

Feuille de TD4–Actions de groupes

Exercice 1.– Soit G un groupe opérant sur un ensemble X . On notera $g \cdot x$ l'action de $g \in G$ sur $x \in X$, $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ le *stabilisateur* de $x \in X$, $\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x, g \in G\}$ l'*orbite* de x sous l'action de G et $X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x, \forall g \in G\}$ l'ensemble des *points fixes* de X sous l'action de G .

1. Montrer que $\text{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G . Montrer qu'on a une bijection entre l'orbite de x et le quotient $G/\text{Stab}(x)$.
2. En déduire que, si X est fini, alors

$$|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

où \mathcal{R} est un système de représentants de la partition de X formée de ses orbites, et $|X|$ désigne le cardinal de X .

3. En déduire que, pour X fini, on a

$$|X| = |X^G| + \sum_{x \in \mathcal{R}, \text{Stab}(x) \neq G} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}.$$

Comment se traduit cette équation aux classes lorsque G , groupe fini, opère par conjugaison sur lui-même ?

4. Soit G un p -groupe, c'est-à-dire un groupe d'ordre une puissance d'un nombre premier p . Montrer que $|X^G|$ est congrus à $|X|$ modulo p . En déduire que dans ce cas le centre de G n'est pas réduit à e .

Exercice 2.– Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X . Posons $E = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$. Pour $g \in G$, notons X^g le fixateur de g dans X . Pour $x \in X$, notons $\text{Stab}(x)$ le stabilisateur de x dans G . Montrer que $|E| = \sum_{g \in G} |X^g|$. Montrer que $|E| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$. En déduire la *formule de Burnside* : $|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$. (En d'autres termes, le nombre d'orbites est égal au nombre moyen de points fixes.)

Exercice 3. Soit G un groupe opérant sur un ensemble X . Notons $\mathcal{S}(X)$ le groupe des bijections $X \rightarrow X$. Montrer que pour tout $g \in G$ l'application $t_g : x \mapsto g \cdot x$ est une bijection de X . En déduire que l'application $G \mapsto \mathcal{S}(X)$ qui à g associe t_g est un morphisme de groupes. Montrer qu'il est injectif si et seulement l'action de G sur X est fidèle. Lorsque X et G sont finis, et que l'action est fidèle, montrer que $|G|$ divise $|X|!$. Réciproquement montrer que si on a un morphisme d'un groupe G vers $\mathcal{S}(X)$, cela définit une action de groupe.

Exercice 4.– Le groupe $G = GL_n(\mathbb{R})$ opère sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n par multiplication à gauche.

1. Décrire la décomposition de \mathbb{R}^n en orbites pour cette opération.

2. Quel est le stabilisateur du vecteur $(1, 0, \dots, 0)$?
3. Dans le cas $n = 2$ on considère le sous-groupe H des rotations dans \mathbb{R}^2 . Donner la décomposition de \mathbb{R}^2 en orbites sous l'action de H . Faire un dessin.

Exercice 5.— Soit G le sous-groupe du groupe des bijections de \mathbb{C} dans \mathbb{C} engendré par la multiplication par i . Ce groupe agit sur l'ensemble \mathbb{C} . Donner la décomposition de \mathbb{C} en orbites sous l'action de G et calculer le stabilisateur de chaque élément. Faire un dessin.

Exercice 6.— Un groupe G de 35 éléments agit sur un ensemble X de 23 éléments. Montrer qu'il existe un élément de X qui est un point fixe de G .

Exercice 7.— Soient G un groupe fini, p le plus petit facteur premier de l'ordre de G , et H un sous-groupe de G d'indice p . On se propose de montrer que H est distingué dans G .

1. Montrer-le dans le cas $p = 2$
2. En faisant opérer G par translation sur les classes à gauche modulo H , définir un morphisme non constant $f : G \rightarrow S_p$ de G dans le groupe S_p des permutations sur un ensemble à p éléments.
3. Montrer que $\ker f = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$. En déduire que $\ker f$ est un sous-groupe de H puis que $H = \ker f$. Conclure.

Exercice 8. Soit G un sous-groupe du groupe $\text{SO}_3(\mathbf{R})$ des isométries vectorielles de déterminant 1 de \mathbf{R}^3 . Le groupe $\text{SO}_3(\mathbf{R})$ est composé de rotations de \mathbf{R}^3 (et de l'identité). Supposons que G n'admette pas de point fixe autre que 0 (autrement dit, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, $x \neq 0$, il existe $g \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$ tel que $g.x \neq x$).

1. Soient deux rotations non triviales de $\text{SO}_3(\mathbf{R})$ qui commutent. Montrer qu'elles ont même axe.
2. En déduire que G ne peut pas être commutatif.
3. Cette conclusion est-elle encore valable si on remplace G par un sous-groupe du groupe $\text{O}_3(\mathbf{R})$ des isométries vectorielles de \mathbf{R}^3 ?