

Feuille d'exercices 7

Modules

Exercice 1

Soit A un anneau commutatif intègre.

1. Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ muni de l'action $A \times A[X] \rightarrow A[X]$ qui à (a, P) associe aP est un A -module.
2. Soit n un entier ≥ 0 . Montrer que l'ensemble $A[X]_n$ de polynômes de $A[X]$ nuls ou de degré $< n$ est un A -module libre de rang n .
3. Soit $P \in A[X]$ un polynôme de degré n . Montrer que $(P) = PA[X]$ est un A -module. Le A module quotient $A[X]/(P)$ est-il libre ? (On pourra considérer $A = \mathbf{Z}$ et le polynôme constant égal à 2). Qu'en est-il si P est unitaire ?

Exercice 2

Soit K un corps. Soit E un K -espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E .

1. Rappeler comment u fait de E un $K[X]$ -module.
2. Montrer que si E est de dimension finie comme K espace vectoriel, E est de type fini comme $K[X]$ -module. Notons alors M le polynôme minimal de u . Montrer que E est un $K[X]/(M)$ -module et que c'est un $K[X]$ -module de torsion.
3. Posons $E = K[T]$. Considérons le cas où u est la multiplication par T . Montrer que E est un $K[X]$ -module libre.
4. Posons $E = K[T]$. Considérons le cas où u est la dérivation dans $K[T]$. Montrer que E n'est pas de type fini comme $K[X]$ -module (on pourra montrer que, si c'était le cas, il existerait des polynômes $P_1, \dots, P_r \in K[T]$ tels que tout élément de $K[T]$ soit combinaison K -linéaire des dérivées successives de P_1, \dots, P_r .) Montrer que tout élément de E est de torsion.

Exercice 3

Soit E un ensemble fini. On rappelle que $\mathbf{Z}[E] = \{n : E \rightarrow \mathbf{Z}\}$ est muni d'une structure de groupe abélien par $(n_1 + n_2)(x) = n_1(x) + n_2(x)$. On pourra noter $\sum_{x \in E} n(x)[x]$ l'élément n de $\mathbf{Z}[E]$. Ainsi, pour $x_0 \in E$, on notera $[x_0]$ la fonction $n_{x_0} : E \rightarrow \mathbf{Z}$ donnée par $n_{x_0}(x) = 0$ si $x \neq x_0$ et $n_{x_0}(x_0) = 1$.

Soit G un groupe fini opérant sur E par la loi $(g, x) \mapsto g.x$. On rappelle que $\mathbf{Z}[G] = \{f : G \rightarrow \mathbf{Z}\}$ est muni d'une structure d'anneau par $(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$ et $(f_1 f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$. On pourra noter l'élément $f \in \mathbf{Z}[G]$ par $\sum_{g \in G} f(g)[g]$.

1. Considérons l'application $\mathbf{Z}[G] \times \mathbf{Z}[E] \rightarrow \mathbf{Z}[E]$ qui associe à $(\sum_{g \in G} f(g)[g], \sum_{x \in E} n(x)[x])$ l'élément $\sum_{g \in G} \sum_{x \in E} f(g)n(x)[g.x]$. Montrer que cette loi associe à $([g], [x])$ l'élément $[g.x]$ ($g \in G, x \in E$).
2. Montrer que cette loi fait de $\mathbf{Z}[E]$ un $\mathbf{Z}[G]$ -module. (Elle étend l'action de G sur E par linéarité.)
3. Soit Y un sous-ensemble de E stable par l'action de G . Montrer que $\mathbf{Z}[Y]$ est un sous-module de $\mathbf{Z}[E]$.
4. Soient E_1, E_2, \dots, E_n les orbites de E sous G . Montrer que $\mathbf{Z}[E]$ est somme directe des sous-modules $\mathbf{Z}[E_1], \mathbf{Z}[E_2], \dots, \mathbf{Z}[E_n]$.
5. Montrer que $\mathbf{Z} \sum_{x \in E} [x]$ est un sous-module de $\mathbf{Z}[E]$.
6. Montrer que $\mathbf{Z}[E]^0 = \{n \in \mathbf{Z}[E] / \sum_{x \in X} n(x) = 0\}$ est un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module de $\mathbf{Z}[E]$. Quelle est son intersection avec $\mathbf{Z} \sum_{x \in E} [x]$? Est-ce une somme directe ?

Exercice 4

1. Soit K un corps. Montrer que l'anneau de polynômes en une infinité d'indéterminées $A = K[(X_i)_{i \in \mathbf{N}}]$ n'est pas noethérien.
2. Montrer que A est un A -module de type fini non noethérien.

Exercice 5

1. Montrer que \mathbf{Q}/\mathbf{Z} est un \mathbf{Z} -module de torsion.
2. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbf{Q}$ tel que $y \notin \mathbf{Z}x_1 + \dots + \mathbf{Z}x_n$. En déduire que \mathbf{Q}/\mathbf{Z} n'est pas de type fini.

Exercice 6

Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A -modules.

1. Posons $\text{Hom}_A(M, N)$ l'ensemble des homomorphismes de A -modules de M vers N . Montrer comment il est muni d'une structure de A -module.
2. Le A -module $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$ s'appelle le *module dual* de M . Montrer que si M est libre de rang n , il en est de même de $\text{Hom}_A(M, A)$.
3. Quel est le dual du \mathbf{Z} -module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
4. Montrer qu'on a un homomorphisme de A -modules $M \rightarrow (M^*)^*$ donné par $m \mapsto (\phi \mapsto \phi(m))$. Montrer que c'est un isomorphisme lorsque M est libre de rang fini. Est-ce un isomorphisme lorsque $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
5. Montrer qu'un homomorphisme de A -modules $f : M \rightarrow N$ donne lieu à un homomorphisme (dit *dual*) $f^* : N^* \rightarrow M^*$. Montrer que si f est injective, f^* est surjective.

Exercice 7

Soit A un anneau. Soient M et N deux A -modules. Soit $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme surjectif de A -modules. Notons L le noyau de f .

1. Donner un exemple où M et L sont libres sans que N soit libre.
2. Montrer que si L et N sont libres, M est libre. Quel est le rang de M ?
3. Donner un exemple où M est libre sans que L soit libre. (On pourra penser à $A = M = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.)
4. Supposons que $M = A^2$ et $N = A$. Montrer que le noyau de f est libre.
5. Lorsque M est libre et L est de type fini, on dit que N est de *présentation finie*. Montrer que tout module de type fini sur un anneau principal est de présentation finie.
6. Soit K un corps. Supposons que $A = K[(X_i)_{i \in \mathbf{N}}]$. Considérons l'idéal I de A engendré par $\{X_1, X_2, \dots\}$. Montrer que l'anneau-quotient A/I est isomorphe à K , ce qui fait de K un A -module. Montrer que K est de type fini comme A -module, mais pas de présentation finie.

Exercice 8

Soit A un anneau. Soient M_0, \dots, M_n des A -modules. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $f_i : M_{i-1} \rightarrow M_i$ un homomorphisme de A -modules. Si $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$ ($1 \leq i < n$) et si f_1 est injective et f_n est surjective, on dit qu'on a une *suite exacte* et on écrit

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow 0.$$

C'est la situation dans laquelle nous nous plaçons.

1. Montrer que si A est un corps et M_i est un espace vectoriel de dimension finie d_i ($0 \leq i \leq n$), on a $\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i = 0$. Montrer qu'il en est de même si A est principal et si M_i est libre de rang d_i comme A -module.
2. Montrer que si $A = \mathbf{Z}$ et M_i est un groupe abélien fini d'ordre t_i ($0 \leq i \leq n$), on a $\prod_{i=0}^n t_i^{(-1)^i} = 1$.
3. Supposons que $A = \mathbf{Z}$ et $M_i = T_i \oplus N_i$, avec T_i fini d'ordre t_i et N_i libre de rang d_i , a-t-on $\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i = 0$ et $\prod_{i=0}^n t_i^{(-1)^i} = 1$? (On pourra examiner le cas où $n = 2$, $M_0 = M_1 = \mathbf{Z}$, f_1 est la multiplication par 2 et f_2 est la surjection canonique $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.)

Exercice 9

1. Le sous- \mathbf{Z} -module $2\mathbf{Z}$ de \mathbf{Z} admet-il un supplémentaire ?
2. Tout sous-module libre d'un module libre admet-il un supplémentaire ?
3. Si N est un sous-module de M tel que M/N soit libre montrer que N admet un supplémentaire dans M .

Exercice 10

Donner les invariants des groupes abéliens suivants $(\mathbf{Z}/2006\mathbf{Z})$, $(\mathbf{Z}/2007\mathbf{Z})$, $(\mathbf{Z}/2006\mathbf{Z})^*$, $(\mathbf{Z}/2007\mathbf{Z})^*$.

Exercice 11

Donner les invariants des $K[X]$ -modules suivants issus d'un endomorphisme u d'un K -espace vectoriel E .

1. Le cas où $K = \mathbf{R}$ et u est une rotation d'angle θ du plan euclidien $E = \mathbf{R}^2$.
2. Le cas où $E = K[X]/(P)$, avec $P \in K[X]$, $P \neq 0$, et u est la multiplication par X .
3. Le cas où $E = K^n$ et u est donné par l'expression, dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) , $u(e_i) = e_1 + e_2 + \dots + e_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Exercice 12

Soit A un anneau. Soient M et N deux A -modules. Considérons le A -module $A[M \times N]$ formé par les fonctions $M \times N \rightarrow A$ qui sont à support fini. Pour $(m, n) \in M \times N$, on note $[m, n] \in A[M \times N]$ l'élément qui prend la valeur 1 en (m, n) et 0 ailleurs.

1. Montrer que $A[M \times N]$ admet pour base $([m, n])_{(m,n) \in M \times N}$.
2. Considérons le sous-module T de $A[M \times N]$ engendré par les éléments de la forme $[m, n_1 + n_2] - [m, n_1] - [m, n_2]$, $[m_1 + m_2, n] - [m_1, n] - [m_2, n]$, $[am, n] - a[m, n]$, $[m, an] - a[m, n]$ ($m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $a \in A$). On note $M \otimes_A N$ le A -module quotient $A[M \times N]/T$. C'est le *produit tensoriel de M et N au dessus de A* . On note $m \otimes n$ l'image de $[m, n]$ dans $M \otimes_A N$. Montrer qu'on a $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$, $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$, $(am) \otimes n = a(m \otimes n) = m \otimes (an)$ ($m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $a \in A$).
3. Supposons que A soit un corps. Montrer que si (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_m) sont des bases de M et N respectivement, $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}}$ est une base de $M \otimes_A N$. Quelles est alors la dimension de $M \otimes_A N$ en fonction des dimensions de M et N ?
4. Montrer qu'il existe parfois des éléments dans $M \otimes_A N$ qui ne s'écrivent pas sous la forme $m \otimes n$ avec $m \in M$, $n \in N$. (On pourra prendre par exemple le cas où A est un corps et $M = N = A^2$.)
5. Montrer qu'on a un homomorphisme de A -module $M \otimes_A N \rightarrow \text{Hom}_A(M^*, N)$ qui à $x \otimes y$ associe l'application qui à $\phi \in M^*$ associe $\phi(x)y$.