$ points avec le signe 1 et de $p$ points avec le signe $-1$ et l'on a : $\lambda(\partial(Z_1)) = 0$. On en déduit : $\lambda(g^{-1}(y_1)) = \lambda(g^{-1}(y_2))$ et le degré de $g$ en $y_1$ est égal au degré de $g$ en $y_2$. Le degré de $f$ en une valeur régulière $y$ de $f$ contenue dans $U$ est donc indépendant de $y$. Notons $\deg(f, y_0)$ ce degré. L'application $y \mapsto \deg(f, y)$ est définie sur $W$ et est localement constante. Comme $W$ est connexe, elle est constante et le degré de $f$ en une valeur régulière $y$ de $f$ est indépendant de $y$. $\square$

**Définition.** *On appelle cobordisme entre deux variétés différentiables compactes $M_1$ et $M_2$ une variété compacte à bord $W$ dont le bord est l'union (disjointe) de $M_1$ et $M_2$. Si $M_1$ et $M_2$ sont deux variétés différentiables compactes orientées, on dit que $W$ est un cobordisme orienté entre $M_1$ et $M_2$ si le bord (orienté) de $W$ est l'union (disjointe) de $M_2$ et de $-M_1$.*

Cette notion de cobordisme s'étend aussi aux applications.

**Définition.** *Soit $X$ un espace topologique. Soient $M_1$ et $M_2$ deux variétés différentiables compactes orientées. Soient $f_1$ une application continue de $M_1$ dans $X$ et $f_2$ une application continue de $M_2$ dans $X$. On dit qu'elles sont cobordantes s'il existe un cobordisme orienté $W$ entre $M_1$ et $M_2$ et une application $g$ de $W$ dans $X$ qui prolonge $f_1$ et $f_2$.*

**Remarque.** On vérifie que deux applications continue d'une variété différentiable compacte orientée dans un espace topologique sont cobordantes si elles sont homotopes. On vérifie aussi que la relation de cobordisme entre les applications entre des variétés différentiables compactes orientées et un espace topologique $X$ est une relation d'équivalence.

**10.3 Proposition (Invariance du degré par cobordisme).** *Soient $M_1$, $M_2$ et $M'$ trois variétés différentiables compactes orientées de même dimension. On suppose $M'$ connexe. Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions différentiables de $M_1$ et $M_2$ dans $M'$. On suppose que $f_1$ et $f_2$ sont cobordantes. Alors elles ont même degré.*

**Démonstration :** Si $f_1$ et $f_2$ sont cobordantes, il existe un cobordisme orienté $W$ entre $M_1$ et $M_2$ et une fonction continue $g$ de $W$ dans $M'$ qui prolonge $f_1$ et $f_2$. On commence par approximer (dans la topologie de la convergence forte) $g$ par une fonction différentiable $h$ qui coïncide avec $f_1$ et $f_2$ sur $M_1$ et $M_2$. On choisit ensuite une valeur régulière $y$ de $g$. L'espace $C = g^{-1}(y)$ est une sous-variété compacte orientée à bord dont le bord orienté est $f_1^{-1}(y) - f_2^{-1}(y)$. On en déduit que le nombre algébrique de points du bord de $C$ est nul, ce qui signifie que $f_1$ et $f_2$ ont le même degré en $y$.$\square$

**Remarque.** Si $M$ et $M'$ sont deux variétés différentiables compactes connexes orientées et si deux fonctions différentiables $f_1$ et $f_2$ de $M$ dans $M'$ sont homotopes, elles sont cobordantes et ont donc même degré.

Ceci permet de définir le degré d'une fonction continue entre deux variétés différentiables compactes orientées de même dimension. En effet toute fonction continue $f$ est homotope à une fonction différentiable $g$, et le résultat précédent montre que le degré de $g$ ne dépend pas du choix de $g$. Ce degré est, par définition, le degré de $f$.

## 11. Intersection algébrique

### 11.1 Définition.

Soient $M$, $M'$ et $W$ trois variétés différentiables orientées de dimension $p$, $q$ et $n$. On suppose $M$ et $M'$ compactes. Soient $f$ et $g$ deux applications différentiables de $M$ et $M'$ dans $W$. On suppose que $f$ et $g$ sont transverses. Soit $Z$ le produit fibré des deux applications $f$ et $g$. Comme $f$ et $g$ sont transverses, $Z$ est une sous-variétés différentiable de $M \times M'$. Comme $M$ et $M'$ sont compactes, il en est de même de $Z$. La dimension de $Z$ est $p + q - n$. De plus $Z$ est orientée. Si $n$ est égal à $p + q$ on appelle intersection algébrique de $f$ et de $g$ le nombre algébrique de points de $Z$.

**11.2 Proposition.** *Soient $M$, $M'$ et $W$ trois variétés différentiables orientées de dimension $p$, $q$ et $n = p+q$, $M$ et $M'$ étant compactes. Soient $f$ et $g$ deux applications continues de $M$ et $M'$ dans $W$. Soient $f_1$ et $g_1$ deux applications différentiables de $M$ et $M'$ dans $W$ qui sont transverses et homotopes respectivement à $f$ et $g$. Alors l'intersection algébrique de $f_1$ et $g_1$ ne dépend que $f$ et $g$. On appelle ce nombre l'intersection algébrique de $f$ et $g$.*

**Démonstration :** Notons $M_0$ l'union disjointe de $M$ et $M'$. Les fonctions continues $f$ et $g$ induisent une fonction continue $h$ de $M_0$ dans $W$. Soit $Z$ le sous-espace de $J^0(M_0, W, 2)$ formé des éléments $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ de $J^0(M_0, W, 2)$ tels que $x_1$ appartienne à $M$, $x_2$ à $M'$ et $y_1$ soit égal à $y_2$. La fonction $h$ est homotope à une fonction différentiable $h_1$ dont le jet à l'ordre 0 est transverse à $Z$. Cette fonction $h_1$ est définie par deux fonctions $f_1$ et $g_1$ qui sont homotopes à $f$ et $g$ et qui sont transverses. Soient $f_2$ et $g_2$ deux autre applications différentiables de $M$ et $M'$ qui sont transverses et homotopes à $f$ et $g$. Par composition d'homotopies, on obtient des homotopies $F$ entre $f_1$ et $f_2$ et $G$ entre $g_1$ et $g_2$. Là encore ces homotopies peuvent être considérées comme une fonction $H$ de $[0, 1] \times M_0$ dans $W$.

On procède alors comme plus haut avec la variété $[0, 1] \times M_0$ à la place de $M_0$. Soit $Z'$ le sous-espace de $J^0([0, 1] \times M_0, W, 2)$ défini de la même façon que $Z$. Le procédé décrit précédemment donne une fonction $H'$ qui est égale à $H$ sur $[0, 1] \times M$ et $[0, 1] \times M'$ et dont le jet à l'ordre 0 est transverse à $Z'$. Cela signifie que les deux homotopies $F'$ et $G'$ de $[0, 1] \times M$ dans $W$ et de $[0, 1] \times M'$ dans $W$ sont des homotopies entre $f_1$ et $f_2$ et entre $g_1$ et $g_2$ et qu'elles sont transverses.

Le produit fibré de $F'$ et $G'$ est un cobordisme orienté entre le produit fibré de $f_1$ et $f_2$ et le produit fibré de $g_1$ et $g_2$. On en déduit que ces deux produit fibrés ont le même nombre algébrique de points et l'intersection algébrique de $f_1$ et $g_1$ est égale à l'intersection algébrique de $f_2$ et $g_2$. □

**11.3 Proposition.** *Soient $M$, $M'$ et $W$ trois variétés différentiables orientées de dimension $p$, $q$ et $n = p+q$, $M$ et $M'$ étant compactes. Soient $f$ et $g$ deux applications continues de $M$ et $M'$ dans $W$. Alors l'intersection algébrique de $f$ et $g$ ne dépend que des classes de cobordisme de $f$ et $g$.*

**Démonstration :** Soient $M_1$, $M_2$ deux variétés différentiables compactes orientées de dimension $p$ et $f_1 : M_1 \longrightarrow W$ et $f_2 : M_2 \longrightarrow W$ deux applications continues. Soient également $M'_1$, $M'_2$ deux variétés différentiables compactes orientées de dimension $q$ et $g_1 : M'_1 \longrightarrow W$ et $g_2 : M'_2 \longrightarrow W$. deux applications continues. Si $f_1$ et $f_2$ sont cobordantes et si $g_1$ et $g_2$ sont cobordantes, il existe deux cobordismes $C$ et $C'$ entre $M_1$ et $M_2$ et entre $M'_1$ et $M'_2$ et deux applications continues $F$ et $G$ de $C$ dans $W$ qui prolonge $f_1$, $f_2$, $g_1$ et $g_2$.

Soit $C_0$ l'union disjointe de $C$ et $C'$. Notons $Z$ le sous-espace de $J^0(C_0, W, 2)$ formé des éléments $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ avec $x_1 \in C$, $x_2 \in C'$, et $y_1 = y_2 \in W$. On choisit une application différentiable de $C_0$ dans $W$ proche de $F \coprod G$ et dont le jet à l'ordre 0 transverse à $Z$. Cette application est formée d'une application $F' : C \longrightarrow W$ et d'une application $G' : C' \longrightarrow W$. On vérifie que $F'$ et $G'$ sont transverses. De plus les restrictions $f'_1$ et $f'_2$ de $F'$ sont homotopes à $f_1$ et $f_2$. De même les restrictions $g'_1$ et $g'_2$ de $G'$ sont homotopes à $g_1$ et $g_2$. Soit $\Sigma$ le produit fibré de $F'$ et $G'$. Cet espace est un cobordisme orienté entre le produit fibré de $f'_1$ et $g'_1$ et celui de $f'_2$ et $g'_2$. On en déduit que l'intersection algébrique de $f'_1$ et $g'_1$ est égale à l'intersection algébrique de $f'_2$ et $g'_2$, ce qui montre le résultat. □

## 12. Auto-intersection.

**Définition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. Soit $f$ une immersion de $M$ dans $W$. On dit qu'elle est auto-transverse si, pour tout $x$ et $y$ distincts dans $M$ ayant même image, les espaces tangents $df(\tau(M,x))$ et $df(\tau(M,y))$ engendrent $\tau(W,f(x)$.*

**12.1 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables. Alors l'ensemble des immersions auto-transverses est dense dans l'ensemble des immersions de $M$ dans $W$.*

**Démonstration :** Soit $Z$ la sous-variété de l'espace des jets $J^0(M,W,2)$ formé des éléments $(x_1,x_2,y_1,y_2)$ tels que $y_1$ et $y_2$ sont égaux. Soit $f$ une immersion de $M$ dans $W$. Soient $x_1$ et $x_2$ deux points distincts de $M$ tels que $J^0(f)(x_1,x_2)$ appartienne à $Z$. Cela signifie que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont égaux. Soient $E$, et $F$ les espaces tangent de $M$ en $x_1$ et $x_2$ et $G$ l'espace tangent de $W$ en $f(x_1)=f(x_2)$. Soit $G'$ la diagonale de $G\oplus G$ : $G'$ est l'ensemble des couples $(u,u)$, $u\in G$. L'image de $d(J^0(f,2))(x_1,x_2)$ est l'ensemble des éléments $(u,v,df(x_1).u,df(x_2).v)$, $u\in E$, $v\in F$, et l'espace tangent à $Z$ en $(x_1,x_2,y_1,y_2)$ est $E\oplus F\oplus G'$. On en déduit que $J^0(f,2)$ est transverse à $Z$ en $(x_1,x_2,y_1,y_2)$ si et seulement si l'on a $df(E)+df(F)=G$. Cela signifie que $J^0(f,2)$ est transverse à $Z$ si et seulement si $f$ est auto-transverse. Les théorèmes de transversalité donnent donc le résultat. $\square$

**12.2 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables de dimension $p$ et $n$. Soit $f$ une immersion auto-transverse. Alors l'ensemble $D(f)$ des points doubles de $f$ possède une structure canonique de variété différentiable de dimension $2p-n$. Si $M$ est compacte, $D(f)$ est compact. Si $M$ et $W$ sont orientés et si $p$ et $n$ ont même parité, $D(f)$ est orienté.*

**Démonstration.** Soit $\widetilde{D}(f)$ le sous-espace de $M^{(2)}$ formé des couples $(x_1,x_2)$ d'éléments distincts de $M$ qui ont même image par $f$. Pour des raisons de transversalité, $\widetilde{D}(f)$ est une sous-variété fermée de $M^{(2)}$ de dimension $2p-n$. Soit $\sigma$ l'application de $M^{(2)}$ dans lui-même qui envoie $(x_1,x_2)$ en $(x_2,x_1)$. Soit $S(M)$ le quotient de $M^{(2)}$ par la relation suivante : $u$ et $v$ sont équivalents si $v$ est égal à $u$ ou à $\sigma(u)$. On note $\pi$ l'application quotient de $M^{(2)}$ sur $S(M)$. Une étude locale montre qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur $S(M)$ telle que l'application $\pi$ induise pour tout point $u$ de $M^{(2)}$ un difféomorphisme d'un voisinage de $u$ sur un voisinage de $\pi(u)$. Comme $\pi$ est localement un difféomorphisme, l'image $\pi(\widetilde{D}(f))$ est une sous-variété différentiable de dimension $2p-n$ de $S(M)$.

Supposons $M$ compacte. Montrons que $\widetilde{D}(f)$ est fermé dans $M^2$. Si ce n'était pas le cas, il existerait deux suites $x_i$ et $y_i$ telles que, pour tout $i$ on ait : $x_i\neq y_i$ et $f(x_i)=f(y_i)$ et qui converge vers une même limite $x\in M$. Cela impliquerait que $f$ n'est pas injective au voisinage de $x$ et que $f$ n'est pas une immersion. Ainsi $\widetilde{D}(f)$ est fermé dans $M^2$ et est compact. Son image $D(f)$ par $\pi$ est donc aussi compacte.

Supposons $M$ et $W$ orientées. Alors $M^{(2)}$ est orientée. D'autre part la diagonale $W'$ de $W^2$ est une sous-variété orientée de la variété orientée $W^2$, et l'espace $(f^2)^{-1}(W')$ est une sous-variété orientée de $M^{(2)}$. Pour que $D(f)$ soit orienté il suffit que $\sigma$ induise un difféomorphisme direct sur $\widetilde{D}(f)$. Soit $u=(x_1,x_2)$ un point de $\widetilde{D}(f)$ et

$v = (x_2, x_1)$ son image par $\sigma$. On pose : $y = f(x_1) = f(x_2)$, et on note $E$, $F$ et $G$ les espaces tangents $\tau(M, x_1)$, $\tau(M, x_2)$ et $\tau(W, y)$. En convenant qu'une application est $\varepsilon$-directe si elle est directe dans le cas $\varepsilon = 1$ et indirecte dans le cas contraire, la différentielle de $\sigma$ est $(-1)^p$-directe. Soit $\sigma'$ l'application $(y_1, y_2) \mapsto (y_2, y_1)$ de $W^2$ dans lui-même. La différentielle de $\sigma'$ est $(-1)^n$-directe. Comme $\sigma'$ est l'identité sur la diagonale de $W^2$, la différentielle de $\sigma'$ en $(y, y)$ induit une application $(-1)^n$-directe sur le quotient $K = (G \oplus G)/G$ de l'espace tangent de $W^2$ par l'espace tangent de la diagonale. D'autre part $f$ induit un isomorphisme du quotient $H$ de $E \oplus F$ par l'espace tangent en $u$ de $\widetilde{D}(f)$ et cet isomorphisme est compatible avec $\sigma$ et $\sigma'$. On en déduit que $\sigma$ induit une application $(-1)^n$-directe de $H$ sur son image par $\sigma$ et que $\sigma$ induit une application $(-1)^{n+p}$-directe sur l'espace tangent de $\widetilde{D}(f)$. Si $p$ et $n$ ont même parité, $\sigma$ est un difféomorphisme direct de $\widetilde{D}(f)$ dans lui-même. Il existe donc une unique orientation de $D(f)$ telle que la projection $\pi$ soit localement un difféomorphisme direct. □

Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables compactes orientées de dimensions $p$ et $n = 2p$. Soit $f$ une immersion de $M$ dans $W$. Supposons $f$ auto-transverse. Alors $D(f)$ est une variété compacte de dimension 0 formé de $m$ points. Si $p$ est pair, $D(f)$ est orienté et son nombre algébrique de points est un entier $m'$. On appelle auto-intersection algébrique de $f$ le nombre $m'$ si $p$ est pair ou le nombre $m$ considéré comme un élément de $\mathbf{Z}/2$ sinon.

**12.3 Proposition.** *Soient $M$ et $W$ deux variétés différentiables orientées de dimensions $p$ et $n = 2p$, $M$ étant compacte. Soit $f$ une immersion de $M$ dans $W$. Soit $g$ une immersion de $M$ dans $W$ auto-transverse proche de $f$. Alors l'auto-intersection algébrique de $g$ est indépendante du choix de $g$. On appelle ce nombre l'auto-intersection algébrique de $f$.*

**Démonstration :** Soient $g_1$ et $g_2$ deux immersions de $M$ dans $W$ auto-transverses proches de $f$. Si ces deux applications sont choisies suffisamment proches de $f$, elles sont homotopes par une homotopie $h$ de $[0,1] \times M$ dans $W$ proche d'une homotopie constante. On en déduit que l'application $x \mapsto h(t, x)$ est une immersion pour tout $t$ de $[0, 1]$. Soit $Z$ le sous-espace de $J^0([0,1] \times M, W, 2)$ formé des éléments $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont deux élément distincts de $[0, 1] \times M$ et $y_1$ et $y_2$ sont égaux dans $W$. L'application $h$ est transverse à $Z$ au voisinage de $\{0\} \times M$ et $\{1\} \times M$. On peut donc la modifier en une application différentiable $h'$ de $[0, 1] \times M$ dans $W$ qui coïncide avec $h$ au voisinage de $\{0\} \times M$ et $\{1\} \times M$ et qui soit transverse à $Z$. l'image réciproque par $J^0(h', 2)$ de $Z$ est une cobordisme orienté entre $\widetilde{D}(g_1)$ et $\widetilde{D}(g_2)$ qui induit par quotient un cobordisme orienté $C$ entre $D(g_1)$ et $D(g_2)$.

Si $p$ est pair, on vérifie comme précédemment que $C$ est orienté et $D(g_1)$ et $D(g_2)$ ont le même nombre algébrique de points. Sinon, $C$ est un cobordisme qui n'est plus nécessairement orienté. Comme chaque composante connexe de $C$ est difféomorphe à un cercle ou un intervalle $[0, 1]$, son bord a un nombre pair de points et $D(g_1)$ et $D(g_2)$ ont le même nombre de points modulo 2. □

## 13. Caractéristique d'Euler

### Fibré vectoriel.

Soit $M$ une variété différentiable. On appelle fibré vectoriel différentiable sur $M$ la donnée $\xi$ d'une variété différentiable $E$ (appelé espace total du fibré), d'une submersion $p$ surjective de $E$ dans $M$ (appelée projection) d'une structure d'espace vectoriel réel sur chaque fibre $p^{-1}(x)$ telle que :

— la multiplication d'un réel par un vecteur d'une fibre est une application différentiable de $\mathbf{R} \times E$ dans $E$

— la somme de deux vecteurs d'une même fibre de $p$ est une application différentiable du produit fibré $E_2$ de $p$ et $p$ dans $E$.

Le fibré tangent d'une variété différentiable est un exemple de fibré vectoriel différentiable.

On dit que $\xi$ est un fibré vectoriel différentiable de dimension $n$ si chaque fibre de $\xi$ est de dimension $n$.

Soit $\xi = (E, p)$ un fibré vectoriel différentiable sur une variété différentiable $M$. Soit $x$ un point de $M$. Notons $E_x$ la fibre $p^{-1}(x)$. C'est un espace vectoriel. Soit $x_0$ le vecteur nul de $E_x$. La structure d'espace vectoriel de $E_x$ induit un isomorphisme linéaire entre $E_x$ et $\tau(E_x, x_0)$. Comme $p$ est une submersion, on a une suite exacte d'espaces vectoriels :

$$SE(x) \qquad\qquad 0 \longrightarrow E_x \longrightarrow \tau(E, x_0) \xrightarrow{p} \tau(M, x) \longrightarrow 0$$

On dit que $\xi$ est orienté si chaque fibre $E_x = p^{-1}(x)$ de $p$ est muni d'une orientation $\omega_x$ et si pour chaque point $x \in M$, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $M$, une orientation de $U$ et une orientation de $p^{-1}(U)$ telles que les suites exactes $SE(y)$ soient directes pour tout point $y \in U$.

Si $M$ est orienté, la donnée d'une orientation de $\xi$ est équivalente à la donnée d'une orientation de l'espace total de $\xi$.

**13.1 Notations.** Soit $\xi$ un fibré vectoriel différentiable sur une variété différentiable $M$. On appelle section nulle de $\xi$ l'application de $M$ dans l'espace total $E$ de $\xi$ qui à un point $x \in M$ associe le vecteur nul de la fibre en $x$. On vérifie que la section nulle est une application différentiable.

On appelle section de $\xi$ une application différentiable $f$ de $M$ dans $E$ qui envoie tout point $x \in M$ en un point de la fibre en $x$. Si $p$ est la projection de $\xi$, $f$ est une section si et seulement si la composée $p \circ f$ est l'identité de $M$.

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel différentiable est, de façon évidente, muni d'une structure d'espace vectoriel réel.

**13.1 Proposition.** *Soit $M$ une variété différentiable compacte orientée de dimension $n$. Soit $\xi$ un fibré vectoriel différentiable orienté de dimension $n$. Alors il existe une section $f$ de $\xi$ transverse à la section nulle. De plus l'intersection algébrique de $f$*

*et de la section nulle est un nombre qui ne dépend que de $\xi$. Ce nombre est appelé caractéristique d'Euler de $\xi$.*

**Démonstration :** Notons $E$ l'espace total de $\xi$, $p$ sa projection et $s$ sa section nulle. L'image de $s$ est une sous-variété différentiable fermée $Z$ de $E$. Pour des raisons de transversalité, il existe une application différentiable $g$ de $M$ dans $E$ qui soit transverse à $Z$ et aussi proche de $s$ que l'on veut. Considérons l'application $p\circ g$. Cette application est proche de l'identité de $M$. En chaque point $x$ de $M$ la différentielle de $p \circ g$ est donc bijective et $p \circ g$ est un difféomorphisme d'un voisinage de tout point de $M$ sur un voisinage de son image. Comme $M$ est compact, l'ensemble des points doubles de $p\circ g$ est une variété compacte et comme $p\circ g$ est proche de l'identité, cette variété des points doubles est vide. On en déduit que si $g$ est choisi suffisamment proche de $s$, $p\circ g$ est un difféomorphisme. On pose alors : $f = g\circ(p\circ g)^{-1}$. Il est clair que $f$ est une section de $\xi$ et qu'elle est transverse à $Z$.

Soit $f$ une section de $\xi$ transverse à la section nulle. Notons $K$ le produit fibré de $f$ et de $s$. L'espace $K$ est une sous-variété différentiable compacte de $M \times M$. Comme $M$ est de dimension $n$ et que $Z$ est de codimension $n$, la dimension de $K$ est nulle. Comme $M$ et $\xi$ sont orientés, il en est de même de $E$ et de $K$. Le nombre algébrique de points de $K$ n'est autre que l'intersection algébrique de $f$ et de $s$. Il s'agit de montrer que ce nombre ne dépend pas du choix de $f$.

Considérons $f_1$ et $f_2$ deux sections de $\xi$ qui soient transverses toutes les deux à $Z$. Considérons l'application $h$ de $[0,1] \times M$ dans $E$ définie par :

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall x \in M, \qquad h(t,x) = (1-t)f_1(x) + tf_2(x)$$

Cette formule a un sens, car $f_1(x)$ et $f_2(x)$ vivent dans un même espace vectoriel et ceci pour tout $x \in M$. Ainsi $f_1$ et $f_2$ sont homotopes et l'intersection algébrique de $f_1$ et $s$ et l'intersection algébrique de $f_2$ et $s$ sont égales (voir proposition 11.2). $\square$

**13.2 Définition.** *Soit $M$ une variété différentiable compacte orientée. On appelle caractéristique d'Euler de $M$ la caractéristique du fibré tangent de $M$.*

Considérons maintenant une variété différentiable compacte $M$ non nécessairement orientée. Soit $f$ une section du fibré tangent transverse à la section nulle. Soit $x$ un point de $M$ ou $f$ s'annule. Notons $E$ l'espace total du fibré tangent et $s$ la section nulle. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_x \longrightarrow \tau(E, s(x)) \longrightarrow \tau(M, x) \longrightarrow 0$$

Mais cette suite est scindée par la différentielle de $s$ en $x$. On en déduit un isomorphisme de $E_x \oplus \tau(M,x) = \tau(M,x) \oplus \tau(M,x)$ sur $\tau(E, s(x))$. Si on identifie $\tau(E, s(x))$ avec $\tau(M,x) \oplus \tau(M,x)$ par cet isomorphisme, les différentielles de $f$ et de $s$ sont de la forme : $u \mapsto (u, \alpha(u))$ et $u \mapsto (u, 0)$, $\alpha$ étant une application linéaire de $\tau(M,x)$ dans lui-même. Si $M$ est orienté, le point $x$ est orienté et par conséquent muni d'un signe. Ce signe est $+1$ si $\alpha$ est direct et $-1$ sinon. Mais le fait que $\alpha$ soit ou non direct est indépendant de l'orientation de $\tau(M,x)$. Il en résulte que chaque point $x$ où $f$ s'annule est naturellement muni d'un signe. On note $\chi(f)$ la somme de ces signes.

**13.3 Proposition.** *Soit $M$ une variété différentiable compacte. Soit $f$ une section du fibré tangent de $M$ transverse à la section nulle. Alors le nombre $\chi(f)$ est indépendant du choix de $f$. On appelle ce nombre la caractéristique d'Euler de $M$.*

**Démonstration.** Si $M$ est orientable, il n'y a rien à démontrer : On choisit une orientation de $M$ et on est ramené au cas orienté.

Sinon, soient $f_1$ et $f_2$ deux sections du fibré tangent de $M$ transverses à la section nulle. On note $E$, $s$ et $p$ l'espace total, la section nulle et la projection du fibré tangent. Soit $h$ l'application $h$ de $[0,1] \times M$ dans $E$ définie par :

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall x \in M, \qquad h(t,x) = (1-t)f_1(x) + tf_2(x)$$

Soit $g$ une application proche de $h$, égale à $h$ au voisinage de $\{0\} \times M$ et de $\{1\} \times M$ et transverse à l'image $Z$ de la section nulle. On note $g_t$ l'application $x \mapsto g(t,x)$. Soit $G$ l'application $(t,x) \mapsto g \circ (p \circ g_t)^{-1}(x)$. Pour tout $t$, l'application $x \mapsto G(t,x)$ est une section du fibré tangent. De plus $G$ est transverse à $Z$. Il reste à montrer que $K = G^{-1}(Z)$ est naturellement orienté. Soit $y = (t,x)$ un point de $K$. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tau(K,y) \longrightarrow \mathbf{R} \oplus \tau(M,x) \longrightarrow \tau(E,s(x))/\tau(Z,s(x)) \longrightarrow 0$$

Mais $\tau(E,s(x))$ est canoniquement isomorphe à $\tau(M,x) \oplus \tau(M,x)$ et $\tau(Z,s(x))$ est isomorphe (via $dp(x)$) à $\tau(M,x)$. La suite exacte précédente devient alors :

$$0 \longrightarrow \tau(K,y) \longrightarrow \mathbf{R} \oplus \tau(M,x) \longrightarrow \tau(M,x) \longrightarrow 0$$

et il existe une unique orientation de $\tau(K,y)$ telle que cette suite exacte soit directe quel que soit l'orientation choisie de $\tau(M,x)$.

On vérifie que ces orientations définissent une orientation de $K$. Le nombre algébrique de points du bord de $K$ est nul, ce qui prouve que $\chi(f_1)$ est égal à $\chi(f_2)$. $\square$

## 14. Fonctions de Morse

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$. Soit $f$ une fonction différentiable de $M$ dans $\mathbf{R}$ . Soit $x$ un point critique de $f$. Soit $\varphi$ une carte de $M$ définie au voisinage de $x$. On dit que $x$ est un point critique non dégénéré si la dérivée seconde de $f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x)$ est une forme quadratique non dégénérée.

Le nombre de carrés négatifs de cette forme quadratique est appelée indice du point critique.

**14.1 Proposition.** *La notion de point critique non dégénéré et l'indice d'un tel point critique sont indépendants du choix de la carte.*

**Démonstration :** Soient $\varphi$ et $\psi$ deux cartes définies en $x$. Quitte à composer ces cartes avec des translations, on pourra supposer que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont nuls. Soit $\alpha$ l'application $\varphi \circ \psi^{-1}$ définie au voisinage de 0. Soient $g$ et $h$ les applications $f \circ \varphi^{-1}$

et $f \circ \psi^{-1}$. On a, au voisinage de 0 : $h = g \circ \alpha$. Si $dg(0)$ est nul $dh(0)$ l'est également et on a la formule :

$$h''(0)(u) = g''(0)(d\alpha(0).u)$$

Comme $d\alpha(0)$ est bijective, $g''(0)$ est non dégénérée si et seulement si $h''(0)$ l'est et la notion de point critique non dégénéré est bien définie.

En fait la formule précédente signifie que $g''(0)$ induit une forme quadratique bien définie sur l'espace tangent $\tau(M, x)$ et le point critique est non dégénéré si et seulement si cette forme est non dégénérée.

De plus toute forme quadratique sur $\mathbf{R}$ est, dans une certaine base, de la forme : $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ et le couple $(p, q)$ (appelé signature de la forme) est indépendant de la base. Si le point critique est non dégénéré, on a : $p + q = n$ et le nombre de carrés négatifs $q$ de dépend que de la forme quadratique et est indépendant de la carte. $\square$

**Définition.** Soit $f$ une fonction d'une variété différentiable compacte à valeurs dans $\mathbf{R}$. On dit que $f$ est une fonction de Morse si tous les points critiques de $f$ sont non dégénérés.

**14.2 Proposition.** *Toute variété différentiable compacte possède une fonction de Morse.*

**Démonstration :** Soit $M$ une variété différentiable compacte de dimension $n$. Comme précédemment on identifiera $J^1(M, \mathbf{R})$ avec les triplets $(x, y, u)$ avec $x \in M$, $y \in \mathbf{R}$ et où $u$ est une application linéaire de $\tau(M)$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout entier $r \geq 0$ notons $Z$ l'ensemble des éléments $(x, y, u)$ de $J^1(M, \mathbf{R})$ où $u$ est nul. L'espace $Z$ est une sous-variété fermé de $J^1(M, \mathbf{R})$ de codimension $n$. D'après les théorèmes de transversalité, il existe une fonction différentiable $f$ de $M$ dans $\mathbf{R}$ tel que $J^1(f)$ soit transverse à $Z$. Il reste à montrer que $f$ est une fonction de Morse.

On remarque tout d'abord que $J^1(f)^{-1}(Z)$ n'est autre que l'ensemble des points critiques de $f$. Ceux-ci sont en nombre fini. Considérons un tel point critique $x$. Quitte à remplacer $M$ par un voisinage de $x$ difféomorphe à $\mathbf{R}^n$, on peut supposer que $M$ est en fait $\mathbf{R}^n$ et même que $x$ est nul. Dans ce cas l'espace $J^1(M, \mathbf{R})$ est le produit $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times E$, $E$ étant l'espace des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, et $J^1(f)$ est la fonction $x \mapsto (x, f(x), df(x))$. Comme 0 est un point critique, $df(0)$ est nul. Soit $b$ la dérivée seconde de $f$ en 0. C'est une forme bilinéaire et $f(0) + b(x, x)/2$ est le développement de Taylor en 0 à l'ordre 2 de $f(x)$. On vérifie alors que la différentielle de $J^1(f)$ en 0 est l'application $u \mapsto (u, 0, \widetilde{b}(u))$, $\widetilde{b}(u)$ étant l'application $v \mapsto b(u, v)$. Comme $J^1(f)$ est transverse à $Z$ en 0 et que l'espace tangent à $Z$ en $(0, f(0), 0)$ est $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \{0\}$, l'application $\widetilde{b}$ est surjective, ce qui signifie que $b$ est non dégénérée et $f$ est une fonction de Morse. $\square$

**14.3 Théorème.** *Soit $M$ une variété différentiable compacte. Soit $f$ une fonction de Morse. Soient $\{x_i\}$ l'ensemble des points critiques de $f$ et $n_i$ l'indice du point critique*

*$x_i$. Soit $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler de $M$. Alors on a la formule :*

$$\sum_i (-1)^{n_i} = \chi(M)$$

**Démonstration :** Choisissons une structure riemannienne sur $M$. Soit $x$ un point de $M$. L'application linéaire $df(x)$ de $\tau(M,x)$ dans $\mathbf{R}$ induit une application linéaire $df(x)^*$ de $\mathbf{R}$ dans $\tau(M,x)$. Cette application est caractérisée par :

$$\forall x \in M, \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad < df(x)^*(t), u >= t df(x)(u)$$

L'application $g : x \mapsto df(x)^*(1)$ est clairement différentiable. C'est une section du fibré tangent de $M$. Si $x$ n'est pas un point critique, $df(x)$ n'est pas nulle ainsi que $df(x)^*(1)$. Dans le cas contraire, $df(x)$ et $df(x)^*(1)$ sont tous les deux nuls. Ainsi les points critiques de $f$ sont exactement les zéros de la section $g$ du fibré tangent.

Soit $x_0$ un point critique de $f$ d'indice $p$. Pour simplifier la démonstration, on choisira une orientation de $\tau(M,x_0)$. Il existe une carte $\varphi$ de $M$ définie au voisinage de $x_0$ et telle que :

— $\varphi(x_0)$ est nul et $d\varphi(x_0)$ est une isométrie de $\tau(M,x_0)$ sur $\mathbf{R}^n$

— le développement de Taylor à l'ordre 2 en l'origine de $f \circ \varphi^{-1}$ est la fonction $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_{n-p}^2 - x_{n-p+1}^2 - \cdots - x_n^2$

Notons $\lambda$ l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même définie par :

$$x = (x_1,\dots,x_n) \mapsto \lambda(x) = (x_1,\dots,x_{n-p}, -x_{n-p+1},\dots,-x_n)$$

Quitte à identifier par $\varphi$ un voisinage de $x_0$ avec un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, on peut supposer que $M$ est un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, que le produit scalaire $< , >_y$ de la structure riemannienne est le produit scalaire standard pour $y = 0$, et que le développement de Taylor de $f$ à l'ordre 2 est l'application $y \mapsto < y, \lambda(y) >$. L'espace total du fibré tangent de $M$ est alors au voisinage de $x_0 = 0$ l'espace $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et on vérifie que le développement de Taylor à l'ordre 1 de $g$ est l'application $y \mapsto (y, 2\lambda(y))$. On en déduit que les différentielles de $g$ et de la section nulle sont les applications $y \mapsto (y, 2\lambda(y))$ et $y \mapsto (y, 0)$ et l'application $dg(x_0) + ds(x_0)$ de $\tau(M,x_0) \oplus \tau(M,x_0)$ dans $\tau(E, s(x_0))$ est directe si et seulement si l'application $\lambda$ est directe, c'est-à-dire si et seulement si l'indice $p$ est pair.

Comme ceci a lieu en chaque point critique, la formule s'en déduit aisément. $\square$

**14.4 Corollaire.** *La caractéristique d'Euler d'un variété différentiable compacte de dimension impaire est nulle.*

**Démonstration :** Soit $M$ une variété différentiable compacte de dimension $n$. Soit $\chi(M)$ sa caractéristique d'Euler. Soit $f$ une fonction de Morse de $M$. Soit $g$ la fonction $x \mapsto g(x) = -f(x)$. Il est clair que si $x$ est un point critique de $f$ d'indice $p$, $x$ est un point critique de $g$ d'indice $n-p$. La formule précédente appliquée à $f$ et à $g$ donne : $\chi(M) = (-1)^n \chi(M)$. Si $n$ est impair, $\chi(M)$ est nul.

On peut aussi procéder comme ceci : on choisit une section $f$ du fibré tangent de $M$ transverse à la section nulle. La section $-f$ est également transverse à la section nulle. Un calcul simple donne : $\chi(-f) = (-1)^n\chi(f)$, ce qui donne le même résultat.$\square$

## 15. La construction de Thom-Pontrjagin

### 15.1 Groupes de bordisme.

Soit $X$ un espace topologique. On appelle $X$-variété (orientée) de dimension $n$ un couple $(M, f)$ où $M$ est une variété différentielle (orientée) compacte sans bord de dimension $n$ et $f$ une application continue de $M$ dans $X$.

Soient $(M, f)$ et $(M', f')$ deux $X$-variétés (orientées) de dimension $n$. On dit qu'elles sont cobordantes s'il existe un cobordisme $W$ (orienté) entre $M$ et $M'$ et une application continue $g$ de $W$ dans $X$ qui prolonge $f$ et $f'$. On dit, dans ce cas que $(W, g)$ est un cobordisme entre $(M, f)$ et $(M', f')$.

**15.2 Définitions.** *Soit $n \geq 0$ un entier et $X$ un espace topologique. On appelle $n$-ième groupe de bordisme de $X$ (resp. $n$-ième groupe de bordisme orienté de $X$) l'ensemble $\mathcal{N}_n(X)$ (resp. $\Omega_n(X)$) l'ensemble des classes de cobordisme de $X$-variété de dimension $n$ (resp. $X$-variétés orientées de dimension $n$).*

**Remarque.** On a déjà vu que la relation de cobordisme est une relation d'équivalence. De plus l'union disjointe de $X$-variétés induit sur $\mathcal{N}_n(X)$ et $\Omega_n(X)$ une structure de monoïde commutatif.

D'autre part, si $(M, f)$ est une $X$-variété (orientée), $([0, 1] \times M, f \circ pr_2)$ est un cobordisme entre le vide et l'union disjointe de deux copies de $(M, f)$ dans le cas non orienté et l'union disjointe de $(M, f)$ et de $(-M, f)$ dans le cas orienté. On en déduit que le double de tout élément de $\mathcal{N}_n(X)$ est nul et que tout élément de $\Omega_n(X)$ possède un opposé. Il en résulte que $\mathcal{N}_n(X)$ et $\Omega_n(X)$ sont des groupes abéliens.

### 15.3 Les grassmanniennes $G_{pq}$ et $\widetilde{G}_{pq}$.

Soient $p$ et $q$ deux entiers positifs ou nuls. On note $G_{pq}$ (resp. $\widetilde{G}_{pq}$) l'ensemble des sous-espaces vectoriels (resp. des sous-espaces vectoriels orientés) de dimension $p$ de l'espace $\mathbf{R}^{p+q}$. On vérifie aisément que ces espaces ont des structures de variétés différentiables compactes.

Sur ces grassmanniennes il y a des fibrés vectoriels canoniques. Le fibré vectoriel $\gamma_{pq}$ (resp. $\widetilde{\gamma}_{pq}$) est un fibré de base $G_{pq}$ (resp. $\widetilde{G}_{pq}$). L'espace total $E_{pq}$ (resp. $\widetilde{E}_{pq}$) est formé des couples $(E, x)$ où $E$ est un sous-espace vectoriel (resp. un sous-espace vectoriel orienté) de dimension $p$ de $\mathbf{R}^{p+q}$, et $x$ un vecteur de $E$. Les projection : $E_{pq} \to G_{pq}$ et $\widetilde{E}_{pq} \to \widetilde{G}_{pq}$ sont les applications $(E, x) \mapsto E$. On vérifie que $\gamma_{pq}$ et $\widetilde{\gamma}_{pq}$ sont des fibrés vectoriels de dimension $p$.

### 15.4 Les espaces de Thom $M_{pq}(X)$ et $\widetilde{M}_{pq}(X)$.

En faisant le produit avec $X$, on obtient des fibrés vectoriels $\gamma_{pq} \times X$ et $\widetilde{\gamma}_{pq} \times X$ sur $G_{pq} \times X$ et $\widetilde{G}_{pq} \times X$ avec $E_{pq} \times X$ et $\widetilde{E}_{pq} \times X$ comme espace total.

L'espace de Thom $M_{pq}(X)$ (resp. $\widetilde{M}_{pq}(X)$) est l'union disjointe de $E_{pq} \times X$ (resp. $\widetilde{E}_{pq} \times X$) et d'un point appelé point à l'infini. On met sur chacun de ces espaces une topologie où une base de voisinage d'un point de $E_{pq} \times X$ (resp. $\widetilde{E}_{pq} \times X$) est formée des voisinages de ce point dans $E_{pq} \times X$ (resp. $\widetilde{E}_{pq} \times X$) et une base de voisinage du point à l'infini est formé de l'union de ce point et d'une partie $U \times X$, où $U$ est le complémentaire d'un compact dans $E_{pq}$ (resp. $\widetilde{E}_{pq}$). Ces espaces de Thom sont des espaces topologiques pointés (par le point à l'infini).

Si $X$ et $Y$ sont des espaces topologiques pointés (avec points base $x_0$ et $y_0$), on note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie pointés d'applications pointées de $X$ dans $Y$, c'est-à-dire l'ensemble des applications continues de $X$ dans $Y$ qui envoient point base en point base, défini modulo la relation : deux applications $f_0$ et $f_1$ sont équivalentes s'il existe une homotopie $H$ de $X \times [0,1]$ dans $Y$ entre $f_0$ et $f_1$ qui envoie tout $(x_0, t)$ en $y_0$.

Pour tout $n \geq 0$ on note $S^n$ la sphère de dimension $n$, pointé par un point particulier et, si $X$ est un espace pointé, on note $\pi_n(X)$ l'ensemble $[S^n, X]$. On montre que $\pi_n(X)$ est un groupe pour n=1 et un groupe commutatif pour $n > 1$.

**15.5 Théorème.** *Soient $X$ un espace topologique et $n \geq 0$ un entier. Alors, pour tout $p > n+1$ et $m > n$, on a des isomorphismes de groupes :*

$$\mathcal{N}_n(X) \xrightarrow{\sim} \pi_{p+n}(M_{pm}(X))$$

$$\Omega_n(X) \xrightarrow{\sim} \pi_{p+n}(\widetilde{M}_{pm}(X))$$

**Démonstration :** On ne considérera que le cas orienté, le cas non-orienté étant totalement similaire. Soit $(M, f)$ une $X$-variété orientée de dimension $n$. Comme $p$ est strictement supérieur à $n+1$, il existe un difféomorphisme $\varphi$ de $M$ sur une sous-variété différentiable compacte orientée $M'$ de $\mathbf{R}^{p+n}$. Soit $E$ l'espace total du fibré normal de l'inclusion $M' \subset \mathbf{R}^{p+n}$. Un point de $E$ est un couple $(x, u)$ où $x$ est un point de $M'$ et $u$ un vecteur de $\mathbf{R}^{p+n}$ normal en $x$ à $M'$. L'application $(x, u) \mapsto x + u$ est une application différentiable $\alpha$ de $E$ dans $\mathbf{R}^{p+n}$. On vérifie que la différentielle de $\alpha$ est bijective en tout point $(x, 0)$. On en déduit qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha$ soit un difféomorphisme de $E_\varepsilon$ sur une sous-variété à bord $V_\varepsilon$, $E_\varepsilon$ étant formé des couples $(x, u)$ avec $||u|| \leq \varepsilon$. La variété $V_\varepsilon$ est un voisinage de $M'$.

Choisissons un difféomorphisme $\lambda$ de $[0, \varepsilon[$ sur $[0, +\infty[$ qui soit l'identité au voisinage de 0.

Considérons $S^{p+n}$ comme le compactifié d'Alexandrof de $\mathbf{R}^{p+n}$ pointé par le point à l'infini. On définit alors l'application $F$ de $S^{p+n}$ dans $\widetilde{M}_{pm}(X)$ de la façon suivante :

Si $x$ est le point à l'infini ou si x n'appartient pas à l'intérieur de $V_\varepsilon$, on pose : $F(x) = \infty$. Sinon, on pose $F(x) = (P, u\lambda(||u||)/||u||, y)$ avec $\alpha^{-1}(x) = (y, u)$ et ou $P = \nu_y(M') \subset \mathbf{R}^{p+n} \subset \mathbf{R}^{p+m}$ est l'espace normal de $M'$ en $y$. On remarque que $P$ est orienté par l'isomorphisme $\tau(M', x) \oplus P \simeq \mathbf{R}^{n+p}$ et le fait que $\tau(M', x)$ est orienté. Il est clair que $F$ est continue et envoie le point à l'infini de $S^{p+n}$ en le point à l'infini de $\widetilde{M}_{pm}(X)$. L'application $F$ induit donc un élément $\Phi(M, f)$ de $\pi_{p+n}(\widetilde{M}_{pm}(X))$ qui dépend a priori du plongement $\varphi$, du réel $\varepsilon$ et du difféomorphisme $\lambda$.

— L'application $\Phi$ est bien définie.

Supposons que, pour $i = 0$ ou $1$, on ait une $X$-variétés $(M_i, f_i)$, et que l'on ait construit une application correspondante $F_i$ à l'aide d'un plongement $\varphi_i$, d'un réel $\varepsilon_i$ et d'un difféomorphisme $\lambda_i$. Supposons, de plus, que les deux $X$-variétés $(M_0, f_0)$ et $(M_1, f_1)$ soient cobordantes. Il s'agit de montrer que $F_0$ et $F_1$ sont homotopes dans une homotopie qui envoie toujours le point à l'infini de la sphère dans le point à l'infini de l'espace de Thom.

Par hypothèse, il existe un cobordisme $(W, g)$ entre $(M_0, f_0)$ et $(M_1, f_1)$. La variété $W$ est orientée et compacte et son bord est l'union disjointe de $M_1$ et de $-M_0$, et $g$ prolonge $f_0$ et $f_1$. Considérons l'application $\varphi$ du bord de $W$ dans $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$ qui envoie un point $x$ de $M_0$ en $(\varphi_0(x), 0)$ et un point $x$ de $M_1$ en $(\varphi_1(x), 1)$. Elle se prolonge en une application continue $\psi_1$ de $W$ dans $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$. On peut ensuite trouver une application différentiable $\psi_2$ de $W$ dans $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$ proche de $\psi_1$ qui coïncide avec $\psi_1$ sur le bord de $W$.

La variété $W$ possède un voisinage $W_0$ de son bord difféomorphe à $\partial M \times [0, 1]$ par un difféomorphisme $h = (h_1, h_2)$. Choisissons une application différentiable $\mu$ de $[0, 1]$ dans lui-même qui est nulle au voisinage de 0 et l'identité au voisinage de 1. L'application $\psi_2$ est de la forme $(\psi', \psi'')$. On définit une application d'un voisinage de $\partial M$ dans $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$ par :

$$x \mapsto \psi'(h^{-1}(h_1(x), \mu(h_2(x)))), z)$$

$z$ étant $h_2(x)$ si $x$ est dans un voisinage de $M_0$ et $1 - h_2(x)$ si $x$ est dans un voisinage de $M_1$.

Il existe alors une application continue $\psi_3$ de $W$ dans $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$ qui coïncide avec cette application au voisinage du bord de $W$. Comme la dimension de $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$ est strictement supérieure au double de la dimension de $W$, on peut trouver une application différentiable $\psi$ proche de $\psi_3$ qui coïncide avec $\psi_3$ au voisinage du bord de $W$ et qui soit une immersion injective. L'application $\psi$ est donc un difféomorphisme de $W$ sur une sous variété $W'$ de $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$. De plus on a, pour tout $x \in M_i$ $(i = 0, 1)$ : $\psi(x) = (\varphi_i(x), i)$ et l'espace normal en $x$ de $\psi(W) = W'$ dans $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$ est égal à l'espace normal en $x$ de $\varphi_i(M_i)$ dans $\mathbf{R}^{n+p}$.

Soit $\varepsilon$ une fonction différentiable de $W'$ dans $]0, +\infty[$ qui est égal à $\varepsilon_0$ sur $M'_0$ et à $\varepsilon_1$ sur $M'_1$. Notons $E_\varepsilon$ l'ensemble des couples $(x, u)$ avec $x \in W'$, $u$ normal en $x$ à $W'$ et $||u|| \leq \varepsilon(x)$. Lorsque $\varepsilon$ est suffisamment petit, l'application $\alpha : (x, u) \mapsto x + u$ est un difféomorphisme de $E_\varepsilon$ sur un voisinage compact $W_\varepsilon$ de $W'$ dans $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$. Dans ce cas, on choisit une application $\lambda$ définie sur le sous-espace de $W \times [0, +\infty[$ formé des couples $(x, t)$ avec $t \leq \varepsilon(x)$ dans $[0, +\infty]$ qui soit pour tout $x \in W$ un difféomorphisme de $[0, \varepsilon(x)]$ sur $[0, +\infty]$, qui soit de la forme $(x, t) \mapsto t$ pour $t$ suffisamment petit et de la forme $(x, t) \mapsto \lambda_i(t)$ si $x$ appartient à $M_i$.

On construit alors l'application $G$ de $S^{n+p} \times [0, 1]$ dans $\widetilde{M}_{pn}(X)$ à l'aide des fonctions $\varepsilon$ et $\lambda$ : Si $x$ n'appartient pas à l'intérieur de $X_\lambda$, $G$ envoie $x$ en le point à l'infini de $\widetilde{M}_{pm}(X)$. Sinon $G$ envoie $x$ en $(P, u\lambda(x, ||u||)/||u||, y)$ avec $\alpha^{-1}(x) = (y, u)$, $P \subset \mathbf{R}^{p+n} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^{p+m}$ étant l'espace normal de $W'$ en $y$.

L'application $G$ ainsi construite est continue, elle prolonge les applications $F_0$ et

$F_1$ et envoie les couples $(\infty, t)$ en le point à l'infini de $\widetilde{M}_{pn}(X)$. Il en résulte que les applications $F_0$ et $F_1$ sont homotopes et l'application $\Phi$ est bien définie.

— L'application $\Phi$ est injective.

Notons $E$ l'espace total $\widetilde{E}_{pm}$ du fibré vectoriel $\widetilde{\gamma}_{pm}$. On note également $E_0$ le sous-espace de $E$ image de la section nulle de $\widetilde{\gamma}_{pm}$. C'est une sous-variété compacte de $E$ de codimension $p$.

Soient $(M_0, f_0)$ et $(M_1, f_1)$ deux $X$-variétés orientées de dimension $n$ qui ont même image par $\Phi$. Pour $i = 0$ ou 1, on choisit un plongement $\varphi_i$ de $M_i$ dans $\mathbf{R}^{n+p}$, un réel $\varepsilon_i$ assez petit et un difféomorphisme $\lambda_i$ de $[0, \varepsilon[$ sur $[0, +\infty[$ qui soit l'identité au voisinage de 0. On a alors deux applications continues pointées correspondantes $F_0$ et $F_1$ de $S^{n+p}$ dans $\widetilde{M}_{pm}(X)$. Par hypothèse, ces deux applications sont homotopes par une homotopie pointée. Il existe donc une application continue $H$ de $S^{n+p} \times [0, 1]$ dans $\widetilde{M}_{pm}(X)$ qui envoie $\{\infty\} \times [0, 1]$ en le point à l'infini de $\widetilde{M}_{pm}(X)$ et les points $(x, 0)$ et $(x, 1)$ en $F_0(x)$ et $F_1(x)$. Soit $K$ l'image réciproque par $H$ du point à l'infini de $\widetilde{M}_{pm}(X)$ et $U$ le complémentaire de $K$. L'espace $U$ est un ouvert de $\mathbf{R}^{n+p} \times [0, 1]$ contenant $\varphi_0(M_0) \times \{0\}$ et $\varphi_1(M_1) \times \{1\}$. L'application $H$ est caractérisée par une application continue propre $g$ de $U$ dans $E$ et une application continue $h$ de $U$ dans $X$. L'application $g$ est différentiable sur $\mathbf{R}^{n+p} \times \{0, 1\}$ et $g^{-1}(E_0)$ est un compact de $U$ qui rencontre $\mathbf{R}^{n+p} \times \{0, 1\}$ en $\varphi_0(M_0) \times \{0\}$ et $\varphi_1(M_1) \times \{1\}$. L'application est proche d'une application différentiable propre $g'$ transverse à $E_0$ et qui coïncide avec $g$ sur $\mathbf{R}^{n+p} \times \{0, 1\}$. L'espace $g'^{-1}(E_0)$ est un cobordisme orienté $C$ entre $\varphi_0(M_0) \times \{0\}$ et $\varphi_1(M_1) \times \{1\}$. Si on identifie $M_0$ et $M_1$ à leurs images par $\varphi_0$ et $\varphi_1$, $(C, h|_C)$ est un cobordisme entre $(M_0, f_0)$ et $(M_1, f_1)$, ce qui montre l'injectivité de $\Phi$.

— L'application $\Phi$ est surjective.

Soit $F$ une fonction de $S^{n+p}$ dans $\widetilde{M}_{pm}(X)$ qui envoie le point à l'infini en le point à l'infini de $\widetilde{M}_{pm}(X)$. Soit $K$ l'image réciproque du point à l'infini de $\widetilde{M}_{pm}(X)$. Sur le complémentaire $U$ de $K$, l'application $F$ est de la forme $F = (g, f)$, $g$ étant une application continue propre de $U$ dans $E$ et $f$ une application continue de $U$ dans $X$. L'application $g$ est proche d'une application différentiable propre $g'$ de $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ dans $E$ transverse à $E_0$. Cette application est homotope à $g$ avec une homotopie propre (voir proposition 9.7). L'application $F'$ associée à $(g', f)$ est homotope à $F$. Soit $M \subset U$ le sous-espace $M = g'^{-1}(E_0)$. C'est une sous-variété compacte de $U$. D'autre part chaque fibre du fibré $\widetilde{\gamma}_{pm}$ est orientée et les applications $dg'$ transportent ces orientations en des orientations sur chaque espace normal de $M$. On en déduit une orientation sur les espaces tangents de $M$ et $M$ est une sous-variété compacte orientée sans bord de $\mathbf{R}^{n+p}$.

Considérons un ouvert $V$ de $\mathbf{R}^{n+p}$ contenant $M$, une application continue $f_1$ de $V$ dans $X$ et une application différentiable propre $g_1$ de $V$ dans $E$. On note $\Gamma(V, f_1, g_1)$ l'application de $S^{n+p}$ dans $\widetilde{M}_{pm}(X)$ qui envoie le complémentaire de $V$ en l'infini et qui est égale à $(g_1, f_1)$ sur $V$. C'est une application continue pointée de $S^{n+p}$ dans $\widetilde{M}_{pm}(X)$. Si $g_1$ envoie $M$ en $E_0$ et est transverse à $E_0$ en tout point de $M$, on note $\delta(g_1)$ l'application induite par $dg_1$ de l'espace total du fibré normal de $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ dans l'espace total du fibré normal de $E_0 \subset E$ qui n'est autre que $E$.

Notons $A$ l'ensemble des couples $(x, u)$ où $x$ est un point de $M$ et $u$ une application linéaire de l'espace normal $\nu_x(M)$ de $M$ en $x$ dans $\mathbf{R}^{p+m}$. On note également $\pi$ l'application $(x, u) \mapsto x$ de $A$ dans $M$. Pour $r \leq p$, on note $A_r$ le sous-espace de $A$ formé des couples $(x, u)$ où $u$ est de rang $r$. On vérifie que $A$ est une variété différentiable de dimension $n + p(p + m)$ et que $A_r$ est une variété différentiable de dimension $n+r(2p+m-r)$. Si $x$ est un point de $M$, $g_1$ envoie $x$ en un élément de $E_0$ correspondant à un sous-espace vectoriel $P$ de dimension $p$ de $\mathbf{R}^{p+m}$ et $\delta(g_1)$ induit une application linéaire bijective $\alpha_x$ de $\nu_x(M)$ dans $P$. On note $\sigma(g_1)$ l'application de $M$ dans $A_p$ qui envoie $x \in M$ en l'application $\alpha_x$ considérée comme une application injective de $\nu_x(M)$ dans $\mathbf{R}^{p+m}$.

**Lemme.** *Soient $V_1$ et $V_2$ deux ouverts de $\mathbf{R}^{n+p}$ contenant $M$, $f_1 : V_1 \to X$ et $f_2 : V_2 \to X$ des fonctions continues et $g_1 : V_1 \to E$ et $g_2 : V_2 \to E$ des applications différentiables propres. On suppose que les restrictions de $f_1$ et $f_2$ à $M$ sont égales et que les applications $\sigma(g_1)$ et $\sigma(g_2)$ sont homotopes par une homotopie $h$ telle que $\pi \circ h$ soit une homotopie constante. Alors les applications $\Gamma(V_1, f_1, g_1)$ et $\Gamma(V_2, f_2, g_2)$ sont homotopes par une homotopie pointée.*

On démontrera ce lemme ultérieurement.

Par construction, $F'$ est l'application $\Gamma(U, f', g')$. D'autre part, si l'on choisit un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et un difféomorphisme $\lambda : [0, \varepsilon[\to [0, +\infty[$ qui soit l'identité au voisinage de 0, on peut associer au plongement $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$, à $\varepsilon$ et à $\lambda$ une application continue pointée $F''$ qui représente un élément de l'image de $\Phi$ et qui est de la forme $\Gamma(V, f'', g'')$. Pour montrer que $F$ est dans l'image de $\Phi$, il suffit alors de montrer que $f'$ et $f''$ sont égales sur $M$ et que $\sigma(g')$ est homotope à $\sigma(g'')$ dans une homotopie $h : M \times [0, 1] \to A_p$ telle que $\phi \circ h$ soit l'homotopie $(x, t) \mapsto x$.

On vérifie, par construction de $F''$, que $f''$ est égal à $f'$ sur $M$. Considérons l'application $h_1$ de $M$ dans $A$ qui à $(x, t) \in M \times [0, 1]$ associe $t\sigma(g')(x) + (1-t)\sigma(g'')$. C'est une application différentiable de $M \times [0, 1]$ dans $A$ qui vérifie $\pi \circ h_1(x, t) = x$.

On peut approcher $h_1$ par une application différentiable $h_2$ qui coïncide avec $h_1$ sur $M \times \{0, 1\}$ et qui soit transverse à toutes les sous-variétés $A_r$, $r < p$. Or $A_r$ est une sous-variété de $A$ de codimension $p(p+m) - r(2r+m-r) = (p-r)(p+m-r)$. Cette fonction est décroissante en $r$ pour $r \leq p$. On en déduit que la codimension de $A_r$ est, si $r < p$, supérieure ou égale à $m + 1$. Comme $n$ est inférieur à $m$, l'image de $h_2$ ne rencontre pas les sous-variétés $A_r$, $r < p$ et $h_2$ est à valeurs dans $A_p$.

Pour tous $x$ et $y$ dans $M$, notons $\pi_{xy}$ la projection orthogonale de $\nu_x(M)$ dans $\nu_y(M)$. Lorsque $x$ et $y$ sont suffisamment proches, $\pi_{xy}$ est bijective.

L'application $h_2$ envoie un couple $(x, t)$ en un couple $(y, u)$, où $y$ est un point de $M$ proche de $x$ (car $\pi \circ h_2$ est une homotopie de $M$ dans $M$ proche de l'identité), et où $u$ est une application linéaire injective de $\nu_y(M)$ dans $\mathbf{R}^{p+m}$. On pose alors : $h(x, t) = (x, u \circ \pi_{x,y})$ et $h$ est l'homotopie désirée. □

**Démonstration du lemme.** Si $\varepsilon > 0$ est un réel suffisamment petit, l'ouvert $M_\varepsilon$ de $\mathbf{R}^{n+p}$ formé des éléments de la forme $x + u$ avec $x \in M$ et $||u|| < \varepsilon$ est contenu dans $V_1$ et $V_2$ et a la propriété que tout élément de $M_\varepsilon$ s'écrit de façon unique sous cette forme.

Si $t$ est un réel de $[0,1]$ on note $\lambda_t$ l'application de $[0,\varepsilon]$ dans lui-même qui est nulle sur $[0,t\varepsilon/2]$, qui est affine sur $[t\varepsilon/2],\varepsilon]$ et qui vaut $\varepsilon$ en $\varepsilon$. On a alors une homotopie $h_t$ ($t \in [0,1]$) de $\mathbf{R}^{p+n}$ dans lui-même qui est l'identité en dehors de $M_\varepsilon$ et qui envoie un élément de $M_\varepsilon$ de la forme $x+u$ en $x+\lambda_t(||u||)u/||u||$. Cette homotopie induit des homotopies entre $\Gamma(V_1,f_1,g_1)$ et $\Gamma(V_1,f_1\circ h_1,g_1)$ et entre $\Gamma(V_2,f_2,g_2)$ et $\Gamma(V_2,f_2\circ h_1,g_2)$. Or les applications $f_1\circ h_1$ et $f_2\circ h_1$ coïncident sur un voisinage de $M$. Quitte alors à remplacer $f_1$ et $f_2$ par ces nouvelles fonctions, on peut supposer que $f_1$ et $f_2$ coïncident sur un voisinage de $M$.

On peut aussi supposer que pour $i=0$ ou 1 on a la propriété suivante :

pour tout $x \in M$ et tout vecteur $u$ suffisamment petit dans l'espace normal $\nu_x(M)$, $g_i(x+u)$ est de la forme $(\mathrm{Im}(\alpha),\alpha(u))$ (avec $\sigma(g_i)(x)=(x,\alpha)$).

Pour montrer cela, considérons l'une des deux applications $g_1$ ou $g_2$ que l'on notera $g$ pour simplifier. Si $P$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{p+m}$, on notera $\pi_P$ la projection orthogonales sur $P$. Soit $x$ un point de $M$. L'application $g$ envoie $x$ en un couple $(P,0)$, $P$ étant un sous-espace vectoriel orienté de dimension $p$ de $\mathbf{R}^{p+m}$ et 0 étant le vecteur nul de $P$. On vérifie que $P$ n'est autre que l'image de $\alpha_x$ (avec $\sigma(g_i)(x)=(x,\alpha_x)$). Si $u$ est un petit vecteur de $\nu_x(M)$, $g$ envoie $x+u$ en un couple $(Q,v)$, $Q$ étant un sous-espace de $\mathbf{R}^{p+m}$ de dimension $p$ proche de $P$ et $v$ un vecteur de $Q$. Si $t$ est un élément de $[0,1]$, on peut poser : $H_t(x+u)=(R,w)$ avec :

$$R=(t\pi_P+(1-t)\mathrm{Id})(Q) \qquad \text{et} \qquad w=\pi_R(t\alpha_x(u)+(1-t)v)$$

On vérifie que $H_t$ est une homotopie définie au voisinage de $M$ entre l'application $g$ (obtenue pour $t=0$) et l'application $(x+u)\mapsto(\mathrm{Im}(\alpha_x),\alpha_x(u))$ (obtenue pour $t=1$). De plus cette homotopie est constante sur $M$. Pour obtenir une homotopie entre $g$ et une fonction définie sur le domaine de définition de $g$ vérifiant la propriété souhaitée, on choisit un réel $\varepsilon>0$ suffisamment petit et l'on pose :

– si $y=x+u$ n'appartient pas à $M_\varepsilon$, $H'_t(y)=g(y)$

– sinon, on pose $H'_t(x+u)=H_{t\theta}(x+u)$, $\theta$ étant une fonction de $||u||$ qui est continue, égale à 1 pour $||u||<\varepsilon/2$ et nulle pour $||u||>\varepsilon$.

On vérifie que $H'_1$ est une fonction homotope à $g$ dans une homotopie définie sur l'ouvert de définition de $g$, qui est constamment égale à $g$ sur $M$ et en dehors d'un voisinage de $M$ et qui vérifie la propriété souhaitée.

On suppose dorénavant que $g_1$ et $g_2$ vérifient les conditions précédentes.

Choisissons un réel $\varepsilon>0$ et une application continue $\psi$ de $[0,1]\times[0,+\infty]$ dans $[0,+\infty]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall a \in [0,+\infty] \qquad \psi(0,a)=1$$

$$\begin{array}{ll} \forall t \in [0,1], \forall a \in [0,\varepsilon] & \psi(t,a)=1 \\ \forall t \in [0,1], \forall a \geq 2\varepsilon/t & \psi(t,a)=+\infty \\ \forall t \in [0,1], \forall a < 2\varepsilon/t & \psi(t,a)<+\infty \end{array}$$

On peut alors définir une nouvelle homotopie $h_t$ ($t\in[0,1]$) de la façon suivante (avec $g=g_1$ ou $g_2$, $V=V_1$ ou $V_2$ et $f=f_1$ ou $f_2$) :

Pour $x \in V$, si $g(x) = (P, v)$ avec $v \in P$, on pose :

$$h_t(x) = \begin{cases} (P, \psi(t, ||v||)v, f(x)) & \text{si} \quad t||v|| < 2\varepsilon \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $\varepsilon$ est suffisamment petit, $h$ est une homotopie entre $\Gamma(V, f, g)$ et $\Gamma(V', f, g')$ où $V'$ et $g'$ sont définis de la façon suivante :

Pour tout $x \in M$ on pose comme plus haut $\sigma(g)(x) = (x, \alpha_x)$. L'ouvert $V'$ est alors l'ensemble des éléments $x + u$ avec $x \in M$ et $u \in \nu_x(M)$ vérifiant $||\alpha_x(u)|| < 2\varepsilon$ et $g'$ est défini ainsi :

$$g'(x + u) = (\mathrm{Im}(\alpha_x), \psi(1, ||\alpha_x(u)||)\alpha_x(u))$$

De plus, si $\varepsilon$ est suffisamment petit, $V'$ est un voisinage de $M$ aussi petit que l'on veut et la classe d'homotopie de $\Gamma(V_1, f_1, g_1)$ ne dépend que de la restriction de $f_1$ à $M$ et de l'application $\sigma(g_1)$.

Par hypothèse $\sigma(g_1)$ et $\sigma(g_2)$ sont homotopes par une homotopie $\sigma_t$ ($t \in [0, 1]$), avec $\sigma_t(x) = (x, \beta(t, x))$ pour tout $x \in M$. On en déduit une homotopie $\Gamma(V_t, f_1, g'_t)$, $V_t$ étant l'ensemble des éléments $x + u$ avec $x \in M$ et $u \in \nu_x(M)$, vérifiant l'inégalité $||\beta(t, x)(u)|| < 2\varepsilon$ et $g'_t$ l'application :

$$x + u \mapsto (\mathrm{Im}(\beta(t, x), \psi(1, ||\beta(t, x)(u)||)\beta(t, x)(u))$$

Cette homotopie est une homotopie entre $\Gamma(V_1, f_1, g_1)$ et $\Gamma(V_2, f_1, g_2)$. Or $f_1$ et $f_2$ coïncident sur un voisinage de $M$. Cela termine donc la démonstration. $\square$