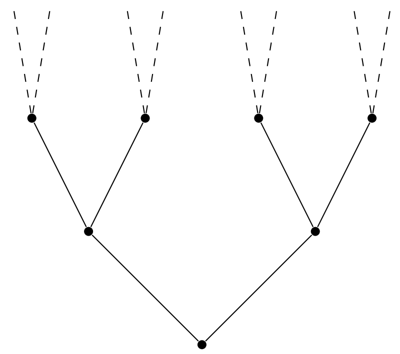
Chapitre I

Variations sur C·a·n·t·o·r

Aperçu du chapitre. L'arbre binaire infini sert de prétexte à des rappels de mathématiques. Équipotence et arbres (§ 1), structures d'ordre (§ 2), ordinaux (§ 3), topologies profinies (§ 4), anneaux de Boole et théorème de dualité de Stone (§ 5) sont présents dans la suite du cours. Un sujet d'étude (§ SÉ1) sur les ordinaux et leurs liens avec la topologie permet d'approfondir.

La logique à proprement parler commence au chapitre II. On peut s'y rendre directement, quitte à se référer ponctuellement aux présents rappels. Les prérequis seront toujours indiqués en tête de section.

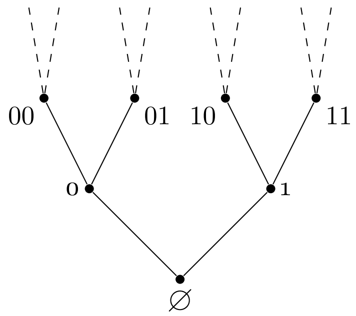
L'*arbre binaire infini* de Cantor est la structure $\mathcal{A}$suivante : $\mathcal{A}$



L'arbre binaire infini

— Les sommets forment l'ensemble noté 2^{ω} (exponentielle ordinale, § 3.2) $h(s)$ des suites *finies* de 0 et de 1 ; la suite vide $\varnothing$ est permise. Attention : la notation exponentielle a plusieurs sens distincts en théorie des ensembles et le contexte seul permet de statuer.

— Chaque sommet s possède une *hauteur* $h(s)$, qui est sa longueur en tant que suite. Ainsi $h(\varnothing) = 0$.
— Notons 2^n l'ensemble des fonctions $\{0, \dots, n-1\} \to \{0, 1\}$; alors $2^0 = \varnothing$ et $2^\omega = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} 2^n$ (réunion disjointe). Ainsi $2^n = \{s \in 2^\omega : h(s) = n\}$.
— La relation d'arête (orientée) est $s{-}t$:si $\quad (h(t) = h(s)+1) \wedge (t_{|\{0,\dots,h(s)-1\}} = s)$. La notation $f_{|X}$ désigne la restriction de fonction f à X ; et $\wedge$ désigne la conjonction.



On omet les parenthèses et virgules inutiles.
$\varnothing$ est la fonction vide alors que 0 fait $0 \mapsto 0$;
1 fait $0 \mapsto 1$; 00 fait $0 \mapsto 0$ et $1 \mapsto 0$; etc.

Manier formellement la notion de branche (§ 1) demanderait une telle théorie, que l'on n'explicitera pourtant pas. Les combinatoires ZF ou ZFC, décrites au chapitre V, rendraient bien sûr compte des phénomènes présentés ici, mais n'ont pas statut de cadre préalable.

§ 1. L'espace amorphe des branches

En § 1.1 est établie l'*équipotence* de l'ensemble des branches de $\mathcal{A}$, de $P(\mathbb{N})$ et de $\mathbb{R}$. Le *théorème de Cantor-Bernstein* sur l'équipotence (§ 1.2) ne demande pas de choix. Dans sa formulation générale, le *lemme de Kőnig* (§ 1.3) sur les arbres abstraits dénombrables à branchement fini en demande.

On trouvera, comme à chaque section, des exercices puis des notes pour approfondir ; ces dernières sont de consultation facultative.

Prérequis : injections, surjections, bijections ; dénombrabilité ; notion de choix.

La notion de chemin (orienté) dans $\mathcal{A}$ est intuitive : une suite, finie ou non, de sommets en relation d'arête.

Définition (branche d'un arbre)**.** Une *branche* d'un arbre en est un chemin maximal pour l'inclusion.

Dans $\mathcal{A}$, « branche » coïncide avec « chemin infini partant de la racine ». $\mathcal{C}$
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des branches de $\mathcal{A}$.

§ 1.1. La puissance du continu

$\mathcal{A}$ est manifestement dénombrable, i.e. en bijection avec les entiers.

Définition (équipotence ; puissance, cardinal naïf, cardinalité)**.** Deux ensembles sont *équipotents* (aussi : « ont même *puissance* ») s'il existe une bijection entre eux.

Remarques

- Pour éviter toute confusion avec l'ensemble des parties, également appelé *puissance ensembliste*, on parlera de « cardinal naïf » ou de « cardinalité ».
- Dans l'approche naïve, un cardinal est une propriété plutôt qu'un objet : seule a sens la relation « avoir le même cardinal ». On note $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$. Une formalisation possible des cardinaux *en tant qu'objets* d'une théorie des ensembles est donnée en § 24. $\operatorname{card} X$
- Comme une bijection est un isomorphisme dans la catégorie **Ens** des ensembles, on écrira $E \simeq F$ [**Ens**], ou $E \simeq F$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. **Ens**
- Les propriétés naïves de l'arithmétique cardinale (p. ex. « pour A infini, $A^2 \simeq A$ », ou « une réunion d'ensembles dénombrables est dénombrable », qui demandent du choix) sont supposées connues. Elles sont formalisées et démontrées dans ZFC en § 24. Sans choix elles deviennent délicates voire fausses ; v. § 24, notes conclusives ou compléments § B.
- Si E est un ensemble, on note $P(E)$ l'ensemble de ses parties et 2^E l'ensemble des fonctions $E \to \{0,1\}$. (Attention : la première notation 2^ω ne désigne ainsi pas l'ensemble de toutes les fonctions $\omega \to 2$; la notation est contextuelle.) Par le moyen des fonctions indicatrices, on a $2^E \simeq P(E)$. $P(x)$, 2^x
- Si $E \simeq F$ alors $2^E \simeq 2^F$; l'exponentiation $|2|^{|E|}$ des cardinaux naïfs est donc bien définie par $|E|^{|F|} = \operatorname{card} E^F$.

Proposition (et définition : puissance du continu)**.** Les ensembles suivants sont équipotents :

- $\mathcal{C}$, ensemble des branches de l'arbre $\mathcal{A}$;
- $2^{\mathbb{N}}$, ensemble des fonctions $\mathbb{N} \to \{0,1\}$;
- $\mathbb{R}$, unique corps ordonné complet au sens de Dedekind-Hölder.

Ce cardinal est appelé *la puissance du continu*.

On trouvera des rappels sur les réels aux compléments § A.

Démonstration

— Une bijection naturelle entre $2^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{C}$ se construit par suites cohérentes de suites finies. Si $(u_n : n \in \mathbb{N}) \in 2^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $u_{|n} = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in 2^n$ sa restriction aux n premiers termes. Les $u_{|n}$ sont alors des sommets de $\mathcal{A}$, formant une branche. On forme ainsi la bijection :

$$\begin{array}{ccc} 2^{\mathbb{N}} & \to & \mathcal{C} \\ (u_n : n \in \mathbb{N}) & \mapsto & (u_{|n} : n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

— Pour une bijection entre $\mathbb{R}$ et $2^{\mathbb{N}}$, on donne deux injections de sens contraire puis on invoque le théorème de Cantor-Bernstein de § 1.2. Clairement $\mathbb{R} \simeq]0,1[$. Or tout réel de $[0,1]$ possède un développement binaire (s'il en existe un propre, le préférer), donc $[0,1]$ s'injecte dans $2^{\mathbb{N}}$. Réciproquement, la fonction suivante est injective :

$$\begin{array}{ccc} 2^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n : n \in \mathbb{N}) & \mapsto & \frac{2}{3} \sum_{n \geqslant 0} \frac{u_n}{3^n}. \end{array}$$

Ainsi notant $\hookrightarrow$ (l'existence d')une injection, on a $\mathbb{R} \simeq]0,1[\hookrightarrow [0,1] \hookrightarrow 2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$, et l'on conclut par le théorème de Cantor-Bernstein. $\square$

On assimilera dorénavant $\mathcal{C}$ à l'ensemble des suites de 0 et de 1 indexées par les entiers. Notamment $\sigma \in \mathcal{C}$ désigne indifféremment :

— une suite infinie de 0 et de 1 ; $\sigma(n) = \sigma_n \in \{0,1\}$;

— une suite infinie de sommets formant chemin : $\sigma_{|n} \in 2^n$.

La traduction est évidente et il n'y a jamais d'ambiguïté. L'ensemble $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable en vertu du fait suivant.

Théorème (« théorème du saut » de Cantor)**.** Aucun ensemble E ne se surjecte sur $P(E)$.

Démonstration. Soient $g\colon E \twoheadrightarrow P(E)$ une surjection ensembliste et $F = \{x \in E : x \notin g(x)\}$, de sorte que $F \in P(E)$. Par surjectivité, il existe $f \in E$ tel que $F = g(f)$. Alors $f \in F$ ssi $f \notin g(f)$ ssi $f \notin F$, contradiction. $\square$

Notamment il n'y a jamais de bijection entre E et $P(E)$.

Remarque (1). Avec la proposition on obtient l'indénombrabilité des réels et de $\mathcal{C}$. Une forme plus naïve de cet *argument diagonal* consiste à montrer que toute famille dénombrable de réels omet un réel. On déplace le problème dans $[0,1]$. Soit $\mathcal{F} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de $[0,1]$. On écrit le développement décimal de chaque terme, $x_n = 0, k_{n,0}k_{n,1}\ldots$ puis on pose :

$$\ell_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k_{n,n} \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad k_{n,n} = 0. \end{cases}$$

Alors $y = 0, \ell_0\ell_1 \ldots$ n'est pas dans $\mathcal{F}$.

Remarques (2)

— Les cardinaux infinis forment une « suite » $\aleph_0 < \aleph_1 < \ldots$; le génie de Cantor est d'avoir donné un sens aux points de suspension.

— Le cardinal de $\mathbb{N}$ étant noté $\aleph_0$, on a $\aleph_0 < |2|^{|\aleph_0|}$, ou encore $\aleph_1 \leqslant |2|^{|\aleph_0|}$ car $\aleph_1$ désigne le premier cardinal non dénombrable. $\aleph_\alpha$

  L'*hypothèse du continu* HC, proposée par Cantor, est que toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est en bijection soit avec $\mathbb{N}$ soit avec $\mathbb{R}$; avec les cardinaux elle se reformule en $\aleph_1 = |2|^{|\aleph_0|}$. À ce jour nous ignorons la validité de cette hypothèse discutée en § 24.3. HC

§ 1.2. Théorème de Cantor-Bernstein

Notons $A \leqslant B$ [**Ens**] s'il existe une injection de l'ensemble A dans l'ensemble B. Ainsi, le théorème du saut entraîne que pour tout ensemble, $P(A) \nleqslant A$ [**Ens**].

Théorème (« d'équivalence » de Cantor, ou « de Cantor-Bernstein »)**.** Si $A \leqslant B$ [**Ens**] et $B \leqslant A$ [**Ens**] alors $A \simeq B$ [**Ens**].

Remarque. Ce théorème exprime une propriété remarquable de la catégorie **Ens** : s'il existe un morphisme injectif de A dans B et un de B dans A, alors il existe un isomorphisme entre A et B. (Peut aussi se formuler avec des monomorphismes.)

Démonstration. Elle invoque un lemme utile.

Lemme (Knaster-Tarski)**.** Soient A un ensemble et $H : P(A) \to P(A)$ une fonction croissante pour l'inclusion. Alors H possède un point fixe.

Démonstration. Soit $\mathcal{I} = \{X \in P(A) : X \subseteq H(X)\}$. Notons que $\mathcal{I} \neq \varnothing$ car $\varnothing \in \mathcal{I}$. Soit $U = \bigcup_{X \in \mathcal{I}} X$. On affirme que U est fixe sous H.

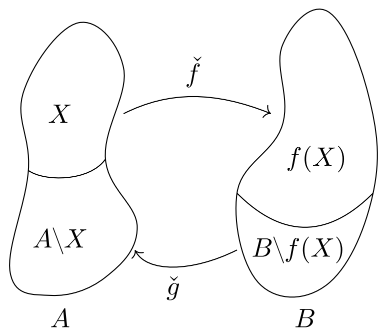
En effet si $X \in \mathcal{I}$, alors $X \subseteq H(X)$; à la réunion, $U \subseteq H(U)$ et notamment $U \in \mathcal{I}$. Toujours pour $X \in \mathcal{I}$ on a $X \subseteq U$: donc U est le plus grand élément de $\mathcal{I}$. Par croissance, $U \subseteq H(U)$ entraîne $H(U) \subseteq H(H(U))$ donc $H(U) \in \mathcal{I}$, dont U est le plus grand élément. Ainsi $U \subseteq H(U) \subseteq U$, montrant que U est point fixe. $\square$

Soient $f\colon A \hookrightarrow B$ et $g\colon B \hookrightarrow A$ deux injections. Soit la fonction :

$$H\colon \begin{array}{ccc} P(A) & \to & P(A) \\ X & \mapsto & A \backslash g(B \backslash f(X)). \end{array}$$

Cette fonction est clairement croissante ; d'après le lemme, elle possède un point fixe, disons X. Celui-ci vérifie donc $g(B\backslash f(X)) = A\backslash X$. On considère alors les restrictions $\check{f}\colon X \simeq f(X)$ et $\check{g}\colon B\backslash f(X) \simeq g(B\backslash f(X)) = A\backslash X$.

Retournant $\check{g}$ et recollant avec $\check{f}$, on obtient une bijection globale $A \simeq B$.



Les deux bijections partielles donnent une bijection globale.

Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarques

— Le lemme est étudié plus en détail à l'exercice 3.8.

— Le théorème n'affirme pas « $A \nleqslant B$ entraîne $B \leqslant A$ ». Ce dernier énoncé est une forme de choix (§ 23.2).

— Ni le lemme ni le théorème ne demande d'effectuer de choix (la fonction H construite possède d'ailleurs un *plus grand* point fixe). Ceci contraste avec § 1.3.

§ 1.3. Branches d'un arbre abstrait

L'ensemble des branches $\mathcal{C}$ est clairement non vide : il contient la suite $\underline{0} = (0, 0, \dots)$. Pour un arbre abstrait c'est moins évident.

Définition (arbre graphe-théorique)**.**

— Un *graphe orienté* est une paire $\Gamma = (S, A)$ où S est un ensemble d'objets appelés *sommets*, et A un ensemble de paires ordonnées de sommets appelées *arêtes orientées*, telle que si $(x, y) \in A$ alors $(y, x) \notin A$.

La notion de *chemin orienté fini* dans un tel graphe est évidente.

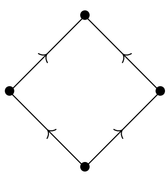
— Un *arbre graphe-théorique orienté et enraciné* est un graphe orienté muni d'un sommet r tel que pour tout sommet s, il existe un unique chemin orienté fini de r à s. Le point r est appelé la *racine* de l'arbre.

— Pour une arête orientée $a - b$, on dit que a est *père* de b et b *fils* ou *successeur* de a.

— Le *branchement* en un sommet compte le nombre de ses fils.

Remarques

— On lit parfois qu'un arbre orienté est un graphe orienté connexe et sans cycles. C'est imprécis car on comprend « sans cycles orientés ». Or le graphe orienté :



vérifie cette définition mais n'est pas un arbre.

— Ne pas confondre les arbres orientés avec les *arbres ordonnés*, où tout sommet ordonne l'ensemble de ses fils. Nous considérerons des arbres orientés.

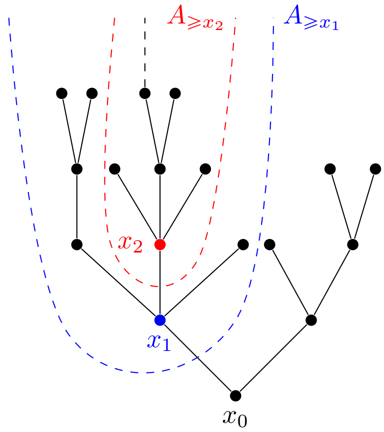
— Il existe d'autres définitions, et surtout d'autres notions d'arbres comme en théorie des ensembles.

Dorénavant, tous les arbres graphe-théoriques considérés seront orientés et enracinés. La définition de branche donnée au début de § 1 conserve un sens.

Théorème (« lemme de Kőnig (fils) »)**.** Un arbre enraciné dénombrable à branchement fini possède une branche infinie.

Si l'on remplace « fini » par « dans $\{0,1\}$ », on se limite aux sous-arbres de $\mathcal{A}$. C'est le *Lemme de Kőnig faible*, essentiel en analyse de preuves.

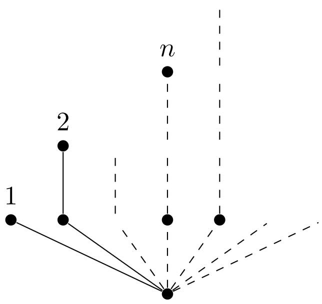
Démonstration. Soit A un tel arbre. On part de la racine, notée x_0. Par hypothèse, x_0 n'a qu'un nombre fini de successeurs y ; pour chacun, soit $A_{\geqslant y}$ le sous-arbre de racine y. Comme ces $A_{\geqslant y}$ couvrent $A \setminus \{x_0\}$, l'un au moins est infini. Soit x_1 un tel successeur ; on réitère. Le processus ne termine pas ; on construit ainsi un chemin infini (x_n).



Recherche itérée d'infini

Ce chemin est une branche au vu des définitions. $\square$

Remarque (1). L'hypothèse est bien sûr nécessaire. Considérer sinon :



Un arbre enraciné dénombrable sans branche infinie

Remarques (2)

— Le mot « construit » est en contradiction flagrante avec le mot « choisit ». Chacune des étapes de choix (qui d'ailleurs dépendent les unes des autres, de façon consécutive), revient à interroger un opérateur externe sur la décision à prendre, comme si un programme informatique s'interrompait à chaque fois pour demander une instruction à son utilisateur. Le temps des mathématiciens étant fini et l'arbre infini, il faut un « oracle » global, un *principe de choix dépendant.*

— Un tel appel n'est pas nécessaire si les sommets de l'arbre sont bien ordonnés au sens de § 2.3, ou même si pour chaque sommet l'ensemble de ses fils est bien ordonné : car on sait toujours quoi faire, par exemple « privilégier le premier cas disponible ». C'est notamment le cas pour l'arbre de Cantor $\mathcal{A}$ et ses sous-arbres infinis.

— La version abstraite du lemme de Kőnig est démontrable dans ZFC et sa version faible dans ZF (sans choix). Cette forme faible décrit un phénomène fondamental, et non une conséquence d'une théorie ; la théorie ne fait que *rendre compte* du phénomène. On répète que la théorie ZF n'est qu'un objet d'étude logique parmi d'autres, et certainement pas un « cadre global ». En science priment les phénomènes.

Les problèmes de « construction effective » en mathématiques ne se réduisent pas au recours ou non aux formes de choix. Travailler dans ZF peut donner cette impression, mais ZF elle-même est déjà très éloignée des préoccupations constructives. V. notes conclusives.

Exercices

Une flèche en marge signale un exercice important, pour la méthode ou l'énoncé. Le nombre d'étoiles indique la difficulté. Les éventuelles indications sont données entre crochets.

1.1. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables, équipotents à $\mathcal{C}$ ou ni l'un, ni l'autre ? a. l'ensemble $\mathbb{N}^2$; b. l'ensemble $\mathbb{Q}$; c. l'ensemble $\mathbb{R}$; d. l'ensemble des suites d'entiers $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; e. l'ensemble des suites de rationnels qui convergent vers 0 ; f. l'ensemble des suites de rationnels stationnaires ; g. l'ensemble $P(\mathbb{R})$; h. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; i. l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même ; j. l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle. On admet qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (mais cf. § 24, notes conclusives).

1.2 (preuve « de Gyula Kőnig » du théorème de Cantor-Bernstein). Soient A et B deux ensembles infinis disjoints, et $f\colon A \hookrightarrow B$ et $g\colon B \hookrightarrow A$ deux injections. Pour $x \in A$ considérer les suites $(x_0, x_1, \cdots)$ finies ou non à valeurs dans $A \cup B$, telles que $x_0 = x$ et x_{n+1}, s'il existe, est un antécédent de x_n par f ou g. Grâce à ces suites, partitionner A et B puis donner une bijection $A \simeq B$.

1.3. Pour une catégorie, la *propriété de Cantor-Bernstein* est la propriété :

si l'on a deux objets A, B et deux morphismes injectifs $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$, alors A et B sont isomorphes.

(Note : l'injectivité est bien celle en termes ensemblistes.) Trouver des catégories ayant et n'ayant pas cette propriété.

Théorème (Nullstellensatz de Hilbert)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un uplet d'indéterminées, et $I \lhd \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ un idéal propre. Alors il existe $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ annulant I, i.e. vérifiant $(\forall P \in I)(P(\mathbf{a}) = 0)$.

1.4 (deux applications de la cardinalité en algèbre).

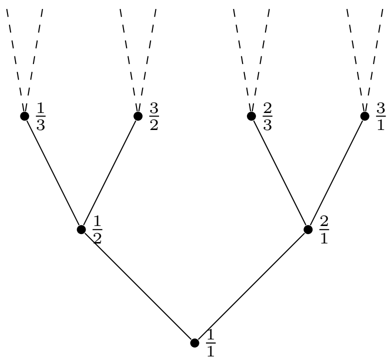
a. Montrer qu'il existe des réels transcendants (sur $\mathbb{Q}$), i.e. des réels qui ne sont racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels.

b. Démontrer le Nullstellensatz *si* $\mathbb{K}$ *est non dénombrable*, en procédant comme suit. Montrer qu'on peut supposer I maximal. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$. S'il existe $y \in \mathbb{A}$ transcendant sur $\mathbb{K}$, comparer la dimension $\mathbb{K}$-linéaire de $\mathbb{A}$ et de $\left\langle \frac{1}{y-\lambda} : \lambda \in \mathbb{K} \right\rangle_{\mathbb{K}\textbf{-ev}}$. En déduire que $\mathbb{A}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ et conclure.

Autre démonstration du cas non dénombrable : ex. 15.5. Cas général : démonstration modèle-théorique aux compléments § K.1.

1.5. Montrer qu'il existe une famille de $|2|^{|\aleph_0|}$ parties de $\mathbb{N}$ dont les intersections deux-à-deux sont finies.

1.6 (arbre de Calkin-Wilf). On décore $\mathcal{A}$ comme suit :



Les fils de $\frac{p}{q}$ sont $\frac{p}{p+q}$ et $\frac{p+q}{q}$.

a. Montrer que les fractions apparaissant sont irréductibles, et que réciproquement toute fraction irréductible apparaît. Déduire une bijection $\mathcal{A} \simeq \mathbb{Q}_{>0}$.

b. Soit (u_n) la suite rationnelle définie par $u(0) = 1$ et les conditions :

$$\begin{cases} u(2n+1) = u(n) \\ u(2n+2) = u(n) + u(n+1). \end{cases}$$

Montrer que $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ est une bijection $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Q}_{>0}$.

c. Un *développement hyperbinaire* de n est une écriture $n = \sum k_i 2^i$ où $k_i \in \{0, 1, 2\}$. Montrer que le nombre de tels développements est u_n.

d. Soit $f(x) = \frac{1}{2\lfloor x \rfloor + 1 - x}$, définie hors de -1, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière. Montrer que $v_n = f^{n+1}(0)$.

1.7 (dimension du dual). Soient $\mathbb{K}$ un corps, et I un ensemble infini. Le dual d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est noté E^*.

a. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base indexée par I. Montrer que $E^* \simeq \mathbb{K}^I$ [$\mathbb{K}$-ev].

b. Soit $F = \mathbb{K}[X_i : i \in I]$ l'espace des polynômes sur I indéterminées. Montrer que $\dim_{\mathbb{K}} F^* = |\mathbb{K}|^{|I|}$. (*)

c. En déduire que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, alors $\dim_{\mathbb{K}} E^* = \operatorname{card} E^*$.

1.8. Montrer, aussi directement que possible, l'équivalence entre la compacité séquentielle de $[0, 1]$ et le lemme de Kőnig faible. (On peut utiliser que des fermés emboîtés de diamètre évanescent définissent un unique réel.)

1.9. Montrer que $[0, 1]^{[0,1]}$ n'est pas séquentiellement compact. [Argument diagonal ; développements binaires.] (*)

Notes conclusives

• Les notes conclusives sont toujours de lecture optionnelle. Elles contiennent des remarques historiques et parfois terminologiques, puis des points d'approfondissement. Souvent ces points ne sont accessibles qu'en deuxième lecture ; ce choix est assumé. • Chaque section porte sa bibliographie en notes de bas de page ; tout document à nouveau cité dans une autre section sera de nouveau décrit en note. Une référence **en gras** signale un document d'importance dans l'histoire de la logique mathématique ou de la théorie des ensembles. • Les références générales sont indiquées *avant* les repères historiques.

Une introduction très accessible est [Deh09].

• Repères historiques

Von besonderem Interesse dürfte folgende Episode sein: Dedekind äußerte, hinsichtlich des Begriffes der Menge: er stelle sich eine Menge vor wie einen geschlossenen Sack, der ganz bestimmte Dinge enthalte, die man aber nicht sähe, und von denen man nichts wisse, außer daß sie vorhanden und bestimmt seien. Einige Zeit später gab Cantor seine Vorstellung einer Menge zu erkennen: Er richtete seine kolossale Figur hoch auf, beschrieb mit erhobenem Arm eine großartige Geste und sagte mit einem ins Unbestimmte gerichteten Blick: „Eine Menge stelle ich mir vor wie einen Abgrund.“ Bernstein, [Dedekind·3, p. 449]

Équipotence. • Ses pionniers furent Cantor et Dedekind dans les années 1870. Galilée puis Bolzano n'avaient entrevu la notion que pour la récuser. • Le fameux raisonnement sur l'équipotence des carrés et des entiers à la première journée de [Galileo, pp. 32–33] mène Galilée à exclure les quantités infinies du champ d'application des relations d'égalité et de comparaison.

[Deh09] : Patrick Dehornoy. « Cantor et les infinis ». In : *Gaz. Math.* 121 (2009), p. 29-46

[Dedekind·3] : Richard Dedekind. *Richard Dedekind, Gesammelte mathematische Werke.* Sous la dir. de Robert Fricke, Emmy Noether et Øystein Ore. T. 3. Braunschweig : Friedr. Vieweg & Sohn, 1932. 508 p.

[Galileo] : Galileo Galilei. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali.* Leida : gli Elsevirii, 1638. 312+vii

• [Bolzano2, § 20] introduit l'équipotence sans la nommer. Être équipotent à une partie propre caractérise bien l'infini, mais Bolzano en déduit que cette relation est inopérante à l'infini. • Dans [Frege2, § 63] (postérieur aux premiers travaux de Cantor, et les citant pour en faire la critique), Frege attribue à [Hume, Book I, Part III, Section I] l'intuition de l'équipotence pour étendre le concept de nombre à l'infini ; ce peut être une pique à l'endroit de Cantor. Une époque crut voir en Cantor et Frege des titans rivaux de la logique mathématique ; mais le premier n'a rien laissé en logique mathématique, et le second rien en mathématiques. • La première démonstration de l'indénombrabilité des réels (§ 1.1) est dans [Can74, § 2]. Dedekind ne publia guère sur la question [Fer93]. • Correspondance Cantor-Dedekind : éditée par Cavaillès et Noether [**Cantor-Dedekind**] ; traduction française dans [Cav94, p. 375 sqq.]. • Pour l'histoire des cardinalités naïves, [Dei10] (avec réserves). •La vraie révolution cantorienne vient des ordinaux (§ 3) plus que des cardinaux.

Argument diagonal. • Identifiable chez Dubois-Reymond, [Boi75, note en bas de p. 365] pour un point d'analyse asymptotique. • Cantor lui donna forme dans sa « deuxième preuve d'indénombrabilité » [**Can92**]. Le même article abstrait l'argument et obtient le théorème du saut. • L'argument diagonal n'est pas encore dans [Can74], qui emploie la complétude de $\mathbb{R}$.

Hypothèse du continu (**HC*****).*** • Formulée d'abord en termes naïfs [**Can78**, dernier paragraphe]. Notamment pour avoir davantage de prise sur la question, Cantor conçut les ordinaux et cardinaux « transfinis » ; HC s'inclut dans cette théorie plus vaste. • Promue par Hilbert [**Hil00a**, Problem 1] au rang des plus importants points de mathématiques, elle fut montrée et réfutée un certain nombre de fois au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, jamais sans erreur [Moo89]. • La théorie ZF, développée pour donner un cadre formel aux idées de Cantor, ne permet pas de statuer. Gödel a

---

[Bolzano2] : Bernard BOLZANO. *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig : C. H. Reclam, 1851

[Frege2] : Gottlob FREGE. *Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau : Wilhelm Koebner, 1884. 119 p.

[Hume] : David HUME. *A Treatise of Human Nature.* London : John Noon, 1739. 274 p.

[Can74] : Georg CANTOR. « Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen ». In : *J. Reine Angew. Math.* 77 (1874), p. 258-262

[Fer93] : José FERREIRÓS. « On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind ». In : *Historia Math.* 20.4 (1993), p. 343-363

[**Cantor-Dedekind**] : Emmy NOETHER et Jean CAVAILLÈS, éd. *Briefwechsel Cantor-Dedekind.* Paris : Hermann & Cie, 1937, p. 61

[Cav94] : Jean CAVAILLÈS. *Œuvres complètes de philosophie des sciences.* Paris : Hermann, 1994. ix+686

[Dei10] : Oliver DEISER. « On the development of the notion of a cardinal number ». In : *Hist. Philos. Logic* 31.2 (2010), p. 123-143

[Boi75] : Paul du BOIS-REYMOND. « Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen ». In : *Math. Ann.* 8 (1875), p. 363-414

[**Can92**] : Georg CANTOR. « Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre ». In : *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 1 (1892), p. 75-78

[**Can78**] : Georg CANTOR. « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre ». In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878), p. 242-258

[**Hil00a**] : David HILBERT. « Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900 ». In : *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1900), p. 253-297

[Moo89] : Gregory MOORE. « Towards a history of Cantor's continuum problem ». In : *The history of modern mathematics, Vol. I (Poughkeepsie, NY, 1989).* Sous la dir. de David E. ROWE et John MCCLEARY. Proceedings of the symposium held at Vassar College, Pough-

démontré que ZF n'excluait pas HC ; Cohen, qu'elle ne l'entraînait pas. • Voir en les résultats de Gödel et Cohen un horizon indépassable, c'est croire que ZF est la « fin de l'histoire ». Cette théorie ne reflète que notre compréhension de la nature ensembliste vers 1920. • Le problème est que depuis, nous accumulons des observations insuffisantes, si tant est que la nature ensembliste soit univoque et observable. • Suite en § 24, notes conclusives.

Théorème de Cantor-Bernstein. Aussi appelé « de Cantor-Schröder-Bernstein », « de Schröder-Bernstein », ou « d'équivalence ». Peano [Pea06] dit « Cantor-Bernstein » ; ce nom peut être antérieur. • Son histoire est complexe [Ó S13]. Dedekind [Dedekind·3, p. 447] fut le premier à l'obtenir sans principe de choix (par opposition à Cantor, qui tenait pour acquise la comparabilité des cardinaux), bien avant Bernstein et Schröder qui firent paraître les premières preuves ; celle de Schröder était d'ailleurs erronée. • Lemme de Knaster-Tarski : [Kna28, p. 133], travail commun avec Tarski.

Lemme de Kőnig. Nommé d'après Dénes Kőnig (fils de Gyula Kőnig) qui l'isola dans [**Kőn27**], il devrait s'appeler de Kőnig-Valkó ; il a son origine dans une question sur les cardinaux naïfs [Fra97].

Misc. • Dénombrabilité des nombres algébriques (ex. 1.4) : Dedekind [Cav94, p. 392], mais publiée par Cantor sans mention [Can74, § 1]. • Ex. 1.6 : attribué à Calkin, Wilf, et Newman [Aigner-Ziegler, p. 110 sqq.]. • Ex. 1.7 : [Jacobson·2, chap. IX, § 5, note de bas de page] puis Bourbaki le nomment d'après Erdős et Kaplansky, mais on ne trouve rien de tel dans les deux copublications de E. et K.

• **Terminologie, notations.** • L'expression « théorie des ensembles » reste ambiguë ; si c'est l'analyse du continu, alors incontestablement Cantor en fut le fondateur. Ce domaine est désormais appelé « théorie descriptive des ensembles » ; il ne répond en rien à la crise des fondements car il l'aurait plutôt déclenchée (v. § 21, notes conclusives). • Le mot « puissance » est ambigu ; en allemand Cantor pouvait sans risque écrire *die Potenzierung von Mächtigkeiten* (« la mise à la puissance de puissances ») pour l'exponentiation cardinale [**Can95**, § 4]. • Il y a plusieurs notions non équivalentes d'arbre en mathématiques. Elles coïncident pour les objets finis, mais pas au-delà. • On répète que la notation exponentielle est contextuelle.

• **Théorème du saut.** [She17] recense des extensions classiques en l'absence de choix.

keepsie, New York, June 20–24, 1989. Boston : Academic Press, 1989, p. 79-121
[Pea06] : Giuseppe Peano. « Super theorema de Cantor-Bernstein ». In : *Rend. Circ. Mat. Palermo* 21 (1906), p. 360-366
[Ó S13] : Mícheál Ó Searcóid. « On the history and mathematics of the equivalence theorem ». In : *Math. Proc. R. Ir. Acad.* 113A.2 (2013), p. 151-168
[Kna28] : Bronisław Knaster. « Un théorème sur les fonctions d'ensembles ». In : *Ann. Soc. Polon. Math.* 6 : année 1927 (1928), p. 133-134
[**Kőn27**] : Dénes Kőnig. « Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche ». In : *Acta Litt. Sci. Szeged* 3 (1927), p. 121-130
[Fra97] : Miriam Franchella. « On the origins of Dénes Kőnig's infinity lemma ». In : *Arch. Hist. Exact Sci.* 51.1 (1997), p. 3-27
[Aigner-Ziegler] : Martin Aigner et Günter Ziegler. *Raisonnements divins.* 2^{e} éd. Paris : Springer, 2006. x+270
[Jacobson·2] : Nathan Jacobson. *Lectures in abstract algebra. Vol. II. Linear algebra.* Toronto-New York-London : D. Van Nostrand Co., Inc., 1953, p. xii+280
[**Can95**] : Georg Cantor. « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I ». In : *Math. Ann.* 46 (1895), p. 481-512
[She17] : Guozhen Shen. « Generalizations of Cantor's theorem in ZF ». In : *MLQ Math. Log. Q.* 63.5 (2017), p. 428-436

[Hod98] est un chef-d'œuvre d'humour, de bienveillance et d'épistémologie.

- **Hypothèse du continu.** Cette discussion sera claire en deuxième lecture ; elle sert d'abord de mise en garde. • L'affirmation « l'hypothèse du continu n'est ni vraie ni fausse » est tendancieuse ; car sauf à voir en ZF un indépassable absolu, l'indécidabilité dans ZF n'entraîne pas l'absence de valeur de vérité. • Soit par exemple φ l'énoncé « ZF est cohérente » ; on espère qu'il possède une valeur de vérité, et même qu'il est vrai. D'après le second théorème d'incomplétude de Gödel (§ 20 et compléments § Q), on espère que φ n'est pas démontrable dans ZF, ni réfutable. Donc φ est souhaité vrai, mais souhaité indécidable dans ZF. • L'hypothèse du continu diffère de φ, en ce qu'on ne sait qu'en penser. Les formalistes considèrent la question « HC est-elle vraie ? » comme un non-sens avéré. Les platoniciens attendent en secret des arguments décisifs. V. § 27, notes conclusives, *Quelle valeur pour le continu ?*

- **Théorème de Cantor-Bernstein.** Pour d'autres preuves, [Hinkis]. Le théorème est plus fin qu'il n'y paraît.

Cantor-Bernstein est-il constructif ? (2e lecture). Pour l'intuitionnisme (compléments § G), la disjonction de cas crée des difficultés épistémologiques. Bien qu'il n'utilise pas le choix dans ZF, le théorème de Cantor-Bernstein n'est *pas* constructif au sens strict : il emploie une telle disjonction, ce qui est une forme de tiers-exclu. En théorie intuitionniste des ensembles, Cantor-Bernstein équivaut au tiers-exclu [BP19].

Cantor-Bernstein au-delà des ensembles. • La question sur les autres catégories (ex. 1.3) est dans [BB86]. • On peut aussi tenter des abstractions en termes de treillis après Banach [Sik48b]. • Analogue en théorie de la calculabilité : théorème d'isomorphisme de Myhill [Myh55, Theorem 18].

Variantes ensemblistes : v. § 23, notes conclusives.

- **Lemme de Kőnig.** • Les généralisations à d'autres cardinaux pour les arbres ensemblistes sont mal comprises car peu contraintes par ZF ; c'est un thème de recherche actif et ardu. V. § SÉ5, notes conclusives. • La version faible est centrale en analyse des preuves, qui joue un grand rôle dans les « mathématiques à rebours ». • Le lemme de Kőnig *même faible* est faux en théorie de la calculabilité : il existe un sous-arbre infini calculable de $\mathcal{A}$ sans branche calculable [Kle52b]. V. [Monin-Patey, Proposition 8-3.5].

- **Théorème de l'éventail ; intuitionnisme, constructivisme** (2e lecture).

[Hod98] : Wilfrid Hodges. « An editor recalls some hopeless papers ». In : *Bull. Symbolic Logic* 4.1 (1998), p. 1-16
[Hinkis] : Arie Hinkis. *Proofs of the Cantor-Bernstein theorem.* T. 45. Science Networks. Historical Studies. Heidelberg : Birkhäuser, 2013. xxiv+429
[BP19] : Chad Brown et Pierre Pradic. « Cantor-Bernstein implies Excluded Middle ». Prépublication hal-02103517. 2019
[BB86] : Bernhard Banaschewski et Guillaume Brümmer. « Thoughts on the Cantor-Bernstein theorem ». In : t. 9. 1-4. 1986, p. 1-27
[Sik48b] : Roman Sikorski. « On a generalization of theorems of Banach and Cantor-Bernstein ». In : *Colloq. Math.* 1 (1948), p. 140-144
[Myh55] : John Myhill. « Creative sets ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 1 (1955), p. 97-108
[Kle52b] : Stephen Kleene. « Recursive functions and intuitionistic mathematics ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950.* T. 1. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952, p. 679-685
[Monin-Patey] : Benoît Monin et Ludovic Patey. *Calculabilité.* T. 107. Tableau Noir. Paris : Calvage et Mounet, 2022. xxii + 828

Définition (barre)**.** Une *barre* est un ensemble de sommets $B \subseteq \mathcal{A}$ clos supérieurement et tel que toute branche σ passe par au moins un point de B, i.e. vérifiant $(\forall \sigma \in \mathcal{C})(\exists n \in \mathbb{N})(\sigma_{|n} \in B)$.

Une barre est *décidable* si elle vérifie $(\forall s)(s \in B \vee s \notin B)$; l'hypothèse est triviale en logique classique mais pas en logique intuitionniste. L'énoncé suivant fait pendant au lemme de Kőnig faible. On y reconnaît une propriété de Borel-Lebesgue, v. § 4.2.

Théorème (« éventail » de Brouwer)**.** Les barres décidables sont uniformisables : si B est une telle barre, alors $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall \sigma \in \mathcal{C})(\sigma_{|N} \in B)$.

Remarque. La contraposée du lemme de Kőnig faible pour les sous-arbres décidables de $\mathcal{A}$ de racine $\varnothing$ équivaut au théorème de l'éventail.

Vérification de la remarque. On sous-entend « décidable de racine $\varnothing$ ». La contraposée du lemme est φ : « un sous-arbre $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sans branche infinie est de hauteur majorée ».

L'involution de $P(\mathcal{A})$ qui fait $X \mapsto X^c$ échange les sous-arbres avec les parties (décidables) propres closes supérieurement. Elle échange aussi les sous-arbres sans branches infinies avec les barres.

La relation d'arête induit un ordre partiel $\sqsubseteq$ (v. § 2). Appelons *valuation* d'un point de $b \in B$ l'entier $v(b) = \min\{h(x) : x \in B \wedge x \sqsubseteq b\}$. Via la transformation ^{c}, l'énoncé φ devient : « toute barre est de valuation minorée ». C'est le théorème de l'éventail. ◇

• En logique classique une implication est démontrable ssi sa contraposée l'est, d'où l'équivalence entre « Kőnig faible » et « éventail ». Mais *c'est faux en logique intuitionniste* (compléments § G). Dans cette logique, le théorème de l'éventail est beaucoup plus faible que le lemme de Kőnig. • Les intuitionnistes rejettent le lemme de Kőnig faible, tout en acceptant le théorème de l'éventail. • Premier survol [Coq04a] ; puis [Loe05]. • Le *constructivisme* altère, outre la logique, tous les concepts de base : il étudie, en logique intuitionniste, des objets qui ne sont pas ceux des mathématiques usuelles. Ce cours évite entièrement le sujet. Contexte [Tro11] ; invitation [Bau17] ; référence [Bishop-Bridges].

§ 2. Structures d'ordre

On munit l'arbre $\mathcal{A}$ de plusieurs ordres distincts, certains *totaux*, d'autres *partiels*. Ceci motive les *raisonnements par maximalité* (§ 2.1), l'étude de l'ordre rationnel par *va-et-vient* (§ 2.2), et ouvre la voie aux *bons ordres*

[Coq04a] : Thierry Coquand. « About Brouwer's Fan Theorem ». In : *Revue internationale de philosophie* 4.230 (2004), p. 483-489
[Loe05] : Iris Loeb. « Equivalents of the (weak) fan theorem ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 132.1 (2005), p. 51-66
[Tro11] : Anne Troelstra. « History of constructivism in the 20th century ». In : *Set theory, arithmetic, and foundations of mathematics : theorems, philosophies.* T. 36. Lect. Notes Log. Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2011, p. 150-179
[Bau17] : Andrej Bauer. « Five stages of accepting constructive mathematics ». In : *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 54.3 (2017), p. 481-498
[Bishop-Bridges] : Errett Bishop et Douglas Bridges. *Constructive analysis.* T. 279. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin : Springer-Verlag, 1985, p. xii+477

(§ 2.3).
Prérequis : relations binaires, principe de récurrence ; § 1.

Un *ordre* (au sens large) $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ est un ensemble muni d'un relation réflexive, anti-symétrique, et transitive ; on dit aussi *ensemble ordonné.* Un morphisme d'ordres est une fonction croissante.

— Un ordre *au sens strict* est irréflexif, i.e. on n'a jamais $x < x$. Un morphisme d'ordres stricts est une fonction *strictement* croissante. Les deux notions d'ordre servent : les ordres larges sont plus naturels, mais les ordres stricts sont parfois inévitables.

— On note $\wedge$ la conjonction « et » et $\vee$ la disjonction « ou ». Si $\leqslant$ est un ordre large, alors $(x \leqslant y \wedge x \neq y)$ est un ordre strict ; si $<$ est un ordre strict, alors $(x < y \vee x = y)$ est un ordre large.

Ord — Soit **Ord** la catégorie des ordres (larges) ; $\rightarrow$ y désigne un morphisme et $\hookrightarrow$ un morphisme injectif.

Définition (ordre total/linéaire)**.** Un ordre est *total*, ou *linéaire*, s'il vérifie : $(\forall x)(\forall y)(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$; il est *partiel* sinon.

La totalité signifie donc que deux éléments de l'ordre sont toujours *comparables*, i.e. en relation. Par défaut les ordres sont partiels ; en contexte on omet parfois de mentionner une hypothèse implicite de totalité. Pour des ordres linéaires, on dit parfois *plongement* au lieu de morphisme d'ordres stricts. On évite le terme pour des ordres non linéaires.

$\mathbb{O}_{\leqslant a}$ **Notation.** Pour $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ un ordre et $a \in O$, soit $\mathbb{O}_{\leqslant a} = \{x \in O : x \leqslant a\}$.

L'arbre $\mathcal{A}$ peut être muni de plusieurs structures d'ordre naturelles.

1. L'ordre d'extension, lié à la structure d'arbre :

$$s \sqsubseteq t \quad :\text{si} \quad (h(s) \leqslant h(t)) \wedge (t_{|\{0,\ldots,h(s)-1\}} = s).$$

$\frown$ Grâce à la concaténation des suites finies notée $\frown$, on peut le réécrire : $(\exists u)(t = s^\frown u)$.

2. L'ordre lexicographique :

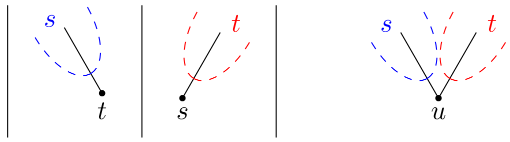
$$s \leqslant_{\text{lex}} t \quad :\text{si} \quad (s \sqsubseteq t) \vee [(\exists n)(s_n = 0) \wedge (t_n = 1) \wedge (\forall k)(k < n \rightarrow s_k = t_k)].$$

Encore grâce à la concaténation, il se réécrit :

$$s \leqslant_{\text{lex}} t \quad :\text{si} \quad (s \sqsubseteq t) \vee [(\exists u)(u^\frown 0 \sqsubseteq s \wedge u^\frown 1 \sqsubseteq t)].$$

3. L'ordre latéral, bien visible en projection horizontale (« à gauche de ») :

$$s \leqslant_{\text{lat}} t \quad :\text{si} (s = t) \vee (t^\frown 0 \sqsubseteq s) \vee (s^\frown 1 \sqsubseteq t) \vee (\exists u)(u^\frown 0 \sqsubseteq s \wedge u^\frown 1 \sqsubseteq t).$$

Illustration : 

Plus simplement, remplacer les 0 par des -1 et comparer $r(s) = \sum_{k<h(s)} \frac{s_k}{2^k}$ avec $r(t)$.

Remarque. Ces relations s'étendent naturellement à $\mathcal{C}$, et même à $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{C}$. Sur $\mathcal{C}$, l'ordre d'extension dégénère en l'égalité. Sur $\mathcal{C}$, l'ordre lexicographique et l'ordre latéral coïncident.

§ 2.1. Raisonnements par maximalité

Un élément a d'un ordre $(O; \leqslant)$ est *maximal* si $(\forall x)(a \leqslant x \to x = a)$. On dit aussi que a est *un maximum* ; on définit de même les minima. En général on ne peut pas affirmer l'existence d'éléments extrémaux.

Les raisonnements par maximalité sont fréquents en mathématiques. Il faut toujours y faire attention : « soit $A \leqslant (\mathbb{Q}; +)$ un sous-groupe propre maximal » n'a pas plus de sens que « soit $I \subseteq \mathbb{N}$ un sous-ensemble fini maximal ». Une forme admissible repose sur la notion de chaîne.

Définition (chaîne d'un ordre)**.** Une *chaîne* d'un ordre $\mathbb{O} = (O; \sqsubseteq)$ en est une partie totalement ordonnée, i.e. $C \subseteq O$ telle que deux éléments $x, y \in C$ sont toujours comparables.

Les chaînes de $\mathbb{O}$ sont elles-mêmes partiellement ordonnées par l'inclusion. On peut donc s'interroger sur les chaînes maximales (en tant que chaînes).

Proposition (principe de maximalité de Hausdorff)**.** Soit $\mathbb{O} = (O; \sqsubseteq)$ un ordre. Alors toute chaîne est incluse dans une chaîne maximale.

Remarque. Ce principe de maximalité est une forme de choix. Ses conséquences sont *désirables* : existence de bases dans les espaces vectoriels, d'idéaux maximaux dans les anneaux (« théorème de Krull » de § 3.3), etc. Le raisonnement par choix a aussi des conséquences réputées *indésirables* comme le théorème de Banach-Tarski (compléments § T), mais les mathématiques sans choix sont infiniment plus paradoxales. V. § 23, notes conclusives.

Soit E un ensemble muni de deux relations binaires R_1 et R_2. On dit que $(E\,; R_2)$ *étend* (parfois, *prolonge*) $(E\,; R_1)$ si $(\forall x)(\forall y)(xR_1y \to xR_2y)$.

Lemme (extension d'ordres partiels)**.** Tout ordre partiel peut être étendu en un ordre total.

Démonstration. C'est un argument de maximalité. Soit $\mathbb{O} = (O; \sqsubseteq)$ un ordre.

Étape 1. Il existe des ordres partiels sur O maximaux en tant que tels.

Vérification. Les relations sur O peuvent être pensées en termes de graphes, en assimilant la relation R au sous-ensemble $\Gamma_R = \{(a, b) \in O^2 : aRb\}$. Dans cette assimilation implicite, $R \subseteq \hat{R}$ signifie $(\forall x)(\forall y)(xRy \to x\hat{R}y)$. Notamment les relations elles-mêmes sont ordonnées par l'extension.

Soit E l'ensemble des ordres partiels sur O, ordonné par l'inclusion. Soit par principe de maximalité dans $(E; \subseteq)$ une chaîne maximale d'ordres partiels, disons C. Alors $R = \bigcup_{S \in C} S$ est encore (le graphe d') un ordre partiel : car une réunion croissante de relations transitives est transitive, etc. On montre que R est maximal en tant qu'ordre partiel.

En effet soit $R \subseteq \hat{R}$ une extension d'ordres. Soit $\hat{C} = C \cup \{\hat{R}\}$. On affirme que c'est encore une chaîne. Soit pour cela $S \in C$. Par construction, $S \subseteq R \subseteq \hat{R}$. Donc $\hat{C}$ reste totalement ordonnée pour l'inclusion : c'est bien une chaîne. Par maximalité de C en tant que telle, on a $\hat{C} = C$, donc $\hat{R} \in C$, d'où par définition $\hat{R} \subseteq R$: d'où l'égalité. L'ordre partiel R est donc maximal. ◇

Généralisation immédiate : il existe des ordres partiels sur O *étendant l'ordre d'origine* $\sqsubseteq$ et maximaux en tant que tels.

Étape 2. Un ordre partiel maximal (en tant que tel) est total.

Vérification. Soit R un ordre partiel maximal. Montrons que R est un ordre total ; c'est un ordre par hypothèse. Soient $x, y \in O$ ne vérifiant pas yRx ; on montre xRy. Soit R' donnée par $aR'b$:si $(aRx \wedge yRb)$. Soit encore $\hat{R}$ la réunion (ou disjonction) de R et R', i.e. $a\hat{R}b$:si $(aRb \vee aR'b)$. Montrons que $\hat{R}$ est une relation d'ordre.

- Réflexivité. Le graphe de l'égalité est la diagonale $\{(a, a) : a \in O\}$. Une relation est réflexive ssi elle étend l'égalité, i.e. ssi son graphe étend la diagonale. Comme R est réflexive et que $\hat{R}$ étend R, la relation $\hat{R}$ reste réflexive.
- Anti-symétrie. Supposons $a\hat{R}b$ et $b\hat{R}a$ et montrons $a = b$; il y a quatre

cas de figure à traiter :

- si aRb et bRa alors $a = b$ par hypothèse sur R ;
- si $aR'b$ et bRa, alors $yRbRaRx$ donc yRx, contradiction ;
- si aRb et $bR'a$, même contradiction ;
- si $aR'b$ et $bR'a$, on voit notamment aRx et yRa, contradiction.

— Transitivité. Supposons $a\hat{R}b\hat{R}c$. Ici encore il y a quatre cas :

- si $aRbRc$, alors aRc ;
- si $aRbR'c$, alors aRb et bRx donc aRx, et d'autre part yRc ; ainsi $aR'c$, d'où $a\hat{R}c$;
- le cas $aR'bRc$ est similaire ;
- si $aR'bR'c$, alors notamment yRb et bRx d'où yRx : contradiction.

Il suit que $\hat{R}$ est un ordre. Par maximalité de R, on a $R = \hat{R}$. Comme $x\hat{R}y$ par construction, on a bien xRy : l'ordre R est total. ◇

On part d'un ordre partiel maximal étendant $\sqsubseteq$; il en existe d'après l'étape 1 ; c'est un ordre total d'après l'étape 2. Ceci démontre le lemme. □

§ 2.2. Ordres linéaires denses sans extrémités dénombrables

On ne définit la densité que pour des ordres totaux. Un ordre total a au plus un minimum et au plus un maximum ; c'est faux d'un ordre partiel. Les éventuels éléments extrémaux d'un ordre total sont aussi appelés ses *extrémités*.

Définition (ordre dense)**.** Un ordre total $\mathbb{A}$ est *dense* s'il possède au moins deux points et vérifie : $(\forall a)(\forall b)[(a < b) \to (\exists x)(a < x < b)]$.

Remarque. Plus généralement, une partie $X \subseteq \mathbb{A}$ est *dense* dans $\mathbb{A}$ si $(\forall a)(\forall b)[(a < b) \to (\exists x)(x \in X \wedge a < x < b)]$.

Théorème ($\aleph_0$-catégoricité de DLO)**.** Deux ordres linéaires denses sans extrémités dénombrables sont isomorphes.

La notation DLO et la terminologie « $\aleph_0$-catégoricité » sont définies en § 8.

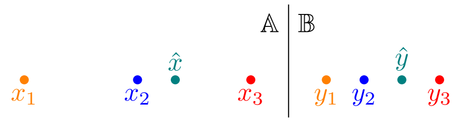
Notation. Si R est une relation binaire entre A et B (par exemple une fonction partielle de A dans B), on note $\operatorname{dom} R = \{a \in A : (\exists b \in B)(aRb)\}$ son *domaine*, et $\operatorname{im} R = \{b \in B : (\exists a \in A)(aRb)\}$ son *image*. Dans le cas d'une fonction partielle on retrouve bien les notions usuelles. $\operatorname{dom} R$, $\operatorname{im} R$

Démonstration. Elle emploie l'importante technique du *va-et-vient*. Soient $\mathbb{A} = (A; \leqslant_{\mathbb{A}})$ et $\mathbb{B} = (B; \leqslant_{\mathbb{B}})$ deux ordres linéaires denses sans extrémités dénombrables. Aucune confusion n'étant possible, notons simplement $\leqslant$. Tous les morphismes seront au sens des ordres.

Par récurrence on construira pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un isomorphisme entre une partie finie de $\mathbb{A}$ et une de $\mathbb{B}$, i.e. $f_n \colon \operatorname{dom} f_n \simeq \operatorname{im} f_n$ de sorte que les f_n s'étendent les uns les autres ; on parle parfois de « tour d'isomorphismes partiels ». Comme toute relation binaire, une fonction peut être représentée par son graphe. Or une réunion croissante de graphes de morphismes est encore un graphe de morphisme, donc $f = \bigcup_{\mathbb{N}} f_n$ sera bien un isomorphisme $\operatorname{dom} f \simeq \operatorname{im} f$. Il y a deux idées-clefs : savoir étendre, et forcer la totalité de la correspondance. La première s'exprime en lemme.

Lemme. Soient $g \colon \operatorname{dom} g \simeq \operatorname{im} g$ un isomorphisme entre parties *finies* de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, et $\hat{x} \in \mathbb{A} \setminus \operatorname{dom} g$. Alors il existe un isomorphisme $\hat{g} \colon \operatorname{dom} \hat{g} \simeq \operatorname{im} \hat{g}$ étendant g en $\hat{x}$.

Démonstration. Disons $\operatorname{dom} g = \{x_1 < \ldots < x_k\}$, *dans l'ordre de* $\mathbb{A}$. Comme g est un isomorphisme, notant $y_i = g(x_i)$ on a encore $y_1 < \ldots < y_k$ dans $\mathbb{B}$. On positionne alors $\hat{x}$ par rapport aux x_i. Il y a trois cas. Soit $\hat{x} < x_1$, soit il existe i tel que $x_i < \hat{x} < x_{i+1}$, soit $x_k < \hat{x}$. Par densité et absence d'extrémités de $\mathbb{B}$, il existe $\hat{y}$ dans la même position par rapport à $\operatorname{im} g$.



On peut trouver un $\hat{y}$ dans la même position relative que $\hat{x}$.

On pose alors $\hat{g}(\hat{x}) = \hat{y}$: cela convient. □

Une récurrence naïvement appliquée au lemme permettrait de garantir $\operatorname{dom} f = A$; mais on veut $\operatorname{dom} f = A$ et $\operatorname{im} f = B$. La seconde idée est de diviser le travail : aux étapes paires on traite le domaine, aux étapes impaires l'image (d'où le nom « va-et-vient »). Voici la démonstration.

On énumère $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$; ces énumérations n'ont aucun lien a priori avec les ordres e, jeu. On construit par récurrence des isomorphismes $f_n \colon \operatorname{dom} f_n \simeq \operatorname{im} f_n$ tels que $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \operatorname{dom} f_{2n}$ et $\{b_0, \ldots, b_n\} \subseteq \operatorname{im} f_{2n+1}$. Bien sûr $f_{-1} = \varnothing$ convient. Supposons f_{n-1}

construit.

— Si n est pair, on étend grâce au lemme f_{n-1} en f_n, de sorte que $a_n \in \operatorname{dom} f_n$ (éventuellement $f_n = f_{n-1}$ si l'on a déjà $a_n \in \dim f_{n-1}$).

— Si n est impair, on étend de façon à avoir $b_n \in \operatorname{im} f_n$.

Alors $\bigcup_{\mathbb{N}} f_n$ réalise un isomorphisme $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$. □

Remarque. Le théorème est faux en non dénombrable. Soit par exemple $\mathbb{O} = \mathbb{Q} \sqcup_< \mathbb{R}$ l'ordre obtenu en « collant » une copie de $(\mathbb{Q}; \leqslant)$ puis, à sa droite, une copie de $(\mathbb{R}; \leqslant)$. Alors $(\mathbb{R}; \leqslant)$ et $\mathbb{O}$ ne sont pas isomorphes. Supposons qu'ils le soient, par f. Soit $q \in \mathbb{O}$ pris dans la copie gauche de $\mathbb{Q}$. Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $f(r) = q$. Alors $(\mathbb{R}_{<r}; \leqslant) \simeq \mathbb{O}_{<q} \simeq (\mathbb{Q}_{<q}; \leqslant)$, contre la cardinalité.

En fait pour tout cardinal $\kappa > \aleph_0$, il existe $|2|^{|\kappa|}$ ordres linéaires denses sans extrémités de cardinal κ deux à deux non isomorphes. (Il faut de la combinatoire infinie ; exercices 24.8 et 24.9.)

§ 2.3. Bons ordres

Un *plus grand élément* d'un ordre $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ est un $a \in O$ tel que $(\forall x)(x \leqslant a)$. Un éventuel plus grand élément est unique, et maximal, sans réciproque. On définit de même la notion de plus petit élément.

Définition (bon ordre)**.** Un ordre est *bon* si chaque partie non vide possède un plus petit élément.

Ce concept est essentiel ; § 3 lui est dédiée.

Remarques

— Tout bon ordre est total : considérer $\{a, b\}$.

— Seuls $\varnothing$ et $\{*\}$ sont à la fois bons et denses.

— La définition est complexe : elle ne quantifie pas seulement sur les points de l'ordre mais sur ses *parties*. C'est une quantification « non élémentaire », ou « d'ordre supérieur ».

Tout bon ordre permet une forme de récurrence. *Noter qu'on ne parle pas d'incrémentation.*

Lemme (récurrence sur un bon ordre)**.** Soient $\mathbb{O} = (O; <)$ un bon ordre, et P une propriété que ses éléments peuvent avoir ou non. On suppose que $\mathbb{O}$ vérifie pour tout x :

$$[(\forall y)(y < x \to P(y))] \to P(x).$$

Alors $\mathbb{O}$ vérifie $(\forall x)P(x)$.

Démonstration. On forme l'ensemble X des contre-exemples. S'il est non vide, il possède un élément minimal $x \in X$. Si $y < x$, alors $y \notin X$, donc $P(y)$. Par hypothèse, on a $P(x)$: contradiction. □

La proposition suivante est un principe de maximalité, i.e. de choix ; les liens entre de tels principes sont détaillés en § 23.2.

Proposition (principe de Zermelo)**.** Tout ensemble peut être bien ordonné, i.e. muni d'un bon ordre.

On finit par une autre démonstration du lemme d'extension d'ordre partiel employant cette forme de choix.

Démonstration alternative du lemme d'extension 2.1. Soit $\mathbb{O} = (O; \sqsubseteq)$ un ordre partiel. Soit φ la *représentation régulière* $(O; \sqsubseteq) \hookrightarrow (P(O); \subseteq)$ qui envoie x sur $O_{\sqsubseteq x}$. C'est un morphisme ; on utilise seulement son caractère injectif.

Par le principe de Zermelo, soit $\leqslant$ un bon ordre sur O, sans lien avec $\sqsubseteq$. Sur $P(O)$ posons $X \prec Y$:si $\min_{\leqslant}(X \triangle Y) \in Y$. Alors $(P(O); \preceq)$ est un ordre total ; la transitivité est une pénible étude de cas.

Comparons les structures. Si $x \sqsubseteq y$, alors $O_{\sqsubseteq x} \preceq O_{\sqsubseteq y}$: en effet on peut supposer $x \neq y$; soit $z = \min(O_{\sqsubseteq x} \triangle O_{\sqsubseteq y})$. Si $z \in O_{\sqsubseteq x} \setminus O_{\sqsubseteq y}$, alors $z \sqsubseteq x \sqsubseteq y$, d'où $z \in O_{\sqsubseteq y}$: c'est absurde. Donc $z \in O_{\sqsubseteq y} \setminus O_{\sqsubseteq x}$, i.e. $O_{\sqsubseteq x} \preceq O_{\sqsubseteq y}$.

En conclusion, φ est un morphisme injectif $(O; \sqsubseteq) \hookrightarrow (P(O), \preceq)$. Son image est un sous-ordre de l'ordre total $(P(O), \preceq)$, donc un ordre total $(\hat{O}; \preceq)$ isomorphe à une extension de $(O; \sqsubseteq)$. □

Exercices

2.1. On munit l'arbre $\mathcal{A}$ des différents ordres d'extension $\sqsubseteq$, lexicographique $\leqslant_{\text{lex}}$, latéral $\leqslant_{\text{lat}}$, « longueur-puis-lexicographique » $\preceq$.

a. Lesquels sont partiels ? totaux ? bons ?
b. Deux de ces ordres sont-ils comparables ?
c. Un *saut* d'un ordre est une paire $(x < y)$ sans intermédiaire. Décrire les sauts de ces ordres. Lien avec la densité ?
d. Soit $\mathcal{A}'$ l'ensemble des sommets finissant par un 1. Montrer que $(\mathcal{A}; \leqslant_{\text{lat}}) \simeq (\mathcal{A}'; \leqslant_{\text{lex}})$.

2.2. On note $\omega = (\mathbb{N}; \leqslant)$ l'ordre des entiers. Soit $\mathbb{O}$ un ordre total infini. Montrer que $\mathbb{O}$ contient une copie de ω ou une copie de l'ordre opposé (entiers négatifs) ω^{op}.

2.3. Montrer la transitivité de $\preceq$ employé dans la « démonstration alternative » de § 2.3.

2.4 (relations bien fondées). Une relation binaire (non nécessairement d'ordre) $\mathbb{A} = (A\ ;\ R)$ est *bien fondée* si pour chaque partie non vide $X \subseteq A$, il existe $x \in X$ tel que : $(\forall y)(y \in X \to \neg yRx)$, où $\neg$ désigne la négation.

a. Montrer qu'un ordre est bon ss'il est total et bien fondé. Donner un ordre bien fondé non total. Lesquels des ordres sur $\mathcal{A}$ sont bien fondés ?

b. Soient $\mathbb{A} = (A, R)$ une relation bien fondée, et P une propriété que les éléments de $\mathbb{A}$ peuvent avoir ou non. On suppose que $\mathbb{A}$ vérifie pour tout x :

$$[(\forall y)(yRx \to P(y))] \to P(x).$$

Montrer que $\mathbb{A}$ vérifie : $(\forall x)P(x)$.

c. Montrer qu'une relation est bien fondée ssi elle est *artinienne*, i.e. ne possède pas de suite infinie strictement décroissante $a_{n+1}Ra_n$.

2.5. (*)

a. Déterminer la cardinalité de chacun des groupes d'automorphismes suivants : (i) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}; \leqslant)$, (ii) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; \leqslant)$, (iii) $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$, (iv) $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}; \leqslant)$.

b. Montrer qu'il y a $|2|^{|\aleph_0|}$ ordres totaux étendant $(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$.

2.6. On rappelle que toute partie non vide et majorée de $(\mathbb{R}; \leqslant)$ possède une borne supérieure (compléments § A si besoin).

a. Soit $\mathbb{O}$ un ordre total au plus dénombrable. Montrer que $\mathbb{O}$ se plonge dans $(\mathbb{Q}; \leqslant)$.

b. Caractériser les ordres totaux qui se plongent dans $(\mathbb{R}; \leqslant)$. (*)

Suite à l'exercice 3.7.

2.7 (graphe aléatoire). Un graphe (non orienté) $\Gamma = (S\,; R)$ est un ensemble S muni d'une relation irréflexive et symétrique R. Un graphe Γ est *aléatoire* si pour toutes parties finies S_1 et S_2 de S disjointes, il existe $x \in S \backslash (S_1 \cup S_2)$ relié à tous les points de S_1 mais à aucun point de S_2.

a. Montrer que tout graphe dénombrable se plonge dans un tel objet. (Un *plongement* de graphes $\Gamma \to \Gamma'$ doit être injectif et pour tous $a, b \in \Gamma$ vérifier $aRb \leftrightarrow f(a)Rf(b)$; noter le « ssi ». Ainsi $\{* - * - *\}$ ne se plonge pas dans le triangle.)

b. Montrer que deux graphes aléatoires dénombrables sont isomorphes.

c. Montrer qu'il existe un graphe aléatoire dénombrable. [Tour de graphes finis.] (*)

C'est un cas particulier de *limite de Fraïssé* (compléments § N).

2.8 (topologie d'un ordre total). Soit $\mathbb{O} = (O; <)$ un ordre total. La *topologie de l'ordre* $\mathcal{T}(<)$ est celle engendrée par les $O_{>a}$ et les $O_{<a}$. Si $X \subseteq O$ est une partie, on note $\mathcal{T}(<)_{|X}$ la topologie de sous-espace induite par $\mathcal{T}_<$ sur X, et $\mathcal{T}(<_{|X})$ la topologie de l'ordre $(X; <)$.

a. Montrer que $\mathcal{T}(<_{|X}) \subseteq \mathcal{T}(<)_{|X}$ mais qu'en général l'égalité fait défaut.

b. Montrer l'égalité dans chacun des cas suivants : a) $\mathbb{O} = (\mathbb{R}; <)$ et X en est fermé ; b) X est dense dans $\mathbb{O}$; c) X est convexe dans $\mathbb{O}$, i.e. si $x_1, x_2 \in X$ alors $]x_1, x_2[_{\mathbb{O}} \subseteq X$; d) X est compact dans la topologie $\mathcal{T}(<)_{|X}$. (*)

c. Supposer X fermé suffit-il ?

2.9 (topologies d'Alexandroff). Établir la proposition suivante.

Proposition (équivalence d'Alexandroff)**.** Soit E un ensemble.

(i) Il y a correspondance entre :
   – les préordres partiels $\leqslant$ (i.e. relations réflexives et transitives) sur E ;
   – les topologies $\mathcal{T}$ sur E ayant la propriété : toute intersection d'ouverts est un ouvert.

(ii) Ces topologies sont caractérisées par la propriété : pour tout $a \in E$, il existe un plus petit ouvert contenant a.

(iii) Les ouverts y sont les parties closes supérieurement, i.e. vérifiant $(\forall x)(\forall y)(x \in \mathcal{U} \wedge x \leqslant y \to y \in \mathcal{U})$; en outre $\mathring{X} = \{a \in E : (\forall b)(a \leqslant b \to b \in X)\}$.

Ces « topologies d'Alexandroff » servent aux logiques non classiques (compléments §§ G, H, I). Ne pas confondre avec les topologies de l'exercice 2.8, très différentes.

2.10. Soit E un ensemble. Une *chaîne de parties* est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de E totalement ordonnée pour l'inclusion, i.e. vérifiant : $(\forall A)(\forall B)[(A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}) \to (A \subseteq B \vee B \subseteq A)]$.

a. Établir une correspondance entre les ordres totaux sur E et les chaînes de parties *maximales* (pour l'inclusion). Indication pour la réciproque : montrer que $\mathcal{F}$ contient

$$S_x = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{F}:\\ x \in A}} A.$$

b. Établir une correspondance entre bons ordres sur E et chaînes bien ordonnées maximales. [Toute partie propre et close inférieurement d'un bon ordre $(E; \leqslant)$ est de la forme $E_{<a}$.]

Notes conclusives

Référence en théorie des ordres : le passionnant [Rosenstein].

- **Repères historiques**

Daß eine Untersuchung wie diese, [...] *wird vielleicht an den Stellen Anstoß erregen, wo gegenwärtig ein etwas deplaciertes Maß von Scharfsinn an diese Diskussion verschwendet wird. Einem Beobachter, der es auch der Skepsis gegenüber nicht an Skepsis fehlen läßt, dürften die „finitistischen" Einwände gegen die Mengenlehre ungefähr in drei Kategorien zerfallen: in solche, die das ernsthafte Bedürfnis nach einer, etwa axiomatischen, Verschärfung des Mengenbegriffs verraten; in diejenigen, die mitsamt der Mengenlehre die ganze Mathematik treffen würden; endlich in einfache Absurditäten einer an Worte und Buchstaben sich klammernden Scholastik. Mit der ersten Gruppe wird man sich heute oder morgen verständigen können, die zweite darf man getrost auf sich beruhen lassen, die dritte verdient schärfste und unzweideutigste Ablehnung.* [Hau08]

Théorie des ordres. Cantor a fondé la théorie des ordres et Hausdorff y a excellé. Loin des écueils de l'antinomie et du fondationnalisme, la série [Hau07] remaniée en [Hau08]

[Rosenstein] : Joseph Rosenstein. *Linear orderings.* T. 98. Pure and Applied Mathematics. New York-London : Academic Press, 1982, p. xvii+487
[Hau08] : Felix Hausdorff. « Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen ». In : *Math. Ann.* 65.4 (1908), p. 435-505
[Hau07] : Felix Hausdorff. « Untersuchungen über Ordnungstypen ». In : *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl.* 59 (1907), p. 84-159

montre la richesse des idées de Cantor en se détournant des paradoxes qui fascinaient certains contemporains. La somme [**Hausdorff**] suit cette voie, et assied topologie et théorie de la mesure sur la théorie des ensembles alors que le cadre axiomatique de cette dernière n'est pas entièrement clarifié. Cette position a fait de Hausdorff un visionnaire en avance de plusieurs décennies, illustrant bien la fécondité des mathématiques de Cantor et par contrecoup la stérilité du logicisme. • On doit également à Hausdorff les raisonnements par maximalité, dès [Hau09, § 3 (p. 319)] ; son principe est prouvé dans [**Hausdorff**, Kap. VI, § 1] par des méthodes ordinales invoquant celui de Zermelo. • Lemme d'extension 2.1 : improprement attribué à Szpilrajn. Présent dans [Szp30], mais l'auteur en écrit : « *Ce théorème est connu, mais les démonstrations, dues aux MM. Banach, Kuratowski et Tarski, ne sont pas encore publiées.* », et renvoie à un traité de Sierpiński. Il faudrait déterminer si Hausdorff l'avait. • Équivalence d'Alexandroff (ex. 2.9) : [Ale37, § 1], article fondateur en topologie algébrique. • Ex. 2.10 : [Kur21], qui eut un grand retentissement, notamment pour sa définition de la paire ordonnée (v. § 21, notes conclusives).

Va-et-vient. Théorème 2.2 : [**Can95**, § 9 (bas de la p. 504)]. La méthode de va-et-vient est parfois erronément attribuée à Cantor, qui procédait autrement. La confusion est présente dans de nombreux textes. Le va-et-vient est incontestable chez Hausdorff [**Hausdorff**, Kap. IV, § 7, pp. 99–100]. Il est déjà, avec imperfections, dans Huntington, [**Hun05a**, § 45]. Voir [Plo93].

• **Terminologie.** Le mot « chaîne » vient de Dedekind (« *Kette* ») [**Dedekind2**, § 37].

• **Rigidités d'ordres totaux.** • Il y a des ordres infinis totaux sans automorphismes non triviaux : par exemple $(\mathbb{N}; \leqslant)$. • La suite considère des plongements d'ordres stricts totaux. • Il existe des ordres infinis totaux sans *endomorphismes* non triviaux, i.e. des ordres infinis $\mathbb{O} = (O; <)$ tels que pour tout $P \subseteq O$, si $f \colon (O; <) \simeq (P; <)$, alors $P = O$ et $f = \mathrm{Id}$ [DM40, Theorem 3] (v. [Rosenstein, Theorem 9.1]). (L'énoncé de Dushnik et Miller paraît plus faible, mais leur construction élimine aussi les automorphismes.) • En revanche, tout ordre total dénombrable est isomorphe à un sous-ordre *propre*, i.e. possède un endomorphisme vers une partie propre [DM40, Theorem 1] (v. [Rosenstein, Theorem 4.6]). • Attention : la littérature spécialisée emploie souvent « isomorphisme » dans le sens de plon-

[**Hausdorff**] : Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig : Veit & Comp., 1914. viii+476
[Hau09] : Felix Hausdorff. « Die Graduierung nach dem Endverlauf ». In : *Leipzig Abh.* 31 (1909), p. 297-334
[Szp30] : Edward Szpilrajn. « Sur l'extension de l'ordre partiel ». In : *Fundam. Math.* 16 (1930), p. 386-389
[Ale37] : Pavel Alexandroff. « Diskrete Räume ». In : *Rec. Math. Moscou, n. Ser.* 2 (1937), p. 501-519
[Kur21] : Casimir Kuratowski. « Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles ». In : *Fundam. Math.* 2 (1921), p. 161-171
[**Hun05a**] : Edward Huntington. « The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory I ». In : *Ann. Math. (2)* 6 (1905), p. 151-184
[Plo93] : Jacob Plotkin. « Who put the "back" in back-and-forth? » In : *Logical methods (Ithaca, NY, 1992).* T. 12. Progr. Comput. Sci. Appl. Logic. Boston : Birkhäuser, 1993, p. 705-712
[**Dedekind2**] : Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig : Vieweg und Sohn, 1888. xv+58
[DM40] : Ben Dushnik et Edwin Miller. « Concerning similarity transformations of linearly ordered sets ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 46 (1940), p. 322-326

gement, sans supposer de surjectivité. • Suite en § 3, notes conclusives, *Ordres et ordinaux*.

- **Puissances cartésiennes d'ordres.** L'ordre lexicographique permet de définir le produit cartésien de deux ordres ; il est associatif mais non commutatif. L'arithmétique résultante est surprenante. Les isomorphismes sont dans **Ord**.
  - Il existe $\mathbb{O}_1 \not\simeq \mathbb{O}_2$ tels que $\mathbb{O}_1^2 \simeq \mathbb{O}_2^2$.
  - On ignore si $\mathbb{O}_1^3 \simeq \mathbb{O}_2^3$ entraîne $\mathbb{O}_1^2 \simeq \mathbb{O}_2^2$.
  - S'il existe un entier $n > 1$ tel que $\mathbb{O}^n \simeq \mathbb{O}$, alors $\mathbb{O}^2 \simeq \mathbb{O}$ [Erv17].

§ 3. Ordinaux de Cantor

Cette section présente les *bons ordres*, ou *ordinaux naïfs*. Ces objets sont *rigides* et toujours deux à deux *comparables* (§ 3.1) ; ils portent une *arithmétique* (§ 3.2). Enfin ils vérifient un *principe de récurrence* qui sous-tend les raisonnements par maximalité (§ 3.3).

Prérequis : théorie « naïve » des ensembles ; § 2.

Les structures mathématiques permettant le comptage infini ne sont pas les cardinaux mais les bons ordres, ou *ordinaux*, dont on rappelle la définition (§ 2.3).

Définition (bon ordre ; ordinal naïf)**.**

— Un ordre est *bon* si chaque partie non vide possède un plus petit élément.

— Un *ordinal naïf*, ou *de Cantor*, est un type d'isomorphisme de bon ordre.

α, β

Un bon ordre est total, en considérant $\min\{x, y\}$. On note $\alpha, \beta, \dots$ des ordinaux.

§ 3.1. Comparaison

Pour des raisons explicitées en § 22.1, il est préférable ici de travailler avec des ordres *stricts* $<$, et donc non réflexifs. La différence est cosmétique.

Définition (partie close inférieurement, segment initial)**.** Soit $\mathbb{A} = (A; <)$ un ensemble ordonné. Une partie $X \subseteq A$ est *close inférieurement*, ou *segment initial de* $\mathbb{A}$, si $(\forall x)(\forall a)[(x \in X \wedge a \in A \wedge a < x) \to (a \in X)]$.

Ainsi A est segment initial de $\mathbb{A}$; pour tout $a \in A$, l'ensemble $\mathbb{A}_{<a} = \{x \in A : x < a\}$ aussi.

Remarque (fondamentale). Soit $\mathbb{A} = (A; <)$ un *bon* ordre. Alors tout segment initial propre est de la forme $B = \mathbb{A}_{<a}$ (considérer $\min(A \backslash B)$).

[Erv17] : Garrett Ervin. « Every linear order isomorphic to its cube is isomorphic to its square ». In : *Adv. Math.* 313 (2017), p. 237-281

Lemme (rigidité des bons ordres)**.** Soient $\mathbb{A} = (A; <)$ un bon ordre et $B \subseteq A$ un segment initial. S'il existe un isomorphisme d'ordres $f\colon (A; <) \simeq (B; <)$, alors $B = A$ et $f = \mathrm{Id}_A$.

Démonstration. Montrons d'abord : $(\forall a)(a \in A \to f(a) \geqslant a)$. Soit $A_0 = \{a \in A : f(a) < a\}$. Supposons A_0 non vide. Par caractère bien ordonné, soit $a_0 = \min A_0$. Alors $f(a_0) < a_0$, donc $f(a_0) \notin A_0$, d'où $f(f(a_0)) \geqslant f(a_0)$. Comme f est un isomorphisme, il vient $f(a_0) \geqslant a_0$: contradiction.

En particulier $B = A$. Sinon, comme B est clos inférieurement, il existe $a_1 \in A$ tel que $B = \mathbb{A}_{a_1}$. Alors $a_1 \leqslant f(a_1) \in B = \mathbb{A}_{a_1}$, contradiction.

Enfin $f = \mathrm{Id}_A$. Soit sinon $a_2 = \min\{a \in A : f(a) \neq a\}$. Par surjectivité, il existe a_3 tel que $a_2 = f(a_3) \geqslant a_3$. Si $a_2 = a_3$, alors $a_2 = f(a_2)$, contradiction. Donc $a_2 > a_3$ et $a_3 = f(a_3) = a_2$, contradiction. $\square$

Théorème (comparaison des bons ordres)**.** Soient $\mathbb{A} = (A; <)$ et $\mathbb{B} = (B; <)$ deux bons ordres. Alors un et un seul des cas suivants se produit :

— $\mathbb{A}$ est uniquement isomorphe à un unique segment initial propre de $\mathbb{B}$;

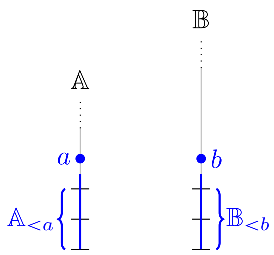
— $\mathbb{B}$ est uniquement isomorphe à un unique segment initial propre de $\mathbb{A}$;

— $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont uniquement isomorphes.

On rappelle que « uniquement isomorphe » exprime l'existence et l'unicité d'un isomorphisme.

Démonstration. Tous les isomorphismes sont dans la catégorie **Ord** des ordres. La disjonction et les clauses d'unicité suivent du lemme de rigidité. Montrons qu'un cas se produit toujours. Soit :

$$F = \{(a, b) \in A \times B : (\exists f)[f\colon (\mathbb{A}_{<a}; <) \simeq (\mathbb{B}_{<b}; <)]\}.$$



Les segments sous a et b sont isomorphes ; $(a, b) \in F$.

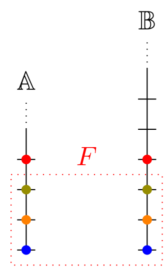
On affirme les points suivants.

— F est le graphe d'une fonction partielle injective. Par symétrie, le caractère fonctionnel suffit. Il est évident par rigidité.

— $\operatorname{dom} F$, resp. $\operatorname{im} F$, est segment initial de $\mathbb{A}$, resp. $\mathbb{B}$. Ici encore par symétrie il suffit de le voir dans $\mathbb{A}$. Soient $a \in \operatorname{dom} F$ et $a' \in A$ vérifiant $a' < a$. L'appartenance $a \in \operatorname{dom} F$ est attestée par $b \in \operatorname{im} F$ tel que $(a, b) \in F$, et un isomorphisme $f\colon (\mathbb{A}_{<a}; <) \simeq (\mathbb{B}_{<b}; <)$. Il se restreint en un isomorphisme $(\mathbb{A}_{<a'}; <) \simeq (\mathbb{B}_{<f(a')}; <)$, donc $a' \in \operatorname{dom} F$.

— $F\colon (\operatorname{dom} F; <) \simeq (\operatorname{im} F; <)$ est un isomorphisme. Supposons $f_i\colon (\mathbb{A}_{<a_i}; <) \simeq (\mathbb{B}_{<b_i}; <)$ avec $a_1 < a_2$. Alors la fonction $f_2 \circ f_1^{-1}\colon \mathbb{B}_{<b_1} \to \mathbb{B}_{<b_2}$ est croissante. Comme au lemme de rigidité, cela force $b_2 \geqslant b_1$. L'égalité est exclue par injectivité de F, donc $b_1 < b_2$.

— $\operatorname{dom} F = A$ ou $\operatorname{im} F = B$. Supposons que non. Ce sont alors des segments initiaux propres, d'où $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\operatorname{dom} F = \mathbb{A}_{<a}$ et $\operatorname{im} F = \mathbb{B}_{<b}$. Comme $F\colon (\operatorname{dom} F; <) \simeq (\operatorname{im} F; <)$, on a $(a, b) \in F$, d'où $a \in \operatorname{dom} F = \mathbb{A}_{<a}$, contradiction.



S'il reste un point de chaque côté, on peut étendre F.

Si $\operatorname{dom} F = A$, on a fini. Si $\operatorname{im} F = B$, on a fini. □

Le théorème permet, sans choix, des raisonnements à isomorphisme près, i.e. sur des ordinaux. On écrit $\alpha < \beta$ dans le premier cas du théorème et $\alpha = \beta$ dans le dernier.

Corollaire.

(i) Soit α un ordinal. Alors il y a correspondance naturelle entre :
- — les éléments de α ;
- — les segments initiaux propres de α ;
- — les ordinaux $\beta < \alpha$.

(ii) Il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante d'ordinaux.

(iii) Toute collection non vide d'ordinaux a un plus petit élément.

Démonstration.

(i) La première correspondance envoie $x \in \alpha$ sur $\alpha_{<x}$ et $I \subsetneq \alpha$ sur $\min(\alpha \backslash I)$. Si $x \in \alpha$, alors $\alpha_{<x}$ est un bon ordre, donc un ordinal $< \alpha$. Si $\beta < \alpha$ est un ordinal, par comparaison il est isomorphe à un segment initial propre de α, donc à un $\alpha_{<x}$. La rigidité garantit les unicités requises.

(ii) Soit $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots$ une suite infinie strictement décroissante. Traduisant (sans choix), c'est une suite $x_1 > x_2 > \dots$ à l'intérieur de α_0. La partie non vide $\{x_i\}$ n'a pas de plus petit élément : contradiction.

(iii) Même raisonnement (et l'on n'a pas besoin de choix). □

L'assimilation est souvent implicite : un ordinal α « est » alors l'ensemble des ordinaux $< \alpha$. § 22.1 uniformise les ordinaux naïfs en ordinaux formels (choix canonique de représentants), ce qui rend l'énoncé littéralement vrai.

Exemples

— Soit $\omega \simeq (\mathbb{N}; <)$. C'est le premier ordinal infini. Les éléments de ω « sont » les ordinaux finis. ω

— Soit ω_1 le premier ordinal non dénombrable (voir exercice 3.2). Les éléments de ω_1 sont les ordinaux au plus dénombrables. ω_1

Clairement $\operatorname{card} \omega = \aleph_0$; moins clairement $\operatorname{card} \omega_1 = \aleph_1$ est le premier cardinal non dénombrable (preuve en § 24.1).

Il existe même des ordinaux arbitrairement grands (une preuve dans ZF est à l'exercice 22.9).

§ 3.2. Opérations sur les ordres

Quelques exemples motiveront les définitions.

Exemples

— On peut noter n l'unique ordinal à n éléments (à isomorphisme près) ; un représentant est $\{0, \dots, n-1\}$. Graphiquement, $4 = \{\star\star\star\star\}$, dans l'ordre allant de gauche à droite. Graphiquement $\omega = (\mathbb{N}; \leqslant) = \{\star\star\star\cdots\}$.

— On note $\omega + 1 = \{\star\star\star\cdots\star\}$ (on ajoute un point supérieur à ceux de ω).

— De même $\omega + 2 = \{\star\star\star\cdots\star\star\}$.

— En revanche $1 + \omega = \{{\ast}\star\star\star\cdots\} = \omega$.

- On note $\omega + \omega = (\omega \sqcup_< \omega) = \{* * * \cdots \star \star \star \cdots\}$; aussi noté $\omega \cdot 2$.
- En revanche $2 \cdot \omega = \{**\star\star \cdots\} = \omega$.
- $\omega \cdot \omega = (\omega \sqcup_< \omega \sqcup_< \dots)$ aussi noté ω^2 ; puis $\omega^3 = (\omega^2 \sqcup_< \omega^2 \sqcup_< \dots)$. Plus arithmétiquement, $\omega \cdot \omega = \omega + \omega + \dots$ et $\omega^3 = \omega^2 + \omega^2 + \dots$. Puis $\omega^\omega = \omega \cdot \omega \cdots$.
- Tous les ordinaux ci-dessus sont dénombrables, donc inférieurs à ω_1.

Derrière ces exemples se trouvent des constructions générales.

Définition (somme, produit, exponentielle d'ordres)**.** Soient α et β deux ordres.

- La *somme en tant qu'ordres* est $\alpha + \beta = (\alpha \sqcup_< \beta) \simeq ((\{0\} \times \alpha) \sqcup (\{1\} \times \beta); \leqslant_{\text{lex}})$.
  (Cela correspond à coller une copie de β à la suite de α.)
- Le *produit en tant qu'ordres* est $\alpha \cdot \beta = (\alpha \times \beta; \text{anti-lex})$, où l'ordre *anti-lexicographique* trie d'abord selon la seconde lettre puis selon la première (par lettres croissantes).
  (C'est l'ordre d'un dictionnaire ayant l'alphabet à l'endroit mais épelant les mots à l'envers.)
- On suppose que β possède un plus petit élément 0. L'*exponentielle en tant qu'ordres* est l'ensemble β^α des fonctions $\alpha \to \beta$ « presque nulles » (i.e. telles que $f(x) \neq 0$ finiment souvent), ordonné par anti-lex, i.e. :

$$f < g \quad :\text{si} \quad f(a) < g(a) \text{ pour } a = \max\{x \in \alpha : f(x) \neq g(x)\}.$$

Ces opérations sont bien définies à isomorphisme d'ordre près.

Proposition. Soient α et β des ordres. On suppose que β a un plus petit élément.

- Si α et β sont totaux (resp. des ordinaux), alors $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$, et β^α aussi.
- Les opérations + et · sont associatives, et l'on a les distributivités : $\alpha \cdot (\beta + \gamma) \simeq (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$; $\alpha^{\beta+\gamma} \simeq \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$; $\alpha^{(\beta \cdot \gamma)} \simeq \left(\alpha^\beta\right)^\gamma$.

La preuve est à l'exercice 3.3.

Remarques

- Ces opérations ne sont pas commutatives.
- Si α est fini, alors β^α a pour domaine l'ensemble de *toutes* les fonctions $\alpha \to \beta$. C'est faux si α est infini.

— Notamment $2^\omega \neq |2|^{|\aleph_0|}$ (le premier est d'ailleurs un ensemble ordonné, et le second un ensemble sans structure). Par exemple $2^\omega = \omega$ mais $|2|^{|\aleph_0|} > \aleph_0$. Il y a deux exponentielles ensemblistes bien distinctes, que seul le contexte permet de reconnaître, pas la notation.

Exemple (Sierpiński). Le théorème de Fermat-Wiles est faux pour les ordinaux infinis. Prenons $\alpha = \omega$, $\beta = \omega \cdot 2$, et $\gamma = \omega \cdot 3$. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$. En effet $(\omega \cdot k)^n = \omega^n \cdot k$.

En remplaçant ω par une puissance ω^δ, on peut trouver α, β, γ arbitrairement grands.

L'arithmétique ordinale est *occasionnellement* utile, mais le comptage ordinal est une technique fondamentale.

§ 3.3. Comptage ordinal

Les bons ordres reviennent à l'opération fondamentale de compter : car énumérer, c'est savoir quand on s'est arrêté. Les ordinaux sont ainsi les échelles de mesure des différents comptages. Par ailleurs compter équivaut aussi à la possibilité de faire des récurrences. Ainsi *les récurrences ne se bornent pas à l'ordinal ω des entiers.*

Lemme (principe de récurrence ordinale)**.** Soient α un ordinal et P une propriété que ses éléments peuvent avoir ou non. On suppose que α vérifie pour tout x :

$$[(\forall y)(y < x \to P(y))] \to P(x).$$

Alors α vérifie $(\forall x)P(x)$.

Démonstration. C'est la récurrence sur les bons ordres (lemme 2.3). □

Remarques Soit α un ordinal.

— Tout $x \in \alpha$ sauf l'éventuel dernier possède un successeur immédiat dans α, noté $x + 1 = \min \alpha_{>x}$. C'est compatible avec l'addition ordinale.

— En revanche $x \in \alpha$ n'a pas nécessairement de prédécesseur : considérer † dans $\{* * * \cdots \dagger *\}$. Ceci contraste avec $\omega = (\mathbb{N}; <)$, où tout entier non nul possède un prédécesseur.

— Ceci justifie d'énoncer le principe de récurrence sans référence à l'incrémentation. La récurrence « par incrémentation » caractérise les seuls ordinaux $\leqslant \omega$. En effet $\omega \subsetneq \omega + 1$ contient 0 et est clos sous incrémentation, mais propre.

— L'ordinal α peut avoir trois types de points :
  — l'unique plus petit élément (existe si $\alpha > 0$) ;
  — les points successeurs, i.e. de la forme $x + 1$ (existent si $\alpha > 1$) ;
  — les points limites, i.e. les autres (existent si $\alpha > \omega$).

La récurrence ordinale se reformule en un énoncé plus long mais plus conforme à l'intuition.

Lemme (récurrence ordinale, reformulée)**.** Soient α un ordinal et P une propriété que ses éléments peuvent avoir ou non. On suppose que α vérifie :

— $P(\min \alpha)$ (si α est non vide) ;
— pour tout $x \in \alpha$, si $P(x)$ et que x n'est pas maximal, alors $P(x + 1)$;
— pour tout $x \in \alpha$, si x est limite et que tous les $y < x$ vérifient $P(y)$, alors $P(x)$.

Alors α vérifie $(\forall x)P(x)$.

Démonstration. Soit x le contre-exemple minimal, s'il en existe. Alors $x \neq \min \alpha$. Par hypothèse, x ne peut être successeur, ni limite. Contradiction. □

Il serait utile de munir $\mathcal{C}$ d'un ordinal de Cantor ; aucun des candidats de § 2 ne convient.

Proposition (principe de Zermelo, reformulé)**.** Tout ensemble peut être muni d'une structure d'ordinal.

Remarques

— Dans ZF, ce principe équivaut à l'axiome du choix (§ 23.2). Quand on l'invoque, on obtient donc un bon ordre $<$ non explicite.
— Le cours emploie des comptages ordinaux *avant* d'interpréter la théorie cantorienne dans une combinatoire ensembliste. Cette approche à rebours du fondationnalisme repose sur l'idée que les ordinaux sont des structures fondamentales et non des artéfacts des axiomatiques ensemblistes. ZF *rend compte* des ordinaux, mais ceux-ci pré-existent.

On montre en application un point d'algèbre commutative.

Théorème (Krull)**.** Tout anneau (associatif, commutatif, unitaire) possède un idéal maximal.

Démonstration. Soit $\mathbb{A}$ un tel anneau. On munit son ensemble sous-jacent d'une structure d'ordinal α ; la relation d'ordre n'est a priori pas compatible avec les opérations algébriques. On a $\mathbb{A} = \{a_x : x \in \alpha\}$.

On forme une suite d'idéaux (propres) indexés par α. Pour $0 = \min \alpha$ soit $I_0 = (0)$. On poursuit par récurrence. Si $x \in \alpha$ et que I_x a été construit, il y a deux cas. Si l'idéal $I_x + (a_x)$ reste propre, soit $I_{x+1} = I_x + (a_x)$. Sinon, soit $I_{x+1} = I_x$. Dans tous les cas c'est un idéal propre. Ceci gère les incrémentations, mais il y a aussi les ordinaux limites. Si x est un ordinal limite (éventuellement $x = \alpha$), on pose $I_x = \bigcup_{\substack{y \in \alpha \\ y < x}} I_y$, qui reste un idéal propre.

Soit $\mathfrak{m}$ la réunion de tous ces idéaux, qui reste un idéal propre. On affirme qu'il est maximal. En effet un élément $a \in \mathbb{A}$ est l'un des a_x. Si $a_x \in I_{x+1}$, alors $a = a_x \in \mathfrak{m}$. Sinon, $I_x + (a) = \mathbb{A}$. Cette alternative exprime la maximalité de $\mathfrak{m} \lhd \mathbb{A}$. $\square$

Exercices

3.1. Soient $\mathbb{A} = (A; <)$ un bon ordre et $X \subseteq A$. Montrer que $(X; <)$ est isomorphe à un segment initial de $\mathbb{A}$. Est-il propre si $X \subsetneq A$?

3.2 (l'ordinal ω_1).

a. Soit $\omega = (\mathbb{N}; <)$. Vérifier que c'est le plus petit ordinal infini.

b. Montrer qu'il existe un ensemble dont les membres sont exactement les ordinaux au plus dénombrables. En déduire l'existence d'ω_1, premier ordinal non dénombrable. [Envisager toutes les structures d'ordre possibles sur $\mathbb{N}$; factoriser une relation d'équivalence.]

c. Montrer $\omega^{\omega_1} = \omega_1$. Donner une condition suffisante pour que $\omega^\alpha = \alpha$. (*)

3.3 (arithmétique ordinale). Soient α, β, γ des ordinaux.

a. Comparer $2 \cdot \omega$, $\omega \cdot 2$, ω^2 et 2^ω. Simplifier l'expression $2(\omega + 1) + \omega$.

b. Montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha \cdot \beta$ sont des ordinaux. Montrer que la somme est strictement croissante à droite et associative. Montrer que si $\alpha \leqslant \beta$, alors il existe un unique γ tel que $\alpha + \gamma = \beta$. Est-ce vrai de l'autre côté ?

c. Montrer que le produit est distributif à gauche sur la somme (i.e. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$). Montrer que si $\gamma \neq \varnothing$ et $\gamma\alpha = \gamma\beta$ alors $\alpha = \beta$. Est-ce vrai de l'autre côté ?

d. Montrer que $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha\gamma^\beta$, $(\gamma^\alpha)^\beta = \gamma^{\alpha\cdot\beta}$.

e. Montrer qu'il existe un ordinal dénombrable ε vérifiant $\varepsilon = \omega^\varepsilon$. Le plus petit tel est noté ε_0.

3.4 (« forme normale » de Cantor). ⟶

Lemme. Soit $\beta > 1$ un ordinal. Alors tout ordinal α s'écrit, de manière unique, sous la forme :

$$\alpha = \beta^{\alpha_0} \cdot \gamma_0 + \cdots + \beta^{\alpha_n} \cdot \gamma_n,$$

où $n \in \omega$, les α_k sont des ordinaux vérifiant $\alpha_0 > \ldots > \alpha_n$, et les γ_k sont des ordinaux vérifiant $0 < \gamma_k < \beta$.

En déduire quels ordinaux $\alpha > 0$ vérifient : si $\beta, \gamma < \alpha$, alors $\beta + \gamma < \alpha$.

3.5 (deux représentations des ordinaux $< \varepsilon_0$). Il faut avoir fait l'exercice 3.4. On note ε_0 le plus petit ordinal vérifiant $\omega^\alpha = \alpha$; il en existe. Les deux représentations sont indépendantes.

a. Soit p_i le i^{e} nombre premier (ainsi $p_0 = 2$). Pour $\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot k_0 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m$ en forme normale, on pose récursivement :

$$n(\alpha) = \left(\prod_{i=0}^{m} p_{n(\alpha_i)}^{k_i} \right) - 1.$$

Pour n naturel, disons $n + 1 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$, on pose récursivement :

$$\alpha(n) = \sum_{i=0}^{m} \omega^{\alpha(i)} k_i.$$

Montrer que ces fonctions sont réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des ordinaux $< \varepsilon_0$ et $\mathbb{N}$.

b. On représente les ordinaux $< \varepsilon_0$ par des chaînes de parenthèses comme suit :
   - la chaîne vide représente l'ordinal 0 ;
   - si ℓ_1 (resp. ℓ_2) représente α_1 (resp. α_2), alors $\ell_1\ell_2$ représente $\alpha_1 + \alpha_2$;
   - si ℓ représente α, alors (ℓ) représente ω^α.

   (i) Montrer que tout ordinal $< \varepsilon_0$ est représenté par (au moins) une chaîne. Donner une représentation de : 0, 1, 2, ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 3$, ω^2, $\omega^2 + \omega \cdot 2 + 1$, ω^3, ω^ω, ω^{ω^ω}.

(*) (ii) Donner une bijection entre l'ensemble des ordinaux $< \varepsilon_0$ et un certain ensemble E_0 de chaînes.

(**) (iii) Mettre sur E_0 un ordre qui en fait l'ordinal ε_0.

3.6 (suites de Goodstein). Il y a quelques notations.

- Soit $b > 1$ un entier. La *décomposition itérée* en base b d'un entier n est obtenue en écrivant $n = \sum_k b^k \cdot d_k$ (avec les $d_k \in \{0, \ldots, b-1\}$), en redécomposant chaque k en base b, et en répétant.
  Par exemple $99 = 81 + 18 = 3^4 + 3^2 \cdot 2 = 3^{3+1} + 3^2 \cdot 2$.
- On note $f_{b \to b'}(n)$ le nombre obtenu en écrivant la décomposition itérée en base b de n, puis en remplaçant tous les b par des b'.
  Par exemple $f_{3\to 4}(99) = 4^{4+1} + 4^2 \cdot 2$.
- Soit $b_0 \in \mathbb{N}$. On définit une suite indexée par $n \geqslant 2$ en posant :
  - $g(2) = b_0$;
  - si $g(n) > 0$, alors $g(n + 1) = f_{n\to n+1}(g(n)) - 1$;
  - si $g(n) = 0$, alors $g(n + 1) = 0$.

  Par exemple avec $b_0 = 4$ on trouve $g(2) = 4 = 2^2$, donc $g(3) = 3^3 - 1 = 26 = 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2$, puis $g(4) = 4^2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 - 1 = 41$, ...

Montrer que pour tout b_0, la suite ainsi définie stationne en 0. Indication : introduire $h(n) = f_{n\to\omega}(g(n))$.

Le site http://math.andrej.com/2008/02/02/the-hydra-game/ permet de jouer à la convergence.

3.7. Suite de l'exercice 2.6.

a. Caractériser les bons ordres qui se plongent dans $(\mathbb{R}; <)$.

b. Montrer *sans choix* qu'il existe des plongements $f_\alpha : (\alpha; <) \hookrightarrow (\mathbb{Q}; <)$ indexés par les ordinaux dénombrables. [Ne pas fixer une énumération pour chaque α car ce serait du choix. Faire une récurrence dans ω_1.] (**)

Renforcement à l'exercice 17.8.

3.8. Un *treillis* est un ordre partiel $\mathbb{T} = (T, \leqslant)$ tel que toute paire d'éléments de T admette une borne inférieure et une borne supérieure dans T. Il est *complet* si toute partie non vide de T admet une borne supérieure et une borne inférieure. On va montrer le résultat suivant.

Lemme. Un treillis est complet ssi toute application croissante possède un point fixe.

a. On suppose $\mathbb{T}$ complet. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ une application croissante. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un treillis complet (en particulier non vide). Indication : pour $G \subseteq T$, on pourra considérer $S = \{x \in T : x \geqslant G \text{ et } f(x) \leqslant x\}$.

b. On suppose à présent que $\mathbb{T}$ possède une partie sans borne supérieure. Trouver une suite ordinale croissante $C = (c_\alpha : \alpha \in \gamma)$ et une suite ordinale décroissante $D = (d_\alpha : \alpha \in \delta)$ telles que tout élément de D majore tout élément de C, mais aucun $x \in \mathbb{T}$ n'est à la fois majorant de C et minorant de D. (Commencer par construire C, puis chercher D dans l'ensemble des majorants de C.) (*)

c. En déduire que si $\mathbb{T}$ n'est pas complet, alors il existe une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ croissante et sans point fixe. (Dans les notations précédentes, on pourra construire f à valeurs dans $C \cup D$.) (*)

3.9 (σ-algèbres). Il faut en connaître la définition (voir un cours de théorie de la mesure). Pour $\mathcal{F} \subseteq P(E)$ une famille de parties, on note $\mathcal{F}'$ l'ensemble des réunions dénombrables de membres de $\mathcal{F}'$, et les complémentaires de telles réunions, i.e. :

$$\mathcal{F}' = \left\{\bigcup_\omega E_n : (E_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}\right\} \cup \left\{\left(\bigcup_\omega E_n\right)^c : (E_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}\right\}.$$

Soient $\mathcal{B}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{B}_{\alpha+1} = \mathcal{B}'_\alpha$, et pour α limite, $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$. Montrer que $\mathcal{B}_{\omega_1}$ est la σ-algèbre (ou tribu) engendrée par $\mathcal{F}$.

3.10 (ensembles de Bernstein). On admet (ce sera montré à l'exercice 4.5) que tout fermé de $\mathbb{R}$ non dénombrable est de cardinal continu. Un *ensemble de Bernstein* est un $B \subseteq \mathbb{R}$ tels que pour tout $F \subseteq \mathbb{R}$ fermé indénombrable, on a $F \cap B \neq \varnothing$ et $F \cap B^c \neq \varnothing$. (*)

a. Montrer qu'il existe de tels ensembles.

b. Montrer qu'il existe même $|2|^{|\aleph_0|}$ ensembles de Bernstein disjoints.
Indication : un point de $F_\varnothing$ dans $B^\varnothing$ et un dans $C^\varnothing$, puis des point de F_1 dans $B^\varnothing, B^1, C^\varnothing, C^1$, puis des points de F_2 dans $B^\varnothing, B^1, B^2, C^\varnothing, C^1, C^2$, puis...

Notes conclusives

- **Repères historiques**

> *Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannichfaltigkeitslehre ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs üboer die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von Niemandem gesucht worden ist.*
>
> ...
>
> *Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Ueberzeugung aussprechen, dass diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen.*
>
> [**Can83a**, premiers par.]

• Le cœur de la révolution cantorienne n'est pas la cardinalité naïve, mais le comptage ordinal. Elle précède d'une génération l'axiomatisation ensembliste dont Zermelo fut l'instigateur, et à laquelle Cantor n'eut part aucune. • Pour étudier les séries trigonométriques, Cantor analysa le continu ; en itérant sa dérivation topologique au-delà du fini, il découvrit les ordinaux. L'imposante suite [Can79]–[Can83b] a transformé en profondeur les mathématiques, et son auteur. Elle commence par des questions de topologie réelle et l'introduction de la dérivation (v. § 4, notes conclusives, *Théorème de Cantor-Bendixson*). Les itérations finies ne suffisent pas et Cantor doit aller au-delà. • Le cinquième article [**Can83a**], également publié comme mémoire [**Cantor**], manifeste un vacillement de la pensée face à l'ampleur de la découverte : Cantor livre d'abondantes citations philosophiques voire théologiques, avant d'étudier les ordinaux dénombrables. Ceux-ci apparaissaient déjà implicitement comme symboles d'infini dans [Can80, p. 357] (et ∞ désigne ω). Enfin [Can83b] applique ces nouveaux nombres aux problèmes topologiques d'origine, démontrant notamment l'hypothèse du continu pour les fermés de $\mathbb{R}$. • La découverte des ordinaux transfinis est une révolution intellectuelle majeure, sans conteste un « changement de paradigme ». Depuis la diagonale du carré qui fit chuter les rationnels jusqu'aux quaternions qui remirent en cause la commutativité, les explorations du concept de *nombre* se menaient sous un jour algébrique ou géométrique. • Cantor fit table rase même de la tradition grecque et pensa le nombre non comme élément d'une structure algébrique, mais comme type d'ordre. Certains bouleversements mathématiques sont venus d'*ajouts* structurels comme prendre conscience de la topologie, de l'information fonctorielle, etc. La pensée de Cantor a procédé par *retranchements* : ne garder que l'ordre, puis ne garder que l'égalité pour la seconde abstraction qu'est le cardinal. • Les monumentaux [**Can95**] et [**Can97**] sont voués aux ordinaux et cardinaux sans théorie descriptive : le transfini est devenu un sujet d'étude autonome. • Ainsi Cantor

[**Can83a**] : Georg Cantor. « Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 ». In : *Math. Ann.* 21.4 (1883), p. 545-591

[Can79] : Georg Cantor. « Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1 ». In : *Math. Ann.* 15 (1879), p. 1-8

[Can83b] : Georg Cantor. « Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 6 ». In : *Math. Ann.* 23 (1883), p. 453-488

[**Cantor**] : Georg Cantor. *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.* Leipzig : Teubner, 1883

[Can80] : Georg Cantor. « Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2 ». In : *Math. Ann.* 17 (1880), p. 355-359

[**Can97**] : Georg Cantor. « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre II ». In : *Math. Ann.* 49 (1897), p. 207-246

a découvert *trois* pans des mathématiques : la théorie descriptive (i.e. l'étude fine de la droite), les ordinaux infinis, et l'arithmétique cardinale. Ces sujets entretiennent des liens mais il faut savoir les distinguer. Le premier est de l'analyse, le deuxième de la théorie des ordres, et le troisième de la combinatoire. Il ne s'agit ni de logique mathématique ni de théorie axiomatique des ensembles. • Théorème de comparaison : [**Can97**, § 14]. Forme normale (ex. 3.4) : [**Can97**, § 19]. • Opérations arithmétiques grandement clarifiées par Hausdorff [Hau08, §§ 8 sqq.]. • Suites de Goodstein (ex. 3.6) : [Goo44]. • Ex. 3.8 : tiré de [Dav55, Theorem 2] (qui contient davantage). • D'après Kuratowski les ensembles de Bernstein (ex. 3.10) viennent de [Ber08, § 3] ; je n'ai pas pu vérifier.

• **Terminologie, notations.** • Le mot « transfini » apparaît dans [**Can83a**, § 5] ; « *welches man auch* Suprafinitum *nennen könnte* ». Il n'y a plus grand danger à dire « infini ». • Il n'est pas étonnant que la notation exponentielle, qui remonte au XV^e siècle, ne soit pas adaptée aux mathématiques contemporaines. Pire : il existe une autre structure arithmétique concurrente sur les ordinaux (ex. 22.11). Les notations sont très peu stables. • Les σ-algèbres (ex. 3.9), aussi appelées *tribus*, devraient s'appeler *anneaux de Borel* ou *anneaux de Boole* $\aleph_0$-*complets*. V. § 5, notes conclusives.

• **Hiérarchie borélienne.** • La communauté mathématique conserve du début du XX^e siècle une certaine réticence aux arguments ordinaux, et préfère des raisonnements par maximalité « type Zorn » qui parfois cachent des constructions naturelles. • C'est le cas en théorie de la mesure : la définition par récurrence ordinale de la mesure de Borel est souvent omise. Elle n'est pourtant pas sans clarté, p. ex. [Alb44]. • Notations de l'ex. 3.9. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ dans la topologie usuelle. La *hiérarchie borélienne* de $\mathbb{R}$ est la suite ordinale $(\mathcal{B}_\alpha)$. Elle *stationne en au plus* α si $\mathcal{B}_{\alpha+1} = \mathcal{B}_\alpha$, i.e. $\mathcal{B}_\alpha = \langle \mathcal{F} \rangle_\sigma$, la tribu borélienne. L'ex. 3.9 montre que dans $\mathbb{R}$, elle stationne en au plus ω_1 ; il utilise implicitement du choix.

Théorème.

- Avec choix, la hiérarchie borélienne de $\mathbb{R}$ stationne en exactement ω_1 [Leb05, § VIII].
- Sans choix, il est cohérent qu'elle stationne en exactement ω_2 [Mil08].

• **Suites de Goodstein (ex. 3.6).** • Goodstein cherchait un énoncé naturel sur les entiers dont la démonstration requît l'existence de ε_0. La preuve de convergence est ainsi menée dans une théorie de l'infini actuelle. • [KP82] a confirmé l'intuition de Goodstein qu'une telle théorie est nécessaire : *l'arithmétique élémentaire* PA *ne prouve pas le théorème de Goodstein.* V. § 20, notes conclusives.

[Goo44] : Reuben Goodstein. « On the restricted ordinal theorem ». In : *J. Symbolic Logic* 9 (1944), p. 33-41
[Dav55] : Anne Davis. « A characterization of complete lattices ». In : *Pacific J. Math.* 5 (1955), p. 311-319
[Ber08] : Felix Bernstein. « Zur Theorie der trigonometrischen Reihe ». In : *Leipz. Ber.* 60 (1908), p. 325-338
[Alb44] : José Albuquerque. « Ensembles de Borel ». In : *Portugal. Math.* 4 (1944), p. 161-198
[Leb05] : Henri Lebesgue. « Sur les fonctions représentables analytiquement ». In : *Journ. de Math. (6)* 1 (1905), p. 139-216
[Mil08] : Arnold Miller. « Long Borel hierarchies ». In : *MLQ Math. Log. Q.* 54.3 (2008), p. 307-322
[KP82] : Laurie Kirby et Jeff Paris. « Accessible independence results for Peano arithmetic ». In : *Bull. London Math. Soc.* 14.4 (1982), p. 285-293

- **Ordinaux et théories des ensembles.** On peut développer la théorie ordinale au sein d'une combinatoire relationnelle assez forte (par exemple, l'axiomatique de Zermelo corrigée par Skolem et Fraenkel) ; von Neumann semble un des premiers à l'avoir compris à fond. Ainsi la théorie du premier ordre ZF permet de formaliser la théorie cantorienne des ordinaux, et donc la théorie cantorienne des cardinaux. V. § 22, notes conclusives, *Ordinaux et* ZF.

- **Ordres et ordinaux.** On considère la classe des ordres totaux.

Ordinaux plongeables dans un ordre. D'après l'ex. 2.2, tout ordre infini contient ω ou ω^{op}. C'est très faux en augmentant les cardinaux. En revanche tout ordre indénombrable contient ω_1, ω_1^{op}, ou $(\mathbb{Q}; \leqslant)$. En cardinaux encore supérieurs, c'est plus compliqué. Voir [Rosenstein, II.5.§3].

Notions de rigidité. Suite de § 2, notes conclusives, *Rigidités d'ordres totaux.* • L'absence d'automorphismes non triviaux ne caractérise pas les bons ordres (prendre $\mathbb{N} \sqcup_< \mathbb{N}^{\mathrm{op}}$). Il y a $|2|^{||2|^{|\aleph_0|}|}$ sous-ordres de $\mathbb{R}$ sans automorphismes non triviaux et deux à deux non isomorphes [Rosenstein, p. 154], ce qui dissuade de tenter de classifier les ordres sans automorphismes $\neq$ Id. Une condition plus forte est apparue naturellement dans § 3.1 ; c'est la bonne notion de rigidité. On rappelle qu'un endomorphisme d'un ordre strict est un plongement dans lui-même.

Définition. Un ordre total $\mathbb{O} = (O; <)$ est *amorti* si tout plongement $f\colon \mathbb{O} \hookrightarrow \mathbb{O}$ **[Ord]** vérifie $(\forall x)(f(x) \geqslant x)$.

L'absence d'endomorphismes $\neq$ Id implique l'amortissement (évident), qui implique la trivialité de $\operatorname{Aut}\mathbb{O}$ (amortir f et f^{-1}). Chaque implication est stricte (considérer ω, et ω^{op}). Tout bon ordre est amorti d'après la démonstration du lemme 3.1.

Théorème ([DM40, Theorem 2] ; v. [Rosenstein, Theorem 4.8])**.** Soit $\mathbb{O}$ un ordre total *dénombrable* amorti. Alors $\mathbb{O}$ est bon.

C'est faux en non dénombrable [DM40, Theorem 4] ; il faut ajouter de l'hérédité.

Théorème ([Sco81], absent de [Rosenstein])**.** Un ordre total est bon ssi lui *et tous ses sous-ordres* sont amortis.

- **Classifications des ordinaux.** Donnés à isomorphisme d'ordres près, les ordinaux peuvent s'étudier dans d'autres catégories.

À équipotence près. Appelés « cardinaux ». Avec le principe de Zermelo, ils coïncident même avec les cardinaux naïfs ; v. § 24.

À isomorphisme topologique près (on dit aussi « homéomorphisme »). V. § SÉ1.

À équivalence logique élémentaire près. V. ex. 18.7.

§ 4. Topologie sur les branches : l'espace de Cantor

On introduit les topologies *profinies*, qui sont compactes et engendrées par des *ferverts* (§ 4.1). L'ensemble des branches $\mathcal{C}$ porte naturellement une telle topologie, qui en fait l'*espace de Cantor* (§ 4.2). Cet espace possède une forme d'*universalité* (§ 4.3).

Prérequis : espaces topologiques, topologie produit, compacité ; §§ 1–2.

$\mathcal{A}$ désigne l'arbre binaire infini et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses branches (§ 1). On va munir $\mathcal{C}$ d'une topologie. La définition et les premières notions (fermé, conti-

[Sco81] : Brian Scott. « A characterization of well-orders ». In : *Fund. Math.* 111.1 (1981), p. 71-76 nuité, point isolé, topologie de sous-espace, topologie engendrée, compacité, connexité) sont supposées connues.

— La catégorie **Top** des espaces topologiques a pour morphismes les fonctions continues ; un « homéomorphisme » est un isomorphisme dans **Top**. **Top**

— *Séparation* : deux points distincts appartiennent à des ouverts disjoints.

— *Propriété de Borel-Lebesgue* : tout recouvrement de l'espace par des ouverts possède un sous-recouvrement fini.

— Une famille de parties $\mathcal{F}$ a la *propriété des intersections finies* si pour chaque entier et tous $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, on a $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \varnothing$.
La propriété de Borel-Lebesgue devient : si $\mathcal{F}$ est une famille de fermés ayant la propriété des intersections finies, alors $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

— En français, la *compacité* est la conjonction de la séparation et de la propriété de Borel-Lebesgue. La différence avec la terminologie anglaise est source de confusions.

— Un *plongement* d'espaces topologiques est une fonction $f\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ telle que $\mathcal{E}_1 \simeq f(\mathcal{E}_1)$ [**Top**], où $f(\mathcal{E}_1)$ est muni de la topologie de sous-espace. Un tel plongement est une injection continue mais la réciproque est fausse. Si $\mathcal{E}_1$ est compact et $\mathcal{E}_2$ séparé, cette réciproque est vraie car f est fermée.

— Si les $\mathcal{E}_i = (E_i; \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ sont des espaces topologiques, le produit $E = \prod_I E_i$ porte la *topologie produit* $\mathcal{T} = \prod_I \mathcal{T}_i$, aussi notée prod et appelée *topologie de Tychonoff*. prod
C'est la topologie la plus faible qui rende les projections $\pi_i\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}_i$ continues. Elle est engendrée par les ensembles $\prod_I X_i$ où $(\exists i_0 \in I)[(X_{i_0} \in \mathcal{T}_{i_0}) \wedge (\forall i \in I)(i \neq i_0 \to X_i = E_i)]$; ce sont les pavés de côté plein sauf une fois, où le côté est quand même ouvert. Pour passer aux intersections finies, remplacer « sauf une fois » par « sauf finiment souvent » ; on dit aussi « cofiniment souvent ». On parle alors de *pavés ouverts cofiniment pleins*. Tout ouvert de $\prod_I \mathcal{T}_i$ est réunion de telles parties.

— Si les $(E_i\,; \mathcal{T}_i)$ sont compacts, alors $(\prod E_i\,; \prod \mathcal{T}_i)$ aussi : c'est le théorème de Tychonoff. V. compléments § C, exercice C.1.

§ 4.1. Espaces profinis, anneau fervert

Définition A (espace profini, ou de Stone)**.** Un *espace profini* (parfois : *espace de Stone*) est un espace :

— compact (i.e. de Borel-Lebesgue et séparé),

— de dimension topologique 0 (i.e. dont la topologie est engendrée par une famille d'ouverts qui sont aussi des fermés).

$\triangle$, ^{c}

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties $P(E)$ forme un anneau en prenant pour addition $\triangle$ (différence symétrique) et pour multiplication $\cap$. On note ^{c} le complémentaire.

Ferv

Définition B (anneau fervert)**.** Soit $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace topologique. L'*anneau fervert* de $\mathcal{E}$ est le sous-anneau $\mathrm{Ferv}(\mathcal{E}) \leqslant P(E)$ formé par les ouverts-fermés de $\mathcal{T}$.

C'est bien un sous-anneau. Dans un espace de dimension topologique nulle, tout ouvert est réunion de ferverts. Notamment dans un espace profini, les ferverts forment une *famille séparante* (i.e. telle que si $x \neq y$, il existe des ferverts disjoints G_x, G_y les contenant). Le lemme suivant est très utile en logique.

Lemme (engendrement dans les espaces profinis)**.** Soient $\mathcal{E} = (E;\mathcal{T})$ un espace profini et $\mathcal{F}$ une famille séparante d'ouverts-fermés. Alors $\mathcal{F}$ engendre $\mathrm{Ferv}(\mathcal{E})$ comme anneau, et $\mathcal{T}$ comme topologie.

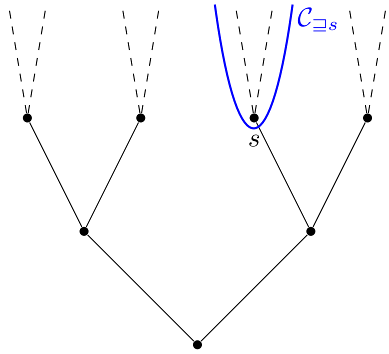
Démonstration. Soit $\Theta = \langle\mathcal{F}\rangle_{\mathrm{top}}$ la topologie engendrée par $\mathcal{F}$; elle est séparée par hypothèse. Soit $\mathrm{Id}\colon (E\,;\mathcal{T}) \to (E, \Theta)$, qui est continue par hypothèse, et bijective. Allant d'un espace compact dans un espace séparé, c'est un isomorphisme topologique. Donc $\Theta = \mathcal{T}$.

Soit $\mathbb{A} = \langle\mathcal{F}\rangle_{\mathrm{ann}}$ l'anneau engendré, qui est clos sous les opérations de réunion finie et d'intersection finie. Clairement $\mathbb{A} \leqslant \mathrm{Ferv}(\mathcal{E})$. Soit réciproquement $G \in \mathrm{Ferv}(\mathcal{E})$; c'est un ouvert de $\mathcal{T} = \Theta$, donc une réunion arbitraire d'éléments de $\mathbb{A}$. Mais c'est aussi un fermé de $\mathcal{T} = \Theta$, donc un compact, et le recouvrement se ramène à une réunion finie. Ainsi $G \in \mathbb{A}$ et $\mathbb{A} = \mathrm{Ferv}(\mathcal{E})$. $\square$

Ceci prélude à la dualité de Stone étudiée en § 5.

§ 4.2. L'espace de Cantor

Pour $s \in \mathcal{A}$ et $\sigma \in \mathcal{C}$, on note encore $s \sqsubseteq \sigma$ si la branche σ passe par le sommet s, i.e. si $\sigma_{|h(s)} = s$. (Ceci généralise l'ordre d'extension vu en § 2.) Soit $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par les $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s} = \{\sigma \in \mathcal{C} : s \sqsubseteq \sigma\}$ pour $s \in \mathcal{A}$.



Un ouvert générateur-type

Proposition (et définition : espace de Cantor)**.** $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T}) \simeq (2^{\mathbb{N}}\,; \text{prod})$ **[Top]** ; c'est un espace profini sans points isolés ; $\text{Ferv}(\mathcal{C})$ est dénombrable.

L'espace $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$ est appelé *espace de Cantor*, simplement noté $\mathcal{C}$.

Démonstration. On peut vérifier que la bijection naturelle $2^{\mathbb{N}} \simeq \mathcal{C}$ de § 1.1 est un isomorphisme topologique, mais nous n'emploierons pas les propriétés de $(2^{\mathbb{N}}\,; \text{prod})$ pour établir celles de $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$.

— Les ouverts générateurs donnés sont aussi des fermés car :

$$(\mathcal{C}_{\sqsupseteq s})^c = \bigcup_{\substack{t \in \mathcal{A}\setminus\{s\}:\\ h(t)=h(s)}} \mathcal{C}_{\sqsupseteq t}.$$

L'espace est donc de dimension topologique nulle.

— Deux ensembles $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s}$ et $\mathcal{C}_{\sqsupseteq t}$ sont soit disjoints soit en inclusion. Notamment les ouverts de $\mathcal{T}$ sont les réunions arbitraires d'ensembles $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s}$. En outre aucun ouvert n'est singleton, donc l'espace est sans points isolés.

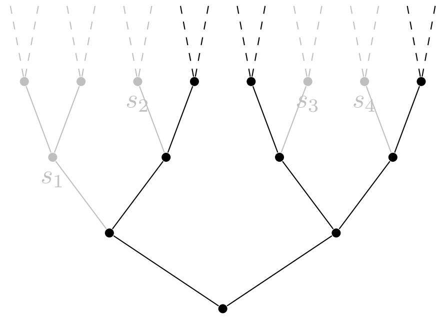
— La topologie est séparée par les $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s}$. En effet si $\sigma \neq \tau$ dans $\mathcal{C}$, alors prenant des troncatures s, t assez longues pour en témoigner, on a $\sigma \in \mathcal{C}_{\sqsupseteq s}$ et $\tau \in \mathcal{C}_{\sqsupseteq t}$, ouverts disjoints.

— La topologie est de Borel-Lebesgue. Soit $\{U_i : i \in I\}$ une famille couvrante d'ouverts. Écrivant chaque membre comme réunion d'ouverts générateurs, on se ramène à une famille couvrante par des générateurs $U_i = \mathcal{C}_{\sqsupseteq s_i}$, dont on veut extraire un sous-recouvrement fini. Soit

$S = \{s_i : i \in I\}$. On a donc :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{C}_{\sqsupseteq s}.$$

On peut supposer $\varnothing \notin S$, car sinon la réunion se réduit à $\mathcal{C}_{\sqsupseteq \varnothing} = \mathcal{C}$. Soit $B = \{t \in \mathcal{A} : (\exists s \in S)(s \sqsubseteq t)\}$ la clôture supérieure de S. On a $\varnothing \notin B$, donc $B \neq \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \backslash B \neq \varnothing$, pour le graphe induit. C'est encore un arbre de racine $\varnothing$. Comme les $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s}$ pour $s \in S$ recouvrent $\mathcal{C}$, le sous-arbre $\mathcal{A}'$ ne possède pas de branche infinie.



On ôte les points de B, obtenant $\mathcal{A}'$.

D'après le lemme de Kőnig faible, $\mathcal{A}'$ est de hauteur finie n. Si $\sigma \in \mathcal{C}$, alors $\sigma_{|n+1} \notin \mathcal{A}'$, d'où $\sigma_{|n+1} \in B$. Ainsi les $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s_i}$ pour les s_i de hauteur $\leqslant n$ forment un sous-recouvrement ouvert.

— L'espace est profini sans points isolés. Comme les ferverts $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s}$ forment une famille séparante, ils engendrent $\mathrm{Ferv}(\mathcal{C})$ d'après le lemme 4.1. Cet anneau est donc dénombrable. □

Remarques

— On a utilisé la contraposée du lemme de Kőnig faible (version pour les sous-arbres de $\mathcal{A}$), qui n'invoque pas de choix. De de même pour montrer la compacité de $2^{\mathbb{N}}$ dans la topologie de Tychonoff, *on n'a pas besoin de choix* vu l'effectivité du problème. Ceci contraste avec le théorème de Tychonoff abstrait (v. § 23, notes conclusives).

— $(\mathcal{C};\mathcal{T})$ possède une réalisation naturelle comme fermé de l'espace métrique $[0,1]$ pour la distance usuelle. On note mét la topologie métrique.

On considère en effet la fonction rencontrée en § 1.1 :

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C} & \to & [0,1] \\ \sigma & \mapsto & r_\sigma = \frac{2}{3}\sum_{i \geqslant 0} \frac{\sigma_i}{3^i}. \end{array}$$

C'est une injection continue, donc un isomorphisme topologique du compact $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$ sur son image $(r(\mathcal{C});\,\text{mét})$.
En particulier, $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$ est métrisable, par exemple avec :

$$d(\sigma,\tau) = \frac{2}{3}\sum_{i:\sigma_i\neq\tau_i}\frac{1}{3^i}.$$

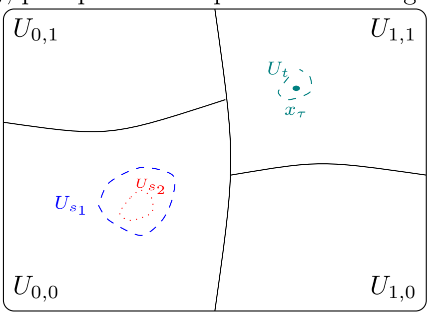
— En revanche $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$ n'est *pas* isomorphe à $([0,1];\,\text{mét})$ car les réels ne sont pas profinis. L'image de la fonction est un fermé *propre* de $[0,1]$, souvent appelé « sous-ensemble de Cantor de la droite ». Ce n'est qu'une réalisation possible de l'espace abstrait.

§ 4.3. Universalité de l'espace de Cantor

Théorème (Brouwer)**.** Soit $\mathcal{K}\neq\varnothing$ un espace profini sans points isolés et tel que $\mathrm{Ferv}(\mathcal{K})$ soit au plus dénombrable. Alors $\mathcal{K}\simeq\mathcal{C}$ [**Top**].

Remarque. Pour un espace profini $\mathcal{E}$, la dénombrabilité de $\mathrm{Ferv}(\mathcal{E})$ équivaut à l'existence d'une famille génératrice d'ouverts qui est dénombrable. Un sens est vrai sans le caractère profini ; pas l'autre ($\mathbb{N}$ discret). Soit $\mathcal{F}$ une telle famille. On la clos sous intersection finie ; elle reste dénombrable. Tout ouvert, donc tout fervert, est réunion arbitraire de membres de $\mathcal{F}$. Par compacité tout fervert est réunion finie de $\mathcal{F}$. Donc $\mathrm{Ferv}(\mathcal{E})$ est dénombrable.

Démonstration. On cherche un isomorphisme topologique entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$. On va répliquer la structure arborescente des ferverts $\mathcal{C}_{\sqsupseteq s}$ à l'intérieur de $\mathcal{K}$ par des ferverts U_s (étape 1), puis prendre les points de convergence (étape 2).



Si $s_1 \sqsubseteq s_2$, alors $U_{s_1}\subseteq U_{s_2}$. On espère capturer un unique point « à la limite de chaque branche ».

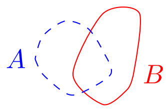
La méthode naïve donnerait simplement une injection $\mathcal{C}\hookrightarrow\mathcal{K}$ [**Top**] ; pour la surjectivité il faut garantir qu'on ait bien des partitions.

Par absence de points isolés, tout ouvert non vide contient au moins deux points. En outre les ferverts de $\mathcal{K}$ le séparent (§ 4.1). Soit $(O_n : n \in \mathbb{N})$ une énumération de $\mathrm{Ferv}(\mathcal{K})$.

Étape 1. Une famille de ferverts indexée par $\mathcal{A}$.

Vérification. On veut former des partitions emboîtées convergeant vers des singletons. Dans le cas métrique on forcerait le diamètre des parts successives à tendre vers 0, mais $\mathcal{K}$ n'est pas métrisable a priori (il l'est a posteriori car $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$ l'est). Pour modéliser cette contrainte diamétrale, on exploite les O_n.

Un ensemble A *morcèle* un ensemble B si $B \cap A \neq \varnothing$ et $B \backslash A \neq \varnothing$.



A morcèle B.

On cherche des partitions $\mathcal{P}_n$ de $\mathcal{K}$ en 2^n ferverts, de sorte que :

— les $\mathcal{P}_n$ s'affinent progressivement ;

— O_n ne permettrait pas de raffiner P_{n+1}, i.e. n'en morcèle aucun terme.

On cherche donc une famille $\{U_s : s \in 2^{\omega}\}$ de ferverts non vides de $\mathcal{K}$ telle que :

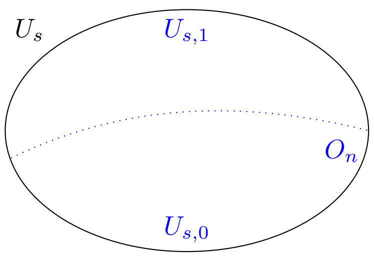
— pour chaque entier n, on ait une partition $K = \bigsqcup_{\substack{s\in\mathcal{A}:\\ h(s)=n}} U_s$;

— pour chaque entier n, chaque suite $s \in 2^n$ de hauteur n, et chaque $i \in \{0,1\}$, on ait $U_{s,i} \subseteq U_s \cap O_n$ ou $U_{s,i} \subseteq U_s \backslash O_n$. (« O_n ne morcèle pas les U_t de hauteur $n+1$. »)

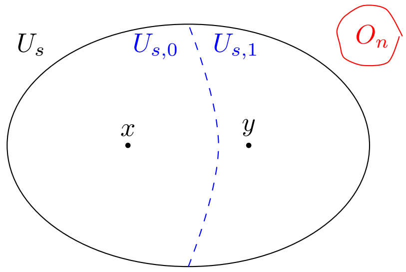
Soit $U_\varnothing = K$. Soit n tel que les U_s soient construits pour $s \in 2^n$. On les ramifie en hauteur $n+1$ comme suit.

— Si O_n morcèle U_s, alors $U_{s,0} = U_s \cap O_n$ et $U_{s,1} \backslash O_n$ conviennent car O_n ne les morcèle plus.

— Si $U_s \subseteq O_n$ ou $Us \subseteq O_n^c$, on prend deux points distincts de U_s que l'on sépare par un fervert F ; alors $U_{s,0} = U_s \cap F$ et $U_{s,1} = U_s \backslash F$ conviennent.



Si O_n morcèle U_s : poser
$U_{s,0} = U_s \cap O_n$ et $U_{s,1} = U_s \backslash O_n$.



Si O_n ne morcèle pas U_s :
prendre deux points, les séparer.

Ceci complète la récurrence.

◇

Étape 2. Un isomorphisme topologique.

Vérification. On veut construire une fonction $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{K}$. Soit $\sigma \in \mathcal{C}$; soit $F_\sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{\sigma_{|n}}$. Ce fermé est non vide par compacité. Il est même singleton car si $x \neq y$ dans F_σ, alors on peut les séparer par un fervert, qui est l'un des O_n. Soit $s = \sigma_{|n}$. Alors $x \in U_{s,0}$ et $y \in U_{s,1}$, ou l'inverse. Notamment l'un des deux n'est pas dans F_σ. On peut donc poser $f(\sigma) = x$, où $F_\sigma = \{x\}$.

On a $f(\mathcal{C}_{\sqsupseteq s}) \subseteq U_s$, car si $s \sqsubseteq \sigma$, alors $f(\sigma) \in F_\sigma \subseteq U_s$. On affirme les points suivants.

— La fonction est injective. En effet si $\sigma \neq \tau$ dans $\mathcal{C}$, soit n assez grand tel que les troncatures $s = \sigma_{|n}$ et $t = \tau_{|n}$ soient distinctes. Comme $U_s \cap U_t = \varnothing$, on a $f(\sigma) \neq f(\tau)$.

— La fonction est continue. Il suffit de montrer que chaque $f^{-1}(O_n)$ est ouvert. Soit $\sigma \in \mathcal{C}$ vérifiant $f(\sigma) \in O_n$. Soit $s = \sigma_{|n}$, de sorte que $f(\sigma) \in U_s \cap O_n$. On peut supposer $\sigma \in \mathcal{C}_{\sqsupseteq s,0}$ (l'autre cas est similaire). Alors $f(\sigma) \in U_{s,0} \cap O_n$, mais par construction O_n ne morcèle pas $U_{s,0}$, donc $U_{s,0} \subseteq O_n$. Ainsi $f(\mathcal{C}_{\sqsupseteq s,0}) \subseteq U_{s,0} \subseteq O_n$ et $\sigma \in \mathcal{C}_{\sqsupseteq s,0} \subseteq f^{-1}(O_n)$. Donc $f^{-1}(O_n)$ est ouvert, et f est continue.

— L'image $f(\mathcal{C})$ est dense dans $\mathcal{K}$. En effet soit n entier. On suppose $O_n \neq \varnothing$. Les U_s pour $h(s) = n$ partitionnent $\mathcal{K}$, donc il existe s tel que $U_s \cap O_n \neq \varnothing$. Par non-morcellement, $U_{s,0}$ ou $U_{s,1}$ est inclus dans O_n. Pour σ étendant le bon (s, i), on a $f(\sigma) \in O_n$. Donc tout ouvert non vide rencontre $f(\mathcal{C})$.

Ainsi $f(\mathcal{C})$ est une partie dense de $\mathcal{K}$, mais par continuité elle est compacte, donc fermée dans $\mathcal{K}$. Ainsi $f(\mathcal{C}) = \mathcal{K}$ et f est surjective. C'est une bijection continue entre compacts, donc un isomorphisme dans **Top**. $\diamond$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque. L'isomorphisme dépend de plusieurs choix : on n'a pas unicité. Ceci se manifeste par un « gros » groupe d'automorphismes topologiques $\mathrm{Aut}_{\mathrm{top}}(\mathcal{C})$, qui est un intéressant objet d'étude.

Exemple. $\mathcal{C}$ est topologiquement isomorphe à $\mathcal{C}^n$ et à $\prod_{\mathbb{N}} \mathcal{C}$.

Exercices

4.1. Montrer que $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$ coïncide avec la topologie de l'ordre $(\mathcal{C};\leqslant_{\mathrm{lex}})$ (v. exercice 2.8). L'espace $\mathcal{C}$ est donc un *espace topologique ordonné*.

4.2. Montrer que $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{C}$ est fermé ss'il existe un sous-arbre $Y \subseteq \mathcal{A}$ de même racine et tel que X est l'ensemble des branches de Y.

4.3. Montrer, sans raisonnement par l'absurde, l'équivalence entre :
- (i) le théorème de l'éventail pour $\mathcal{A}$ (v. § 1, notes conclusives) ;
- (ii) la propriété de Borel-Lebesgue en termes d'ouverts pour $(\mathcal{C}\,;\mathcal{T})$;
- (iii) la contraposée du lemme de Kőnig faible, i.e. l'énoncé : si $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ est un sous-arbre sans branche infinie, alors $\mathcal{A}'$ est de hauteur finie.

On peut, pour montrer non-P, supposer P et atteindre une contradiction. Mais on ne peut pas, pour montrer P, supposer non-P et atteindre une contradiction (v. compléments § G).

4.4 (aspects de l'universalité). Montrer les points suivants.
- a. Tout espace profini dénombrablement topologiquement engendré s'injecte continûment dans $\mathcal{C}$.
- b. $\mathcal{C}$ s'injecte continûment dans tout espace complètement métrisable non vide sans points isolés.
- (*) c. $\mathcal{C}$ se surjecte continûment sur tout compact métrique. Indication : commencer par montrer que $\mathcal{C}$ se surjecte continûment sur tout fermé non vide de $\mathcal{C}$, puis contempler le diagramme suivant dans **Top** :

$$\begin{tikzcd} \prod_{\mathbb{N}} \mathcal{C} \arrow[rr, two heads] & & \prod_{\mathbb{N}} [0,1] \\ & \mathcal{K} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

4.5 (hypothèse du continu pour les fermés de $\mathbb{R}$). On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle.
- a. Montrer que toute partie $E \subseteq \mathbb{R}$ s'écrit comme réunion disjointe $E = O \sqcup F$ avec :
  - $O \subseteq E$ ouvert de E au plus dénombrable,

– $F \subseteq E$ fermé de E sans points isolés (dans la topologie de sous-espace).

[Considérer l'ensemble des points de E ayant un voisinage dénombrable. On rappelle qu'il existe une famille d'ouverts génératrice dénombrable.] (C'est un cas particulier du *théorème de Cantor-Bendixson* ; voir notes conclusives.)

b. En déduire que tout fermé $F \subseteq \mathbb{R}$ non dénombrable est de cardinal $|2|^{|\aleph_0|}$. [Invoquer l'ex. 4.4.]

c. Déduire aussi que tout fermé non dénombrable contient $|2|^{|\aleph_0|}$ fermés non dénombrables disjoints.

Les fermés de $\mathbb{R}$ vérifient donc l'hypothèse du continu ; v. notes conclusives.

4.6. Les ex. 4.7 et 4.8 reposent sur de la pure topologie à connaître. Le second lemme requiert le premier. Les démontrer.

Lemme A (de normalité)**.** Tout espace compact est *normal*, i.e. deux fermés disjoints sont séparés par des ouverts disjoints.

Lemme B (des composantes quasi-connexes)**.** Soit $(E; \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle *composante quasi-connexe* d'un point $x \in E$ l'ensemble $\Gamma_x = \bigcap\{\text{ferverts contenant } x\}$. Si $\mathcal{T}$ est compacte, alors Γ_x est la composante connexe de x.

4.7. Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : (*)

(i) $\mathcal{E}$ est un espace profini ;

(ii) $\mathcal{E}$ est compact et totalement séparé (i.e. séparé par ses ferverts) ;

(iii) $\mathcal{E}$ est compact et totalement discontinu (i.e. ses composantes connexes sont triviales) ;

(iv) $\mathcal{E}$ est isomorphe à la limite projective d'une famille d'espaces finis discrets.

Autre preuve de (i)⇒(iv) par dualité de Stone en § 5.3.

4.8 (une caractérisation de l'espace de Cantor). Montrer les points suivants. L'isomorphisme est au sens topologique.

a. L'espace de Cantor a exactement deux ouverts non vides à isomorphisme près : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ privé d'un point. (*)

b. Soit $\mathcal{E}$ un espace métrique compact ayant exactement deux ouverts non vides à isomorphisme près. Alors $\mathcal{E} \simeq \mathcal{C}$ [**Top**]. [Pour montrer que $\mathcal{E}$ est séparé par ses ferverts, étudier une composante (quasi-)connexe (ex. 4.6). Admettre que *tout espace métrique compact connexe possède au moins un point ne le déconnectant pas* (v. notes conclusives).] (**)

4.9. (Prérequis : anneau $(\mathbb{Z}_p\,; +, \cdot)$ des nombres p-adiques.) « Par puissances croissantes », $\mathcal{C}$ porte naturellement une structure d'anneau le rendant isomorphe à $\mathbb{Z}_2$. (*)

a. Montrer que c'est un anneau topologique, et que l'idéal $2\mathbb{Z}_2$ est fervert.

b. En déduire les automorphismes de $(\mathbb{Z}_2\,; +)$ puis de $(\mathbb{Z}_2\,; +, \cdot)$.

Notes conclusives

[Kechris] fait référence en théorie descriptive des ensembles mais est moins introduc-

[Kechris] : Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory.* T. 156. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1995, p. xviii+402 tif que [Srivastava]. On recommande [Dehornoy, chap. IX].

- **Repères historiques**

De ontdekkers dezer stelling, Cantor en Bendixson, bewezen haar met behulp van het begrip der tweede oneindige machtigkeit Ω, *dat intusschen niet door alle mathematici wordt erkend.*
[Bro10b, § 2]

Brouwer fait allusion au théorème de Cantor-Bendixson *infra.* De nos jours Ω est noté ω_1 (v. § 3.1). Cette remarque montre la difficulté d'acceptation des idées transfinies.

Espace de Cantor. Il est déjà dans [Smi75]. Première occurrence chez Cantor [**Can83a**, note 11 p. 590]. ([Smi75] fut assez obscur pour que Cantor n'en ait pas eu connaissance ; v. [Fle94].)

Universalité de l'espace de Cantor. • Théorème 4.3 : [Bro10a, § 3]. • Ex. 4.4 c. : [Ale26, p. 567]. • Ex. 4.8 : [SG75], résultat généralisé (v. *Caractérisations de $\mathcal{C}$*).

Hypothèse du continu. Une classe $\mathcal{F}$ de parties de $\mathbb{R}$ *vérifie* HC si tout élément infini en est dénombrable ou de cardinal continu. Pour $\mathcal{F} = P(\mathbb{R})$, c'est indécidable dans ZFC (v. § 27, notes conclusives), mais la réponse est positive pour certaines classes naturelles. • Fermés de $\mathbb{R}$ (ex. 4.5) : Cantor [Can84] et Bendixson [Ben85]. • Boréliens de $\mathbb{R}$: Alexandroff [Ale16] et Hausdorff [Hau16]. • Sous-ensembles analytiques (v. infra) de $\mathbb{R}$: Sousline [Lus17, p. 94].

- **Terminologie.** • Les espaces *profinis* sont ainsi nommés car limites « projectives » dans **Top** des systèmes d'espaces finis (ex. 4.7). L'appellation « espaces de Stone » est postérieure au théorème de dualité (§ 5.3) ; on la rencontre dans l'article classique de Hewitt (ancien étudiant de Stone) [Hew48, Définition 6]. Stone avait suggéré « espaces de

[Srivastava] : Shashi Srivastava. *A course on Borel sets.* T. 180. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1998, p. xvi+261
[Dehornoy] : Patrick Dehornoy. *La théorie des ensembles.* T. 106. Tableau Noir. Paris : Calvage et Mounet, 2017, p. xx + 649
[Bro10b] : Luitzen Brouwer. « Over de structuur der perfekte puntverzamelingen. » In : *Amst. Ak. Versl.* 18 (1910), p. 833-842
[Smi75] : Henry Smith. « On the Integration of discontinuous functions ». In : *Proc. Lond. Math. Soc.* 6 (1874/75), p. 140-153
[Fle94] : Julian Fleron. « A note on the history of the Cantor set and Cantor function ». In : *Math. Mag.* 67.2 (1994), p. 136-140
[Bro10a] : Luitzen Brouwer. « On the structure of perfect sets of points ». In : *Proc. Kon. Akad. Wetensch.* 12 (1910), p. 785-794
[Ale26] : Paul Alexandroff. « Über stetige Abbildungen kompakter Räume ». In : *Math. Ann.* 96 (1926), p. 555-571
[SG75] : Alan Schoenfeld et Gary Gruenhage. « An alternate characterization of the Cantor set ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 53.1 (1975), p. 235-236
[Can84] : Georg Cantor. « De la puissance des ensembles parfaits de points ». In : *Acta Math.* 4.1 (1884). Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur, p. 381-392
[Ben85] : Ivar Bendixson. « Sur la puissance des ensembles parfaits de points ». In : *Bihang till Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar* 9.6 (1885)
[Ale16] : Pavel Alexandroff. « Sur la puissance des ensembles mesurables ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 162 (1916), p. 323-325
[Hau16] : Felix Hausdorff. « Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen ». In : *Math. Ann.* 77 (1916), p. 430-437
[Lus17] : Nikolaï Lusin. « Sur la classification de M. Baire ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 164 (1917), p. 91-94
[Hew48] : Edwin Hewitt. « Rings of real-valued continuous functions I ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 64 (1948), p. 45-99

Boole » [Sto34]. • L'anglais a l'adjectif *clopen* pour ouvert-fermé ; il manquait l'équivalent français.

• **Caractérisations de $\mathcal{C}$.** • L'ex. 4.8 repose sur un résultat de topologie inclus pour l'élégance et l'exhaustivité. On le fait souvent remonter à [Moo20]. • La preuve donnée ici suit [Why68] mais peut être antérieure. Plus dans [HB99].

Théorème. Soit $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace de Borel-Lebesgue, à singletons fermés, et connexe. Alors $\mathcal{E}$ possède au moins deux points ne le déconnectant pas.

Démonstration. On suppose que $\mathcal{E}$ possède au plus un point ne le déconnectant pas. Soit e ce point s'il existe, et sinon fixons n'importe quel $e \in E$.

Si $x \in E\backslash\{e\}$ alors $E\backslash\{x\}$ n'est plus connexe : il existe des ouverts relatifs disjoints U_x, V_x de $E\backslash\{x\}$ tels que $E\backslash\{x\} = U_x \sqcup V_x$. Les singletons sont fermés dans $\mathcal{E}$, donc U_x et V_x sont encore ouverts dans $\mathcal{E}$. On peut supposer $e \in V_x$.

L'ensemble $C_x = V_x \sqcup \{x\} = U_x^c$ est un fermé propre de $\mathcal{E}$; montrons qu'il est connexe. Sinon, $V_x \cup \{x\} = W_x^1 \sqcup W_x^2$ en ouverts relatifs non vides. On peut supposer $x \in W_x^1$. Alors $W_x^2 \subseteq V_x$ en est un ouvert, donc aussi un ouvert de $\mathcal{E}$. Ainsi $E = (U_x \cup W_x^1) \sqcup W_x^2$ est une décomposition en ouverts non vides disjoints contredisant la connexité de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{F} = \{C_x : x \in E\backslash\{e\}\}$, ensemble ordonné par inclusion. Par maximalité (§ 2.1) on considère une chaîne maximale $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ et l'on pose $C = \bigcup_{C_x \in \mathcal{F}'} C_x$. Comme réunion de parties connexes toutes contenant e, c'est une partie connexe.

On affirme $C = E$. Soit sinon $x \in E\backslash C$. Puisque $x \notin C$, on a $C = C\backslash\{x\} = (C \cap U_x) \sqcup (C \cap V_x)$, donc par connexité de C et présence de e, on a $C \subseteq V_x$. Soit maintenant $y \in U_x \neq \varnothing$; par définition, $y \notin C_x$. Alors $C_x = C_x\backslash\{y\} = (C_x \cap U_y) \sqcup (C_x \cap V_y)$ donc encore par connexité de C et présence de e, on a $C_x \subseteq V_y$. Ainsi $C \subseteq V_x \subsetneq C_x \subseteq V_y \subseteq C_y$. Mais de x et y, l'un au moins n'est pas e ; disons z. Alors $z \in E\backslash\{e\}$ et $C \subsetneq C_z$, donc $\mathcal{F}' \cup \{C_z\}$ est une chaîne dans $\mathcal{F}$ qui contient strictement $\mathcal{F}'$, contre sa maximalité. Ainsi $C = E$.

En fait $E = \bigcup_{C_x \in \mathcal{F}'} \mathring{C}_x$. Car si $x \in E$, disons $x \in C_y \in \mathcal{F}'$. Si $x \in V_y \subseteq \mathring{C}_y$ on a fini ; sinon $y = x$. Mais $U_x \neq \varnothing$ et $C = E$, donc il existe un $C_z \in \mathcal{F}'$ tel que $U_x \cap C_z \neq \varnothing$; par construction $z \neq x$. Si $x \notin C_z$, alors $C_z = (C_z \cap U_x) \sqcup (C_z \cap V_x)$. Le premier terme n'est pas vide par hypothèse et le second à cause de e : contre la connexité. Donc $x \in C_z\backslash\{z\} = V_z \subseteq \mathring{C}_z$.

La propriété de Borel-Lebesgue et le caractère totalement ordonné de $\mathcal{F}'$ donnent $E = \mathring{C}_x$ pour un x. Mais $\mathring{C}_x \subseteq C_x \subsetneq E$: contradiction. $\square$

• On peut généraliser l'ex. 4.8.

Théorème ([Bul79, Theorem I.3])**.** Un espace métrique compact sans points isolés n'ayant qu'un nombre fini d'ouverts est isomorphe à l'espace de Cantor.

• **Théorème de Cantor-Bendixson.** Fondamental et fondateur en théorie descriptive des ensembles, il a déclenché la révolution ordinale (v. § 3, notes conclusives).

[Sto34] : Marshall Stone. « Boolean algebras and their application to topology ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 20 (1934), p. 197-202
[Moo20] : Robert Moore. « Concerning simple continuous curves ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 21.3 (1920), p. 333-347
[Why68] : Gordon Whyburn. « Cut points in general topological spaces ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 61 (1968), p. 380-387
[HB99] : Bijan Honari et Yousef Bahrampour. « Cut-point spaces ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 127.9 (1999), p. 2797-2803
[Bul79] : Witold Bula. « On compact Hausdorff spaces having finitely many types of open subsets ». In : *Colloq. Math.* 41.2 (1979), p. 211-214

Définition (ensemble clairsemé)**.** Un ensemble est *clairsemé* si toute partie non vide contient un point isolé (dans la topologie de sous-espace).

En enlevant les points isolés d'un fermé $F \subseteq \mathbb{R}$, on obtient un fermé F' appelé *dérivé* de F. Or F peut à son tour avoir des points isolés, si bien qu'il faut itérer. Cantor [**Cantor**, § 10], corrigé par Bendixson [Ben83], établit dans $\mathbb{R}$ le phénomène suivant.

Théorème (Cantor, Bendixson)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique. Alors $\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique comme réunion disjointe d'un ouvert clairsemé et d'un fermé sans points isolés (dans la topologie induite).

Ce théorème est à la base de § SÉ1, et strictement plus fort que la version de l'ex. 4.5 (a.). La démonstration repose sur une itération de longueur éventuellement $> \omega$, que l'on peut éviter dans des cas particuliers (première telle preuve [Phr84]). Plus sur la dérivation en § SÉ1, notes conclusives. On lit souvent la définition suivante.

Définition (ensemble parfait)**.** Un sous-ensemble d'un espace topologique est *parfait* s'il est fermé dans l'espace ambiant et qu'il n'a pas de points isolés dans la topologie de sous-espace.

• Le terme est malheureux car le concept est relatif, comme le caractère fermé. • Tout sous-ensemble parfait non vide de $\mathbb{R}$ est de cardinal continu : v. ex. 4.5. • Le théorème devient : « tout espace se décompose en un ouvert clairsemé et un ensemble parfait ».

• **Espaces polonais.** Ces objets, ainsi nommés par Bourbaki en hommage à l'École Polonaise des années 1920-1930, offrent un cadre naturel pour la théorie descriptive.

Définition (espace polonais)**.** Un espace topologique est *polonais* s'il est à la fois :

- *complètement métrisable* (i.e. métrisable par une distance le rendant complet) ;
- *topologiquement séparable* (i.e. il possède une partie dénombrable dense).

Pour un espace métrique, la deuxième clause équivaut à l'existence d'une famille dénombrable d'ouverts engendrant la topologie. On devrait dire « dénombrablement topologiquement engendré ». Le théorème de Cantor-Bendixson est souvent cité sous la forme : « un fermé d'un espace polonais est réunion disjointe d'un ouvert au plus dénombrable et d'un ensemble parfait ». C'est un cas particulier du théorème *supra*, la dénombrabilité de l'ouvert étant conséquence du caractère polonais de l'espace.

• **Hiérarchie projective.** Au-delà des boréliens (§ 3, notes conclusives) se poursuit la hiérarchie *projective*, étudiée par Louzine puis Sousline ; l'apparition des analytiques (Σ^1_1) semble être [Sou17].

Définition (hiérarchie projective)**.** On définit par récurrence les foncteurs $\Sigma^1_n, \Pi^1_n, \Delta^1_n$ qui à chaque espace polonais $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ associent une collection de parties de E.

- $\Sigma^1_1(\mathcal{E})$ est l'ensemble des projetés de boréliens de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ (dans la topologie produit).
- $\Pi^1_n(\mathcal{E})$ est l'ensemble des complémentaires de $\Sigma^1_n(\mathcal{E})$.
- $\Sigma^1_{n+1}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des projetés de $\Pi^1_n(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$.

Les *projectifs* de $\mathcal{E}$ sont les membres de $\bigcup_{\mathbb{N}} \Sigma^1_n(\mathcal{E})$.

Les propriétés (souhaitables ou non) des projectifs sont peu contraintes par ZFC. V. § 21, notes conclusives.

[Ben83] : Ivar Bendixson. « Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points (Extrait d'une lettre adressée à M. Cantor à Halle) ». In : *Acta Math.* 2.1 (1883), p. 415-429
[Phr84] : Evdard Phragmén. « Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre ». In : *Acta Math.* 5 (1884), p. 47-48
[Sou17] : Mikhail Souslin. « Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 164 (1917), p. 88-91

• **Groupes d'automorphismes.** • On met une topologie sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{A};\ \sqsubseteq)$ en prenant pour ouverts générateurs les stabilisateurs des sommets s. En tant qu'*espace* topologique, cet objet est isomorphe à $(\mathcal{C}\ ;\ \mathcal{T})$ dans **Top**, mais cela ne le décrit pas comme *groupe* topologique. Il est très complexe ; v. p. ex. [de la Harpe, chap. VIII]. • Brouwer [Bro10a, § 4] posa la question du groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}\ ;\ \mathcal{T})$ des automorphismes de l'espace topologique $(\mathcal{C}\ ;\ \mathcal{T})$ (« groupe d'homéomorphismes »). Ce groupe est simple [And58]. Son étude fine peut être poursuivie par des moyens modèle-théoriques [KR07].

§ 5. Dualité de Stone

Les *anneaux de Boole* sont des structures algébriques généralisant les anneaux de parties $(P(E)\ ;\triangle,\cdot)$ (§ 5.1). On peut aussi les voir comme des *treillis de Boole*, remplaçant l'étude des idéaux par celle des *filtres* (§ 5.2). Le *théorème de Stone* exprime une dualité entre anneaux de Boole et espaces profinis (§ 5.3).

Prérequis : anneaux commutatifs unitaires et leurs idéaux ; § 4.

---

§ 5.1. Anneaux de Boole et leur spectre

Définition A (anneau de Boole). Un *anneau de Boole* est un anneau (associatif, commutatif, unitaire) $\mathbb{A}$ formé d'idempotents, i.e. vérifiant : $(\forall x)(x^2 = x)$.

Remarques

— La caractéristique est 2 car $2 = 2^2$. Notamment $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{F}_2$-algèbre associative.

— La commutativité suit de l'idempotence, car $x+y = (x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = x+y+(xy-yx)$.

— Comme en § 4.1, $\triangle$ désigne la différence symétrique. Si E est un ensemble, alors l'anneau de parties $(P(E);\triangle,\cap)$ est un anneau de Boole, de neutres $\varnothing$ et E. Il est isomorphe à l'anneau produit $\prod_E \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

— Tous les anneaux de Boole ne sont pas des $P(E)$. Il existe en effet des anneaux de Boole dénombrables, comme celui des parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}$ (exercice 5.2), mais $P(E)$ n'est jamais dénombrable.

— Tout sous-anneau, tout quotient d'un anneau de Boole en est un.

[de la Harpe] : Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory.* Chicago Lectures in Mathematics. Chicago : University of Chicago Press, 2000, p. vi+310

[And58] : Richard Anderson. « The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms ». In : *Amer. J. Math.* 80 (1958), p. 955-963

[KR07] : Alexander Kechris et Christian Rosendal. « Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures ». In : *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 94.2 (2007), p. 302-350

Bool

Soit **Bool** la catégorie des anneaux de Boole. Ses morphismes sont les morphismes d'anneaux, qui par définition préservent $1, +, \cdot$; ils préservent aussi 0. Un plongement d'anneaux (de Boole ou non) est un morphisme injectif.

$\mathfrak{p}$

Un concept de géométrie est nécessaire. Par définition, les idéaux sont propres. On note traditionnellement $\mathfrak{p}$ un idéal premier.

Spec

Définition B (spectre de Zariski)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau (non nécessairement de Boole). Son *spectre de Zariski* est $\operatorname{Spec} \mathbb{A} = \{$idéaux premiers de $\mathbb{A}\}$, muni de la topologie engendrée par les ouverts $O_a = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{A} : a \notin \mathfrak{p}\}$ pour $a \in A$.

Spm

On note $\operatorname{Spm} \mathbb{A}$ l'ensemble des idéaux *maximaux* d'un anneau. Tout idéal maximal est premier ; en général la réciproque est fausse. Elle est vraie si $\mathbb{A}$ est un anneau de Boole d'après la proposition suivante, qui entraîne également que $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$ est un espace profini (§ 4.1).

Proposition. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Alors :

(i) $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$ est de Borel-Lebesgue ;

(ii) $\mathbb{A}$ est de dimension 0, i.e. tout $\operatorname{Spec}(\mathbb{A}) = \operatorname{Spm}(\mathbb{A})$; en particulier, si $\mathfrak{p}$ est premier alors $\mathbb{A} = \mathfrak{p} \sqcup (1 + \mathfrak{p})$;

(iii) $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$ est séparé ;

(iv) $\mathbb{A}$ est semi-simple (au sens de Jacobson ; on dit aussi semi-primitif), i.e. $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} \mathbb{A}} \mathfrak{m} = \{0\}$.

Démonstration.

(i) On procède en termes de fermés. Pour $a \in \mathbb{A}$ soit $F_a = O_a^c = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{A} : a \in \mathfrak{p}\}$; tout fermé est intersection d'unions finies de tels fermés. Soit $\{F_i : i \in I\}$ une famille de fermés ayant la *propriété des intersections finies* ; on montre que l'intersection globale est non vide. Par définition de la topologie, on peut supposer qu'ils sont de la forme $F_i = F_{a_i}$.

Soit $J = (a_i : i \in I) \lhd \mathbb{A}$ l'idéal engendré par les a_i. Si $J = \mathbb{A}$, alors par définition il existe n entier, $i_1, \ldots, i_n \in I$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{A}$ tels que $\sum_{k=1}^n x_k a_{i_k} = 1$. Notamment $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = \mathbb{A}$, et donc $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} = \varnothing$, contre la propriété des intersections finies. Il suit que J est bien un idéal, i.e. est propre. D'après le théorème de Krull (§ 3.3), il est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m} \lhd \mathbb{A}$. En particulier $\mathfrak{m}$ est premier, i.e. $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} \mathbb{A}$. Par construction, $\mathfrak{m} \in \bigcap_I F_i \neq \varnothing$. Ceci montre la propriété de Borel-Lebesgue.

(ii) Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{A})$. Alors $\mathbb{B} = \mathbb{A}/\mathfrak{p}$ est un anneau de Boole intègre. Dans $\mathbb{B}$, on a $x \cdot (1 + x) = x + x^2 = 0$ donc par intégrité $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, qui est un corps. Donc $\mathfrak{p}$ est maximal, i.e. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(\mathbb{A})$. Notamment si $a \notin \mathfrak{p}$, alors $a \equiv 1\ [\mathfrak{p}]$, donc $1 + a \in \mathfrak{p}$.

(iii) Les ouverts O_a et O_{1+a} sont disjoints. En effet soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{A}$. Si $\mathfrak{p} \in O_a$ alors $a \notin \mathfrak{p}$. Par maximalité de $\mathfrak{p} \lhd \mathbb{A}$, on a donc $1 + a \in \mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p} \notin O_{1+a}$. Ceci entraîne la séparation. En efeft supposons $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ dans $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$, avec $a \in \mathfrak{q} \backslash \mathfrak{p}$ (l'autre cas est similaire). Alors $a \notin \mathfrak{p}$ donc $\mathfrak{p} \in O_a$, et $a \in \mathfrak{q}$ donc $1 + a \notin \mathfrak{q}$, d'où $\mathfrak{q} \in O_{1+a}$.

(iv) Cela pourrait se montrer via le *nilradical* $\sqrt{0} = \{a \in \mathbb{A}/(\exists n \in \mathbb{N})(a^n = 0)\}$, qui coïncide en général avec $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{A}} \mathfrak{p}$, mais on donne un argument *ad hoc*. Soit $a \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{A}$, l'équation $(1 + a)x = 1$ entraîne $0 = a$, absurde. Ainsi l'idéal $(1 + a)$ est propre, donc inclus dans un idéal maximal $\mathfrak{m} \lhd \mathbb{A}$ d'après le théorème de Krull (§ 3.3). Alors $1 + a \in \mathfrak{m}$ et $a \notin \mathfrak{m}$. $\square$

Remarque. (i) est vrai pour tout anneau commutatif unitaire ; pas (iii). L'absence de séparation générale vient de la possibilité d'idéaux premiers non maximaux, comme dans $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Pour un anneau de Boole, $\operatorname{Spec} \mathbb{A} = \operatorname{Spm} \mathbb{A} \simeq \operatorname{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; la donnée géométrique est particulièrement simple.

§ 5.2. Point de vue opposé : treillis de Boole et leurs filtres

En logique il est parfois plus naturel de travailler avec des treillis plutôt qu'avec des anneaux. C'est un point de vue *complémentaire* et non pas *dual* ; la dualité est en § 5.3. On gagne en généralité ce qu'on perd en intuition « géométrique » (au sens de la géométrie algébrique).

Définition A (treillis ; treillis de Boole)**.**

— Un *treillis* est un ordre partiel $(\mathbb{T}; \leqslant)$ où toute paire $\{x, y\}$ possède un plus grand minorant $x \wedge y$ et un plus petit majorant $x \vee y$. $\wedge, \vee$

— Un *treillis de Boole* est un treillis $\mathbb{T}$:

  — distributif ($\wedge$ et $\vee$ sont distributives l'une sur l'autre) ;

  — à extrémités (0, plus petit et 1, plus grand éléments) ;

  — complémenté (i.e. vérifiant : $(\forall x)(\exists y)[(x \wedge y = 0) \wedge (x \vee y = 1)]$; cet élément est noté $\neg x$). $\neg$

Tout anneau de Boole est naturellement un treillis de Boole et réciproquement. Aux idéaux correspondent les *filtres*. On donne la définition la plus générale.

Définition B (filtre)**.** Un *filtre* d'un ordre partiel $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ en est une partie F :

— non vide et propre ;

— dirigée inférieurement (pour $x, y \in F$, il existe $z \in F$ minorant les deux) ;

— close supérieurement (pour $x \in F$ et $y \in O$, si $x \leqslant y$ alors $y \in F$).

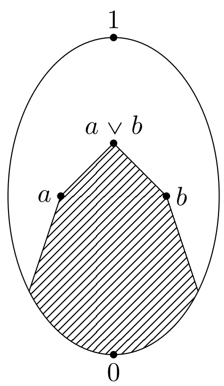
On note alors $F \lhd \mathbb{O}$.

Dans le cas particulier d'un treillis, la deuxième clause se simplifie en : si $x, y \in F$, alors $x \wedge y \in F$. Un cas doublement particulier est celui de $(P(E); \subseteq)$; on parle alors de filtre *sur* E, au risque de confusion.

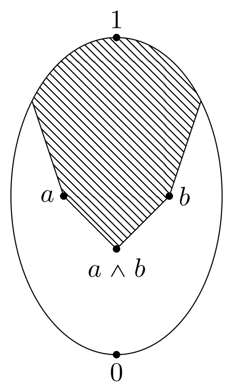
Remarques

— Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole et $\mathbb{T}$ le treillis de Boole associé. À un idéal $I \lhd \mathbb{A}$ on associe $F_I = \{1 + x : x \in I\} \lhd \mathbb{T}$. À un filtre $F \lhd \mathbb{T}$ on associe $I_F = \{\neg x : x \in F\} \lhd \mathbb{A}$. Cette correspondance est biunivoque et respecte l'inclusion.

— La théorie des structures ordonnées part de la notion générale de filtre, et définit par complément les « idéaux d'un ordre partiel ». Il y a donc quatre niveaux de généralité : 1. ordres partiels ; 2. treillis ; 3. treillis de Boole ; 4. treillis de parties $P(E)$. Le cours reste au niveau des anneaux/treillis de Boole, déjà strictement plus général que celui des $P(E)$.



idéal : clos inférieurement et sous $\vee$



filtre : clos supérieurement et sous $\wedge$

Définition C (ultrafiltre)**.** Dans un anneau de Boole $\mathbb{A}$, un filtre est *principal*, resp. *maximal* si l'idéal associé l'est. On dit aussi *ultrafiltre* pour filtre maximal.

Ainsi, dans un anneau de Boole $\mathbb{A}$ vu comme treillis de Boole $\mathbb{T}$, un filtre $F \lhd \mathbb{T}$ est :

— principal s'il est de la forme $\mathbb{T}_{\geqslant a}$ pour un $a \in \mathbb{A}$;

— maximal si pour tout $x \in \mathbb{A}$ on a $(x \in F) \vee (\neg x \in F)$.

Filtres et ultrafiltres sont utiles en logique (par exemple § 16), ainsi qu'en topologie (compléments § C).

§ 5.3. Théorème de dualité

Les espaces profinis et leur anneau fervert ont été définis en § 4.1.

Théorème (dualité de Stone)**.** Il y a dualité entre anneaux de Boole et espaces profinis, donnée par : $\mathbb{A} \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{A})$ et $\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathrm{Ferv}(\mathcal{E})$.

En corollaire, tout anneau de Boole abstrait $\mathbb{A}$ se *représente* comme sous-anneau de l'anneau de Boole concret $P(\mathrm{Spec}\,\mathbb{A})$. Le théorème est plus précis.

Démonstration. Si $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ est un espace profini, alors $\mathrm{Ferv}(\mathcal{E}) \leqslant P(E)$ est un sous-anneau d'un anneau de Boole, donc encore un anneau de Boole.

Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole ; montrons que $\mathrm{Spec}\,\mathbb{A}$ est profini. On rappelle que tout idéal premier est maximal, en symboles $\mathrm{Spec}\,\mathbb{A} = \mathrm{Spm}\,\mathbb{A}$, et que cet espace est compact (Proposition 5.1). Ainsi :

$$\begin{aligned} O_a &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{A} : a \not\equiv 0[\mathfrak{p}]\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{A} : a \equiv 1[\mathfrak{p}]\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{A} : 1 + a \equiv 0[\mathfrak{p}]\} \\ &= F_{1+a}, \end{aligned}$$

donc les O_a sont des ferverts. La topologie du compact $\mathrm{Spec}\,\mathbb{A}$ est engendrée par des ferverts ; l'espace est profini.

Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole, $\hat{\mathbb{A}} = \mathrm{Ferv}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{A})$, et considérons :

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{A} & \to & \hat{\mathbb{A}} \\ & a & \mapsto & O_a. \end{array}$$

Alors φ est un isomorphisme d'anneaux. En effet $\varphi(1) = O_1 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{A}$. En outre pour $a, b \in \mathbb{A}$:

— $\varphi(a + b) = O_{a+b} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{A} : a + b \notin \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{A} : (a \in \mathfrak{p} \wedge b \notin \mathfrak{p}) \vee (a \notin \mathfrak{p} \wedge b \in \mathfrak{p})\} = O_a \triangle O_b$;

— $\varphi(a \cdot b) = O_{ab} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{A} : ab \notin \mathfrak{p}\} = O_a \cap O_b$ par primalité.

C'est donc bien un morphisme d'anneaux. En outre $\ker \varphi = \bigcap \mathrm{Spec}\,\mathbb{A} =$

$\bigcap \operatorname{Spm} \mathbb{A} = (0)$ d'après la proposition 5.1. Il reste à montrer la surjectivité. Mais $\{O_a : a \in \mathbb{A}\}$ est une famille séparante de ferverts de $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$. Par le lemme d'engendrement 4.1, $\hat{\mathbb{A}} = \operatorname{Ferv}(\operatorname{Spec} \mathbb{A}) = \langle O_a : a \in \mathbb{A} \rangle_{\text{ann}} = \operatorname{im} \varphi$.

Soient réciproquement $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace profini, $\mathbb{B} = \operatorname{Ferv} \mathcal{E}$ et $\hat{\mathcal{E}} = \operatorname{Spec} \mathbb{B}$. Pour $F \in \mathbb{B}$, on a par définition $O_F = \{\mathfrak{p} \in \hat{E} : F \notin \mathfrak{p}\}$. En outre tout fervert de $\hat{\mathcal{E}}$ est de cette forme. Pour $x \in E$, soit $\mathfrak{p}_x = \{F \in \mathbb{B} : x \notin F\}$. C'est clairement un idéal premier de $\mathbb{B}$. Formons alors :

$$\begin{array}{rccc} \chi\colon & \mathcal{E} & \to & \hat{\mathcal{E}} \\ & x & \mapsto & \mathfrak{p}_x. \end{array}$$

Cette fonction est injective car $\mathcal{E}$ est séparé par ses ferverts. Elle est continue car pour un fervert O_F de $\hat{\mathcal{E}}$ on a :

$$\chi^{-1}(O_F) = \{x \in E : \mathfrak{p}_x \in O_F\} = \{x \in E : F \notin \mathfrak{p}_x\} = \{x \in E : x \in F\} = F,$$

qui est un ouvert de $\mathcal{E}$. Comme les O_F engendrent la topologie de $\hat{\mathcal{E}}$, la fonction est continue. Enfin $\chi(E)$ est dense dans $\hat{\mathcal{E}}$. En effet un ouvert non vide de $\hat{E}$ contient un O_F avec $F \neq \varnothing$. Alors pour $x \in F$, on a $F \notin \mathfrak{p}_x$, donc $\mathfrak{p}_x = \chi(x) \in O_F$: c'est la densité voulue. En conclusion le compact $\chi(\mathcal{E})$ est dense dans l'espace séparé $\hat{\mathcal{E}}$: il est dense et fermé, donc $\chi(\mathcal{E}) = \hat{\mathcal{E}}$ et χ est surjective. Ainsi χ est une bijection continue entre espaces compacts, donc un isomorphisme topologique. □

On peut grâce à ce dictionnaire retrouver l'universalité de l'espace de Cantor (théorème 4.3) par des moyens strictement algébriques : exercice 5.6.

Remarques

— La dualité est même entre la catégorie **Bool** des anneaux de Boole (morphismes d'anneaux) et la catégorie **Prof** des espaces profinis (morphismes : fonctions continues) : aux morphismes de l'une correspondent les morphismes de l'autre. Les foncteurs contravriants Spec et Ferv établissent alors une *équivalence de catégories*. Voir exercice 5.9.

— Cette dualité entraîne par exemple que tout espace profini $\mathcal{E}$ est limite projective d'une famille d'espaces finis discrets (exercice 4.7). Soit en effet $\mathbb{A} = \operatorname{Ferv} \mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-anneaux *finis* de $\mathbb{A}$, dirigée par l'inclusion. Comme $\mathcal{F}$ recouvre $\mathbb{A}$, on a $\mathbb{A} \simeq \varinjlim(\mathcal{F})$ [**Bool**]. Par dualité :

$$\mathcal{E} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{A} \simeq \varprojlim_{\mathbb{A}_0 \in \mathcal{F}} (\operatorname{Spec} \mathbb{A}_0) \ [\mathbf{Top}]$$

est limite projective d'espaces finis discrets.

Le but du chapitre était d'introduire quelques structures fondamentales en logique : arbres, ordres, ordinaux, topologies profinies, anneaux de Boole. La collusion avec la théorie descriptive des ensembles était un prétexte. On espère n'avoir pas entretenu le malentendu selon lequel Cantor aurait fondé la logique mathématique.

Exercices

5.1 (liens entre anneaux et treillis de Boole ; structures opposées).

a. Sur tout anneau de Boole $\mathbb{A}$, définir une structure de treillis de Boole de minimum $0_{\mathbb{A}}$ et maximum $1_{\mathbb{A}}$. Sur tout treillis de Boole $\mathbb{T}$, définir une structure d'anneau de Boole de neutres $0_{\mathbb{T}}$ et $1_{\mathbb{T}}$. Vérifier que ces deux constructions sont réciproques. Faire correspondre idéaux et filtres.

b. Soit $(\mathbb{T}; \leqslant)$ un treillis de Boole. On note $\mathbb{T}^{\mathrm{op}}$ l'ensemble $\mathbb{T}$ muni de l'ordre $a \preceq b$:si $b \leqslant a$. Montrer que $\mathbb{T}^{\mathrm{op}}$ est un treillis de Boole isomorphe à $\mathbb{T}$.

c. Soit $(\mathbb{A}; +, \cdot)$ un anneau de Boole. Montrer qu'il existe une structure naturelle d'« anneau opposé » $\mathbb{A}^{\mathrm{op}}$, de neutres $1_{\mathbb{A}}$ et $0_{\mathbb{A}}$.

5.2. Soient X un ensemble infini et $\mathbb{A} \leqslant P(X)$ le sous-anneau formé des parties finies ou cofinies. Déterminer $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$. [Compactifié d'Alexandroff.]

5.3 (atomes d'un anneau de Boole). Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Un *atome* de $\mathbb{A}$ est un élément $a > 0$ minimal pour l'ordre $x \leqslant y$:si $xy = x$.

a. Montrer chacune des équivalences suivantes :
   (i) un élément $a \in \mathbb{A}$ est un atome ssi $(1 + a)$ est un idéal premier ;
   (ii) un élément $a \in \mathbb{A}$ est un atome ssi O_a est singleton ;
   (iii) un idéal premier $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{A}$ est point isolé ss'il est principal.

   En logique, les mots « isolé » et « principal » sont souvent interchangeables.

b. Montrer que $\mathbb{A}$ se plonge dans un anneau de Boole sans atomes. [$\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{A}^4 \hookrightarrow \dots$]

5.4 (anneaux atomiques et héréditairement atomiques). Suite de l'exercice 5.3. Un anneau de Boole est *atomique* si tout élément non nul majore un atome.

a. Montrer que tout anneau de Boole se plonge dans un anneau de Boole atomique.

b. Montrer qu'un anneau de Boole $\mathbb{A}$ atomique se plonge dans $P(\mathrm{At}(\mathbb{A}))$, où $\mathrm{At}(\mathbb{A})$ désigne l'ensemble des atomes de $\mathbb{A}$. A-t-on isomorphisme ?

c. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Montrer que sont équivalents : (*)
   (i) tout quotient $\mathbb{A}/I$ de $\mathbb{A}$ possède un atome ;
   (ii) tout quotient $\mathbb{A}/I$ de $\mathbb{A}$ est atomique ;
   (iii) tout sous-anneau $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{A}$ est atomique ;
   (iv) tout sous-anneau $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{A}$ possède un atome.

d. Donner un exemple infini de tel anneau de Boole, dit *héréditairement atomique*.

5.5 (le nombre d'ultrafiltres). On veut montrer la proposition suivante. (*)

Proposition. Si X est infini, alors card Spec $P(X) = \operatorname{card} P(P(X))$.

Pour $Y \subseteq X$, on pose $Y^0 = Y$ et $Y^1 = Y^c$. Une famille $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ est *booléennement indépendante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{B}$ distincts, et tous $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, on a $\bigcap_{i=1}^n Y_i^{\varepsilon_i} \neq \varnothing$.

a. Montrer que si $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ est indépendante, alors card Spec $P(X) \geqslant \operatorname{card} P(\mathcal{B})$.

b. Montrer que si $\mathbb{A}$ est un anneau de Boole, alors Spec $\mathbb{A} \subseteq P(\mathbb{A})$ est indépendante. [Lemme des idéaux étrangers.]

c. Conclure en déterminant le cardinal de $\mathbb{A} = \operatorname{Ferv} P(X)$.

Autre méthode en compléments § C, exercice C.4.

5.6 (anneaux de Boole libres et Ferv $\mathcal{C}$**).** Il faut savoir ce qu'est un atome (ex. 5.3) et une famille booléennement indépendante (ex. 5.5).

Soit X un ensemble. Un anneau de Boole $\mathbb{A}$ est *librement engendré par* X s'il contient X, est engendré par X en tant qu'anneau, et que $X \subseteq \mathbb{A}$ est booléennement indépendant.

a. Démontrer qu'il existe un anneau de Boole librement engendré par X, unique à unique isomorphisme fixant X près, et qu'il est isomorphe à Ferv $P(X)$. [Munir $P(X) \simeq 2^X$ de la topologie produit ; Ferv $P(X)$.]

b. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux anneaux de Boole *sans atomes*, et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n$ des n-uplets. On suppose que $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ définit un isomorphisme $f \colon \langle \mathbf{a} \rangle \simeq \langle \mathbf{b} \rangle$ [**Bool**]. Soit $\alpha \in \mathbb{A}$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{B}$ et $\hat{f} \colon \langle \mathbf{a}, \alpha \rangle \simeq \langle \mathbf{b}, \beta \rangle$ [**Bool**] étendant f. [Notation treillis. Pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0, 1\}^n$, soit $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a} = \bigwedge_{i=1}^n (\neg)^{\varepsilon_i} a_i$. Les $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}$ partagent $1_{\mathbb{A}}$, et α raffine ce partage ; trouver β le reflétant.]

c. Déduire qu'il y a *au plus* un anneau de Boole dénombrable sans atomes. [Va-et-vient.]

d. Soit $\mathcal{C}$ l'espace de Cantor (§ 4). Démontrer que Ferv $\mathcal{C}$ est librement engendré par $\aleph_0$ générateurs, et donner une autre preuve de l'universalité de $\mathcal{C}$ (théorème 4.3).

Ferv $\mathcal{C}$ n'est ni l'anneau « fini/cofini » de l'exercice 5.2, ni l'anneau produit $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En fait Spec $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$; v. compléments C, exercice C.3.

5.7 (anneaux de Boole complets). Un anneau de Boole $\mathbb{A}$ est *complet* si, dans l'ordre naturel, toute partie $X \subseteq \mathbb{A}$ possède une borne supérieure, notée $\bigvee X$.

a. Montrer que cela équivaut à : toute partie possède une borne inférieure, notée $\bigwedge X$.

b. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole atomique (exercice 5.4) et complet. Montrer que $\mathbb{A} \simeq P(\operatorname{At} \mathbb{A})$ [**Bool**]. Déduire que deux anneaux de Boole de même cardinal fini sont isomorphes. À quelle condition un anneau de Boole fini est-il libre (exercice 5.6) ?

c. Montrer qu'un anneau de Boole complet n'est jamais dénombrable.

d. On suppose $\mathbb{A}$ complet. Soient $a \in \mathbb{A}$ et $X \subseteq \mathbb{A}$ tels que $aX = \{a \cdot x : x \in X\} = \{0\}$. Montrer que $a \cdot \bigvee X = 0$.

e. Déduire que dans la dualité de Stone, les anneaux de Boole complets correspondent aux espaces profinis *extrémalement discontinus*, i.e. tels que l'adhérence de tout ouvert est un fervert.

5.8 (un lemme d'extension). Il faut avoir fait l'exercice 5.7.

Lemme (extension de morphismes d'anneaux de Boole)**.** Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole, $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{A}$ un sous-anneau, et $\mathbb{C}$ un anneau de Boole *complet*. Alors tout $f \colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ [**Bool**] s'étend en $\hat{f} \colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ [**Bool**].

a. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ comme dans l'énoncé. Soit $a \in \mathbb{A}$. Soient $X_- = \{f(b) : b \in \mathbb{B}_{\leqslant a}\}$ et $x_- = \bigvee X_-$; de même $X_+ = \{f(b) : b \in \mathbb{B}_{\geqslant a}\}$ et $x_+ = \bigwedge X_+$. Vérifier que $x_- \leqslant x_+$.

b. Mêmes notations. Soit $x \in \mathbb{B}$ quelconque vérifiant $x_- \leqslant x \leqslant x_+$. Montrer que $\hat{f}(b_1 a + (1+b_2)a) = f(b_1)x + f(b_2)(1+x)$ définit un morphisme $\langle \mathbb{B}, a\rangle \to \mathbb{C}$ étendant f.

c. En déduire le lemme. [Comptage ou maximalité.]

d. Montrer la réciproque du lemme : si $\mathbb{C}$ a la propriété, alors il est complet. [Trouver $\hat{\mathbb{C}}$ complet avec $\mathbb{C} \hookrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ et $\hat{\mathbb{C}} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$.]

e. Montrer que $\operatorname{Ferv} \mathcal{C}$ n'est pas quotient d'un $P(E)$. [Il est libre.] (*)

f. Soit I l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que $P(\mathbb{N})/I$ n'est pas complet. [Exercice 1.5.] (*)

5.9 (correspondance de Stone). On note **Prof** la catégorie des espaces profinis, qui a pour morphismes les fonctions continues.

a. Si $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ [**Bool**], on forme :

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{Spec}\varphi\colon & \operatorname{Spec}\mathbb{B} & \to & \operatorname{Spec}\mathbb{A} \\ & \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}). \end{array}$$

Montrer que Spec: **Bool** → **Prof** est un foncteur contravariant, i.e. : (i) $\operatorname{Spec}\varphi$ est dans **Prof** ; (ii) $\operatorname{Spec}\operatorname{Id}_{\mathbb{A}} = \operatorname{Id}_{\operatorname{Spec}\mathbb{A}}$; (iii) si $\chi\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ [**Bool**], alors $\operatorname{Spec}(\chi\circ\varphi) = \operatorname{Spec}\varphi \circ \operatorname{Spec}\chi$.

b. Pour $\mathbb{A}$ dans **Bool**, on note $\hat{\mathbb{A}} = \operatorname{Ferv}\operatorname{Spec}\mathbb{A}$ et $J_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A} \to \hat{\mathbb{A}}$ la fonction $a \mapsto O_a$. Montrer que $J_{\mathbb{A}}$ est un isomorphisme dans **Bool**.

c. Pour $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ dans **Prof**, définir $\operatorname{Ferv} f$; pour $\mathcal{E}$ dans **Prof**, définir $\hat{\mathcal{E}}$ et $J_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \simeq \hat{\mathcal{E}}$ [**Prof**].

d. Grâce à l'exercice 5.8, montrer chacune des équivalences suivantes : (i) φ est injectif ssi $\operatorname{Spec}\varphi$ est surjective ; (ii) φ est surjectif ssi $\operatorname{Spec}\varphi$ est injective ; (iii) f est injective ssi $\operatorname{Ferv} f$ est surjectif ; (iv) f est surjective ssi $\operatorname{Ferv} f$ est injectif. (*)

e. Une relation d'équivalence $\sim$ sur un espace profini $\mathcal{E}$ est *pro-compatible* si deux points non $\sim$-équivalents sont séparables par des ferverts $\sim$-clos, i.e. :

si $x_1 \not\sim x_2$, alors il existe $G_1, G_2 \in \operatorname{Ferv}(\mathcal{E})$ disjoints tels que $[x_i] \subseteq G_i$.

Montrer que les données suivantes sont équivalentes :

(i) une surjection continue $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre deux espaces profinis ;

(ii) un espace profini $\mathcal{E}$ avec une relation pro-compatible ;

(iii) deux anneaux de Boole $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{A}$.

5.10. Soit $\mathcal{E} = (E\,; \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ un espace topologique métrisable, dénombrable et sans points isolés. (**) Montrer que $\mathcal{E} \simeq (\mathbb{Q}\,; \mathrm{std})$ [**Top**]. [1. Trouver un anneau dénombrable de ferverts engendrant la topologie. 2. Trouver une partie dense de l'espace de Cantor $\mathcal{C}$ qui soit topologiquement isomorphe à $\mathcal{E}$. 3. Disjoindre E des extrémités et des points de saut de $(\mathcal{C}; <)$ (points ayant un successeur immédiat). 4. Déduire que $\mathcal{E}$ est un espace ordonné (i.e. sa topologie est une topologie d'ordre, v. ex. 2.8). 5. Conclure.]

Notes conclusives

[Sikorski] et [Givant-Halmos] ont popularisé les anneaux de Boole ; on recommande [Koppelberg].

• **Repères historiques**

> *In the present paper, which is one of a projected series, we shall be concerned primarily with the problem of determining the representation of a given Boolean algebra by algebras of classes, aggregates, or combinations.* [...] *Such a result is a precise analogue of the theorem that every abstract group is represented by an isomorphic group of permutations.* [...] *It is a curious fact that these results* [ceux qu'il annonce] *are considerably more recondite than the corresponding theorems for abstract groups: the elements of the representative classes must be taken as certain classes of elements in the given Boolean algebra (in particular, as the prime ideals in the algebra), whereas the elements of the permutations representing an abstract group are taken as elements of the group itself; and the existence of prime ideals, in terms of which the representation is constructed, can apparently be established in general only by an appeal to the Zermelo hypothesis.*
>
> [**Sto36**, Introduction]

Anneaux de Boole. • Le nom rend hommage au précurseur de la logique moderne, qui identifia la structure algébrique sous-jacente au calcul propositionnel. Son traité [**Boole**] introduit un symbolisme en + et · remarquablement moderne, et les termes *distributif* et *commutatif* pour les identités en jeu. • Vers 1900 on a beaucoup axiomatisé les structures de type Boole. Huntington y revint tout au long de sa carrière ; [Hun33] (deux corrigenda) contient des références historiques et attribue à Sheffer la paternité de l'expression *Boolean algebra.* (On trouve ces mots chez Peirce [Pei85], mais pour désigner l'œuvre de Boole en général.)

Dualité de Stone. • Annonce [Sto34, Theorems IV.1–IV.3], démonstration [**Sto36**]. La différence de profondeur avec les derniers travaux de Huntington, pourtant contemporains, est saisissante. • Dès 1937, Mostowski combinait théorie descriptive et algèbre de Boole pour établir des résultats de logique [Mos37] ; v. § 17, notes conclusives.

Théorie des treillis. De mode en 1930–1940, notamment avec [Birkhoff]. Elle a perdu ses visées totalisantes, et avec le recul, semble une survivance tardive de l'« école axiomatique américaine » plutôt qu'une révolution.

[Sikorski] : Roman Sikorski. *Boolean algebras.* 3^{e} éd. T. 25. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. New York : Springer-Verlag, 1969. x+237

[Givant-Halmos] : Steven Givant et Paul Halmos. *Introduction to Boolean algebras.* Undergraduate Texts in Mathematics. New York : Springer, 2009. xiv+574

[Koppelberg] : Sabine Koppelberg. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1.* Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet. Amsterdam : North-Holland, 1989. xx+312

[**Sto36**] : Marshall Stone. « The theory of representations for Boolean algebras ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 40.1 (1936), p. 37-111

[**Boole**] : George Boole. *The Mathematical analysis of logic, Being an essay towards a calculus of deductive reasoning.* Cambridge : Macmillan, Barclay & Macmillan, 1847. 82 p.

[Hun33] : Edward Huntington. « New sets of independent postulates for the algebra of logic, with special reference to Whitehead and Russell's *Principia mathematica* ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 35.1 (1933), p. 274-304

[Pei85] : Charles Peirce. « On the Algebra of Logic : A Contribution to the Philosophy of Notation ». In : *Amer. J. Math.* 7.2 (1885), p. 180-202

[Mos37] : Andrzej Mostowski. « Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik ». In : *Fundam. Math.* 29 (1937), p. 34-53

[Birkhoff] : Garrett Birkhoff. *Lattice Theory.* New York : American Mathematical Society, 1940, p. v+155

[Bil01] n'est pas à charge.

Misc. • Anneaux de Boole héréditairement atomiques (ex. 5.4) : [MT39, Satz 3.12] (« *erblich atomar* »). L'école américaine a dit plus tard « *superatomic* ». • Détermination de card Spec $P(X)$ (ex. 5.5) : [Pos37, Theorem II], dans le langage du *compactifié de Stone-Čech* (compléments § C). Existence de grandes familles indépendantes dans $P(X)$: [FK34, 4, Lemme III] (pour X dénombrable et dans un cadre très analytique), cas général Hausdorff [Hau36]. Pour d'autres preuves [Ges11]. • Lemme d'extension (ex. 5.8) : [Sik48a]. • Ex. 5.10 : [Sie20b]. Ce théorème de Sierpiński mérite de nombreuses démonstrations : v. [Das21] et sa bibliographie.

- **Anneaux de Boole**

Axiomatisations alternatives. La description par anneaux est la plus naturelle en algèbre. Mais la *barre de Sheffer* commune en informatique [She13] permet de coder toute la structure en jeu par une seule opération binaire.

Recours au choix. Le théorème de Krull restreint aux anneaux de Boole est moins fort que l'énoncé général. V. § 23, notes conclusives, *Équivalents du choix.*

Anneaux de Boole complets. Un anneau de Boole est *complet* (ex. 5.7) si toute partie possède une borne supérieure. • Il existe un anneau de Boole complet de cardinal κ ssi $|\kappa|^{|\aleph_0|} = \kappa$ [Pie58]. • Généralisation difficile de l'ex. 5.5 : tout anneau de Boole infini complet $\mathbb{A}$ possède une famille booléennement indépendante de même cardinal que $\mathbb{A}$ [BF82], i.e. un sous-anneau libre de cardinal maximal.

- **Variations sur les anneaux de Boole.** Les anneaux de Boole représentent la logique propositionnelle, finitaire, binaire, classique. On peut varier ces attributs.

  – Pour décrire la logique élémentaire, i.e. avec quantification, il faut introduire des opérateurs spécifiques. La *logique algébrique* (compléments § F) propose des modélisations par *anneaux polyadiques* ou *anneaux cylindriques.* La théorie générale

[Bil01] : Štěpánka Bilová. « Lattice theory—its birth and life ». In : *Mathematics throughout the ages.* T. 17. Dějiny Matematiky. Praha : Prometheus, 2001, p. 250-257
[MT39] : Andrzej Mostowski et Alfred Tarski. « Boolesche Ringe mit geordneter Basis ». In : *Fundam. Math.* 32 (1939), p. 69-86
[Pos37] : Bedřich Pospíšil. « Remark on bicompact spaces ». In : *Ann. of Math. (2)* 38.4 (1937), p. 845-846
[FK34] : Grigoriĭ Fichtenholz et Leonid Kantorovitch. « Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées ». In : *Stud. Math.* 5 (1934), p. 69-98
[Hau36] : Felix Hausdorff. « Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch ». In : *Stud. Math.* 6 (1936), p. 18-19
[Ges11] : Stefan Geschke. « Almost disjoint and independent families ». In : *Aspects of descriptive set theory.* Sous la dir. d'Hiroshi Fujita. T. 1790. RIMS Kôkyûroku. Kyoto : Kyoto University, 2011, p. 1-10
[Sik48a] : Roman Sikorski. « A theorem on extension of homomorphisms ». In : *Ann. Soc. Polon. Math.* 21 (1948), 332-335 (1949)
[Sie20b] : Wacław Sierpiński. « Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi ». In : *Fundam. Math.* 1 (1920), p. 11-16
[Das21] : Frederick Dashiell. « Countable metric spaces without isolated points ». In : *Amer. Math. Monthly* 128.3 (2021), p. 265-267
[She13] : Henry Sheffer. « A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 14.4 (1913), p. 481-488
[Pie58] : Richard Pierce. « A note on complete Boolean algebras ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958), p. 892-896
[BF82] : Bohuslav Balcar et František Franěk. « Independent families in complete Boolean algebras ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 274.2 (1982), p. 607-618

des anneaux de Boole avec opérateurs est développée dans [JT51].

- Pour figurer une logique infinitaire, disons à opérateurs dénombrables, on peut passer aux *anneaux de Borel* (v. infra).
- Les logiques non binaires ont plus de valeurs de vérité que $\{0, 1\}$. Noter que les anneaux de Boole non triviaux aussi ; les *modèles booléens* (v. § 7.4), qui y prennent leurs valeurs, sont un outil pertinent. Au-delà des anneaux de Boole, les *algèbres de Post* [Ros42a] semblent sorties de mode au profit des *MV-algèbres* [Cha58]. Ces structures sont absentes du cours.
- Hors du cadre classique, la logique intuitionniste emploie des *treillis de Heyting*, qui ne sont pas des anneaux ; la logique modale emploie des *anneaux de Boole modaux* (compléments § D). Les seconds se rattachent à la théorie avec opérateurs de [JT51].

Voir § 7 pour ces « autres logiques ».

• **Anneaux de Borel.** Un *anneau de Borel* (ou *σ-algèbre* ; à l'origine *algèbre de Boole σ-complète*) est un anneau de Boole muni de sommes (et produits) dénombrables se comportant bien. Noter que $P(X)$ est de Borel. Un *idéal de Borel* est un idéal clos sous somme dénombrable.

Théorème ([Loo47], indépendamment [Sik48c])**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Borel. Alors $\mathbb{A}$ est isomorphe en tant que tel à un sous-quotient d'un $P(X)$, i.e. quotient d'un sous-anneau de Borel de $P(X)$ par un idéal de Borel.

• **Dualité spectrale et logique**

Dualité de Gelfand. La dualité spectrale s'est propagée grâce à Gelfand.

Théorème (Gelfand-Naïmark « commutatif » ; [GN43, Lemma 1])**.** Il y a correspondance entre C^*-algèbres commutatives et espaces topologiques compacts. Plus précisément, si $\mathbb{G}$ est une C^*-algèbre commutative, alors il existe un tel espace tel que $\mathbb{G} \simeq C^0(\mathbb{G}, \mathbb{C})$ [C^*-**Alg**].

• Ce théorème généralise celui de Stone, les anneaux de Boole étant une forme dégénérée de « C^*-algèbres sur $\mathbb{F}_2$ » (le « C » de C^* ne fait pas référence au corps complexe $\mathbb{C}$). • La logique binaire apparaît comme un cas dégénéré d'analyse fonctionnelle ; la *logique continue* (§ 7), aux valeurs de vérité dans $[0, 1]$, semble à peine plus générale.

Une « logique non commutative » ? • En effet le théorème « commutatif » n'est qu'un pas vers le théorème de Gelfand-Naïmark [GN43, Theorem 1] : toute C^*-algèbre se représente comme algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. Ceci laisse rêver à une « logique non commutative » à venir. • Ne pas confondre cette branche encore inexistante avec la *théorie de la démonstration non commutative*. Cette dernière traite des déductions « à piles d'hypothèses », où l'on ne peut pas employer les prémisses dans un ordre arbitraire, par opposition à § 9. • Tout ceci reste spéculatif : en logique usuelle les valeurs de vérité forment un treillis ($\{0, 1\}$, $[0, 1]$, anneau de

[JT51] : Bjarni Jónsson et Alfred Tarski. « Boolean algebras with operators. I ». In : *Amer. J. Math.* 73 (1951), p. 891-939
[Ros42a] : Paul Rosenbloom. « Post algebras I. Postulates and general theory ». In : *Amer. J. Math.* 64 (1942), p. 167-188
[Cha58] : Chen-Chung Chang. « Algebraic analysis of many valued logics ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 88 (1958), p. 467-490
[Loo47] : Lynn Loomis. « On the representation of σ-complete Boolean algebras ». In : *Bull. Amer. Math Soc.* 53 (1947), p. 757-760
[Sik48c] : Roman Sikorski. « On the representation of Boolean algebras as fields of sets ». In : *Fund. Math.* 35 (1948), p. 247-258
[GN43] : Israel Gelfand et Mark Naïmark. « On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space ». In : *Mat. Sb., Nov. Ser.* 12 (1943), p. 197-213

Boole). Mais d'après [She51b, Theorem 1], une C^*-algèbre n'encode naturellement un treillis sur les éléments $*$-symétriques que dans le cas commutatif. Il faudrait donc s'affranchir des treillis pour cette hypothétique « logique non commutative ».

§ sé1. Sujet d'étude 1 : ordinaux et espaces clairsemés

Ce sujet d'étude présente la dérivation de Cantor-Bendixson et deux premières applications classiques : la classification des ordinaux à isomorphisme topologique près, et la classification des espaces topologiques dénombrables localement compacts. On établit également un théorème sur les ordres, et un autre sur les espaces profinis à anneau dénombrable de ferverts. Enfin on fait le lien avec les anneaux de Boole.

Prérequis : compactifié d'Alexandroff ; §§ 1–5 ; forme normale de Cantor (exercice 3.4).

---

1. Dérivation de Cantor-Bendixson

Cette partie est à la base du sujet d'étude.

Soit E un espace topologique. Son *dérivé* est le sous-espace fermé obtenu en enlevant les points isolés de E (qui sont des singletons ouverts) :

$$E' = E\backslash\{\text{points isolés de } E\} = \left\{x \in E : x \in \overline{E\backslash\{x\}}\right\}.$$

Par récurrence ordinale on pose $E^{(\varnothing)} = E$; $E^{(\alpha+1)} = (E^{(\alpha)})'$; et pour α limite, $E^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} E^{(\beta)}$.

Théorème A (Cantor-Bendixson)**.** Tout espace topologique E s'écrit de manière unique comme réunion disjointe $E = O \sqcup F$, où $O \subseteq E$ est un ouvert vérifiant $O^{(\alpha)} = \varnothing$, et $F \subseteq E$ un fermé vérifiant $F' = F$.

1.1. **Décomposition de Cantor-Bendixson**

(a) Montrer qu'il existe un ordinal $\alpha < (\operatorname{card} E)^+$ (i.e. vérifiant $\operatorname{card} \alpha \leqslant \operatorname{card} E$) tel que $E^{(\alpha+1)} = E^{(\alpha)}$. On pourra sinon choisir $x_\alpha \in E^{(\alpha)}\backslash E^{(\alpha+1)}$.

(b) En déduire le théorème A.

(c) Montrer que si la topologie de E est engendrée par une famille *dénombrable* d'ouverts, alors $\operatorname{card} O \leqslant \aleph_0$. (Cas particulier non utilisé dans la suite du sujet.)

1.2. **Rang de Cantor-Bendixson.** On définit deux *rangs*, pour les points et les espaces ; pas de confusion possible.

[She51b] : Seymour Sherman. « Order in operator algebras ». In : *Am. J. Math.* 73 (1951), p. 227-232

— *Rang d'isolation* (relatif) de $x \in E$. S'il existe α tel que $x \notin E^{(\alpha)}$, on pose $\mathrm{rg}_E(x) = \sup\{\alpha : x \in E^{(\alpha)}\}$; sinon, on pose $\mathrm{rg}_E(x) = +\infty$.
— *Rang de discrétisation* de E. On pose $\mathrm{rg}\, E = \sup\{\mathrm{rg}_E(x) : x \in E\}$, encore ordinal ou $+\infty$.

(a) Montrer que la borne supérieure donnant $\mathrm{rg}_E(x)$ est atteinte, mais que cela peut être faux pour $\mathrm{rg}\, E$.

(b) Montrer les inégalités $\mathrm{rg}\, E + 1 \geqslant \min\left\{\alpha < (\mathrm{card}\, E)^+ : E^{(\alpha)} = \varnothing\right\} \geqslant \mathrm{rg}\, E$.

(c) Montrer que si $U \subseteq E$ est ouvert et $x \in U$, alors $\mathrm{rg}_E(x) = \mathrm{rg}_U(x)$. Montrer que $\mathrm{rg}_E\, x = \min\{\mathrm{rg}\, U : U$ ouvert de E contenant $x\}$.

2. Ordinaux à isomorphisme topologique près

Il faut avoir traité la première partie du sujet.

Pour α ordinal, soit E_α l'espace topologique associé à l'ordre $(\alpha, <)$, i.e. dont les ouverts sont engendrés par les intervalles $\alpha_{>x} = \{y \in \alpha : y > x\}$ et $\alpha_{<x} = \{y \in \alpha : y < x\}$. On établira la classification suivante.

Théorème B. Pour α, β deux ordinaux, $E_\alpha \simeq E_\beta$ **[Top]** ssi α ont même degré, coefficient dominant, et valuation (définis en 2.2).

2.1. **Ordinaux dans la topologie de l'ordre.** Montrer les points suivants.

(a) E_α est séparé ;

(b) E_α est compact ssi α est (vide ou) successeur, i.e. possède un plus grand élément
(pour la réciproque, partir d'un recouvrement ouvert de $\alpha = \beta + 1$ et considérer $\{\gamma \leqslant \beta : [\gamma, \beta]$ est inclus dans un sous-recouvrement fini$\}$) ;

(c) E_α est toujours localement compact ;

(d) E_α peut être compact sans être séquentiellement compact (songer à ω_1).

2.2. **Dérivation dans E_α.** On suppose $\alpha > 0$ et on l'écrit sous forme normale de Cantor de base ω :

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot k_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot k_n,$$

avec $\alpha_0 > \ldots > \alpha_n$ et les $k_i \in \omega\backslash\{0\}$, i.e. des entiers non nuls. On pose $d(\alpha) = \alpha_0$, $c(\alpha) = k_0$, et $v(\alpha) = \alpha_n$, respectivement appelés *degré*, *coefficient dominant*, et *valuation*.

(a) Montrer que pour tout ordinal γ, on a $E_\alpha^{(\gamma)} = \{\beta < \alpha : v(\beta) \geqslant \gamma\}$.

(*) (b) En distinguant les cas en jeu, déduire que dans les termes et notations de la question 1.2 :

— le rang de discrétisation de E_α est $d(\alpha)$;
— le plus petit ordinal tel que E_α soit compact (« rang de compactification ») est $v(\alpha)$;

— le nombre de points réalisant $\operatorname{rg} E_\alpha$, i.e. de rang maximal, est $c(\alpha)$ ou $c(\alpha) - 1$.

2.3. **Séries d'ordinaux.** Soient γ_n des ordinaux, pour $n \in \mathbb{N}$. On pose $\sigma_n = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$, puis $\Sigma = \sup\{\sigma_n : n \in \omega\}$, qui est encore un ordinal, appelé somme de la série et noté $\sum_\omega \gamma_n$.

Montrer que *si aucun γ_n n'est limite*, alors $E_\Sigma \simeq \coprod_\mathbb{N} E_{\gamma_n}$ [**Top**]. On pourra découper grâce à l'observation suivante :

> si les O_i sont des ouverts partitionnant un espace $(E ; \mathcal{T})$, alors $E \simeq \coprod_I O_i$ [**Top**], i.e. E est le « coproduit topologique » (réunion disjointe) des sous-espaces O_i.

2.4. **Application aux isomorphismes topologiques**

(a) Soit α un ordinal tel que $d(\alpha) > v(\alpha)$. Montrer que $E_\alpha \simeq E_{\omega^{d(\alpha)} \cdot c(\alpha) + \omega^{v(\alpha)}}$ [**Top**]. On commencera par le cas $v(\alpha) = 0$, en s'inspirant des séries d'ordinaux.

(b) En déduire le théorème B.

2.5. **Le paradoxe ω^ω.** Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

> Soit $\alpha = \omega^\omega$. Alors :
>
> $$\alpha' = \left\{ \omega^{a_0} \cdot k_0 + \cdots + \omega^{a_n} \cdot k_n : \begin{array}{l} \omega > a_0 > \ldots > a_n > 0, \\ k_0, \ldots, k_n \in \omega \backslash \{0\} \end{array} \right\},$$
>
> donc $(\alpha', <)$ est isomorphe à l'ordinal ω^ω. Dans la topologie de l'ordre, on a donc $\alpha' \simeq \omega^\omega$, i.e. $\alpha \simeq \alpha'$ en tant qu'espaces topologiques. Donc α est sans point isolé ; étant localement compact il est de cardinal au moins continu.

3. Espaces dénombrables localement compacts

Cette partie requiert les deux premières.

On montre un résultat d'identification.

Théorème C. Soit E un espace topologique dénombrable localement compact. Alors il existe un ordinal dénombrable α tel que $E \simeq E_\alpha$ [**Top**].

Par soin de brièveté nous parlerons d'espaces dlc et d'espaces ordinaux, et montrerons que *tout espace dlc est ordinal.* Il faut une notion topologique intermédiaire.

3.1. **Espaces clairsemés.** Un espace topologique E est *clairsemé* s'il existe un ordinal α tel que $E^{(\alpha)} = \varnothing$. Autre formulation : E est clairsemé ssi tout $x \in E$ possède un rang $< \infty$.

(a) Montrer que E est clairsemé ssi toute partie non vide contient un point isolé (pour la topologie de sous-espace) ssi tout *fermé* non vide contient un point isolé. En déduire que tout ordinal même indénombrable est clairsemé.

(b) Montrer que si E est clairsemé, alors il est totalement discontinu (i.e. ses composantes connexes sont des singletons).

(c) Cette question strictement topologique peut être admise. Montrer que si E est localement compact et totalement discontinu, alors tout point possède un voisinage ouvert-compact.

(d) Montrer que si E est localement compact non clairsemé, alors $\operatorname{card} E \geqslant |2|^{|\aleph_0|}$. On pourra injecter l'espace de Cantor dans E.

(e) En déduire que si E est un espace dlc, alors il est réunion au plus dénombrable d'ouverts compacts disjoints.

3.2. **Classification des espaces dénombrables localement compacts.** D'après 3.1.d, les espaces dlc sont clairsemés. On montre qu'ils sont ordinaux par récurrence sur $\operatorname{rg} E = \sup_E \operatorname{rg}(x)$. On fixe donc un espace dlc E, supposant le résultat connu pour tous les espaces de rang moindre.

(a) Montrer que si E est compact, alors il possède un nombre fini > 0 de points de rang maximal. Montrer qu'avec la seule compacité *locale*, ce nombre peut être 0, fini > 0, ou infini.

(*) (b) On suppose E sans point de rang maximal. Montrer que E est ordinal. On pourra le paver par une famille dénombrable d'ouverts-compacts (3.1.e), et procéder par récurrence grâce à une série d'ordinaux (2.3).

(c) On suppose E compact et ayant un unique point x de rang maximal. Montrer que E est ordinal. On pourra former $\check{E} = E \setminus \{x\}$ et comparer son compactifié d'Alexandroff avec E.

(d) Déduire le théorème C.

4. Deux applications

Cette partie requiert la première et les énoncés des théorèmes B et C.

On établit deux théorèmes supplémentaires, le second reposant sur le premier. Pour $\mathbb{O}$ un ordre total, soit $P_{\downarrow}(\mathbb{O})$ l'ensemble, ordonné par inclusion, de ses parties closes inférieurement (§ 3.1).

Théorème D. Soit $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ un ordre total. Si $\operatorname{card} P_{\downarrow}(\mathbb{O}) > \operatorname{card} O$, alors $(\mathbb{Q}; \leqslant) \hookrightarrow \mathbb{O}$ [**Ord**].

On note encore $\mathcal{C}$ l'espace de Cantor.

Théorème E. Soit $\mathcal{E} = (E\,; \mathcal{T})$ un espace profini tel que $\operatorname{Ferv}(\mathcal{T})$ soit dénombrable. Alors soit $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$ [**Top**], soit il existe un ordinal dénombrable δ et un entier c tels que $\mathcal{E} \simeq E_{\omega^\delta \cdot c+1}$ [**Top**].

4.1. **Ordres quotients dérivés, et application au cas rationnel.** Partant d'un espace topologique E, au lieu de voir son dérivé comme sous-ensemble muni de la topologie induite, i.e. comme sous-espace, on peut y penser comme à une injection $\iota\colon D(E) \hookrightarrow E$ [**Top**]. L'intersection ensembliste prend en charge les « compositions infinies ». Nous allons renverser cette interprétation : au lieu d'injections naturelles on aura des surjections naturelles ; au lieu d'inclusions, des quotients.

Soit $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ un ordre total.

(a) Un *saut* d'un ordre est une paire $x < y$ sans élément intermédiaire. Montrer que si $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ est un ordre total sans saut ayant au moins deux éléments, alors $(\mathbb{Q}; \leqslant) \hookrightarrow \mathbb{O}$ [**Ord**].

(b) Sur O soit R la plus petite relation d'équivalence contenant la relation de saut (prédécesseur immédiat–successeur immédiat).

Vérifier que xRy ssi $]x, y[$ est fini ; vérifier que les classes d'équivalence sont convexes. En déduire une structure d'ordre compatible sur le quotient, i.e. $\pi\colon \mathbb{O} \twoheadrightarrow (O/R; \leqslant)$ [**Ord**].

(c) On définit des relations d'équivalence convexes sur O comme suit :

— $xR_\varnothing y$:si $x = y$;

— $xR_{\alpha+1}y$:si $\pi_\alpha(x)R\pi_\alpha(y)$ dans O/R_α, où $\pi_\alpha\colon \mathbb{O} \to O/R_\alpha$;

— pour α limite, $xR_\alpha y$:si $(\exists\beta)(\beta < \alpha \wedge xR_\beta y)$.

Montrer que cette construction stationne en un $\alpha < (\operatorname{card} O)^+$, et qu'alors $\Delta^\alpha(\mathbb{O}) = O/R_\alpha$ est muni d'un ordre sans sauts (éventuellement singleton).

(d) On note E_α l'ensemble des parties closes inférieurement qui ne sont *pas* closes sous R_α. Montrer que pour tout ordinal α, on a $\operatorname{card} E_\alpha \leqslant \operatorname{card} O$. (*)

On pourra considérer les fibres de la fonction qui à $S \in E_{\beta+1} \backslash E_\beta$ associe une paire (s, t) équivalente modulo $R_{\beta+1}$ avec $s \in S$ et $t \notin S$.

(e) En déduire le théorème D.

4.2. **Espaces topologiques ordonnés, et application au cas profini**

— Si $\mathbb{O}$ est un ordre à plus grand élément, soit $\operatorname{Segm}\mathbb{O}$ l'ensemble de ses « segments », i.e. réunions finies d'intervalles de la forme $]a, b]$ avec $a \in O \cup \{-\infty\}$ et $b \in O$. C'est un anneau de Boole.

— Un espace topologique $(E; \mathcal{T})$ est *ordonné* s'il existe un ordre $\leqslant$ sur E dont $\mathcal{T}$ soit la topologie d'ordre (ex. 2.8). On fixe un tel espace.

(a) Déterminer les *intervalles* ferverts de $(E, \mathcal{T}, \leqslant)$ en termes de points de saut (4.1.a).

(b) Montrer que $(E; \mathcal{T})$ est compact ssi $(E, \leqslant)$ est complet au sens de Dedekind-Hölder (toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure) avec extrémités. (S'inspirer de 2.1.b.) En déduire que $(E; \mathcal{T})$ est profini ssi $(E, \leqslant)$ est complet à extrémités, et à prédécesseurs denses.

(c) On suppose $(E, \mathcal{T}, \leqslant)$ ordonné profini. Montrer $\operatorname{Ferv} E = \operatorname{Segm}(E^- \cup \{\max E\})$, où E^- est le sous-ordre formé des prédécesseurs dans E. Illustrer cela dans le cas d'un ordinal successeur.

(d) Si $(E, \mathcal{T}, \leqslant)$ est un espace ordonné et $X \subseteq E$ un sous-ensemble, alors la topologie $\mathcal{T}_{|X}$ de sous-espace sur X et la topologie $\mathcal{T}(\leqslant_{|X})$ du sous-ordre $(X, \leqslant_{|X})$ ne coïncident pas nécessairement. Montrer que c'est pourtant le cas si X est un compact de $\mathcal{T}$. En déduire que si E est profini à famille dénombrable d'ouverts générateurs, alors E est ordonné.

(e) Montrer le théorème E (en invoquant le théorème D).

5. Traduction algébrique

Cette partie conclut le sujet ; elle combine une technique type Cantor-Bendixson, l'étude des espaces ordinaux, clairsemés (3.1), et ordonnés (4.2) dans le cadre de la dualité de Stone.

Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole.

5.1. **Anneaux de Boole à spectre clairsemé.** Un *atome* de $\mathbb{A}$ est un élément $a \neq 0$ vérifiant : $(\forall x)(ax = 0 \vee ax = a)$.

(a) Mettre en correspondance atomes de $\mathbb{A}$ et points isolés de $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$.

(b) Mettre en correspondance idéaux de $\mathbb{A}$ et fermés propres de $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$.

(c) On note $R(\mathbb{A})$ l'idéal engendré par les atomes de $\mathbb{A}$, puis on construit la suite d'idéaux : $I_\varnothing = (0)$; $I_{\alpha+1} = \pi^{-1}(R(\mathbb{A}/I_\alpha))$; aux limites $I_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$. Montrer que cette suite stationne en un ordinal α ; qu'en outre si $I_\alpha = \mathbb{A}$, alors α est de la forme $\alpha = \beta + 1$ et que $\mathbb{A}/I_\beta$ est fini.

(d) Montrer les équivalences : $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$ est clairsemé ssi tout anneau quotient $\mathbb{A}/I$ possède un atome ss'il existe un ordinal α tel que $I_\alpha = \mathbb{A}$.

5.2. **Anneaux de Boole à base ordonnée.** On rappelle que dans un anneau de Boole la relation $ab = a$ définit un ordre partiel $a \leqslant b$. Une *base ordonnée* de $\mathbb{A}$ est une partie totalement ordonnée $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{A}$ évitant 0, contenant 1, et telle que $\langle \mathcal{B} \rangle_{\text{ann}} = \mathbb{A}$. On fait noter que $\mathcal{B}$ possède toujours le plus grand élément 1.
On suppose qu'il existe une base ordonnée $\mathcal{B}$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ une base $\mathbb{F}_2$-linéaire.

(b) Montrer que $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$ un espace ordonné par $\mathfrak{p} \preceq \mathfrak{q}$:si $\mathfrak{p} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{q} \cap \mathcal{B}$.

(c) Montrer que $(\operatorname{Spec} \mathbb{A} \cup \{\mathbb{A}\}, \preceq)$ et $(P_\downarrow(\mathcal{B}), \leqslant)$ sont des ordres isomorphes (comme dans le théorème D, $P_\downarrow$ désigne l'ensemble des parties closes inférieurement).

(d) En déduire les équivalences : $\mathbb{A}$ possède une base ordonnée ssi $\operatorname{Spec} \mathbb{A}$ est une topologie d'ordre ssi $\mathbb{A} = \operatorname{Segm} \mathbb{O}$ pour un ordre à plus grand élément.

5.3. **Le type $\mathbb{C}_0$.** Soit $\mathbb{C}_0$ l'anneau de Boole librement engendré par $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Donner plusieurs preuves de ce que $\mathbb{C}_0$ possède une base ordonnée. En déduire que tout anneau de Boole dénombrable possède une base ordonnée. Montrer que c'est faux sans dénombrabilité.

(*) (b) Soit $\mathcal{A} = 2^{\omega}$ l'ensemble des suites finies de 0 et de 1. On l'équipe de l'ordre *dyadique*, induit par sa réalisation dans $[0, 1]$ via $\frac{1}{2} + \sum_n \frac{(-1)^{1+s(n)}}{2^n}$.
Pour $s \in \mathcal{A}$, soit $f_s = \prod_{j<\ell(s)} (\neg)^{s(j)} e_j$, où $\neg^0 x = x$ et $\neg^1 x = (1 + x)$. Soit aussi :

$$b_s = \left(\sum_{i:s(i)=1} f_{s_{|i}} e_i \right) + f_s e_{\ell(s)}.$$

Montrer que $\{b_s : s \in \mathcal{A}\} \cup \{1\}$ (dans l'ordre dyadique) forme une base ordonnée de $\mathbb{C}_0$. D'où vient la construction ?

(c) On suppose que $\mathbb{A}$ possède une base $\mathcal{B}$ ordonnée. Montrer les implications :

tout sous-anneau de $\mathbb{A}$ possède un atome $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ ne contient pas de copie de $(\mathbb{Q}; \leqslant)$ $\Rightarrow$ tout facteur de $\mathbb{A}$ possède un atome.

Pour (ii)⇒(iii), prendre un saut $\gamma < \delta$ et penser à $\gamma + \delta$. On admettra que la troisième condition implique la première (ex. 5.4).

5.4. **Stretto**

(a) Montrer que $\mathbb{A}$ possède une base ordonnée *par un ordinal* ssi Spec $\mathbb{A}$ est un espace ordinal $E_{\alpha+1}$.

(b) On suppose $\mathbb{A}$ dénombrable. Sans invoquer le théorème E, montrer l'alternative : soit $\mathbb{C}_0 \hookrightarrow \mathbb{A}$, soit $\mathbb{A}$ possède une base ordonnée par un ordinal (on peut employer les théorèmes B et D). En déduire le théorème E.

(c) Montrer que c'est faux sans dénombrabilité, i.e. : donner un anneau de Boole à spectre clairsemé, mais sans base ordonnée, et donner un anneau de Boole spectre clairsemé *et* à base ordonnée, mais sans base ordonnée par un ordinal. (Indication : $\omega_1 + 1 + \omega_1^{\mathrm{op}}$.)

Notes conclusives

En deuxième lecture on recommande [FM88]. On rappelle par ailleurs l'intérêt de [Rosenstein] et [Koppelberg].

- **Repères historiques**

Le but de cette Note est de démontrer sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo et sans l'aide des nombres transfinis *le théorème suivant sur la structure des ensembles de points dans l'espace euclidien à m dimensions :*

Théorème 1. *Tout ensemble de points* P (situé dans l'espace euclidien à m dimension) *se décompose en une somme de deux ensembles*

(1) $$P = C + D,$$

[FM88] : Jörg Flum et Juan Carlos Martínez. « On topological spaces equivalent to ordinals ». In : *J. Symbolic Logic* 53.3 (1988), p. 785-795
[Rosenstein] : Joseph Rosenstein. *Linear orderings.* T. 98. Pure and Applied Mathematics. New York-London : Academic Press, 1982, p. xvii+487
[Koppelberg] : Sabine Koppelberg. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1.* Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet. Amsterdam : North-Holland, 1989. xx+312

dont l'ensemble C (s'il n'est pas vide) est clairsemé et effectivement énumérable, et l'ensemble D (s'il n'est pas vide) est dense en soi. [Sie20a]

Ce sont les toutes premières lignes publiées dans *Fundamenta Mathematicae*, revue qui contribua grandement à la floraison de l'École polonaise de mathématiques, à la poursuite de la théorie descriptive des ensembles, puis à l'émergence de la logique moderne. Éditeur-fondateur, Sierpiński fut un artisan essentiel des deux premiers aspects.

Dérivation de Cantor-Bendixson. Elle apparaît chez Cantor [Can72, p. 129] (*abgeleitete Punktmenge*; l'*Ableitung* est également la dérivation du calcul différentiel), reprise dans [Can82] avec mention de travaux d'Ascoli et Dini. Le concept mériterait une étude historique. Son nom actuel paraît surtout dû à ses liens avec le théorème de Cantor-Bendixson. Pour l'histoire de ce dernier, § 4, notes conclusives.

Ordinaux à isomorphisme topologique près. Leur classification trouve ses sources chez Cantor. • Cas compact [Bak72] mais pourrait être plus ancien ; par exemple [MP60, Theorem 4.2] voire Hausdorff. Notamment on devine l'argument de réorganisation topologique dans [MS20] (cas compact dénombrable) ; il faudrait vérifier chez Hausdorff. • Cas général [FM88, Remarks 2.5.3)].

Ordres. Le lemme « tout ordre non trivial sans saut contient une copie des rationnels » (4.1.a) est de Cantor. • Le théorème D, ainsi que l'idée d'une dérivation de Cantor-Bendixson produisant des quotients et non des sous-objets, sont certainement de Hausdorff ; je ne les ai pas localisés. On parle de « condensation » pour ces opérations.

Anneaux de Boole à base ordonnée. Origine [MT39]. Un jalon intéressant est [MP60] ; le contre-exemple 5.4.c est leur Lemme 3.4. [Koppelberg] ne travaille pas en ces termes, mais préfère les anneaux de segments.

- **Sur la dérivation.** Remarque : la dérivation de Cantor est bien une dérivation au sens de Leibniz, i.e. si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques non vides, alors :

$$(E_1 \times E_2)' = E_1' \times E_2 \cup E_1 \times E_2'.$$

- **Classification des espaces dénombrables localement compacts.** Elle se reformule ainsi.

Théorème. Soit E un espace topologique. Sont équivalents :

(i) $E \simeq E_\alpha$ **[Top]** pour un ordinal dénombrable ;

(ii) E est dénombrable et localement compact ;

(iii) E est compact dénombrable, ou cosingleton dans un compact dénombrable.

Démonstration. Seule manque (iii)⇒(i). Si E est compact dénombrable, on a fini. Sinon soit $\check{E} = E \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff obtenu en ajoutant le point à

[Sie20a] : Wacław SIERPIŃSKI. « Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points ». In : *Fundam. Math.* 1 (1920), p. 1-6

[Can72] : Georg CANTOR. « Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen ». In : *Math. Ann.* 5 (1872), p. 123-132

[Can82] : Georg CANTOR. « Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4 ». In : *Math. Ann.* 21 (1882), p. 51-59

[Bak72] : John Warren BAKER. « Compact spaces homeomorphic to a ray of ordinals ». In : *Fund. Math.* 76.1 (1972), p. 19-27

[MP60] : Richard MAYER et Richard PIERCE. « Boolean algebras with ordered bases ». In : *Pacific J. Math.* 10 (1960), p. 925-942

[MS20] : Stefan MAZURKIEWICZ et Wacław SIERPIŃSKI. « Contribution à la topologie des ensembles dénombrables ». In : *Fundam. Math.* 1 (1920), p. 17-27

[MT39] : Andrzej MOSTOWSKI et Alfred TARSKI. « Boolesche Ringe mit geordneter Basis ». In : *Fundam. Math.* 32 (1939), p. 69-86

l'infini ; par le théorème C, $\check{E} \simeq E_{\alpha+1}$ pour un ordinal α. Donc $E = E_{\alpha+1} \setminus \{\beta\}$ pour un $\beta \leqslant \alpha$; si $\beta = \alpha$ alors $E = E_\alpha$ et l'on a fini. On suppose donc $E = [0, \beta) \sqcup (\beta, \alpha]$. Or écrivons $\alpha = \beta + 1 + \gamma$ pour un ordinal $\gamma \geqslant 0$. Alors $E = E_\beta \sqcup [\beta + 1, \beta + 1 + \gamma] \simeq E_\beta \amalg E_{\gamma+1} \simeq E_{\gamma+1+\beta}$ **[Top]**. □

Le cas compact est dans [MS20, Théorème 1] ; cas général dans [FM88, Theorem 2.3]. Noter aussi l'extension au cas compact non dénombrable (il faut alors une hypothèse locale) par Baker, [Bak72, Theorem 2].

Remarque. On prendra garde aux hypothèses. Soit $E = \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$ muni de la distance suivante : $d((m, n), (k, \ell)) = 2^{-m} + 2^{-k}$ sauf si les points sont égaux, et $d((m, n), \infty) = 2^{-m}$. C'est une distance rendant E complet ; clairement E est clairsemé (c'est aussi une conséquence du théorème de Cantor-Bendixson dans le cas polonais). Pourtant E n'est pas localement compact en ∞.

Cet espace se plonge comme sous-ensemble dans un ordinal dénombrable, mais pas comme segment initial.

- **Classification des parties des espaces dlc.** Ne pas confondre les plongements en segments initiaux d'ordinaux dénombrables, avec les plongements en *sous-ensembles* d'ordinaux dénombrables. Ces derniers aussi peuvent être caractérisés.

Théorème ([KU53, Théorème IV])**.** Soit E un espace topologique. Sont équivalents :

(i) E est topologiquement isomorphe à une partie d'un ordinal dénombrable ;

(ii) E est topologiquement isomorphe à une partie d'un compact dénombrable ;

(iii) E est un espace polonais (v. § 4, notes conclusives) dénombrable ;

(iv) E est dénombrable, métrisable, clairsemé.

Remarque. On prendra garde aux hypothèses.

– Dans sa topologie usuelle, $\mathbb{Q}$ est dénombrable et métrisable mais pas clairsemé.

– Un ensemble non dénombrable muni de la distance discrète est métrisable et clairsemé, mais pas dénombrable.

– Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$; soit l'espace $\mathbb{N} \cup \{\infty_\mathcal{U}\}$, où les entiers sont isolés, et les voisinages de $\infty_\mathcal{U}$ sont les $A \cup \{\infty_\mathcal{U}\}$ exactement pour $A \in \mathcal{U}$. Cet espace est dénombrable et clairsemé, mais pas métrisable (car pas topologiquement dénombrable au voisinage de $\infty_\mathcal{U}$).

Aucun de ces trois espaces ne se plonge dans un ordinal dénombrable.

- On peut poursuivre sans dénombrabilité.

Théorème ([Tel68, Théorème 11] ; indépendamment [AF78])**.** Tout espace métrique clairsemé se plonge dans un ordinal.

- On peut aller encore plus loin et demander des réalisations d'espaces topologiques *ordonnés* dans des espaces ordinaux, chercher à quelle condition une topologie est une topologie d'ordre, etc. Voir [Hil16], aux références historiques très utiles.

[KU53] : Bronisław Knaster et Kazimierz Urbanik. « Sur les espaces complets séparables de dimension 0 ». In : *Fund. Math.* 40 (1953), p. 194-202

[Tel68] : Rastislav Telgársky. « Total paracompactness and paracompact dispersed spaces ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 16 (1968), p. 567-572

[AF78] : Alberto Arosio et Arturo Ferreira. « On nonseparable 0-dimensional metrizable spaces ». In : *Portugal. Math.* 37.3-4 (1978), p. 273-297

[Hil16] : Jacob Hilton. « Combinatorics of countable ordinal topologies ». Thèse de doct. The University of Leeds, 2016. vii+138

- **Ordinaux à isomorphisme borélien près.** Analogue mesure-théorique d'un isomorphisme topologique, un *isomorphisme borélien* est une bijection bi-mesurable. On peut classifier les espaces ordinaux de ce point de vue.

Pour α ordinal soit $\kappa(\alpha)$ le cardinal qui vaut :

– 0 si $\operatorname{card}\alpha$ est dénombrable ou non régulier,
– $\max\{\lambda : (\operatorname{card}\alpha)\cdot\lambda \leqslant \alpha\}$ sinon (produit ordinal).

Théorème ([GJK08])**.** Deux ordinaux α, β sont Borel-isomorphes ss'ils sont équipotents et $\kappa(\alpha) = \kappa(\beta)$.

- **Ordres excluant les rationnels.** Mise en garde avant de consulter la littérature sur la question : un ordre est clairsemé-*en-tant-qu'ordre* s'il ne contient pas de copie de $(\mathbb{Q}; \leqslant)$. Ce n'est *pas* la même chose qu'être clairsemé dans la topologie de l'ordre. En effet $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ lexicographique est un ordre discret (donc topologiquement clairsemé) mais contient une copie de $\mathbb{Q}$. On préférera donc parler d'ordre « $\mathbb{Q}^\perp$ », ou « sans-η_0 », η_0 étant la notation traditionnelle pour $(\mathbb{Q}; \leqslant)$.

Le théorème suivant trouve son origine chez Hausdorff [Hau08, § 11].

Théorème (v. [Rosenstein, Theorem 5.26])**.** Les ordres totaux sans-η_0 forment la plus petite collection contenant l'ordre singleton, et close par réversion (i.e. prise de l'ordre opposé) et sommes indexées par les ordinaux.

- **Anneaux de Boole à base ordonnée.** On peut affiner le type d'ordre des bases dans le cas dénombrable.

Théorème ([Pie73])**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole dénombrable. Alors il existe :

– un ordre $\mathbb{O}$ parmi les suivants : $\{1,\dots,n\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\cup\{+\infty\}$, $\{-\infty\}\cup\mathbb{Q}$, $\{-\infty\}\cup\mathbb{Q}\cup\{+\infty\}$,
– des ordinaux dénombrables δ_x,

tels que $\mathbb{A}$ ait une base ordonnée de type d'ordre $\sum_{x\in\mathbb{O}}\omega^{\delta_x}+1$ (somme ordonnée).

En d'autres termes, il existe une base ordonnée obtenue par somme finie d'ordres chacun de la forme $\omega^{\delta}+1$ ou $\sum_{q\in(\mathbb{Q};\leqslant)}\omega^{\delta_q}+1$.

[GJK08] : Su GAO, Steve JACKSON et Vincent KIEFTENBELD. « A classification of ordinals up to Borel isomorphism ». In : *Fund. Math.* 198.1 (2008), p. 61-76
[Hau08] : Felix HAUSDORFF. « Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen ». In : *Math. Ann.* 65.4 (1908), p. 435-505
[Pie73] : Richard PIERCE. « Bases of countable Boolean algebras ». In : *J. Symbolic Logic* 38 (1973), p. 212-214