

EXAMEN du 20 juin 2011

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Soit $U = \mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$.

1. Montrer que U est ouvert dans \mathbf{C} . Est-il connexe ? Est-il compact ?
2. Montrer que la fonction $f : z \mapsto e^z/(e^z - 1)$ est définie sur U . Montrer qu'elle est holomorphe sur U .
3. La fonction $z \mapsto |f(z)|$ est-elle holomorphe sur U ?
4. La fonction f est-elle bornée sur U ?
5. La fonction f est-elle injective sur U ?
6. La fonction f est-elle méromorphe sur \mathbf{C} ?
7. Quels sont les pôles de f dans \mathbf{C} ?
8. Montrer que la fonction $a \mapsto a/(a - 1)$ définit une bijection de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$.
9. Donner le développement en série entière de $a \mapsto a/(a - 1)$ en $a = 0$.
10. Quelle est l'image de U par f ?
11. Montrer que la fonction $z \mapsto zf(z)$ admet un prolongement holomorphe en 0, dont on donnera les deux premiers coefficients de la série de Taylor en 0.
12. Quel est le rayon de convergence du développement en série entière de f en $i\pi$?
13. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0, \pi)} f(z) dz$.
14. Montrer que la fonction $z \mapsto f(z) - 1/z - 1/(z - 2i\pi) - 1/(z + 2i\pi)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur la boule de centre 0 et de rayon 3π .
15. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0, 3\pi)} f(z) dz$.
16. La fonction f admet-elle une primitive sur $B(0, \pi) - \{0\}$?
17. Admet-elle une primitive sur le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} / \Re(z) > 0\}$?
18. Quel est l'indice du lacet c composé des chemins $t \mapsto e^{2i\pi t}$, $t \mapsto 1 + t$, $t \mapsto 2e^{-2i\pi t}$, $t \mapsto 2 - t$ par rapport au point 0 ? (Faire un dessin.)
19. Calculer $\int_c f(z) dz$.
20. Existe-t-il une fonction entière g telle que $f \circ g$ soit entière ?