

**Licence de Mathématiques et d'Informatique : Algèbre et Géométrie**

**TEST N° 2**

NOM :

Prénom :

- 1) On pose  $N = \{(a, -a) \mid a \in \mathbf{R}\}$ . Montrer que  $N$  est un sous-groupe distingué de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  et que le groupe quotient  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/N$  est isomorphe au groupe  $\mathbf{R}$ .
- 2) Quelle est la liste, à isomorphisme près, des groupes abéliens d'ordre 792 ?
- 3) L'ensemble des polynômes à coefficients entiers dont le terme constant est 3 est-il un idéal de  $\mathbf{Z}[x]$ ?
- 4) Soient  $R$  et  $S$  deux anneaux commutatifs et soit  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorphisme d'anneaux. Montrer que si  $J$  est un idéal de  $S$  alors  $\varphi^{-1}(J)$  est un idéal de  $R$ .
- 5) Soit  $\varphi : \mathbf{Q}[x] \rightarrow \mathbf{Q}$  l'application qui à  $p(x)$  associe  $p(0)$ . Est-ce un homomorphisme d'anneaux?
- 6) Soit  $D$  un entier qui n'est pas un carré parfait dans  $\mathbf{Z}$ . On définit le sous-ensemble de  $\mathbf{C}$  suivant :

$$\mathbf{Q}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

Montrer que  $\mathbf{Q}[\sqrt{D}]$  est un corps.

- 7) Énoncer le lemme chinois.

Répondre ci-dessous et au verso en justifiant aussi brièvement que possible.