Université Paris 7-Denis Diderot | Géométrie
Licence d'enseignement | Année 2001-02

EXAMEN PARTIEL du 12 avril 2002

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. Notons G l'isobarycentre de ces quatre points.
1. Démontrer que la droite (DG) rencontre le plan (ABC) en un unique point P.
2. Quelle sont les images de A, B, C, D et G par la projection p sur le plan (ABC) parallèlement à la direction de (DG) ?
3. En déduire que P est l'isobarycentre des trois points A, B et C.

Exercice 2

On rappelle que les seules applications linéaires qui laissent stable toute droite vectorielle sont les homothéties.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des isométries ϕ de $\mathcal{E}$ telles que $\phi(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}$ sont des droites parallèles pour toute droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$.
1. Démontrer que $\mathcal{J}$ muni de la composition des applications est un groupe.
2. Soit $\phi \in \mathcal{J}$. Démontrer que l'application linéaire associée à ϕ laisse stable toute droite vectorielle.
3. En déduire que $\mathcal{J}$ est constitué de symétries centrales et de translations.
4. En déduire que le groupe $\mathcal{J}$ est engendré par les symétries centrales de $\mathcal{E}$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle d'un plan affine $\mathcal{P}$. Soit $P \in \mathcal{P}$. Notons A', B' et C' les symétriques de P par rapport aux milieux des segments $[B, C]$, $[A, C]$ et $[B, A]$ respectivement.
1. Démontrer que les quadrilatères $A'BPC$, $C'APB$ et $B'CPA$ sont des parallélogrammes.
2. En déduire qu'on a $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{B'A}$, puis que $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'C}$ et enfin que $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{C'B}$.
3. En déduire que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes (on pourra étudier les milieux des segments $[A, A']$, $[B, B']$ et $[C, C']$).

Exercice 4

Soit ABC un triangle d'un plan euclidien $\mathcal{P}$. On suppose ce triangle *équilatéral*, c'est-à-dire que les longueurs des cotés sont égales. Soient A', B' et C' les milieux des segments $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. Notons O le point de concours des médianes de ABC.
1. Démontrer que le point A est sur la médiatrice du segment $[B, C]$. En déduire que la droite (CC') est une hauteur du triangle.
2. Soient s_A (resp. s_B, resp. s_C) la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AA') (resp. (BB'), resp. (CC')). Démontrer que $s_A(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$. Idem pour s_B et s_C.
3. Soient r_1 et r_2 les rotations de centre O et de mesures $2\pi/3$ et $4\pi/3$ respectivement. Démontrer que $r_1(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$ et $r_2(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$.

4. Soit f une isométrie de $\mathcal{P}$ telle que $f(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$. Démontrer que f est l'identité ou l'une des cinq isométries suivantes : s_A, s_B, s_C, r_1 ou r_2.

Exercice 5

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans orthogonaux de $\mathcal{E}$. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_1$. Soient s_1 et s_2 les symétries orthogonales par rapport à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Soit r la symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}$ qui est contenue dans $\mathcal{P}_1$ et orthogonale à $\mathcal{P}_2$.
1. Quelles sont les natures des isométries $f = s_2 \circ r$ et $g = s_1 \circ t_{\overrightarrow{u}}$?
2. L'isométrie $f \circ g$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
3. Quelle est la nature de l'application linéaire associée $\overrightarrow{f \circ g}$?
4. Quels sont les vecteurs fixes de $\overrightarrow{f \circ g}$?
5. Quels sont les points fixes de $f \circ g$?
6. Quelle est la nature de l'isométrie $f \circ g$?