# Chapitre II

# Éléments de logique

**Aperçu du chapitre.** On formalise d'abord la vérité relative à une structure algébrique par la notion de *satisfaction* (§ 6), qui permet d'introduire celle de *conséquence sémantique* $\models$. Le cadre est la *logique élémentaire*, où l'on ne quantifie que sur les éléments des structures étudiées ; une brève digression considère d'autres logiques (§ 7), qui n'ont pas son importance. On revient aux notions sémantiques générales avec des propriétés relatives aux *théories* et à leurs *modèles*, comme la *complétude* et la *catégoricité* (§ 8). On modélise ensuite la notion de *déduction* et la *conséquence syntaxique* $\vdash$ (§ 9) ; cette section frôle la théorie de la démonstration. Enfin le *théorème de complétude* de Gödel et surtout celui de *compacité* expriment des phénomènes profonds en logique élémentaire. Le premier (§ 10) concerne l'adéquation entre $\models$ et $\vdash$ en logique élémentaire ; le second (§ 11) affirme le caractère finitaire de $\models$ en logique élémentaire. Par contraste, la *logique d'ordre supérieur* (§ 12) quantifie sur les parties, voire les parties de parties, etc. ; ses propriétés logiques ne sont pas satisfaisantes. Le chapitre s'achève par un sujet d'étude sur la complétude (§ SÉ2). On retiendra du chapitre qu'*en logique élémentaire, le non-standard est inévitable.*

**La logique : outil et objet, mais pas cadre.** La logique n'est pas un cadre, mais un *outil* pour étudier les objets mathématiques. Par une sorte de bidualité méthodologique, les outils deviennent à leur tour objets d'étude. Il faut donc assimiler deux points de vue :

1. la logique comme outil, ou plutôt comme ensemble d'outils. Ceux-ci permettent d'obtenir des théorèmes sur les objets conventionnels. Par exemple on peut démontrer des résultats d'algèbre par la logique ;
2. ces outils comme objets mathématiques. Ceux-ci obéissent à certains phénomènes. Par exemple la logique élémentaire est régie par une loi de compacité, et ceci est un théorème de mathématiques.

En revanche on ne tentera ni de « fonder » les mathématiques ni de « construire » ses objets ; 2500 ans après Euclide il semble un peu tard pour cela. En science, les choses existent avant qu'on commence à en parler.

**Nature des outils.** Pour inspecter une variété différentielle, les géomètres y font circuler des courants détectant les singularités ; localement ou globalement on applique des fonctions à l'objet afin de comprendre ses propriétés. Ainsi procède la logique, mais dans un paysage dénué d'information géométrique les méthodes sont plus naïves. Au lieu de formes différentielles, on applique à la structure étudiée des *formes logiques*, aussi appelées formules logiques, et dont les valeurs ne sont pas nécessairement des nombres. Ceci mène à l'introduction de couplages :

$$\{\text{structures}\} \times \{\text{formules}\} \to \{\text{valeurs de vérité}\}.$$

Une *logique* (au sens abstrait) est un tel couplage, qui permet de discriminer des structures selon leurs propriétés.

**La logique élémentaire, et les autres.** Ce chapitre formalise et décrit la logique la plus utile en mathématiques : la *logique élémentaire* (finitaire, binaire, classique, égalitaire). Elle est plus fine que le niveau purement équationnel : par exemple $(\mathbb{Z}\,;+,\cdot)$ et $(\mathbb{C}\,;+,\cdot)$ vérifient les mêmes équations, mais pas les mêmes formules logiques (évident). En revanche elle est moins fine que l'isomorphisme : par exemple $(\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}};+,\cdot)$ et $(\mathbb{C};+,\cdot)$ vérifient les mêmes formules logiques (« complétude de $\mathrm{ACF}_0$ », § 15.3), alors qu'un argument de cardinalité montre immédiatement l'absence d'isomorphisme. L'intérêt d'un tel choix est double :

1. l'outil « logique élémentaire » est assez fort pour détecter les propriétés algébriques ;
2. l'outil « logique élémentaire » est assez faible pour ne pas dépendre d'un cadre ensembliste.

C'est donc un bon arbitrage méthodologique. Dès § 7 on mentionne d'autres choix ; certains sont de simples curiosités, mais d'autres reviennent dans plusieurs exercices. Pour le corps du texte et la pratique mathématique ordinaire, il suffit de connaître la logique élémentaire. En revanche, la logique mathématique ne s'y limite pas.

# § 6. Couplage fondamental en logique élémentaire

Cette section formalise la vérité. Celle-ci est toujours relative à une structure ; on parle de satisfaction, notée $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. Après les *langages* et les *structures* (§ 6.1) on définit les *termes* et les *paramètres* (§ 6.2) puis les *formules* et la *satisfaction* (§ 6.3) ; ceci permet d'introduire la *conséquence sémantique* (§ 6.4). L'exposé reste en logique monotype, élémentaire, finitaire, binaire, égalitaire, classique ; § 7 présente quelques variantes possibles.

Pas de prérequis.

---

On va modéliser le concept de vérité. Il faut s'assurer que les notions techniques recouvrent avec fidélité l'intuition préalable. Le formalisme est lourd et cela revient à commencer un cours de géométrie différentielle par une leçon entière d'« $\varepsilon$, $\delta$ ». Les définitions syntaxiques n'emploient que les manipulations les plus naïves sur les collections. *Ce serait une grave erreur en première lecture de les implémenter au sein d'une théorie-cadre* ; notamment le mot « ensemble » et la notation $\in$ sont des commodités, pas des formalismes. En revanche la définition de la satisfaction (définition 6.3.D) est plus délicate qu'il n'y paraît.

*Exemple.* L'énoncé « un élément est somme de deux carrés si et seulement s'il est carré lui-même » mélange expressions algébriques, logique propositionnelle, et quantifications *sur les seuls éléments*. C'est l'archétype de l'énoncé logique élémentaire.

Un tel énoncé est susceptible d'être vrai ou faux, mais sans caractère absolu : l'exemple est vrai dans $\mathbb{R}$ mais faux dans $\mathbb{Q}$.

La relation de satisfaction sera notée $\models$. On veut donc une théorie de la vérité telle que $\mathbb{R} \models \varphi$ mais $\mathbb{Q} \not\models \varphi$, où $\varphi$ est l'énoncé logique $(\forall x)[(\exists y_1)(\exists y_2)(x = y_1^2 + y_2^2) \leftrightarrow (\exists y)(x = y^2)]$. Suit une batterie de définitions pour développer cette théorie.

## § 6.1. Langages et structures

La logique formalise la pratique mathématique mais ne la régente pas. Le texte n'adopte pas la « notation polonaise », économique et peu lisible ; il emploie virgule et parenthèses. L'*arité* d'un symbole de relation ou de fonction est son nombre d'arguments.

**Définition A** (langage relationnel)**.** Un *langage relationnel* $\mathcal{L}$ est la donnée : $\mathcal{L}$

— d'une collection $\mathcal{C}$ de symboles de constantes, $\mathcal{C}$

— d'une collection $\mathcal{R}$ de symboles de relations, chacune étant d'arité finie, $\mathcal{R}$

— d'une collection $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions, chacune étant d'arité finie. $\mathcal{F}$

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ sont vides, $\mathcal{L}$ est dit *purement relationnel.*

Par abus de langage, on omet souvent « symboles de ».

*Remarques*

— Il n'est pas nécessaire au début que $\mathcal{L}$ soit « de taille ensembliste », i.e. maniable dans une théorie des ensembles. C'est le cas à partir de § 10.

— On peut éliminer constantes et fonctions ; v. exercice 6.5. Ceci simplifie le langage mais introduit des quantifications dans des situations simples, à confronter avec la désirable « élimination des quantificateurs » de l'exercice 8.4 et de § 17.2.

— Les relations 0-aire $\perp$ (faux) et binaire $=$ (égalité) sont des *constantes logiques* (définition 6.3.A), non sujettes à réinterprétation : elles appartiennent à la logique, non aux langages. V. notes conclusives.

*Exemples*

— Le langage des groupes est $\{1, ^{-1}, \cdot\}$, où 1 est une constante, $^{-1}$ une fonction unaire, et $\cdot$ une fonction binaire.

— Le langage des groupes ordonnés est $\{<, 1, ^{-1}, \cdot\}$ ; celui des anneaux est $\{0, 1, +, -, \cdot\}$ ; etc.

— Le langage de l'arithmétique est, par convention, $\{0, s, +, \cdot\}$, où $s$ est une fonction unaire.

— Le langage de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel est $\{\in\}$, relation binaire.

Le pouvoir d'expression d'une théorie mathématique ne dépend pas du langage, mais de la puissance combinatoire des axiomes.

**Définition B** ($\mathcal{L}$-structure)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Une $\mathcal{L}$-*structure* $\mathbb{A}$ est la donnée d'une collection non vide (le *domaine* de $\mathbb{A}$) avec :

— pour chaque symbole de constante $c$, un point marqué $c[\mathbb{A}] \in \mathbb{A}$,

— pour chaque symbole de relation $n$-aire $R$, une partie marquée $R[\mathbb{A}] \subseteq \mathbb{A}^n$,

— pour chaque symbole de fonction $n$-aire $f$, une fonction marquée $f[\mathbb{A}] \colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$.

**Str**, $\mathcal{L}$-**Str**

Soit $\mathcal{L}$-**Str** la collection des $\mathcal{L}$-structures, ou **Str** s'il n'y a pas d'ambiguïté.

$\mathbb{A}, \mathbb{M}$

On note typiquement $\mathbb{A}, \dots, \mathbb{M}, \dots$ des $\mathcal{L}$-structures.

*Remarques*

— Une $\mathcal{L}$-structure est formée d'objets tous de même nature, de même « type ». On peut rejeter, ou contourner, cette contrainte (§ 7.1).

- Il n'est pas nécessaire au début d'avoir une « réalisation ensembliste » de $\mathbb{A}$, i.e. de supposer que son domaine est un ensemble au sens d'une axiomatique comme Zermelo-Fraenkel. À partir de § 15 on considère des structures à domaine ensembliste, i.e. maniables par opérations ensemblistes avancées.
- La restriction aux domaines non vides est pour éviter, en théorie de la démonstration, la notion de *contexte* (§ 9, notes conclusives).
- Plusieurs notions de morphisme font de $\mathcal{L}$-**Str** une catégorie (§ 14).

*Exemple.* N'importe quelle collection non vide munie d'un point marqué, d'une fonction unaire et d'une fonction binaire, est une $\mathcal{L}_{\mathrm{grp}}$-structure.

## § 6.2. Termes et interprétations

On introduit des « pointeurs » vers les éléments de la structure.

**Définition A** (variables élémentaires)**.** Les *variables élémentaires* sont des symboles pris dans une collection infinie $\mathcal{V}$ dénombrable, par exemple $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, \dots\}$. $x_i$, $\mathcal{V}$

Le caractère bien ordonné de l'énumération donne un sens à « la première variable telle que… ». La clause de dénombrabilité permet de contrôler le cardinal de la syntaxe.

**Définition B** (terme ; variables d'un terme)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. On définit les $\mathcal{L}$-*termes* et leurs *variables* comme suit : Term, $\mathcal{L}$-Term, $\mathrm{Var}(t)$

- si $x \in \mathcal{V}$, alors $x$ est un terme ; en outre $\mathrm{Var}\, x = \{x\}$ ;
- si $c \in \mathcal{C}$, alors $c$ est un terme ; en outre $\mathrm{Var}\, c = \varnothing$ ;
- si $f \in \mathcal{F}$ est $n$-aire et $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ est un $n$-uplet de termes, alors $f(\mathbf{t})$ est un terme ; en outre $\mathrm{Var}\, f(\mathbf{t}) = \mathrm{Var}\, \mathbf{t} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\, t_i$.

Cette définition sous-entend que rien d'autre n'est un terme. La collection résultante est notée $\mathcal{L}$-Term, ou Term s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On note typiquement $t$ un terme et $\mathbf{t}$ un $n$-uplet de termes. En général, pour toute lettre $a, \dots, z$, le changement de graisse $\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}$ désigne un uplet. $t, \mathbf{t}$

*Exemples*

- Dans le cas purement relationnel (ni constantes, ni fonctions), les seuls termes sont les variables élémentaires.
- Les termes du langage des groupes sont les *mots*, comme $x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot x_1 \cdot x_3$.

— On peut réécrire $2x_1 + x_2^2$ comme $\mathcal{L}_{\text{ann}}$-Term.

*Remarques*

— En toute rigueur, le dernier exemple s'écrirait $+(\cdot(+(1,1),x_1),\cdot(x_2,x_2))$, ou $+\cdot+11x_1\cdot x_2x_2$, ou $11+x_1\cdot x_2x_2\cdot+$. Ce terme a pour variables $x_1$ et $x_2$ ; il est représenté par l'arbre fini :

```
1   1
 \ /
  +   x1  x2  x2
   \ /     \ /
    ·       ·
     \     /
        +
```

Décomposition en arbre d'un terme

**Définition C** (paramètres)**.** Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. On appelle *paramètres dans* $\mathbb{A}$ toute fonction, éventuellement partielle, $\mathcal{V} \to \mathbb{A}$.

$\mathbf{a}$ Si l'on a numéroté les variables en $x_1, x_2, \dots$, il est naturel d'écrire $(a_1, a_2)$ pour la fonction qui fait $x_1 \mapsto a_1$ et $x_2 \mapsto a_2$. La notation en uplet $\mathbf{a}$ est donc très adaptée aux paramètres pour la pratique. Pour la théorie avancée, il faut savoir revenir aux paramètres comme fonctions partielles. Comme en § 2.2, $\operatorname{dom} f$ désigne le *domaine* d'une fonction $f$.

$t(\mathbf{a})$ **Définition D** (interprétation, ou valeur, d'un terme)**.** Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Soient $t$ un terme et $\mathbf{a}$ des paramètres vérifiant $\operatorname{Var} t \subseteq \operatorname{dom} \mathbf{a}$. On définit l'*interprétation*, ou *valeur* du terme à paramètres $t[\mathbb{A}](\mathbf{a})$ comme suit :

— si $t$ est une variable $x$, alors $t[\mathbb{A}](\mathbf{a}) = \mathbf{a}(x)$ ;

— si $t$ est une constante $c$, alors $t[\mathbb{A}](\mathbf{a}) = c[\mathbb{A}]$ ;

— si $t$ est $f(\boldsymbol{\tau})$ pour un uplet de termes $\boldsymbol{\tau}$, alors $t[\mathbb{A}](\mathbf{a}) = f[\mathbb{A}](\boldsymbol{\tau}[\mathbb{A}](\mathbf{a}))$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la structure, on écrit simplement $t(\mathbf{a})$.

*Remarques*

— C'est bien défini par un lemme de *lecture unique* des termes ; exercice 6.2.

— Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont des paramètres coïncidant sur $\operatorname{Var} t$, alors $t(\mathbf{a}) = t(\mathbf{b})$.

*Exemple.* Dans l'anneau $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, \cdot)$, avec $\mathbf{a}$ faisant $x_1 \mapsto 2$ et $t$ le terme $1+x_1$, on trouve $t(\mathbf{a}) = 3$.

## § 6.3. Formules de la logique élémentaire et satisfaction

On décrit les formules de la logique élémentaire et leur valeur de vérité.

**Définition A** (symboles de la logique élémentaire)**.** Les *symboles* (aussi : *constantes*) de la *logique élémentaire* sont :

— la relation 0-aire $\perp$ (faux) ; $\perp$

— la relation 2-aire $=$ (égalité) ; $=$

— le connecteur propositionnel unaire $\neg$ (négation, « non ») ; $\neg$

— les connecteurs propositionnels binaires : $\wedge$ (conjonction, « et »), $\vee$ (disjonction, « ou »), $\rightarrow$ (implication, « implique ») ; $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$

— les quantificateurs élémentaires $\forall$ (universel, « pour tout ») et $\exists$ (existentiel, « il existe »). $\forall$, $\exists$

*Remarques*

— Pas de quantificateurs ensemblistes.

— La relation $\in$ n'est pas une constante logique (v. notes conclusives).

— Les symboles sont redondants : $\perp, =, \rightarrow, \exists$ suffisent en logique classique. Voir exercice 6.4.

— La quantification formelle $\forall$ sur les points d'une structure s'oppose à la quantification informelle, par exemple celle sur les formules elles-mêmes. Il faut les distinguer. L'expression « pour tout » fait référence à l'une ou l'autre ; « pour chaque » signale une quantification *informelle*. (Se plonger dans une théorie-cadre pemettrait de formaliser certaines quantifications informelles, au prix d'une grande confusion pédagogique.)

Pour éviter les « mauvaises » expressions du type $\int_x \int_x f\, dx dx$ et $f(x) + \int_x g\, dx$, il faut distinguer variables libres et variables liées. C'est fait directement dans la récurrence définissant les formules, où l'on requiert l'absence de conflit. Ceci justifie la longueur de la définition.

**Définition B** (formules ; variables d'une formule)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. On définit les *$\mathcal{L}$-formules élémentaires* et leurs *variables, libres ou liées*, comme suit : $\mathrm{Var}(\varphi)$, $\mathrm{VarLib}(\varphi)$, $\mathrm{VarLié}(\varphi)$

— si $R$ est un symbole de relation $n$-aire (ceci inclut $\perp$ et $=$) et $\mathbf{t}$ un $n$-uplet de termes, alors $R(\mathbf{t})$ est une formule ; en outre $\mathrm{VarLib}\, R(\mathbf{t}) = \mathrm{Var}\, \mathbf{t}$ et $\mathrm{VarLié}\, R(\mathbf{t}) = \varnothing$ ;

— si $\varphi$ est une formule, alors $(\neg\varphi)$ est une formule ; en outre $\mathrm{VarLib}(\neg\varphi) = \mathrm{VarLib}\,\varphi$ et $\mathrm{VarLié}(\neg\varphi) = \mathrm{VarLié}\,\varphi$ ;

— si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des formules vérifiant $\mathrm{VarLib}\,\varphi_1 \cap \mathrm{VarLié}\,\varphi_2 = \mathrm{VarLié}\,\varphi_1 \cap \mathrm{VarLib}\,\varphi_2 = \varnothing$ et $\boxdot$ un connecteur propositionnel binaire, alors $(\varphi_1 \boxdot \varphi_2)$ est une formule ; en outre $\mathrm{VarLib}(\varphi_1 \boxdot \varphi_2) = \mathrm{VarLib}\,\varphi_1 \cup \mathrm{VarLib}\,\varphi_2$ et $\mathrm{VarLié}(\varphi_1 \boxdot \varphi_2) = \mathrm{VarLié}\,\varphi_1 \cup \mathrm{VarLié}\,\varphi_2$ ;

— si $\varphi$ est une formule, $x$ une variable de $\mathcal{V} \setminus \mathrm{VarLié}\,\varphi$, et $\Lambda$ un quantificateur élémentaire, alors $(\Lambda x)\varphi$ est une formule ; en outre $\mathrm{VarLib}(\Lambda x)\varphi = \mathrm{VarLib}\,\varphi \setminus \{x\}$ et $\mathrm{VarLié}(\Lambda x)\varphi = \mathrm{VarLié}\,\varphi \cup \{x\}$.

Form, $\mathcal{L}$-Form

On note $\mathcal{L}$-Form, ou Form s'il n'y a pas d'ambiguïté, leur collection.

L'emploi des parenthèses n'est pas trop rigide mais sert la lisibilité.

*Remarques*

— Par définition ni $(\exists x)(\exists x)R(x)$ ni $(R(x) \wedge (\exists x)S(x))$ n'est une formule ; les tolérer complique les substitutions du calcul déductif (§ 9.3).

— Une autre possibilité est d'avoir deux collections disjointes : variables libres, variables *liables* ; une formule n'est bien formée que si toutes ses variables liables ont été liées.

— Pour écrire $(\forall x \in y)$, il faut un symbole dédié $\in$ dans $\mathcal{L}$. Sans un tel symbole, cette écriture est un non-sens.

— $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ désigne $(\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$.

$\varphi(\mathbf{x})$

On note typiquement $\varphi, \chi, \psi$ des $\mathcal{L}$-formules. Il est utile d'indiquer les variables libres par $\varphi(\mathbf{x})$, comme on fait pour les fonctions en analyse (convention non valable en théorie de la démonstration). Notant $\mathcal{L}$-Form$(\mathbf{x})$ l'ensemble des formules telles que $\mathrm{VarLib}\,\varphi \subseteq \mathbf{x}$, on a $\mathcal{L}\text{-Form} = \bigcup_{\mathbf{x}} \mathcal{L}\text{-Form}(\mathbf{x})$.

Én, $\mathcal{L}$-Én

**Définition C** (énoncé)**.** Un $\mathcal{L}$-*énoncé* est un élément de $\mathcal{L}\text{-Én} = \mathcal{L}\text{-Form}(\varnothing)$, i.e. une formule sans variable libre.

*Remarque.* Si $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathrm{Form}(\mathbf{x})$, on peut traiter $\mathbf{x}$ comme un uplet de constantes dans le langage $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L} \cup \{\mathbf{x}\}$ ; et $\varphi$ devient alors un $\mathcal{L}(\mathbf{x})$-énoncé.

Si $x \in \mathcal{V}$ est une variable, alors $x^c$ désigne $\mathcal{V} \setminus \{x\}$. Relire la définition des paramètres (définition 6.2.C).

$\models$

**Définition D** (satisfaction)**.** Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Soient $\varphi(\mathbf{x})$ une formule et $\mathbf{a}$ des paramètres vérifiant $\mathrm{VarLib}\,\varphi \subseteq \mathrm{dom}\,\mathbf{a}$. On définit la *satisfaction* de la formule à paramètres $\varphi(\mathbf{a})$ dans $\mathbb{A}$, notée $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$, comme suit :

— $\mathbb{A} \not\models \bot(\mathbf{a})$ ;

— $\mathbb{A} \models (t_1 = t_2)(\mathbf{a})$ ssi $t_1(\mathbf{a}) = t_2(\mathbf{a})$ ;

— $\mathbb{A} \models R(\mathbf{t})(\mathbf{a})$ ssi $\mathbf{t}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}]$ ;

— $\mathbb{A} \models (\neg\varphi)(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \not\models \varphi(\mathbf{a})$ ;
— $\mathbb{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi_1(\mathbf{a})$ et $\mathbb{A} \models \varphi_2(\mathbf{a})$ ;
— $\mathbb{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi_1(\mathbf{a})$ ou $\mathbb{A} \models \varphi_2(\mathbf{a})$ ;
— $\mathbb{A} \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \not\models \varphi_1(\mathbf{a})$ ou $\mathbb{A} \models \varphi_2(\mathbf{a})$ ;
— $\mathbb{A} \models (\forall x\ \varphi)(\mathbf{a})$ ssi pour chaque $\mathbf{a}'\colon \mathcal{V} \to \mathbb{A}$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sur $x^c$, on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}')$ ;
— $\mathbb{A} \models (\exists x\ \varphi)(\mathbf{a})$ ss'il existe $\mathbf{a}'\colon \mathcal{V} \to \mathbb{A}$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sur $x^c$ et tel que $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}')$.

Si $\Phi$ est un ensemble de formules tel que pour chaque $\varphi \in \Phi$ on ait $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$, on note encore $\mathbb{A} \models \Phi(\mathbf{a})$.

Noter que la « vérité » ainsi formalisée reste relative à une structure.

*Remarques*

— La relation $\models$ est bien définie par lecture unique.
— Elle est *binaire* et *classique* : un énoncé est soit vrai soit faux. Cette valeur de vérité dépend de la structure, mais d'elle seulement.
— Diverses propriétés attendues comme $\mathbb{A} \models (\varphi \vee \neg\varphi)(\mathbf{a})$ sont facilement vérifiées. Voir exercice 6.1.
— Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ coïncident sur $\mathrm{VarLib}\,\varphi$, alors $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{b})$. En particulier la satisfaction d'un énoncé ne dépend pas des paramètres. On note alors simplement $\mathbb{A} \models \varphi$, resp. $\mathbb{A} \models \Phi$.

*Exemple.* Soient $\mathbf{a}$ les paramètres faisant $x \mapsto -\pi$ ; alors $(\mathbb{C}\,; +, \cdot) \models (\exists y)(y^2 = x)(\mathbf{a})$. On écrit directement $(\mathbb{C}\,; +, \cdot) \models (\exists y)(y^2 = -\pi)$. En revanche $(\mathbb{R}\,; +, \cdot) \not\models (\exists y)(y^2 = -\pi)$.

*Remarque.* Il faut effectivement passer par toutes les formules pour définir la satisfaction des énoncés. On appelle *classe de satisfaction* de $\mathbb{A}$ la collection de toutes les paires $(\varphi, \mathbf{a})$, où $\varphi \in \mathrm{Form}$ et $\mathbf{a}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{A}$ vérifient $\mathrm{VarLib}\,\varphi \subseteq \mathrm{dom}\,\mathbf{a}$ et $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$.

Pour former cette collection abstraite, il faut un cadre ensembliste englobant à la fois $\mathbb{A}$, la collection des formules, et celle des paramètres $\mathcal{V} \to \mathbb{A}$. *Formaliser* la théorie de la satisfaction demande ainsi une théorie assez forte. V. notes conclusives. § 26 revient à ces questions.

*Remarque* (changement de variable ; remplacement). Soit $\varphi(x)$ une formule à variable libre $x$. Pour $y \notin \mathrm{Var}\,\varphi$, il y a plusieurs façons de donner sens à $\varphi(y)$.

— On peut remplacer syntaxiquement toutes les occurrences de $x$ par des $y$. Cette approche est utile en calcul déductif (§ 9) car à longueur constante.

— On peut aussi considérer $(\exists x)(\varphi \wedge x = y)$. Ceci augmente la longueur mais est préférable algébriquement.

On forme de même $\varphi(t)$, $\varphi(\mathbf{t})$, et $\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ (remplacement partiel). Alors $(\exists_{=1} x)\varphi$ désigne $(\exists x)\varphi \wedge (\forall x)(\forall x')(\varphi(x) \wedge \varphi(x') \to x = x')$.

## § 6.4. Conséquence sémantique en logique élémentaire

$\models$

**Définition A** (conséquence sémantique)**.** Une formule $\chi$ est *conséquence sémantique* de $\Phi$, noté $\Phi \models \chi$, si toute structure $\mathbb{A}$ à paramètres $\mathbf{a}$ vérifiant $\Phi$ vérifie aussi $\chi$.

*Remarques*

— La notation peut sembler malheureuse (cf. $\mathbb{A} \models \chi$) ; en pratique elle est sans ambiguïté.

— En toute rigueur il faudrait écrire $\Phi \models \chi$ $[\mathcal{L}]$. En pratique il n'y a pas ambiguïté : tout se passe dans le plus petit langage commun à $\Phi$ et $\chi$.

— Si $\Phi$ ou $\chi$ contiennent des variables libres $\mathbf{x}$, on quantifie sur les $\mathcal{L}$-structures *avec paramètres*, i.e. les paires $(\mathbb{A}, \mathbf{a})$ avec $\mathbf{a}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{A}$. Cela revient à traiter $\mathbf{x}$ comme des constantes du langage étendu $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L} \cup \{\mathbf{x}\}$ et à quantifier sur les $\mathcal{L}(\mathbf{x})$-structures.

— On évite de noter $\Phi \models \Phi'$ pour un ensemble $\Phi'$, car l'interprétation naturelle en théorie de la démonstration serait « si $\mathbb{A}$ vérifie toutes les $\varphi \in \Phi$, alors elle vérifie *au moins une* $\varphi' \in \Phi'$ ». V. compléments § J pour un formalisme syntaxique restaurant cette symétrie.

$\Lambda_{\omega,\omega}$

**Définition B** (logique élémentaire)**.** La *logique élémentaire* $\Lambda_{\omega,\omega}$ associe à chaque langage relationnel $\mathcal{L}$ : la collection des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{L}$-**Str**, celle des énoncés $\mathcal{L}$-Én, et la relation $\models$.

La notation est expliquée en § 7.

*Remarques*

— Pour indiquer la logique il faut noter $\Lambda_{\omega,\omega}(\mathcal{L})$-Form, $\Phi \models \chi$ $[\Lambda_{\omega,\omega}(\mathcal{L})]$, etc.

— On lit souvent $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ au lieu de $\Lambda_{\omega,\omega}(\mathcal{L})$ mais cette notation cache le caractère fonctoriel (en le langage) de la logique.

Cette section décrivait une théorie élémentaire de la vérité. D'autres logiques plus puissantes, et donc aussi plus dépendantes d'un cadre ensembliste, sont présentées en § 7 (facultative). On peut passer directement à § 8.

## Exercices

**6.1 (quelques vérifications).**

a. Démontrer les propriétés suivantes : (i) Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont des paramètres coïncidant sur $\mathrm{Var}\, t$, alors $t(\mathbf{a}) = t(\mathbf{b})$ ; (ii) si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont des paramètres coïncidant sur $\mathrm{VarLib}\, \varphi$, alors $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{b})$ ; (iii) soit $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ soit $\mathbb{A} \models (\neg\varphi)(\mathbf{a})$ (disjonction exclusive) ; (iv) $\mathbb{A} \models (\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi)(\mathbf{a})$ ; (v) $\mathbb{A} \models [\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)](\mathbf{a})$ ; (vi) $\mathbb{A} \models [\neg(\exists x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\neg\varphi)](\mathbf{a})$.

b. Montrer l'équivalence entre : (i) $\models \varphi \leftrightarrow \chi$ ; (ii) $\varphi \models \chi$ et $\chi \models \varphi$.

c. Pour $y \notin \mathrm{Var}\, \varphi$, on note $\varphi(y)$ la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de $x$ par $y$. Montrer $\models \varphi(y) \leftrightarrow (\exists x)(\varphi \wedge y = x)$.

**6.2 (lecture unique).** Démontrer le lemme suivant, puis un analogue pour les formules.

**Lemme.** Soit $t$ un $\mathcal{L}$-terme. Alors $t$ a exactement l'une des formes suivantes : – une constante $c$ ; – une variable $x$ ; – un terme $f(\boldsymbol{\tau})$, où $f$ est une fonction uniquement déterminée et $\boldsymbol{\tau}$ un $n$-uplet de termes uniquement déterminé.

**6.3 (formes prénexes).** Deux formules sont *équivalentes* si $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

**Lemme.** Toute formule élémentaire équivaut à une de la forme $(Q) \bigvee \bigwedge (\neg) R(\mathbf{t})$.

Ceci signifie : suite de quantifications, puis disjonction de conjonctions de formules de base et de leurs négations.

a. Une formule sans quantificateurs est $\bigvee$*-prénexe* si elle est de la forme $\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} \varphi_{i,j}$, où chaque $\varphi_{i,j}$ est une $(\neg)R(\mathbf{t})$. Montrer qu'en logique élémentaire, toute formule sans quantificateurs équivaut à une formule $\bigvee$-prénexe. [$\bigwedge^m \bigvee^n \rightsquigarrow \bigvee^{n^m} \bigwedge^m$.]

b. Une formule est *prénexe* si elle commence par des quantifications et se poursuit par une formule sans quantificateurs. Montrer qu'en logique élémentaire, toute formule équivaut à une formule prénexe.

Cf. exercice 7.6. Suite à l'exercice 9.7.

**6.4 (redondance des opérateurs logiques en logique classique).** Soit $\models^s$ la satisfaction ou la conséquence sémantique n'employant que $\bot, \to, \exists$. La *simplification* $^s$ des $\mathcal{L}$-formules est définie par :

$(R(\mathbf{t}))^s$ est $R(\mathbf{t})$ (inclut le cas de $\bot$ et $=$) ; $(\neg\varphi)^s$ est $\varphi^s \to \bot$ ; $(\varphi_1 \to \varphi_2)^s$ est $\varphi_1^s \to \varphi_2^s$ ; $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^s$ est $(\varphi_1^s \to (\varphi_2^s \to \bot)) \to \bot$ ; $(\varphi_1 \vee \varphi_2)^s$ est $(\varphi_1^s \to \bot) \to \varphi_2^s$ ; $(\exists x\ \varphi)^s$ est $(\exists x)\varphi^s$ ; $(\forall x\ \varphi)^s$ est $[(\exists x)(\varphi^s \to \bot)] \to \bot$.

Montrer que $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models^s \varphi^s(\mathbf{a})$. En déduire que $\Phi \models \chi$ ssi $\Phi^s \models^s \chi^s$. Suite à l'exercice 9.4. (La logique intuitionniste perd ces redondances ; v. compléments § G.)

**6.5 (élimination des constantes et des fonctions).** Soit $\mathcal{L}$ un langage contenant un symbole $c$ de constante. On l'élimine comme suit.

- Soient $R_c$ un symbole de relation unaire, puis $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{R_c\}$ et $\mathcal{L}' = \hat{\mathcal{L}} \backslash \{c\}$.
- Soient $\alpha_c$ le $\mathcal{L}'$-énoncé $(\exists_{=1} x) R_c(x)$ et $\beta_c$ le $\hat{\mathcal{L}}$-énoncé $R_c(c)$.
- Si $\varphi$ est une $\mathcal{L}$-formule, soient $y$ la première variable $\notin \mathrm{Var}\, \varphi$, puis $\varphi^y$ obtenue en remplaçant chaque occurrence de $c$ par $y$, et enfin $\varphi^*$ la formule $(\exists y)(R_c(y) \wedge \varphi^y)$.
- Si $\Phi$ est un ensemble de formules, on pose $\Phi^* = \{\varphi^* : \varphi \in \Phi\}$.

a. Si $\mathbb{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure (resp. $\mathbb{A}'$ une $\mathcal{L}'$-structure vérifiant $\alpha_c$), l'étendre en une $\hat{\mathcal{L}}$-structure vérifiant $\alpha_c \wedge \beta_c$.

b. Montrer que si $\mathbb{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure à paramètres $\mathbf{b}$ vérifiant $\mathbf{b}(y) = c[\mathbb{A}]$, alors $\mathbb{A} \models (\varphi \leftrightarrow \varphi^y)(\mathbf{b})$. En déduire que si $\hat{\mathbb{A}} \models \alpha_c \wedge \beta_c$, alors pour $\varphi \in \mathcal{L}$-Én on a $\hat{\mathbb{A}} \models \varphi \leftrightarrow \varphi^*$.

c. Conclure que $\Phi \models \chi\ [\mathcal{L}]$ ssi $\Phi^* \cup \{\alpha_c\} \models \chi^*\ [\mathcal{L}']$.

(*) d. Éliminer un symbole de fonction. [Forme prénexe, et nouvelles variables.]

La possibilité de cette élimination est souvent invoquée pour établir des points théoriques. En pratique, fonctions et constantes sont parfois utiles. Suite à l'exercice 9.6.

**6.6.** Dans le langage idoine, écrire des ensembles d'énoncés élémentaires dont les modèles sont exactement : a. les ensembles à exactement $n$ éléments, b. les ensembles à une infinité d'éléments, c. les ordres, d. les ordres linéaires denses sans extrémités (§ 2.2), e. les relations d'équivalence, f. les relations d'équivalence ayant une infinité de classes, chacune infinie, g. les groupes, h. les groupes abéliens divisibles sans torsion, i. les anneaux, j. les corps algébriquement clos, k. les graphes, l. les graphes aléatoires (ex. 2.7). Dans quels cas suffit-il d'écrire un seul énoncé ?

**6.7.** Il y a une notion intuitive de $\mathcal{L}$-isomorphisme. Montrer que si $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ $[\mathcal{L}$-**Str**$]$ et $\mathbb{A} \models \varphi$, alors $\mathbb{B} \models \varphi$. [Permettre des paramètres.]

**6.8 (indéfinissabilité de la vérité).** Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Soient $\Phi(x) = \mathcal{L}\text{-Form}(x)$ l'ensemble des « formules en $x$ », et $f$ une fonction abstraite $f\colon \Phi(x) \to \mathbb{A}$. Montrer qu'il n'existe pas de formule $\tau(x, y)$ telle que pour $\varphi(x) \in \Phi(x)$ et $a \in \mathbb{A}$ on ait : $\mathbb{A} \models \varphi(a)$ ssi $\mathbb{A} \models \tau(f(\varphi), a)$. [Argument diagonal.]

**6.9.** (Prérequis : § 5.1.) Pour un langage $\mathcal{L}$ et un ensemble $\Theta$ de $\mathcal{L}$-énoncés, on note $\text{Én}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ l'ensemble des énoncés modulo la relation d'équivalence $\Theta \models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

a. Montrer que $\text{Én}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ est un anneau de Boole pour une structure à préciser.

(*) b. Soit $\mathbb{B}$ un anneau de Boole. Montrer qu'il existe $\mathcal{L}$ et $\Theta$ tels que $\mathbb{B} \simeq \text{Én}_{\mathcal{L}}(\Theta)$. [Des relations unaires, et un domaine singleton. Pour l'injectivité, semi-simplicité.]

• La structure booléenne ne transcrit que la logique propositionnelle. La *logique algébrique* munit les anneaux de formules d'une structure modélisant la quantification. Notamment, suite aux compléments § F, ex. F.7. • Analogue intuitionniste : compléments § G, ex. G.7.

(**) **6.10 (théorème de Feferman-Vaught sur les produits).**

– Soit $\mathcal{L}_{\text{Bool}} = \{\subseteq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, c, \cap, \cup\}$ le langage de l'algèbre des parties.
– Soit $\mathcal{L}$ un langage purement relationnel. Pour un ensemble $I \neq \varnothing$ et une famille $(\mathbb{A}_i)_I$ de $\mathcal{L}$-structures, soit $\mathbb{A}^* = \prod_I \mathbb{A}_i$ leur produit cartésien, où $R[\mathbb{A}^*] = \prod_I R[\mathbb{A}_i]$.
– Pour $\varphi(\mathbf{a}^*)$ à paramètres $\mathbf{a}^* = (\mathbf{a}_i) \in \mathbb{A}^*$, soit $[\![\varphi(\mathbf{a}^*)]\!] = \{i \in I : \mathbb{A}_i \models \varphi(\mathbf{a}_i)\}$.

**Théorème** (Feferman-Vaught)**.** Soit $\varphi(\mathbf{x})$ une $\mathcal{L}(\mathbf{x})$-formule. Alors il existe un uplet de variables $\mathbf{y}$, une $\mathcal{L}_{\text{Bool}}$-formule $\beta(\mathbf{y})$ et des formules $\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})$ tels que :

> pour tout ensemble $I \neq \varnothing$, toute famille $(\mathbb{A}_i)$, et tous paramètres $\mathbf{a}^* \in \mathbb{A}^* = \prod_I \mathbb{A}_i$, on a l'équivalence : $\mathbb{A}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$ ssi $P(I) \models \beta([\![\varphi_1(\mathbf{a}^*)]\!], \dots, [\![\varphi_n(\mathbf{a}^*)]\!])$.

Soit $\varphi(\mathbf{x})$ une $\mathcal{L}(\mathbf{x})$-formule. Une famille $(\beta(\mathbf{y})\,;\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}))$ *détermine* $\varphi(\mathbf{x})$ si :

– $\beta(\mathbf{y}) \in \mathcal{L}_{\text{Bool}}(\mathbf{y})$-Form, où $\mathbf{y}$ est de longueur $n$ ;
– pour tout $I \neq \varnothing$, toutes structures $\mathbb{A}_i$ de produit $\mathbb{A}^*$, et tous paramètres $\mathbf{a}^* \in \mathbb{A}^*$, on a l'équivalence : $\mathbb{A}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$ ssi $P(I) \models \beta([\![\varphi_1(\mathbf{a}^*)]\!], \dots [\![\varphi_n(\mathbf{a}^*)]\!])$.

a. Des éléments $z_1, \ldots, z_n$ d'un anneau de parties *partagent* $\mathbf{1}$ si $\bigcup_{k=1}^n z_k = \mathbf{1}$ et $z_k \cap z_\ell = \mathbf{0}$ pour $k \neq \ell$ (on ne demande pas $z_k \neq \mathbf{0}$). Montrer que s'il existe une famille qui détermine $\varphi(\mathbf{x})$, alors quitte à prendre $n' = 2^n$ il en existe une où les $\varphi_k(\mathbf{x})$ partagent $\mathbf{1}$. [Pour $E \in 2^n$, poser $\varphi'_E(\mathbf{x}) = \bigwedge_{k \in E} \varphi_k(\mathbf{x}) \wedge \bigwedge_{k \notin E} \neg\varphi_k(\mathbf{x})$.]

b. On suppose que $(\beta\,; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ détermine $\varphi(x', \mathbf{x})$ et que les $\varphi_k$ partagent $\mathbf{1}$. On pose :

$$\gamma(\mathbf{y}): \quad (\exists \mathbf{z}) \left[ \left( \bigwedge_{k=1}^n z_k \subseteq y_k \right) \wedge \text{« les } z_k \text{ partagent } \mathbf{1} \text{ »} \wedge \beta(\mathbf{z}) \right].$$

Soit $\chi_k(\mathbf{x})$ la formule $(\exists x')\varphi_k(x', \mathbf{x})$. Montrer que $(\gamma; \chi_1, \ldots, \chi_n)$ détermine $(\exists x')\varphi(x', \mathbf{x})$.

c. En déduire le théorème.

---

## Notes conclusives

- **Repères historiques**

*Mossi da questi intendimenti noi abbiamo cercato, per quanto le nostre forze lo consentivano, di dar ragione a noi stessi dei risultati a cui conduce la dottrina di* Lobatschewsky *; e, seguendo un processo che ci sembra in tutto conforme alle buone tradizioni della ricerca scientifica, abbiamo tentato di trovare un substrato reale a quella dottrina, prima di ammettere per essa la necessità di un nuovo ordine di enti e di concetti.* [Beltrami]

*Alors, le* système *des* idées *que nous avons choisi d'abord n'est qu'une* interprétation *du* système *des* symboles non-définis *; mais, au point de vue déductif, cette interprétation peut être ignorée par le lecteur, qui peut librement la remplacer, dans sa pensée, par* une autre interprétation *qui vérifie les conditions énoncées par les P* non-démontrées. *Et, comme celles-ci, au point de vue déductif, n'énoncent pas des* faits, *mais des* conditions, *on ne peut les considérer comme de vrais* postulats. [Pad01, § 13]

***Logique élémentaire.*** • V. [Moo88]. • [Pei85, § III] peut être la première description de la logique élémentaire ; Peirce renvoie à Mitchell. Une lecture en vogue au XX^e siècle, sensible dans [**Heijenoort**], attribuait la logique à Frege ; [Put82] met à mal cette idée. Les quantificateurs chez Frege semblent n'avoir eu d'influence que tardive ; ceux de Peirce-Mitchell en eurent une immédiate. Une réappréciation du rôle de Peirce passera par l'étude de ses liens avec Peano, qui avait du prestige en Europe. • Weyl, Zermelo : v. § 13, notes conclusives. • Pour Hilbert la logique élémentaire était un cas particulier. La singulariser n'était pas affirmer sa

[Beltrami] : Eugenio Beltrami. *Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea.* Napoli: Fran. e Gennaro de Angelis, 1868

[Pad01] : Alessandro Padoa. « Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une theorie déductive quelconque ». In : t. 3. Logique et Histoire des Sciences. Paris : Armand Colin, 1901, p. 309-365

[Moo88] : Gregory Moore. « The emergence of first-order logic ». In : *History and philosophy of modern mathematics (Minneapolis, 1985).* Minnesota Stud. Philos. Sci., XI. Minneapolis, Minnesota : Univ. Minnesota Press, 1988, p. 95-135

[Pei85] : Charles Peirce. « On the Algebra of Logic : A Contribution to the Philosophy of Notation ». In : *Amer. J. Math.* 7.2 (1885), p. 180-202

[**Heijenoort**] : Jean van Heijenoort. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Put82] : Hilary Putnam. « Peirce the logician ». In : *Historia Math.* 9.3 (1982), p. 290-301

prééminence. Ses vues sur la logique et leur évolution sont décrites dans [Sie99]. Cours dispensés avec l'assistance de Paul Bernays : v. [Hilbert2]. Avec le recul, la vision hilbertienne de la logique est contestable ; théories du calcul et de la démonstration lui doivent leur impulsion, mais pas le *relativisme* de la satisfaction. Ainsi la logique de Hilbert n'est pas la logique mathématique ; ce n'est rien lui enlever que d'y voir le germe de la logique informatique. • Dès [**Sko23**, § 2] (trad. anglaise dans [**Heijenoort**]), Skolem décrivait brièvement mais lucidement les formules de la logique élémentaire. Cette communication est un jalon majeur de l'histoire de la logique, passé trop inaperçu. Skolem doit bien davantage à l'école algébrique de Schröder [**Schröder1**] qu'aux logicistes ; et il n'assista pas aux cours de Hilbert. • Malgré la clarté de Skolem, il fallut la visibilité de Gödel et Tarski pour que s'impose la restriction au premier ordre. L'ancienne génération, dont Zermelo, n'a jamais vraiment compris (les manuels scolaires du début du XXI$^{e}$ siècle ne sont pas tous impeccables).

***Satisfaction et conséquence sémantique.*** Leur histoire ne se résume pas à Tarski. • La conséquence comme relation invariante sous réinterprétation est en germe chez Bolzano [Bolzano, § 147], avec une nuance de nécessité presque modale. • La première recherche délibérée de structure satisfaisant à certains axiomes peut être [Beltrami], où Beltrami *réalise* la géométrie « de Bolyai-Gauß-Lobatchevski ». • L'idée d'invariance se retrouve chez Padoa [Pad01]. Elle est entièrement absente des écrits de Frege ou Russell. • La formalisation actuelle doit beaucoup à l'École polonaise ; certains écrits de Łukasiewiczont été traduits [Łukasiewicz]. • Dès [Tar31b], Tarski algébrisait l'opérateur de conséquence. • Jalons souvent mis en avant : [**Tar35a**], [**Tar36**]. Tarski a toujours revendiqué l'indépendance de ses travaux, de ceux de Gödel. On sait par exemple qu'il avait présenté ses idées sur la question à Vienne dès 1930, et que Gödel était présent [Pla18a, § 8]. • Les spécialistes du cercle de Vienne affirment que Carnap était proche


[Sie99] : Wilfried SIEG. « Hilbert's programs : 1917–1922 ». In : *Bull. Symbolic Logic* 5.1 (1999), p. 1-44

[Hilbert2] : David HILBERT. *David Hilbert's lectures on the foundations of arithmetic and logic, 1917–1933*. Sous la dir. de William EWALD, Wilfried SIEG et Michael HALLETT. Berlin : Springer-Verlag, 2013, p. xxv+1062

[**Sko23**] : Thoralf SKOLEM. « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre ». In : 5. Kongreß Skandinav. in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Helsinki : Akademiska Bokhandeln, 1923, p. 217-232

[**Schröder1**] : Ernst SCHRÖDER. *Vorlesungen über die Algebra der Logik I.* Leipzig : B. G. Teubner, 1890. xii+717

[Bolzano] : Bernard BOLZANO. *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.* T. 2. Sulzbach : Seidel, 1837. viii+568

[Łukasiewicz] : Jan ŁUKASIEWICZ. *Écrits logiques et philosophiques.* Mathesis. Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 2013, p. 333

[Tar31b] : Alfred TARSKI. « Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik ». In : *C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III* 23 (1931), p. 22-29

[**Tar35a**] : Alfred TARSKI. « Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen ». In : *Stud. Philos* 1 (1935), p. 261-405

[**Tar36**] : Alfred TARSKI. « Über den Begriff der logischen Folgerung ». In : t. 394. Actes du Congrès international de philosophie scientifique. Sorbonne, Paris, 1935. Paris : Hermann, 1936, p. 1-11

[Pla18a] : Jan von PLATO. « In search of the sources of incompleteness ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. IV.Invited lectures.* World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, p. 4057-4073

de cette conception ; la communauté mathématique reste réservée sur l'importance de Carnap.

***Théorème de Feferman-Vaught (ex. 6.10).*** • [FV59, Theorem 3.1] ; Mostowski précurseur [Mos52]. • (2^e^ lecture : il faut § 7.) Le théorème s'étend à $\Lambda_{\infty,\infty}$ ; pour $\Lambda_{\kappa,\lambda}$, il y a des contraintes cardinales car c'est faux en toute généralité [Mal71, § 2].

- **Terminologie.** • En français, *satisfaire* dans le sens de *vérifier* est intransitif ; « $\mathbb{A}$ satisfait $\varphi$ » est un anglicisme. • La logique mathématique gagnerait à moderniser son lexique. Voici quelques synonymes.

***Formule sans quantificateurs.*** *Matrice.*

***Langage relationnel.*** *Vocabulaire*, *signature*, plus rarement *type de similarité*.

***Logique élémentaire.*** • *Calcul des prédicats* ; mais *calcul logique à prédicats fixés* serait plus précis. • *Calcul fonctionnel* (Gödel, à la suite de Bernays et Hilbert) : car la valeur de vérité des relations est fonction des paramètres. • *Logique du premier ordre.* L'opposition « du premier/deuxième ordre » est souvent attribuée à Frege ; v. § 12, notes conclusives.

***Paramètres.*** *Assignation des variables*, *interprétation des variables.*

***Quantificateur.*** *Quanteur.*

***Relation.*** *Prédicat.* La terminologie repose sur l'idée qu'un énoncé est essentiellement l'expression d'une relation entre objets. On peut débattre si cette vision « orientée objet » reflète une particularité des langues indo-européennes, une prédisposition du cerveau humain, la pratique commune des mathématiques contemporaines, ou une propriété intrinsèque des mathématiques.

***Structure.*** *Structure relationnelle*, *univers du discours* (très XIX^e^ siècle), *système algébrique* (école soviétique).

- **Notations.** • Il faudrait compléter [Roe02]. • Les quantificateurs de Peano ($\exists$) et Gentzen ($\forall$), furent popularisés par Bourbaki. Dès 1885, Peirce avait suggéré la notation $\sum$ et $\prod$ [Pei85] ; bien plus adapté, cet appareil permit à Löwenheim de découvrir le théorème qui porte son nom (§ 15, notes conclusives). La hiérarchie arithmétique garde la trace de la notation de Peirce.Une notation concurrente était $\bigvee\!\!\!\bigvee/\bigwedge\!\!\!\bigwedge$. En fait tout est préférable à $\exists/\forall$. • On n'est pas sûr de la première occurrence de $\models$, conçu par opposition à $\vdash$ (§ 9, notes conclusives). • La « notation polonaise » de Łukasiewicz [Łukasiewicz.en, note 3 p. 180] est très adaptée aux machines à écrire ; les moyens techniques ont changé. • Traditionnellement, l'interprétation d'un symbole est notée $R^{\mathbb{A}}$ ; $R[\mathbb{A}]$ respecte mieux les typographes et la fonctorialité.

- **Pourquoi la logique élémentaire ?** Pour son absence de dépendance ensembliste. En effet :

  – soit l'expression « la réalité ensembliste » n'a pas de sens absolu ; les propriétés des ensembles variant d'une réalité à l'autre, un outil qui en dépend n'est pas fiable ;

  – soit elle possède un sens absolu, mais notre compréhension en est faible ; la logique ne doit pas trop supposer sur cette nature, surtout pour en mener l'étude.

Les propriétés du cadre ensembliste sont donc soit variables, soit mystérieuses. Elles

[FV59] : Solomon Feferman et Robert Vaught. « The first order properties of products of algebraic systems ». In : *Fund. Math.* 47 (1959), p. 57-103

[Mos52] : Andrzej Mostowski. « On direct products of theories ». In : *J. Symbolic Logic* 17 (1952), p. 1-31

[Mal71] : Jerome Malitz. « Infinitary analogs of theorems from first order model theory ». In : *J. Symbolic Logic* 36 (1971), p. 216-228

[Roe02] : Denis Roegel. « Petit panorama des notations logiques du 20^e^ siècle ». https://hal.inria.fr/hal-02340519. 2002

[Łukasiewicz.en] : Jan Łukasiewicz. *Selected works.* Sous la dir. de Ludwik Borkowski. Amsterdam : North-Holland, 1970. xii+405

ne peuvent servir d'hypothèses qu'explicitement, et avec prudence. La logique élémentaire évite de telles hypothèses.

- **Classes de satisfaction** (2e lecture.) • Point subtil lié à l'indéfinissabilité de la satisfaction. • Soit $\mathbb{A}$ une structure. On note $\varphi_n$ une formule prénexe à $n$ quantificateurs, et $S_n$ la collection des paires $(\varphi_n, \mathbf{a})$ telles que $\mathbb{A} \models \varphi_n(\mathbf{a})$. Si $S_0$ est donnée, on peut former $S_1$ par une construction algébrique qui ne demande pas vraiment de théorie des ensembles. Si $n$ est fixé à l'avance, former $S_n$ revient à manier des $n$-uplets de longueur prescrite • Mais gérer un nombre *arbitraire* de quantificateurs revient à savoir quantifier sur les *fonctions* $\mathcal{V} \to \mathbb{A}$ de domaine fini arbitraire. Il faut donc un minimum de manipulations ensemblistes : la « classe de satisfaction » de $\mathbb{A}$ demande un cadre combinatoire non trivial. • Si $\mathbb{A}$ est un objet d'un modèle d'une théorie des ensembles (un « ensemble »), la théorie-cadre permet de définir $\mathbb{A}^{\mathcal{V}}$, et donc aussi la satisfaction dans $\mathbb{A}$ (il faut que le domaine et le langage soient de taille ensembliste). La définition prend place dans le cadre, pas dans $\mathbb{A}$. § 6.3 l'implémente de manière informelle. • Si $\mathbb{M}$ est un modèle d'une théorie des ensembles (un « univers »), alors la collection des « fonctions » $\mathcal{V} \to \mathbb{M}$ n'est pas un ensemble de $\mathbb{M}$. On ne peut donc pas $\mathbb{M}$-définir la satisfaction dans $\mathbb{M}$ de la façon naïve. • Le théorème d'indéfinissabilité de Tarski (§ 20, § 26) exprime qu'il n'y a *aucune* façon de procéder, même non naïve. • Ceci justifie à la fois la définition « extérieure » de la satisfaction et son caractère relatif, structure par structure.

- **Qu'est-ce qu'une constante logique ? (1) : principe de Galois.** • La question ressortit au versant épistémologique, et non mathématique, de la logique. Elle est sérieuse et respectable. • « Constante » est ici au sens de *donnée invariante sous réinterprétation*, pas de *point marqué du domaine.* Par exemple, $\wedge$ et $\exists$ sont des constantes logiques ; il faudrait dire « opérateurs logiques ». • Soit $\sigma$ une bijection quelconque de $\mathbb{Z}$ ; le graphe de $+$ n'est pas nécessairement préservé sous cette « réinterprétation » ; celui de $=$ l'est. De même, la propriété pour une partie d'être vide ou non est préservée sous réinterprétation. L'addition n'est pas une constante logique, mais l'égalité et la quantification existentielle si. • L'analogie suivante avec le programme d'Erlangen est formulée dans [Mau46], et reprise sans mention dans [Tar86]. • La vision Galois-Klein établit correspondance entre les concepts de *structure* d'une part, et de *groupe de transformation* d'autre part ($\rightsquigarrow$ : prendre le groupe d'automorphismes de la structure ; $\leftsquigarrow$ : prendre la collection des relations fixées par l'action du groupe.) La physique nomme « principe de Noether » ce type de correspondance. Par exemple la structure linéaire métrique sur un espace euclidien correspond à l'action du groupe orthogonal. • La *structure logique* serait alors celle invariante pour la notion ultime d'automorphisme : la correspondance biunivoque. (Si le domaine est « typé », i.e. à plusieurs natures d'objets, une telle bijection doit permuter dans chaque type.) • La tradition anglophone appelle *thèse de Tarski-Sher* le postulat « logique = invariant ». • Suite en § 7, notes conclusives.

# § 7. D'autres logiques

Cette section facultative présente des variations sur la logique élémentaire. Celle-ci est la logique principale et la seule à bien connaître, mais la comparaison avec d'autres logiques permet de mieux cerner ses spécificités. On

[Mau46] : Friederich. Mautner. « An extension of Klein's Erlanger program : logic as invariant-theory ». In : *Amer. J. Math.* 68 (1946), p. 345-384

[Tar86] : Alfred Tarski. « What are logical notions ? » In : *Hist. Philos. Logic* 7.2 (1986). Edited by John Corcoran, p. 143-154 esquisse brièvement les logiques *multisorte* (§ 7.1), *d'ordre supérieur* (§ 7.2), *infinitaires* et *à quantificateurs généralisés* (§ 7.3), non binaires (§ 7.4) *intuitionniste* et *modale* (§ 7.5). La liste n'est pas exhaustive. Une définition partielle possible est donnée en § 7.6. Dans tout l'ouvrage, les exercices mentionnant ces variantes seront optionnels.

Prérequis : § 1 ; § 6.

---

La logique décrite en §6 est monotype[1], élémentaire[2], finitaire[3], binaire[4], classique[5], égalitaire[6].

1. Monotype. Il n'y a qu'un seul *type* (ou « sorte ») d'objets par structure.
2. Élémentaire. On ne quantifie que sur les *éléments*, pas sur leurs propriétés.
3. Finitaire. Les connecteurs et quantificateurs sont *finis*.
4. Binaire. Il y a *deux* valeurs de vérité.
5. Classique. La satisfaction est *propre à la structure*.
6. Égalitaire. On permet l'*égalité* dans les formules.

Chacun de ces aspects peut être mis en cause ; la logique élémentaire $\Lambda_{\omega,\omega}$ de § 6.4 est centrale mais pas unique. On peut envisager diverses variantes pour tenter de détecter plus, ou moins, de propriétés des structures, ou des propriétés d'un autre type. Certaines logiques se ramènent à $\Lambda_{\omega,\omega}$ ; d'autres conservent de bonnes propriétés ; d'autres sont impraticables. On souligne deux faits.

— $\Lambda_{\omega,\omega}$ est techniquement identifiable parmi les logiques (théorème de Lindström, compléments § O).

— Plus une logique est forte, plus elle dépend d'un arrière-plan. Demander trop d'expressivité est donc un mauvais arbitrage : la relation $\models$ dépend alors de quelque chose que l'on ne comprend ou contrôle pas. Ainsi en « logique du deuxième ordre » (§ 7.2), naïvement attrayante, la satisfaction repose sur l'illusoire maîtrise de la notion de partie ensembliste. De même les propriétés des logiques infinitaires $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ (§ 7.3) dépendent des cardinaux $\kappa$ et $\lambda$, que l'on comprend mal passé $\aleph_0$.

La liste qui suit n'est pas exhaustive ; en outre on peut combiner les extensions. Il n'y a pas d'ordre de lecture prescrit.

## § 7.1. Logiques non monotypes

• **Logique multisorte (pour langages typés).** Ce simple aménagement s'affranchit de la contrainte monotype. Soit $\mathcal{T}$ une collection fixée de types $\tau$, à penser comme des « natures d'objets » ; par exemple, certains objets sont des points, d'autres sont des droites.

- **Formules.** Les symboles de $\mathcal{L}$ sont typés : chaque constante $c$ est d'un type $\tau_c$ déterminé, chaque relation $n$-aire $R$ prend des arguments de types $\tau_{R,1}, \dots, \tau_{R,n}$ déterminés, idem pour les fonctions. Pour indiquer qu'une relation est entre objets de type $\tau_1, \dots, \tau_n$, on note $R\colon \tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ ; idem pour $f\colon \tau_1 \times \cdots \times \tau_n \to \tau$. Les variables aussi sont typées, grâce à des ensembles $\mathcal{V}_\tau$ ; on les note $x\colon \tau$. Les termes le deviennent également, $t\colon \tau$. Les quantifications élémentaires sont démultipliées en les $(\forall x\colon \tau)$ et $(\exists x\colon \tau)$. À l'intérieur d'une formule, on peut omettre le typage des occurrences des variables liées et noter $(\forall \mathbf{x}\colon \boldsymbol{\tau})\varphi(\mathbf{x})$ au lieu de $(\forall \mathbf{x}\colon \boldsymbol{\tau})\varphi(\mathbf{x}\colon \boldsymbol{\tau})$.
- **Structures.** Une $\mathcal{L}$-structure à types $\mathcal{T}$ est une famille de la forme $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_\tau : \tau \in \mathcal{T})$ avec les $\mathbb{A}_\tau$ non vides. L'interprétation des relations et fonctions de $\mathcal{L}$ doit respecter le typage.
- **Satisfaction.** Aménagement immédiat.

$\Lambda_{\omega,\omega}(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$

On peut noter $\Lambda_{\omega,\omega}(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$ le résultat obtenu. Ainsi *un typage fixé est porté par le langage plus que par la logique.* Il n'y a pas grande différence avec $\Lambda_{\omega,\omega}$ ; v. exercice 7.1.

*Exemple.* Propriété d'une action de groupe vue comme paire $(G, X)$ :

$$(\forall g\colon G)(\forall h\colon G)(\forall x\colon X)(g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x).$$

Il y a ici deux symboles $\cdot$ distincts : l'un de type $(G \times X \to X)$ et l'autre de type $(G \times G \to G)$.

*Intuitif et clarificateur, un typage n'est qu'une commodité d'écriture qui ne change pas la logique*; v. exercice 7.1.

*Remarque.* Il ne faut pas confondre un typage fixé (même infini) avec une *théorie des types*, qui modélise le comportement des typages possibles. Les théories des types ne sont pas des logiques mais bien des théories, de puissance comparable à celle des théories des ensembles.

## § 7.2. Logiques non élémentaires, dites « d'ordre supérieur »

Détails en § 12. Très déraisonnables, elles remettent en cause le caractère élémentaire. On quantifie non seulement sur les objets, mais aussi sur leurs propriétés (2e ordre), les propriétés de leurs propriétés (3e ordre), etc.

- **Logique du deuxième ordre.** Grâce aux graphes de relations, on a correspondance entre propriétés des $n$-uplets de $\mathbb{A}$ et parties de $\mathbb{A}^n$. Ceci suggère la formalisation suivante.

— **Formules.** Les notions de langage relationnel et de terme ne changent pas. Au deuxième ordre on ajoute, pour chaque arité $n$, des symboles de variables $X_n$. Aux formules de base on ajoute les $X_n(\mathbf{t})$ pour les $n$-uplets de termes $\mathbf{t}$. Pour chaque arité $n$ on ajoute les quantificateurs $\mathbb{\forall}_n$ et $\mathbb{\exists}_n$. (Au troisième ordre il faut de nouveaux quantificateurs et de nouvelles variables, etc.)

— **Structures.** La notion ne change pas. Les paramètres associent aux variables $X_n$ des éléments de $P(\mathbb{A}^n)$.

— **Satisfaction *naïve*, ou *pleine*.** Aménagement intuitif : on pose $\mathbb{A} \models (\mathbb{\exists}_n X_n)\varphi(\mathbf{a})$ ss'il existe $E \subseteq \mathbb{A}^n$ tel que $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}')$, où $\mathbf{a}'(X_n) = E$ ; de même pour $\mathbb{\forall}_n$. (Aménagement similaire au troisième ordre, etc.)

*Exemple.* Axiome « de Peano » : $(\mathbb{\forall}_1 X_1)[X_1(0) \wedge (\forall x)(X_1(x) \to X_1(s(x)))] \to [(\forall x)X_1(x)]$.

En syntaxe il n'y a pas d'ambiguïté sur la notation $\mathbb{\Lambda}^2$ ou $\mathbb{\Lambda}^2_{\omega,\omega}$ (rétrospectivement, la logique élémentaire serait $\Lambda^1_{\omega,\omega}$). Mais en sémantique, il y a d'autres options que la lecture naïve où $\mathbb{\forall}_n$ et $\mathbb{\exists}_n$ décrivent tout $P(\mathbb{A}^n)$. Cette sémantique « pleine », notée $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$, n'est donc pas la seule (voir § 12.2). Elle emploie la fonction ensembliste $P(\cdot)$, au comportement mal compris. Les propriétés de $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$ sont très mauvaises ; par exemple sa relation $\models$ dépend de l'hypothèse du continu (§ 12.1). $\mathbb{\Lambda}^2$, $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$

*La logique du deuxième ordre peut sembler naturelle mais la dépendance de la sémantique naïve au paysage ensembliste est extrême. Son comportement est donc très incertain.*

• **Ordre encore supérieur.** La logique du troisième ordre $\mathbb{\Lambda}^3$ est une extension encore supérieure ; etc. En fait l'ordre 2 suffit (§ 12.3).

• **Ordre variable.** Ce n'est pas une logique mais une *théorie des types* (v. fin § 7.1), i.e. presque une théorie des ensembles.

• **Ordre nul : logique propositionnelle.** Appauvrissement drastique enlevant les quantificateurs, donc logique « du $0^e$ ordre » ; on peut la noter $\Lambda^0_{\omega,\omega}$.

*Remarque.* La variante pédagogique commune de la logique propositionnelle n'emploie pas un langage relationnel $\mathcal{L}$ variable mais des « variables propositionnelles » fixées à l'avance.

— Ces variables sont des relations 0-aires ; pas de relations d'arité supérieure.

— Conçue pour illustrer complétude et compacité, la variante par variables propositionnelles perd la fonctorialité en le langage et surtout cache les « phénomènes de Löwenheim-Skolem » de § 11.3 et § 15.

— *Cette variante déforme l'intuition plus qu'elle ne la prépare.* La logique propositionnelle en langage relationnel variable n'a pas ces inconvénients mais est rarement présentée.

## § 7.3. Logiques non finitaires

• **Logiques infinitaires.** Elle remettent en cause le caractère finitaire. Elles permettent de conjoindre/disjoindre des infinités de formules, ou de quantifier sur des infinités de variables. Il ne s'agit pas de « formules de longueur infinie » : les formules restent des constructions finies, mais à partir d'opérateurs (conjonction, quantification) infinitaires.

Soient $\kappa \geqslant \lambda$ des cardinaux infinis.

— **Formules.** Il y a une subtilité pour $\bigwedge / \bigvee$. Les langages peuvent permettre des relations d'arité $< \lambda$ (v. notes conclusives). On augmente $\mathcal{V}$ pour avoir assez de variables. Les formules de base restent les $R(\mathbf{t})$. On garde la négation. On permet la conjonction/disjonction de $< \kappa$ formules $\varphi_i$ sous la condition $\operatorname{card}\left(\bigcup_I \operatorname{VarLib}\varphi\right) < \lambda$. On permet aussi la quantification existentielle/universelle sur des suites de variables de longueur $< \lambda$. (On ne permet donc pas d'alternance infinie $\exists\forall\exists\forall\dots$)

— **Structures.** La notion ne change pas.

— **Satisfaction.** Aménagement immédiat.

$\Lambda_{\kappa,\lambda}$

Soit $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ la logique résultante. Soit $\Lambda_{\infty,\lambda}$ la « réunion » de toutes les $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ pour tous les $\kappa$, et $\Lambda_{\infty,\infty}$ de même. (Attention : $\Lambda_{\infty,\lambda}(\mathcal{L})$-Én n'est plus un ensemble, car la collection des cardinaux n'en est pas un. Une théorie comme BGN manie ces logiques mieux que ZF.)

*Remarques*

— $\Lambda_{<\kappa,<\lambda}$ serait préférable.

— On remplace souvent $\kappa$ et $\lambda$ par l'ordinal associé (p. ex. $\operatorname{ord}(\aleph_0) = \omega$). Ceci justifie la notation $\Lambda_{\omega,\omega}$ pour la logique à connections et quantifications finies. De même, $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ permet les conjonctions dénombrables mais la quantification finie ($\omega_1$ : voir § 3.1).

— On lit souvent $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ au lieu de $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ mais cette notation cache le caractère fonctoriel en $\mathcal{L}$.

*Exemple.* Soit $\mathcal{L} = \{0, s\}$, où $s$ est une fonction unaire. Dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\mathcal{L})$, la formule « $s$ est bijective hors de 0 » $\wedge (\forall x)\left[\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x = s^n(0)\right]$ décrit $(\mathbb{N}\,; 0, x \mapsto x+1)$ à isomorphisme près.

La caractérisabilité des structures dénombrables à isomorphisme près est un trait marquant de $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ : exercice 18.11.

*Les logiques infinitaires sont plus expressives que $\Lambda_{\omega,\omega}$ et donc plus dépendantes de l'arrière-plan ensembliste. Seule $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ a encore de bonnes propriétés et des applications pratiques ; les autres sont trop puissantes.*

- **Logiques à quantificateurs généralisés.** On peut les voir comme remettant en cause le caractère élémentaire ou finitaire. Elles introduisent de nouveaux quantificateurs, dont une bonne notation suggérera l'interprétation : $\exists_{=\aleph_0}$, $\exists_{\geqslant\aleph_1}$, etc.

  — **Formules.** Soit $Q$ un nouveau quantificateur abstrait (non nécessairement unaire). La collection des formules (§ 6.3.B) le prend en compte.

  — **Structures.** La notion ne change pas.

  — **Satisfaction.** L'aménagement dépend du sens donné à $Q$. Par exemple $\mathbb{A} \models (\exists_{\geqslant\kappa} x)\varphi$ si $\{a \in \mathbb{A} : \mathbb{A} \models \varphi(a)\}$ est de cardinal $\geqslant \kappa$, etc.

On note $\Lambda(Q)$ l'extension d'une logique $\Lambda$ par le quantificateur $Q$. Certains quantificateurs restent modérés ; certains, notamment à partir des quantificateurs binaires, ont une grande puissance combinatoire. $\Lambda(Q)$

*Exemple.* On peut exprimer la dénombrabilité dans $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0}, \exists_{\geqslant\aleph_1})$ par : $(\exists_{\geqslant\aleph_0} x)(x = x) \wedge \neg(\exists_{\geqslant\aleph_1} x)(x = x)$.

*Une étude systématique des quantificateurs généralisés est impossible (v. notes conclusives). La pratique considère surtout, mais occasionnellement, les $\exists_{\geqslant\kappa}$.*

## § 7.4. Logiques non binaires

Elles remettent en cause le caractère binaire. Deux cas sont très pertinents.

- **Logique à modèles booléens.** Les valeurs de vérité sont dans un anneau de Boole (§ 5.1.A).

  — **Formules** et **structures** ne changent pas.

  — **Satisfaction.** L'ensemble des valeurs de vérité est un anneau de Boole complet $\mathbb{V}$, fixé à l'avance ou non. Sa *complétude* (exercice 5.7) signifie que toute partie $X \subseteq \mathbb{V}$ possède une borne supérieure $\bigvee X \in \mathbb{V}$ et une borne inférieure $\bigwedge X \in \mathbb{V}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules à paramètres dans $\mathbb{A}$. Une $\mathbb{V}$-*valuation* est une fonction $\|\cdot\| \colon \mathcal{F} \to \mathbb{V}$ vérifiant entre autres :

- $\|\bot\| = 0$ ;
- $\|a = a\| = 1$ ;
- $\|a = b\| = \|b = a\|$ ;
- $\|a = b\| \cdot \|b = c\| \leqslant \|a = c\|$ ;
- $\|R(\mathbf{a})\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|a_i = b_i\| \leqslant \|R(\mathbf{b})\|$ ;
- $\|\neg\varphi(\mathbf{a})\| = 1 + \|\varphi(\mathbf{a})\|$ ;
- $\|\varphi_1(\mathbf{a}) \wedge \varphi_2(\mathbf{a})\| = \|\varphi_1(\mathbf{a})\| \cdot \|\varphi_2(\mathbf{a})\|$ ;
- $\|(\exists x\ \varphi)(x, \mathbf{a})\| = \bigvee\{\|\varphi(b, \mathbf{a})\| : b \in \mathbb{A}\}$.

La $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}$ est dite $\mathbb{V}$-*valuée* ; ceci généralise le cas binaire où $\mathbb{V} = \mathbb{F}_2$. La complétude de $\mathbb{V}$ est dispensable, mais les bornes supérieures correspondant aux $\exists$ doivent exister.

*La logique à valeurs booléennes est particulièrement adaptée à la description du forcing ensembliste et de ses précurseurs.*

- **Logique continue.** Les valeurs de vérité sont dans $[0, 1]$.
  — **Formules.** Même notion.
  — **Structures.** Ce sont dorénavant des espaces métriques complets de diamètre borné, où les relations sont des fonctions uniformément continues $\mathbb{A}^n \to [0, 1]$.
  — **Satisfaction.** On interprète les connecteurs et quantificateurs comme des fonctions continues $[0, 1]^k \to [0, 1]$. Puis on définit la satisfaction comme en valeurs booléennes.

*La logique continue permet une théorie des modèles des structures métriques en tout point équivalente à la théorie binaire.* Cette dernière en est le cas dégénéré où les structures sont munies de la distance discrète et les relations sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

## § 7.5. Logiques non classiques

Elles remettent en cause le caractère classique. Les structures relationnelles ne sont plus étudiées une à une mais s'agrègent en multivers, qu'on peut imaginer comme des *familles continues* voire des *faisceaux* de structures. La satisfaction devient une donnée locale ; ceci déborde la vision « classique » de logique comme couplage $\models : \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str} \times \mathcal{L}\text{-}\text{Én} \to \mathbb{V}$. La valeur de $\varphi$ dans $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ dépend de ce qui se passe dans les $\mathbb{A}_{\mathfrak{q}}$ voisins.

On esquisse les sémantiques où « voisin » est modélisé par une relation binaire. *Les logiques non classiques ont des sémantiques concurrentes plus générales.* Voir compléments § I.

- **Logique intuitionniste.** Détails aux compléments § G. Elle formalise l'attitude intuitionniste face à la preuve ; en ce sens elle est *anti-classique.*

— **Formules.** La notion ne change pas, mais les symboles $\wedge, \vee, \forall$ cessent d'être redondants (cf. exercice 6.4).

— **Structures.** Le cas le plus simple est celui d'un multivers $\mathbb{M}$ sur un ordre partiel $\mathbb{P} = (P; \leqslant)$. On place en chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$. Pour $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}$, on a un $\mathcal{L}$-morphisme $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}} \colon \mathbb{A}_\mathfrak{p} \to \mathbb{A}_\mathfrak{q}$, avec les compatibilités attendues comme $f_{\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{r}} \circ f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}} = f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{r}}$. Cette notion de multivers est la plus simple mais pas la seule.

— **Satisfaction.** La notion de satisfaction devient *locale*, i.e. relative à la position de $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ dans $\mathbb{M}$. Dans le cas des ordres partiels, la satisfaction en $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ déforme la définition classique et dépend des $\mathbb{A}_\mathfrak{q}$ pour $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$.

Cette logique perd la démonstration par l'absurde, les lois de De Morgan, etc. Elle est strictement plus fine que la logique classique, qui s'y plonge (compléments § G, ex. G.3).

*Logique du constructivisme, centrale en logique catégorique, la logique intuitionniste a souvent des visées fondationnelles.*

• **Logique modale.** Détails aux compléments § H. Idéologiquement différente, mais ayant des traits communs avec la logique intuitionniste, elle modélise la nécessité en étendant la logique ordinaire ; en ce sens elle est *extra-classique*.

— **Formules.** On ajoute aux symboles logiques l'opérateur unaire $\square$, « nécessairement ».

— **Structures.** Le cas le plus simple est celui d'un multivers $\mathbb{M}$ sur une relation binaire $\mathbb{P} = (P\,;\,R)$. On place en chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$. Pour $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$, on a une fonction quelconque $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}} \colon \mathbb{A}_\mathfrak{p} \to \mathbb{A}_\mathfrak{q}$.

— **Satisfaction.** La notion de satisfaction devient *locale*, i.e. relative à la position de $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ dans $\mathbb{M}$. Dans le cas des relations binaires, la satisfaction en $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ étend la définition classique par : $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \square\varphi$ si pour tout $\mathfrak{q} \in P$ vérifiant $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi$.

*La logique modale a d'innombrables déclinaisons ; seules certaines ont un intérêt mathématique avéré.*

## § 7.6. Définition et impossible conclusion

Faire abstraction des §§ 7.4–7.5 mène à la définition suivante.

**Définition** (logique abstraite)**.** Une *logique abstraite* $\Lambda$ associe à chaque langage relationnel $\mathcal{L}$ une collection $\mathcal{L}$-Én et une relation $\models [\Lambda(\mathcal{L})]$ entre $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{L}$-énoncés, vérifiant les propriétés suivantes :

— si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, alors $\mathcal{L}$-Én $\subseteq \mathcal{L}'$-Én ;

— si en outre $\mathbb{A} \in \mathcal{L}'$-**Str** et $\varphi \in \mathcal{L}$-Én, alors $\mathbb{A} \models \varphi\,[\Lambda(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi\,[\Lambda(\mathcal{L}')]$ ;

— $\models$ est préservée par $\mathcal{L}$-isomorphisme ;

— si $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ préserve l'arité, alors elle induit $f$-Én : $\mathcal{L}$-Én $\to$ $\mathcal{L}'$-Én préservant la satisfaction, avec fonctorialité.

*Remarques*

— Cette définition englobe divers appauvrissements de $\Lambda_{\omega,\omega}$ comme :

 — la *logique sans égalité*, qui remet en cause le caractère égalitaire, en ne traitant plus l'égalité comme une « constante logique ». Peu naturelle en mathématiques ;

 — la *logique positive*, qui perd la négation. Régulièrement reprise en compte depuis les années 1960 ;

 — la *logique à variables finies*, très légitime en informatique et adaptée à la théorie des modèles finis. Liens avec l'algorithmique.

— Elle permet également de caractériser des logiques ; v. notes conclusives.

— En revanche elle ne capture que les logiques classiques binaires. Les logiques d'ordre supérieur ou infinitaires sont de ce type ; pas les logiques à modèles booléens ou continue, ni les logiques non classiques.

La prolifération des logiques, dont seules les plus connues ont été décrites, semble anarchique et décourageante. On souligne deux points.

— Ces logiques ne sont pas toutes pertinentes mathématiquement. L'un des aspects de « la logique » est d'offrir aux autres sciences des structures pour modéliser des raisonnements, des faits de langue, etc. Ce pan des mathématiques appliquées est respectable, mais disjoint de la logique mathématique.

— Même en mathématiques pures, utiliser une logique d'expressivité supérieure à $\Lambda_{\omega,\omega}$ expose à ne pas détecter les seules propriétés de l'objet d'étude. En augmentant la résolution au-delà de l'échelle élémentaire, on commence à capter le bruit de fond ensembliste. On a le droit d'utiliser un spectromètre de fabrication inconnue, mais avec prudence ; cela permet d'intuiter des phénomènes, pas de gagner des certitudes.

*Sauf mention contraire, l'ouvrage est en logique élémentaire.* Seules sont occasionnellement mentionnées quelques variantes utiles en mathématiques.

---

## Exercices

**7.1 (réduction de la logique multisorte).** Soit $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$ un langage aux types $\mathcal{T}$.

- Pour $\tau \in \mathcal{T}$, soit $R_\tau$ une relation unaire ; soit $\mathcal{L}_\mathcal{T} = \mathcal{L} \cup \{R_\tau : \tau \in \mathcal{T}\}$, langage non typé.
- Pour $\tau \in \mathcal{T}$ un type, soit $\alpha_\tau$ le $\mathcal{L}_\mathcal{T}$-axiome $(\exists x) R_\tau(x)$. Pour $c \in \mathcal{L}$ une constante de type $\tau$, soit $\alpha_c$ l'axiome $R_\tau(c)$. Pour $R$ de type $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$, soit $\alpha_R : (\forall \mathbf{x}) \left(R(\mathbf{x}) \to \bigwedge_{i=1}^n R_{\tau_i}(x_i)\right)$. Pour $f$ de type $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \to \tau$, soit $\alpha_f : (\forall \mathbf{x}) \left(\bigwedge_i R_{\tau_i}(x_i) \to R_\tau(f(\mathbf{x}))\right)$.
- Soit $\Theta_\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathcal{L}_\mathcal{T}$-énoncés $\alpha_\tau, \alpha_c, \alpha_R, \alpha_f$.
- Chaque $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$-formule $\varphi$ est traduite en une $\mathcal{L}_\mathcal{T}$-formule comme suit : $(R(\mathbf{t}))'$ est $R(\mathbf{t})$ ; $(\neg\varphi)'$ est $\neg\varphi'$ ; $(\varphi_1 \boxdot \varphi_2)'$ est $\varphi'_1 \boxdot \varphi'_2$ ; $((\forall x\colon \tau)\varphi)'$ est $(\forall x)(R_\tau(x) \to \varphi')$ ; $((\exists x\colon \tau)\varphi)'$ est $(\exists x)(R_\tau(x) \wedge \varphi')$.

a. À toute $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$-structure $\mathbb{A}$ (polytype) associer une $\mathcal{L}_\mathcal{T}$-structure $\mathbb{A}' \models \Theta_\mathcal{T}$ (monotype) telle que, pour toute $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$-formule $\varphi(\mathbf{a})$ à paramètres bien typés, on ait $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ $[\mathcal{L}\colon \mathcal{T}]$ ssi $\mathbb{A}' \models \varphi'(\mathbf{a})$ $[\mathcal{L}_\mathcal{T}]$.

b. À toute $\mathcal{L}_\mathcal{T}$-structure $\mathbb{B} \models \Theta_\mathcal{T}$, on associe $\check{\mathbb{B}} = \bigcup_{\tau\in\mathcal{T}} R_\tau[\mathbb{B}]$ dans la $\mathcal{L}_\mathcal{T}$-sous-structure induite (toujours monotype). Montrer que $\check{\mathbb{B}} \models \Theta_\mathcal{T}$, et que pour chaque $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$-formule $\varphi(\mathbf{b})$ à paramètres bien typés $\mathbf{b} \in \check{\mathbb{B}}$, on a $\mathbb{B} \models \varphi'(\mathbf{b})$ $[\mathcal{L}_\mathcal{T}]$ ssi $\check{\mathbb{B}} \models \varphi'(\mathbf{b})$ $[\mathcal{L}_\mathcal{T}]$.

c. En déduire que pour des $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$-énoncés, on a $\Phi \models \chi$ $[\mathcal{L}\colon \mathcal{T}]$ ssi $\Phi' \cup \Theta_\mathcal{T} \models \chi'$ $[\mathcal{L}_\mathcal{T}]$.

Retenir la méthode par traduction syntaxique et foncteur entre classes de structures. Suite à l'exercice 9.10.

**7.2.** On se place dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ (cette logique est encore raisonnable).

a. Donner des énoncés exprimant les propriétés suivantes : pour un ensemble, être fini ; pour un groupe, être de torsion, être finiment engendré, être simple ; pour un corps ordonné, être archimédien ; pour un graphe, être connexe.

b. Donner $\mathcal{L}$ dénombrable et $\Theta \subseteq \mathcal{L}$-Én tels que si $\mathbb{A} \models \Theta$, alors $\operatorname{card} \mathbb{A} \geqslant |2|^{|\aleph_0|}$.

C'est impossible dans $\Lambda_{\omega,\omega}$ (ex. 11.2).

**7.3.** On se place dans $\Lambda_{\omega_1,\omega_1}$ (cette logique est trop expressive). Donner un énoncé exprimant les propriétés suivantes : pour un ensemble, être dénombrable ; pour un ordre, être bon.

**7.4.** On se place dans $\mathbb{A}^{2,p}$ (cette sémantique est bien trop expressive).

a. Donner des énoncés exprimant les propriétés suivantes : pour un ensemble, être fini ; pour un ordre, être bon ; pour un groupe, être de torsion, être finiment engendré, être simple ; pour un corps ordonné, être archimédien ; pour un graphe, être connexe.

b. Donner un énoncé caractérisant les ensembles de cardinal $\aleph_n$.

**7.5.** Soit $\Lambda_1 = \Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$.

a. Donner un $\Lambda_1(\leqslant)$-énoncé $\varphi_1$ tel qu'il existe $\mathbb{A} \models \varphi_1$ de cardinal $\aleph_1$, mais aucune de cardinal $> \aleph_1$. [$\mathbb{A}_{<x}$.]

b. Donner $\mathcal{L}$ fini et un $\Lambda_1(\mathcal{L})$-énoncé $\varphi_2$ tels qu'il existe $\mathbb{A} \models \varphi_2$ de cardinal $\aleph_2$, mais pas de cardinal $> \aleph_2$. [Attention : « pour tout $x$, $\mathbb{A}_{<x}$ vérifie $\varphi_1$ » ne convient pas.] (*)

**7.6.** (Prérequis : exercice 6.3.) On se place en logique infinitaire $\Lambda_{\omega_1,\omega}$. (*)

a. Montrer qu'il existe $\mathcal{L}$ dénombrable et un $\mathcal{L}$-énoncé sans quantificateurs qui n'équivaut à aucun énoncé $\bigvee$-prénexe. [$G_\delta$, $F_\sigma$, Baire.]

b. On admet (v. § 11) qu'aucun ensemble d'énoncés élémentaires ne caractérise la finitude. Donner un $\{=\}$-énoncé qui n'équivaut à aucun énoncé prénexe.

**7.7 (modèles booléens).** Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{V}$-valuée. Elle est *pleine* si toute famille $\{\|\varphi(b, \mathbf{a})\| : b \in \mathbb{A}\}$ possède un maximum.

a. Montrer qu'on peut supposer $\mathbb{V}$ complet. [Dualité de Stone.]

b. Écrire les clauses manquantes dans la définition d'une $\mathbb{V}$-valuation : trois axiomes pour les fonctions de $\mathcal{L}$ ; valuation d'une disjonction, d'un quantificateur universel.

c. Soit $\{\mathbb{A}_i : i \in I\}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{F}_2$-valuées. Montrer que $\prod_I \mathbb{A}_i$ est naturellement une $\mathcal{L}$-structure $P(I)$-valuée pleine.

d. Soient $I \lhd \mathbb{V}$ un idéal et $\pi_I : \mathbb{V} \to \mathbb{V}/I$ la projection associée. Soit $X \subseteq \mathbb{V}$. L'idéal $I$ *préserve* $\bigvee$ *en* $X$ si $\bigvee\{\pi(x) : x \in X\} = \pi(\bigvee X)$. Il *préserve les sup existentiels* si pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{a})$ il préserve $\bigvee$ en $\{\|\varphi(b, \mathbf{a})\| : \mathbf{a} \in \mathbb{A}\}$. Montrer que si $\mathbb{A}$ est pleine, alors tout idéal préserve les sup existentiels.

e. Montrer que si $I \lhd \mathbb{V}$ préserve les sup existentiels, alors $\mathbb{A}$ est naturellement $\mathbb{V}/I$-valuée.

Le *lemme de Rasiowa-Sikorski* (§ SÉ2) montre que pour $\mathcal{L}$ dénombrable, il existe des idéaux maximaux préservant les sup existentiels. Ceci transforme $\mathbb{A}$ en structure classique.

**7.8 (comparaison de logiques).** Soient $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$ deux logiques. On suppose qu'elles ont la même notion de structure, et que pour leurs énoncés communs, elles s'accordent sur la satisfaction. On dit que $\Lambda_1$ *se plonge dans* $\Lambda_2$ si pour chaque $\Lambda_1(\mathcal{L})$-énoncé $\varphi_1$ il existe un $\Lambda_2(\mathcal{L})$-énoncé $\varphi_2$ tel que $\mathbb{A} \models \varphi_1$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi_2$.

a. Soit $M$ la « quantification majoritaire », où $(Mx)\varphi(x)$ (« la majorité des $x$ vérifie $\varphi$ ») signifie $\mathrm{card}\{a : \varphi(a)\} > \mathrm{card}\{a : \neg\varphi(a)\}$. Montrer que $\Lambda_{\omega,\omega}(M)$ se plonge dans $\mathbb{A}^{2,p}$.

b. Montrer que $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0})$ se plonge dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ ; que $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_n})$ se plonge dans $\mathbb{A}^{2,p}$.

(*) c. Montrer que $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ ne se plonge *pas* dans $\mathbb{A}^{2,p}$. [Décrire $(\mathbb{N} ; 0, s, I)$ où $I \subseteq \mathbb{N}$.]

Ne pas en déduire que $\mathbb{A}^{2,p}$ est « meilleure » : au contraire elle est incontrôlable. On peut montrer que $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0})$ et $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ sont incomparables. En résumé,

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{\omega_1,\omega} & & \mathbb{A}^{2,p} & \\
& \Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0}) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1}) \arrow[ul] \\
& & \Lambda_{\omega,\omega} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

**7.9 (comparaison de théories).** On considère deux logiques $\Lambda_1, \Lambda_2$ ayant la négation et deux langages $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$. On notera $\text{Én}_i = \Lambda_i(\mathcal{L}_i)\text{-Én}$. Soient $T_i \subseteq \text{Én}_i$ deux théories. On dit que $T_1$ *est réductible à* $T_2$ s'il existe deux fonctions $* : \text{Én}_1 \to \text{Én}_2$ et $* : \mathbf{Mod}(T_2) \to \mathbf{Mod}(T_1)$ ayant les propriétés suivantes :

– (adjonction) pour $\mathbb{M}_2 \in \mathbf{Mod}(T_2)$ et $\varphi_1 \in \text{Én}_1$, on a $\mathbb{M}_2^* \models \varphi_1$ ssi $\mathbb{M}_2 \models \varphi_1^*$ ;

– (densité) pour $\varphi_1 \in \text{Én}_1$, si $\mathbf{Mod}(T_1 \cup \{\varphi_1\}) \neq \varnothing$, alors il existe $\mathbb{M}_2 \in \mathbf{Mod}(T_2)$ tel que $\mathbb{M}_2^* \in \mathbf{Mod}(T_1 \cup \{\varphi_1\})$.

a. Vérifier que la réductibilité est un ordre partiel.

b. Justifier le nom « densité ».

c. On suppose $T_1$ réductible à $T_2$, et que pour tout énoncé, $(\neg\varphi_1)^* = \neg\varphi_1^*$. Montrer que $T_1 \models \varphi_1$ ssi $T_2 \models \varphi_1^*$.

La notion est déjà utile avec $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, et $T_1$ et $T_2$ engendrés par $\varnothing$ (auquel cas $\mathbf{Mod}(T_i) = \mathcal{L}_i\text{-}\mathbf{Str}$).

---

## Notes conclusives

[Bar85] ouvre le monumental [Barwise-Feferman] et n'est accessible qu'en deuxième lecture. Malgré son titre, [Manzano] est un éloge délayé de la logique multisorte.

- **Repères historiques**

> *As was pointed out by Tarski* [58b]*, in the logic $L_{\omega_1,\omega_1}$ it is possible to characterize the class of well-ordering relations by a* single *sentence of $L_{\omega_1,\omega_1}$. For this reason, and also in view of the behavior of $L_{\omega_1,\omega_1}$ as regards questions of completeness and axiomatization, it seems to the author that $L_{\omega_1,\omega_1}$ behaves more like* second-order *logic.*
>
> [Sco65, p. 329]

***Logiques à plusieurs sortes.*** Intérêt de Herbrand [Her30, p. 55], surtout syntaxique. V. § 9, notes conclusives.

***Logiques d'ordre supérieur.*** V. § 12, notes conclusives.

***Logiques infinitaires.*** V. [Moo97]. L'histoire moderne commence avec Karp [**Karp**] (issu de sa thèse [Kar59] dirigée par Henkin). Pour s'initier à $\Lambda_{\omega_1,\omega}$, [Keisler] demande déjà des techniques avancées (v. § SÉ2.5). Infinis supérieurs dans [Dickmann] (difficile).

***Quantificateurs généralisés.*** Introduits par

[Bar85] : John Barwise. « Model-theoretic logics : background and aims ». In : *Model-theoretic logics.* Perspect. Math. Logic. Springer, New York, 1985, p. 3-23

[Barwise-Feferman] : John Barwise et Solomon Feferman, éd. *Model-theoretic logics.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, New York, 1985, p. xviii+893

[Manzano] : María Manzano. *Extensions of first order logic.* T. 19. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, Cambridge, 1996, p. xxii+388

[Sco65] : Dana Scott. « Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers ». In: *Theory of Models Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley).* North-Holland, Amsterdam, 1965, pp. 329–341

[Her30] : Jacques Herbrand. « Recherches sur la théorie de la démonstration ». Thèse de doct. Faculté des Sciences de Paris, 1930, p. 128

[Moo97] : Gregory Moore. « The prehistory of infinitary logic : 1885–1955 ». In : *Structures and norms in science (Florence, 1995).* T. 260. Synthese Lib. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, p. 105-123

[**Karp**] : Carol Karp. *Languages with expressions of infinite length.* North–Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964, p. xix+183

[Kar59] : Carol Karp. « Languages with expressions of infinite length ». Thèse de doct. University of Southern California, 1959, p. 184

[Keisler] : Jerome Keisler. *Model theory for infinitary logic. Logic with countable conjunctions and finite quantifiers.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 62. Amsterdam-London : North-Holland Publishing Co., 1971. x+208

[Dickmann] : Maximo Dickmann. *Large infinitary languages.* T. 83. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Model theory. Amsterdam-Oxford : North-Holland Publishing Co., 1975, p. xv+464

Mostowski [Mos57] ; étude [Fuh65] et popularisation [Lin66]. Il n'y a pas de limite à l'inventivité des quantificateurs généralisés [HLV96].

***Logiques multivaluées.*** D'abord chez Łukasiewicz [Łuk20] et Post [**Pos21**]. • Logique à valeurs booléennes : on cite souvent Scott [Sco67] et Solovay, mais la technique est présente chez l'école polonaise [**RS50**] ([Mos48] envisage même des valeurs de vérité dans des treillis de Heyting). • Logique continue : dès [Chang-Keisler2], vraiment dévelopée depuis [Ben+08].

***Logique intuitionniste, resp. modale.*** V. compléments § G, notes conclusives, resp. § H, notes conclusives.

***Misc.*** • On ne peut faire le tour des enrichissements d'inspiration philosophique, informatique ou linguistique : formes de logiques libres ou inclusives (on peut avoir quelques réserves mathématiques) ; logiques à quantificateurs de Henkin [Wal70], à indépendance informationnelle (*IF*, Independence-Friendly logic) [Fef06b]. • Certaines débouchent rapidement sur des questions non triviales d'algorithmique. Outre la fécondité de la logique informatique, ceci montre que notre capacité à assigner un sens à des phrases banales est plus délicate et moins tranchée que la satisfaction en logique élémentaire. Cette dernière n'est qu'un petit fragment de la langue naturelle ; mais un fragment fiable.

• **Terminologie.** • On parle de *logique multisorte* car la théorie des modèles emploie le mot *type* dans un sens propre. • L'opposition « premier/deuxième ordre » n'est ni transparente ni judicieuse ; elle rebute. Pour contraster avec le cas *élémentaire*, la logique du deuxième ordre devrait être dite *ensembliste*, *méréologique*, ou *points-parties*. L'ad-

[Mos57] : Andrzej MOSTOWSKI. « On a generalization of quantifiers ». In : *Fund. Math.* 44 (1957), p. 12-36

[Fuh65] : Gebhard FUHRKEN. « Languages with added quantifier "there exist at least $\aleph_\alpha$" ». In : *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley)*. North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 121-131

[Lin66] : Per LINDSTRÖM. « First order predicate logic with generalized quantifiers ». In : *Theoria* 32 (1966), p. 186-195

[HLV96] : Lauri HELLA, Kerkko LUOSTO et Jouko VÄÄNÄNEN. « The hierarchy theorem for generalized quantifiers ». In : *J. Symbolic Logic* 61.3 (1996), p. 802-817

[Łuk20] : Jan ŁUKASIEWICZ. « O logice trójwartościowej ». In : *Ruch Filozoficzny* 23 (1920), p. 170-171

[**Pos21**] : Emil POST. « Introduction to a general theory of elementary propositions ». In : *Amer. J. Math.* 43.3 (1921), p. 163-185

[Sco67] : Dana SCOTT. « A proof of the independence of the continuum hypothesis ». In : *Math. Systems Theory* 1 (1967), p. 89-111

[**RS50**] : Helena RASIOWA et Roman SIKORSKI. « A proof of the completeness theorem of Gödel ». In : *Fund. Math.* 37 (1950), p. 193-200

[Mos48] : Andrzej MOSTOWSKI. « Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus ». In : *J. Symbolic Logic* 13 (1948), p. 204-207

[Chang-Keisler2] : Chen-Chung CHANG et Jerome KEISLER. *Continuous model theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 58. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1966, p. xii+166

[Ben+08] : Itaï BEN YAACOV et al. « Model theory for metric structures ». In : *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2.* T. 350. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, p. 315-427

[Wal70] : Wilbur WALKOE. « Finite partially-ordered quantification ». In : *J. Symbolic Logic* 35 (1970), p. 535-555

[Fef06b] : Solomon FEFERMAN. « What kind of logic is "Independence friendly logic" ? » In : *The Philosophy of Jaakko Hintikka.* Sous la dir. de Randall AUXIER et Lewis HAHN. Lasalle, IL : Open Court, 2006, p. 453-469

jectif *ensembliste* prête à confusion avec la combinatoire infinie, et le nom *méréologie* a été préempté par Leśniewski pour des écrits sans postérité réelle (toutefois Leśniewski forma Tarski).

• **Phénomènes ; théorème de Lindström.** • On peut confronter les diverses logiques $\Lambda$ aux lignes de division suivantes.

***Catégorisabilité absolue.*** Existence d'ensembles $\Theta \subseteq \mathcal{L}$-Én pour décrire des structures $\mathbb{A}$ à isomorphisme près. Notion historique très inadaptée ; v. §§ 8.3, 11.3, 15, ex. 8.3 et 10.5. Affinée en diverses mesures cardinales, v. ex. 15.9.

***Satisfaisabilité disjointe.*** V. § 8, notes conclusives.

***Compacité.*** Caractère finitaire de $\models$. V. § 11.

***Complétude.*** Existence d'un calcul déductif effectif reflétant $\models$. Forme abstraite : « si $A \subseteq$ Én est effectif (typ. récursif), alors $\{\varphi \in \text{Én} : A \models \varphi\}$ aussi ». V. § 10.

***Exprimabilité du caractère bien ordonné.*** Comme son nom l'indique.

***Interpolation.*** V. § 8, notes conclusives.

La grille de lecture n'est pas exhaustive. • Énoncé central en logique, le *théorème de Lindström* caractérise $\Lambda_{\omega,\omega}$ comme maximale sous certaines propriétés. Démonstration en compléments, § O.

• **Que transcrit la logique élémentaire ?** • $\Lambda_{\omega,\omega}$ ne modélise pas les langues naturelles ; le français emploie des énoncés à quantification d'ordre supérieur, à quantification généralisée, à modalités. [Boo84] ne couvre pas tout. • Elle ne modélise pas les mathématiques : il faut des théories (sinon, c'est le *logicisme*, v. infra). • $\Lambda_{\omega,\omega}$ avec théories ne modélise pas la *pratique* des mathématiques, car on raisonne souvent informellement au deuxième ordre. Mais elle permet de la transcrire. • On peut tout rédiger dans $\Lambda_{\omega,\omega}$ + ZF (ou extension finie de ZF). Ce n'est ni un théorème ni une « définition des mathématiques », mais un troublant fait empirique.

• **La logique du deuxième ordre est-elle une logique ?** • Question mal posée ; préférer « la sémantique pleine du deuxième ordre est-elle etc. ? » • La dépendance de $\mathbb{A}^{2,p}$ au comportement de $\in$ est extrême ; elle n'est pas autonome de présuppositions sur les ensembles. « *Set theory in sheep's clothing* » [Quine2, p. 66] ; puis « *The set theorists's ontological excesses may sometimes escape public notice, we see, disguised as logic.* » [Quine2, p. 68]. • *Quantifier sur les propriétés sans expliquer ce qu'est une propriété* est un non-sens ; induit par nos habitudes langagières, mais un non-sens. La réalité mathématique reste indocile à nos structures linguistiques les moins précises. • Ces remarques s'appliquent à la sémantique pleine, mais pas à la *sémantique de Henkin* (§ 12.2), en fait élémentaire.

• **Logicisme.** Croyance en la réductibilité des mathématiques à la logique. • Frege voulait fonder les mathématiques sur une pure logique formelle. Sa chimère expira pour une mauvaise raison : Russell trouva une contradiction due à l'emploi d'un principe de compréhension immodéré dans la « loi V » de [Frege4]. • L'effondrement de Frege n'eut aucun impact sur la communauté mathématique ; ni Cantor, ni Hilbert [Hil05, p. 175], ni Zermelo ne semble y avoir attaché d'importance ; on ignore ce qu'en pensa Peirce ; et Schröder était mort. • Russell

[Boo84] : George Boolos. « To be is to be a value of a variable (or to be some values of some variables) ». In : *J. Philos.* 81.8 (1984), p. 430-449

[Quine2] : Willard Quine. *Philosophy of logic.* 2$^{\text{e}}$ éd. Cambridge, MA : Harvard University Press, 1986, p. xii+109

[Frege4] : Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. II. Band.* Jena : Hermann Pohle, 1903. xv+265

[Hil05] : David Hilbert. « Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik ». In : *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904.* Leipzig : Teubner, 1905, p. 174-185 ne critiquait pourtant pas le bien-fondé du projet logiciste, qu'il reprit à son compte avec Whitehead [Russell-Whitehead]. • Selon Heijenoort [**Herbrand**, Préface], Skolem aurait lu « attentivement » [Russell-Whitehead] mais on peut en douter. Gödel fut déçu par leur lecture. Sur le tard, Hilbert fut pour quelque chose dans la renommée de Frege puis de Russell. L'histoire de la fortune éditoriale de Frege et de [Russell-Whitehead] reste à écrire. • Les travaux de Gödel sur l'incomplétude ont enterré le projet logiciste. Une « logique d'ordre supérieur », ou une théorie des types, est déjà un cadre axiomatique assez fort, tombant dans leur champ. Lesdits travaux n'ont pas enterré le programme de recherche de Hilbert. V. § 19, notes conclusives et § 20, notes conclusives. • Le logicisme a toujours semblé incompatible avec la pratique professionnelle des mathématiques. • Suite à l'ex. 12.8 et en § 12, notes conclusives.

• **Qu'est-ce qu'une constante logique ? (2) : sur le logicisme.** Suite de § 6, notes conclusives. • Si la nature est intrinsèquement *amorphe*, alors il y a exactement quatre relations binaires invariantes : rien n'est en relation, tout est en relation, l'égalité, l'inégalité. L'appartenance n'en fait pas partie : elle n'est pas logique. • Si la nature est intrinsèquement *typée* et sépare le niveau des objets du niveau de leurs propriétés, alors l'univers exhibe une rigidité. L'appartenance, représentée par la relation d'incidence $o \mathrel{\varepsilon} P$ entre objets et propriétés, est alors logique. Comme toutes les définitions mathématiques usuelles sont exprimables en termes d'appartenance, le point de vue typé entraîne que toute notion mathématique est logique : c'est le logicisme.

> *This conclusion is interesting, it seems to me, because the two possible answers correspond to two different types of mind. A monistic conception of logic, set theory, and mathematics, where the whole of mathematics would be a part of logic, appeals, I think, to a fundamental tendency of modern philosophers. Mathematicians, on the other hand, would be disappointed to hear that mathematics, which they consider the highest discipline in the world, is a part of something so trivial as logic; and they therefore prefer a development of set theory in which set-theoretical notions are not logical notions. The suggestion which I have made does not, by itself, imply any answer to the question of whether mathematical notions are logical.* [Tar86, fin]

• Vue depuis la position logiciste, la thèse amorphe est l'application d'un foncteur d'oubli à des données intrinsèques : le typage et la relation d'incidence entre types. Mais vu depuis la position amorphe, le typage met artificiellement, au-dessus du domaine, la collection de ses parties, etc. sans avoir clarifié le cadre ensembliste.

• **Qu'est-ce qu'une constante logique ? (3) : plus d'exemples.** • Soit $\mathbb{A}$ un domaine. Le groupe symétrique $S = \mathrm{Sym}(\mathbb{A})$ agit sur $\mathbb{A}$. En cas de typage du domaine en $\mathbb{A} = \coprod \mathbb{A}_\tau$, on pose $S = \prod \mathrm{Sym}(\mathbb{A}_\tau)$. • Si un groupe agit sur $X$, il agit sur $P(X)$ ; et s'il agit sur les $X_i$, il agit sur $\prod_I X_i$. Notamment $S$ agit sur $P(\mathbb{A} \times P(\mathbb{A}))$, etc. • La thèse de (Galois-Klein-Krasner-Mautner-)Tarski-Sher envisage la *structure logique* sur un domaine $\mathbb{A}$ comme la collection des invariants sous $S$. • Si $\operatorname{card} \mathbb{A} \geqslant 2$, aucun point n'a de valeur logique intrinsèque car l'action de $S$ sur $\mathbb{A}$ est transitive. Les seules relations unaires logiques, i.e. invariantes sous $S$, sont les réunions d'orbites : donc le tout ou le vide. • Deux paires d'éléments $(a_1, b_1)$ et $(a_2, b_2)$ sont conjuguées ssi

[Russell-Whitehead] : Alfred Whitehead et Bertrand Russell. *Principia Mathematica I.* Cambridge, 1910. xv+666
[**Herbrand**] : Jacques Herbrand. *Écrits logiques.* Paris : Presses Universitaires de France, 1968. 244 p.
[Tar86] : Alfred Tarski. « What are logical notions? » In: *Hist. Philos. Logic* 7.2 (1986). Edited by John Corcoran, pp. 143–154

$(a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2) \vee (a_1 \neq b_1 \wedge a_2 \neq b_2)$. Les seules relations binaires logiques sont la relation pleine, la relation vide, la relation $=$, et la relation $\neq$. • Deux parties de $\mathbb{A}$ sont conjuguées sous $S$ ssi elles sont équipotentes : les orbites dans $P(\mathbb{A})$ sont paramétrées par les cardinalités, finies ou infinies. Les relations-unaires-entre-relations-unaires logiques sont donc les quantifications (unaires) généralisées $\exists_{=\kappa}$, pour $\kappa$ fini ou infini, et leurs combinaisons. La propriété d'être vide ou non est notamment une constante logique. • Celle, pour une partie de paires, d'être (le graphe d')un bon ordre est logique, mais aucun bon ordre en particulier ne l'est. • Deux paires de parties ($A_1 \subseteq B_1$) et ($A_2 \subseteq B_2$) ne sont pas nécessairement conjuguées, mais elles le sont sitôt que $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A_2$ et $\operatorname{card} B_1 = \operatorname{card} B_2$. Le graphe de $\subseteq$ comme partie de $P(\mathbb{A})^2$ est donc une réunion d'orbites singletonnes : c'est un invariant. L'inclusion, i.e. l'implication vue comme relation-binaire-entre-relations-unaires logique. • Avec les relations ternaires-entre-relations-unaires, vient l'intersection, i.e. la conjonction. Au niveau infinitaire, on récupère la conjonction infinitaire comme constante logique. • En montant encore en complexité, on retrouve la quantification de deuxième ordre. • Cette discussion montre que les opérateurs de la logique élémentaire sont bien des constantes logiques ; les opérateurs infinitaires et les quantificateurs généralisés aussi. Elle présuppose évidemment un maniement de parties, i.e. un cadre ensembliste. • Suite (et fin) en § 13, notes conclusives.

• **Une classification des logiques ?** • [Cow79, § 2] considère les relations entre les logiques « naturelles » (celles de §§ 7.2–7.3). • Une classification des logiques abstraites (au sens de la définition 7.6) est impossible. Soit $\mathcal{C}$ leur collection, munie de l'ordre de l'ex. 7.8.

**Théorème** ([KV82, Theorems 1 et 7]).
- $\mathcal{C}$ forme un treillis complet.
- Tout treillis distributif ensembliste se plonge dans $\mathcal{C}$ et même dans le sous-treillis $\mathcal{C}'$ des logiques « à propriétés correctes ».
- Tout ordre partiel dénombrable se plonge dans le sous-treillis $\mathcal{C}''$ des logiques obtenues par ajouts successifs de quantificateurs généralisés.

• La complexité de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, et même $\mathcal{C}''$ est donc aberrante ; on ne peut pas classifier les logiques abstraites, même pas celles à quantificateurs généralisés. Il semble falloir se limiter aux logiques émergeant « naturellement ». • Cela signifie simplement que la définition générale capture des phénomènes trop disparates, de même que les axiomes de groupes ne permettent pas de théorie générale sans hypothèses supplémentaires.

• **Langages à relations infinitaires.** Manier des langages à relations d'arité infinie est interdit dans $\Lambda_{\omega,\omega}$. • On suppose $\kappa > \lambda$. Même en partant de relations d'arité finie, $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ a des formules d'arité $< \lambda$. Il suffit de $\kappa$-combiner des relations du langage (la restriction $< \lambda$ est liée à la contrainte sur les variables libres). L'étude de $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ se fait naturellement avec des langages à relations infinitaires. • Mais on peut vouloir de telles relations sans autoriser la conjonction infinitaire, i.e. chercher une « $\Lambda_{\omega,\lambda}$ ». • Si les relations de $\mathcal{L}$ sont d'arité finie, alors $\Lambda_{\omega,\lambda}(\mathcal{L})$ reste $\Lambda_{\omega,\omega}(\mathcal{L})$ : car seul un nombre fini de quantifications peut affecter une formule. • Solution technique : partir d'un langage à relations infinitaires, et le confier à $\Lambda_{\omega,\lambda}$. • La logique résultante a de bonnes propriétés [Kei63] ; elle se rapproche à certains égards de $\Lambda_{\omega,\omega}$. Mais elle n'est guère employée, et *n'a même pas de nom.*

[Cow79] : John Cowles. « The relative expressive power of some logics extending first-order logic ». In : *J. Symbolic Logic* 44.2 (1979), p. 129-146
[KV82] : Michał Krynicki et Jouko Väänänen. « On orderings of the family of all logics ». In : *Arch. Math. Logik Grundlag.* 22.3-4 (1982), p. 141-158
[Kei63] : Jerome Keisler. « A complete first-order logic with infinitary predicates ». In : *Fund. Math.* 52 (1963), p. 177-203

• **Une sémantique non classique de Kripke pour manier l'auto-référence.** • [Kri75] introduit une sémantique cumulative, à ne pas confondre avec la sémantique en multivers pour des logiques non classiques (compléments § G et § H). • On veut manier des énoncés capables d'auto-référence (typiquement, « cette phrase est fausse »). Cette auto-référence n'est pas étrangère aux mathématiques (§ 20). • On considère trois valeurs de vérité $\bot, \top, i$ (faux, vrai, indéterminée). Règles intuitives comme : la valeur de $\bot \wedge i$ est $\bot$, mais celle de $\bot \vee i$ reste $i$, etc. • On considère des paires $(V, F)$ d'ensembles *disjoints* d'énoncés, sans demander qu'ils partitionnent. Pour une telle paire, soit $V^+$ l'ensemble des énoncés que la connaissance de $(V, F)$ ainsi que les règles ci-dessus permettent de juger vrai, et $F^+$ ceux jugés faux. On pose enfin $(V, F)^+ = (V^+, F^+)$. Cette paire reste disjointe. • Par exemple si $\varphi$ est dans $V$, alors « $\varphi$ est vraie » est dans $V^+$ et « $\varphi$ est fausse » est dans $F^+$. • On s'intéresse aux points fixes de l'opérateur $^+$. Une façon d'en obtenir est de partir de $(\varnothing, \varnothing)$ et d'itérer $^+$ en prenant la réunion aux ordinaux limites. Cela stationne et c'est clairement le plus petit point fixe ; mais il y en a d'autres. • Si $(V, F)$ est un point fixe, alors $\varphi$ est vraie ssi « $\varphi$ est vraie » est vraie. *Ceci fait rentrer le prédicat de vérité dans le langage, contre le phénomène d'indéfinissabilité.* Mais $(V, F)$ ne forme pas une partition des énoncés : il peut y avoir de l'indétermination résiduelle. • Un énoncé est *déterminé* par un point fixe s'il est dans $V \cup F$. Par exemple l'énoncé $\psi$ : « cette phrase est fausse » reste indéterminé dans tout point fixe. • Dans cette approche (dont Kripke n'affirme pas la pertinence), aucun point fixe ne détermine $\psi \vee \neg\psi$ ; cependant la logique de base le jugerait vrai. • Un énoncé qui reste indéterminé dans tout point fixe peut être dit *paradoxal.* • Débattue et modifiée par les philosophes, cette sémantique cumulative a des développements mathématiques difficiles. Tour d'horizon en [She94], malheureusement daté car le sujet a progressé.

# § 8. Notions sémantiques

Cette section présente les notions-clefs en logique : *modèles*, *théories* et *axiomatisations* (§ 8.1) ; *complétude* d'une théorie et *équivalence logique* (§ 8.2) ; *catégoricité* absolue et relative (§ 8.3). Il y a beaucoup de terminologie et les exemples pourront sembler frustrants. Les outils pour les comprendre sont développés à partir de § 14.

Prérequis : § 6.

---

Une théorie mathématique sert à éclairer les phénomènes tombant dans son champ. On peut formaliser la notion de théorie puis former une théorie des théories, que l'on appellera *logique mathématique.* La logique mathématique reste alors une théorie des théories mathématiques, et non une théorie des mathématiques.

On fixe une logique, par exemple la logique élémentaire (§ 6.4.B), et un langage relationnel $\mathcal{L}$. Tout du long $\Phi$ désigne un ensemble de $\mathcal{L}$-formules et $\chi$

[Kri75] : Saul Kripke. « Outline of a theory of truth ». In : *The Journal of Philosophy* 72.19 (1975), p. 690-716

[She94] : Michael Sheard. « A guide to truth predicates in the modern era ». In : *J. Symbolic Logic* 59.3 (1994), p. 1032-1054 une $\mathcal{L}$-formule.

**Définition** (modèle)**.** Une structure $\mathbb{A}$ à paramètres $\mathbf{a}$ est *modèle* de $\Phi$, noté $\mathbb{A} \models \Phi(\mathbf{a})$, si pour chaque $\varphi \in \Phi$ on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$.

La relation $\Phi \models \chi$ (§ 6.4.A) signifie donc : tout modèle de $\Phi$ est modèle de $\chi$. Pour des énoncés on peut sous-entendre voire omettre $\mathbf{a}$ ; pas pour des formules.

## § 8.1. Théories et axiomatisations

**Définition A** (satisfaisabilité)**.** Un ensemble $\Phi$ de formules est *satisfaisable* s'il admet un modèle.

**Lemme.** $\Phi \models \chi$ ssi $\Phi \cup \{\neg\chi\}$ n'est pas satisfaisable.

**Démonstration.** Sens direct : un (éventuel) modèle de $\Phi$ n'est pas modèle de $\neg\chi$. Sens réciproque : un (éventuel) modèle de $\Phi$ n'est pas modèle de $\neg(\neg\chi)$. □

**Définition B** (théorie, théorie engendrée, axiomatisation)**.**

- Une *théorie* $\Theta$ est un ensemble d'énoncés satisfaisable et clos sous $\models$. Noter qu'alors $\Theta \models \varphi$ ssi $\varphi \in \Theta$. $\Theta$
- Si $A$ est un ensemble satisfaisable d'énoncés, soit $\mathrm{Th}(A) = \{\varphi \in \mathcal{L}\text{-Én} : A \models \varphi\}$ la *théorie engendrée* par $A$. (C'est bien une théorie.) $\mathrm{Th}(A)$
- Si $\mathrm{Th}(A) = \Theta$, on dit que $A$ *axiomatise* $\Theta$.

*Remarques*

- On assimile souvent une axiomatisation satisfaisable à sa théorie engendrée : on parle ainsi de la *théorie* des groupes, etc.
- On relâche parfois, en contexte, la clause de satisfaisabilité. Une théorie est alors n'importe quel ensemble d'énoncés clos sous $\models$.
- Un double abus de langage fait appeler *théorie* tout ensemble d'énoncés.

*Exemples*

- Les ensembles infinis sans structure sont axiomatisés en prenant, pour chaque entier $n$, l'axiome

$$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)\left(\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j\right).$$

C'est un *schéma d'axiomes*, i.e. une famille paramétrée d'axiomes. Chacun d'eux emploie une abréviation finie, dont la longueur croît avec $n$ ; les points de suspension se referment. (La terminologie gagnerait à changer.)

DLO

— La théorie des ordres linéaires denses sans extrémités (§ 2.2) DLO est axiomatisée dans $\mathcal{L}_{\mathrm{ord}} = \{\leqslant\}$ par :
  - — $<$ est un ordre total (clairement un axiome élémentaire) ;
  - — $(\forall x_1)(\forall x_2)[(x_1 < x_2) \to (\exists x_3)(x_1 < x_3 < x_2)]$ (densité) ;
  - — $(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(x_2 < x_1 < x_3)$ (pas d'extrémités).

— L'axiomatisation usuelle des groupes comprend les formules :
  - — $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$ ;
  - — $(\forall x_1)(x_1 \cdot 1 = 1 \cdot x_1 = x_1)$ (abréviation évidente $a = b = c$) ;
  - — $(\forall x_1)(x_1 \cdot x_1^{-1} = x_1^{-1} \cdot x_1 = 1)$.

— L'axiomatisation des anneaux commutatifs unitaires s'écrit aisément.

ACF

— L'axiomatisation ACF des corps algébriquement clos est celle des corps, augmentée pour chaque entier $d$ de l'énoncé :

$$(\forall x_0) \dots (\forall x_{d-1})(\exists y)(y^d + x_{d-1} \cdot y^{d-1} + \cdots + x_0 = 0).$$

C'est un schéma d'axiomes ; d'ailleurs l'abréviation $x^d$ n'a de sens qu'à $d$ fixé. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On axiomatise la caractéristique $p \in \mathcal{P}$ en notant $\chi_p$ l'énoncé $1 + \cdots + 1 = 0$, où $1$ apparaît $p$ fois. Soient alors $\mathrm{ACF}_p = \mathrm{ACF} \cup \{\chi_p\}$ et $\mathrm{ACF}_0 = \mathrm{ACF} \cup \{\neg\chi_p : p \in \mathcal{P}\}$.

RCF

— La théorie des corps réels clos RCF possède deux axiomatisations naturelles dans $\{0, 1, \leqslant, +, -, \cdot\}$.

1. L'une est d'inspiration analytique, à la Dedekind (voir compléments § A). Elle a les axiomes de corps ordonnés, et pour chaque paire de formules $\gamma(x, \mathbf{y})$ et $\delta(x, \mathbf{y})$ l'axiome « pour tout $\mathbf{y}$, si $\gamma$ et $\delta$ sont non vides et que tout point de $\gamma$ est strictement inférieur à tout point de $\delta$, alors il existe un point strictement entre ».
2. L'autre est d'inspiration algébrique, à la Artin-Schreier. Elle a les axiomes de corps ordonnés, l'équivalence « positif ssi carré », et pour chaque entier *impair* $d$ l'existence de racines aux polynômes de degré $d$.

Leur équivalence n'est pas évidente. V. compléments K, ex. K.5.

— La géométrie euclidienne est axiomatisable dans un langage à deux relations. V. compléments § L.

PA

— L'arithmétique de Peano PA, dans le langage $\{0, s, +, \cdot\}$, comprend les axiomes :
  — $(\forall x)\neg[s(x) = 0]$ ;
  — $(\forall y)(\exists x)[y \neq 0 \to y = s(x)]$ ;
  — $(\forall x_1)(\forall x_2)[s(x_1) = s(x_2) \to x_1 = x_2]$ ;
  — $(\forall x)(x + 0 = x)$ ;
  — $(\forall x_1)(\forall x_2)[s(x_1 + x_2) = x_1 + s(x_2)]$ ;
  — $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$ ;
  — $(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 \cdot s(x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1]$ ;
  — pour chaque $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x, \mathbf{y})$, l'axiome :

$$(\forall \mathbf{y}) \{[\varphi(0, \mathbf{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \mathbf{y}) \to \varphi(s(x), \mathbf{y}))] \to (\forall x)\varphi(x, \mathbf{y})\} .$$

  Ce schéma d'axiomes remplace la quantification naïve « du deuxième ordre », i.e. sur les parties. La théorie est étudiée en § 19–§ 20.

— L'axiomatique de Zermelo-Fraenkel est détaillée puis étudiée en § 21 sqq.

## § 8.2. Théories complètes et équivalence logique

**Définition A** (complétude)**.** Une théorie $\Theta$ est *complète* si pour tout énoncé $\varphi$, soit $\varphi \in \Theta$ soit $\neg\varphi \in \Theta$.

*Remarques*

— Ne pas confondre avec la complétude *d'une paire* $(\models, \vdash)$ (§ 10).
— Une théorie étant close sous $\models$, on a $\varphi \in \Theta$ ssi $\Theta \models \varphi$.
— La clause porte sur les seuls *énoncés*, pas sur les formules.
— Une *axiomatisation* est complète si la théorie engendrée l'est.

*Exemples*

— La théorie des ensembles infinis sans structure est complète (ex. 8.4, § 15.3).
— DLO est complète (ex. 8.5, § 15.3).
— La théorie des groupes n'est pas complète, ni celle des anneaux.
— ACF n'est pas complète. Mais $\mathrm{ACF}_q$ l'est pour $q \in \mathcal{P} \cup \{0\}$ (compléments § K).
— L'axiomatisation de la géométrie euclidienne des compléments § L est complète.

— RCF est complète (compléments § K, ex. K.5).

— L'arithmétique de Peano PA n'est pas complète (§ 20).

— ZFC n'est pas complète (§ 21, notes conclusives).

$\mathrm{Th}(\mathbb{S})$

**Définition B** (théorie d'une structure)**.** Si $\mathbb{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure, sa *théorie complète* est $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \{\varphi \in \mathcal{L}\text{-Én} : \mathbb{A} \models \varphi\}$.

*Remarques*

— C'est une théorie complète par définition de la satisfaction classique.

— $\mathbb{A} \models \Theta$ ssi $\Theta \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{A})$.

— Il y a double emploi avec $\mathrm{Th}(A)$ de la définition 8.1.B. En pratique il n'y a pas d'ambiguité (sauf à confondre axiome et structure).

— On peut noter $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbb{A})$ ou $\mathrm{Th}(\mathbb{A} \colon \mathcal{L})$, voire $\mathrm{Th}_{\Lambda(\mathcal{L})}(\mathbb{A})$ ou $\mathrm{Th}(\mathbb{A} \colon \Lambda(\mathcal{L}))$ pour plus de précision.

*Exemple.* $\mathrm{Th}(\mathrm{PA}) \subsetneq \mathrm{Th}(\mathbb{N})$. L'inclusion est propre car PA n'est pas complète.

$\equiv$

**Définition C** (équivalence logique)**.** Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont *logiquement équivalentes* si $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$. On note $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

*Remarques*

— Pour spécifier le langage on note $(\mathbb{A} ; \mathcal{L}) \equiv (\mathbb{B} ; \mathcal{L})$ ou $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}\ [\mathcal{L}]$ ; pour préciser également la logique, on note $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}\ [\Lambda(\mathcal{L})]$.

— On dit parfois *élémentairement équivalentes* si $\Lambda$ est la logique élémentaire ; il existe autant de notions d'équivalence logique que de logiques.

— L'isomorphisme est ontologique ; l'équivalence logique est phénoménologique, et relative à la logique.

*Exemples* (en logique élémentaire)

— Les anneaux $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont deux-à-deux non logiquement équivalents ;

— $(\mathbb{N}; <) \equiv (\mathbb{N} \sqcup_{<} \mathbb{Z}; <)$ (évident après § 18) ;

— $(\mathbb{Z} ; s) \equiv (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z} ; s)$ (fonction successeur ; idem) ;

— $(\mathbb{Q} ; +) \equiv (\mathbb{Q}^2 ; +) \equiv (\mathbb{R} ; +) \equiv (\mathbb{C} ; +)$ (ex. 18.2) ;

— $(\mathbb{Q}; <) \equiv (\mathbb{R}; <)$ (ex. 8.5, § 15.3) ;

— $(\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}} ; +, \cdot) \equiv (\mathbb{C} ; +, \cdot)$ (compléments § K) ;

— $(\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}} \cap \mathbb{R} ; +, \cdot) \equiv (\mathbb{R} ; +, \cdot)$ (compléments § K, ex. K.5).

Des outils sont donnés à partir de § 15.

**Lemme.** Soit $\Theta$ une théorie. Alors sont équivalents :

(i) $\Theta$ est complète ;

(ii) $\Theta$ est maximale dans l'ensemble des théories ordonné par inclusion ;

(iii) si $\mathbb{A} \models \Theta$, alors $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \Theta$ ;

(iv) tous les modèles de $\Theta$ sont logiquement équivalents.

**Démonstration.** Par définition, une théorie est toujours satisfaisable. En outre $\varphi \in \Theta$ ssi $\Theta \models \varphi$.

**(i)⇒(ii).** Supposons $\Theta \subseteq \Theta'$ ; soit $\varphi \in \Theta'$. Si $\Theta \models \neg\varphi$, alors $\Theta' \models \neg\varphi$, donc $\Theta'$ n'est pas satisfaisable ; absurde. Donc $\Theta \models \varphi$ et $\Theta' = \Theta$.

**(ii)⇒(iii).** Supposons $\Theta$ maximale. Si $\mathbb{A} \models \Theta$ alors $\Theta \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{A})$, d'où l'égalité.

**(iii)⇒(iv).** Évident.

**(iv)⇒(i).** Supposons tous les modèles logiquement équivalents ; soit $\varphi$ un énoncé. Si $\Theta \not\models \varphi$ et $\Theta \not\models \neg\varphi$, alors $\Theta \cup \{\varphi\}$ et $\Theta \cup \{\neg\varphi\}$ sont satisfaisables, donc possèdent des modèles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Ce sont des modèles de $\Theta$, qui ne sont pas logiquement équivalents puisque $\varphi$ les sépare. □

## § 8.3. Catégoricité, absolue et relative

Le rêve du projet axiomatique était de décrire les structures par des théories logiques qui les auraient caractérisées à isomorphisme près.

**Définition A** (catégoricité absolue)**.** Une théorie est *absolument catégorique* si tous ses modèles sont isomorphes. Une structure est absolument catégorique si sa théorie l'est.

*Remarques*

— L'absolue catégoricité entraîne la complétude. (Dans toute logique, l'isomorphisme entraîne l'équivalence logique.)

— Si $\mathbb{A}$ est une structure *finie* en langage fini, alors sa $\mathcal{L}$-théorie élémentaire $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ est absolument catégorique : lister les éléments et les relations qu'ils entretiennent, puis quantifier sur les éléments.

— En logique élémentaire, l'absolue catégoricité n'a lieu que pour les théories de structures finies : ce sont les phénomènes non standard, ou *de Löwenheim-Skolem*, à la naissance de la logique moderne (exercices 8.3 et 10.5 ; §§ 11.3 et 15).

On *relativise* donc la notion comme suit.

**Définition B** (catégoricité relative)**.** Soit $\kappa$ un cardinal (ou une cardinalité). Une théorie est *$\kappa$-catégorique* si tous ses modèles de taille $\kappa$ sont isomorphes.

*Exemples*

— La théorie d'un ensemble infini est $\kappa$-catégorique en tout $\kappa$ (évident).

— DLO est $\aleph_0$-catégorique (§ 2.2). Elle n'est catégorique en aucun $\kappa \geqslant \aleph_1$ (ex. 24.9).

— La théorie des anneaux de Boole sans atomes est $\aleph_0$-catégorique (ex. 5.6). Elle n'est catégorique en aucun $\kappa \geqslant \aleph_1$.

— $\mathrm{ACF}_q$ est $\kappa$-catégorique en tout $\kappa \geqslant \aleph_1$ (v. compléments § K.2). Elle n'est pas $\aleph_0$-catégorique (considérer $\overline{\mathbb{F}_q}^{\mathrm{alg}}$ et $\overline{\mathbb{F}_q(X)}^{\mathrm{alg}}$, où $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$).

— RCF n'est pas jamais $\kappa$-catégorique (pour $\kappa = \aleph_0$, considérer $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}} \cap \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{Q}(\pi)}^{\mathrm{alg}} \cap \mathbb{R}$).

— PA n'est pas $\aleph_0$-catégorique. (Argument avancé : elle n'est pas complète par § 20, donc pas $\kappa$-catégorique par § 15.3. On peut aussi raisonner par compacité et théorème de Löwenheim-Skolem (§ 11.3.)

*Remarques*

— En logique élémentaire, la $\kappa$-catégoricité pour un $\kappa \geqslant \aleph_0$ entraîne la complétude (Łoś-Vaught ; § 15.3).

— En logique élémentaire, la $\kappa$-catégoricité pour un $\kappa \geqslant \aleph_1$ équivaut à la $\kappa$-catégoricité pour tout $\kappa \geqslant \aleph_1$ non dénombrable (théorème de Morley, très difficile ; v. § 15, notes conclusives). Le comportement en $\aleph_0$ et en $\aleph_1$ n'est pas corrélé (DLO, $\mathrm{ACF}_q$).

— En logique élémentaire, il existe des théories complètes n'ayant aucune $\kappa$-catégoricité (RCF).

— Quelques aspects des liens déroutants entre complétude et catégoricité au deuxième ordre sont à l'exercice 8.7 et en notes conclusives.

§ 11.3 puis § 15.3 reviennent à la catégoricité.

---

## Exercices

Sauf mention contraire, les exercices sont en logique élémentaire.

**8.1.** Axiomatiser :

a. dans $\{0, +, -\}$, les groupes abéliens, puis les groupes abéliens divisibles ;
b. dans $\{0, <, +, -\}$, les groupes abéliens ordonnés ;
c. dans $\{0, 1, +, -, \cdot\}$, les anneaux commutatifs unitaires, puis les corps ;
d. dans $\{0, 1, +, -, \cdot\}$, RCF des deux façons proposées en § 8.1.

**8.2 (axiomatisations finies).** Le lemme suivant, établi à l'exercice 11.3, est à retenir.

**Lemme.** Si une théorie élémentaire possède une axiomatisation finie, alors chaque axiomatisation contient une axiomatisation finie.

Montrer que les théories élémentaires suivantes ne sont pas finiment axiomatisables : a. la théorie des groupes divisibles, b. la théorie des groupes sans torsion, c. la théorie des corps de caractéristique nulle, d. la théorie ACF des corps algébriquement clos.

**8.3 (phénomène de Löwenheim-Skolem descendant).**

a. Soient $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A'$ une partie non vide, contenant les constantes, et close sous les fonctions. Munir $A'$ d'une $\mathcal{L}$-structure de sorte que pour toute formule sans quantificateurs $\varphi_0(\mathbf{a})$ à paramètres dans $\mathbb{A}'$, on ait $\mathbb{A} \models \varphi_0(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A}' \models \varphi_0(\mathbf{a})$. (*)
b. Soit $\varphi$ un énoncé satisfaisable de la forme $(\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, où $\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est sans quantificateurs. Montrer que $\varphi$ possède un modèle au plus dénombrable. [Ajouter au langage un $\ell(\mathbf{y})$-uplet $\mathbf{f}$ de symboles de fonctions $\ell(\mathbf{x})$-aires. Alors $(\forall \mathbf{x})(\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ est satisfaisable. Engendrer.]
c. Généraliser à $\varphi$ quelconque, puis à une théorie dénombrable. [Forme prénexe.]

Suite à l'exercice 10.5. § 15 revient sur le phénomène.

**8.4 (élimination des quantificateurs).** Une théorie $\Theta$ *élimine les quantificateurs* si pour toute formule $\varphi(\mathbf{x})$ il existe $\varphi_0(\mathbf{x})$ sans quantificateurs telle que $\Theta \models (\forall \mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \varphi_0(\mathbf{x}))$.

a. On suppose que si $\varphi_0$ est de la forme $\bigwedge(\neg)R(\mathbf{t})$, alors $(\exists x)\varphi_0$ équivaut à une formule sans quantificateurs. Montrer que $\Theta$ élimine les quantificateurs.
b. Démontrer que $\Theta = \{(\exists x_1) \cdots (\exists x_n) \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j : n \in \mathbb{N}\}$ élimine les quantificateurs.
c. En déduire sa complétude. [Pas de constantes, peu d'énoncés sans quantificateurs.]

Suite à l'exercice 14.6. § 17.2 donne de meilleurs outils.

**8.5.** Montrer que l'axiomatisation naturelle des structures suivantes élimine les quantificateurs et est complète : a. DLO ; b. un graphe aléatoire (ex. 2.7) ; c. une relation d'équivalence ayant une infinité de classes, toutes infinies. La présence de fonctions complique considérablement la chose. (*)

**8.6 (théorie opposée).** Un langage est fixé ; on ne considère que des $\mathcal{L}$-structures. Dans cet exercice, on considère des ensembles d'énoncés non nécessairement satisfaisables. Pour un tel ensemble $\Theta$, soit $\Theta^{\mathrm{op}} = \bigcap\{\mathrm{Th}(\mathbb{A}) : \mathbb{A} \not\models \Theta\}$.

a. (Facultative.) Montrer que $\Theta^{\mathrm{op}}$ a bien un sens et est clos sous $\models$. Que faut-il pour étendre la construction à d'autres logiques ?
b. Montrer que $\Theta \subseteq \Theta^{\mathrm{opop}}$, et déduire $\Theta^{\mathrm{opopop}} = \Theta^{\mathrm{op}}$.
c. On admet qu'une théorie élémentaire finiment satisfaisable est satisfaisable (compacité, § 11). Montrer que $\Theta \cup \Theta^{\mathrm{op}} \models \bot$ ss'il existe $\varphi$ tel que $\Theta = \mathrm{Th}(\varphi)$ et $\Theta^{\mathrm{op}} = \mathrm{Th}(\neg\varphi)$.
d. Soit $\Theta$ la $\{=\}$-théorie des ensembles infinis ; on admet qu'elle est complète (v. ex. 8.4). En raisonnant par compacité (question précédente), montrer que $\Theta^{\mathrm{op}} = \{\bot\}$. En déduire que l'inclusion $\Theta \subseteq \Theta^{\mathrm{opop}}$ peut être stricte. (*)

**8.7 (complétude et catégoricité au deuxième ordre.).** (Prérequis : raisonnements ensemblistes et § 7.2.) On se place dans la sémantique pleine du deuxième ordre $\mathbb{A}^{2,p}$.

a. Soit $\mathcal{L}$ un langage (« de taille ensembliste »). Montrer qu'il existe une $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$-théorie complète non absolument catégorique. [$\mathcal{L}$-**Str** est une « classe propre ».]

b. Montrer qu'il existe un langage dénombrable $\mathcal{L}$ et une $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$-théorie complète non $\aleph_0$-catégorique. [Nommer les entiers, puis ajouter un point.]

c. Montrer qu'il existe un $\mathbb{A}^2(=)$-énoncé $\kappa$-catégorique en tout $\kappa$ mais non complet.

(*) d. Soit $\Theta$ une $\mathbb{A}^2(=)$-théorie complète et finiment axiomatisable. Montrer que $\Theta$ est absolument catégorique. [Minimiser le cardinal.]

e. Généraliser au cas d'une $\mathbb{A}^2(<)$-théorie complète, finiment axiomatisable, et ayant parmi ses modèles au moins un bon ordre.

**8.8 (catégoricité dans d'autres logiques).** (Prérequis : § 7.) Montrer l'absolue catégoricité : a. dans $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0})$, de $(\mathbb{N}; \leqslant)$ ; b. dans $\mathbb{A}^{2,p}$, de $(\mathbb{N}\,; 0, s)$ et $(\mathbb{R}\,; +, \cdot)$ ; c. dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}$, de $(\mathbb{N}\,; 0, s)$ ; d. (*) dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}$, de $(\mathbb{R}\,; +, \cdot)$ ; e. (*) dans $\Lambda_{\omega_1,\omega_1}$, de $(\mathbb{R}; \leqslant)$, f. (**) dans $\Lambda_{\omega_1,\omega_1}$, de $(\omega_1; \leqslant)$.

---

## Notes conclusives

- **Repères historiques**

> *Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein einfaches und vollständiges System voneinander unabhängiger Axiome aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.* [**Hilbert**, p. 3]

> *It would probably be better to reserve the word* definition *for the substitution of one symbol for another, and to say that a system of axioms is categorical if it is sufficient for the complete* determination *of a class of objects or elements.*
> [**Veb04**, début de § 2]

***Catégoricité, complétude.*** • Le terme « complet » est présent dès [**Hilbert**], mais ambigu ; Hilbert peut encore penser caractériser sa structure, i.e. raisonner en catégoricité. Au début cette complétude désigne plutôt l'impossibilité d'ajouter des points à la structure sans perdre certains axiomes. Elle devient rapidement (v. § A, notes conclusives) l'impossibilité d'ajouter d'autres axiomes sans atteindre l'insatisfaisabilité ; celle-ci n'est pas encore bien distinguée de l'incohérence. • Le mot « catégorique » apparaît dans [**Veb04**], mais Veblen attribue le terme à Dewey.

***Axiomatisations classiques.*** • DLO : les objets sont chez Cantor, mais Cantor ne s'intéressait pas à l'axiomatique. Axiomatisation chez Huntington [**Hun05a**]. • RCF : compléments § K, notes conclusives. Il existait avant cela des caractérisations, puis des axiomatisations des réels *au deuxième ordre*, par Hilbert notamment. V. compléments § A, notes conclusives. • Géométrie euclidienne : v. compléments § L, notes conclusives. Les tentatives d'axiomatiser la géométrie remontent à la Grèce. Celle de Hilbert

[**Hilbert**] : David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig : Teubner, 1899. 92 p.
[**Veb04**] : Oswald Veblen. « A system of axioms for geometry ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 5.3 (1904), p. 343-384
[**Hun05a**] : Edward Huntington. « The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory I ». In : *Ann. Math. (2)* 6 (1905), p. 151-184

précède l'identification de la logique du premier ordre [**Hilbert**]. • Arithmétique « de Peano » : § 19, notes conclusives. • Théorie « de Zermelo-Fraenkel » : § 21, notes conclusives.

***Complétude et catégoricité de théories.*** • La perte de la catégoricité absolue en logique élémentaire (fors cas triviaux) est la naissance de la logique mathématique, et l'un de ses principaux phénomènes. V. § 11, notes conclusives et § 15, notes conclusives. • $\aleph_0$-catégoricité de DLO : Cantor, § 2. • $\aleph_1$-catégoricité d'$\mathrm{ACF}_q$ : Steinitz, § K. • Complétude de DLO (ex. 8.4) : [Lan27a]. Les moyens modernes l'obtiennent par $\kappa$-catégoricité (§ 15.3). L'écriture de Langford a mal vieilli. Il fut aussi co-auteur avec le Lewis de la logique modale (compléments § H) du logiciste [Lewis-Langford].

***Élimination des quantificateurs (ex. 8.4).*** • C'est l'un des aspects les plus anciens de la logique, en fait des mathématiques formalisées. On cite parfois [Fou27, p. LI], qui s'occupe de systèmes d'inégalités linéaires. Mais dans cette veine il faudrait mentionner l'élimination pour les égalités linéaires, redécouverte par Gauß après avoir été connue en Chine. • En logique, la préoccupation apparaît chez Schröder [**Schröder3**, XI. Vorlesung] (trad. anglaise dans [Brady, pp. 339 sqq.]), et de là chez Skolem [**Sko19**] pour le *Klassenkalkül*. V. ex. 18.3 et § 18, notes conclusives. • Élimination pour DLO : Langford [Lan27a], qui ne connaissait pas Skolem. • L'élimination effective, utile pour des questions de décidabilité, mène à des problèmes d'algorithmique. La théorie des modèles contemporaine se contente d'élimination théorique.

> MOSTOWSKI — *At that time* [1930] *the method of eliminating quantifiers was pretty well known. Tarski took it over from Skolem, but he taught it at the university and applied it to several problems.*
>
> SACKS — *I did not know that. The method of elimination of quantifiers was invented by Skolem?*
>
> MOSTOWSKI — *Yes.*
>
> ...
>
> KEISLER — *What is the year on that?*
>
> MOSTOWSKI — *The year is 1919.*
>
> SACKS — *1919!* [**Cro75**, pp. 24–25]

• **Terminologie.** • L'adjectif « complet » a trop d'acceptions en logique mathématique. Celle de § 8.2 est la *complétude sémantique d'une théorie.* § 9 introduit la *complétude syntaxique d'une théorie*, et § 10 la *complétude d'une logique.* Il faudrait moderniser le lexique : une théorie est *maximale*; une paire $(\models, \vdash)$ est *adéquate.* • L'adjectif « catégorique » entre en conflit avec une autre branche des mathématiques. Il faudrait dire


[Lan27a] : Cooper LANGFORD. « Some theorems on deducibility ». In : *Ann. of Math. (2)* 28.1-4 (1926–1927), p. 16-40

[Lewis-Langford] : Clarence LEWIS et Cooper LANGFORD. *Symbolic logic.* The Century Philosophy Series. New York & London : The Century Co., 1932, p. x+506

[Fou27] : Joseph FOURIER. « Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année 1824 ». In : t. 7. Paris : Firmin Didot, père et fils, 1827

[**Schröder3**] : Ernst SCHRÖDER. *Vorlesungen über die Algebra der Logik III.* Leipzig : B. G. Teubner, 1895. viii+649

[Brady] : Geraldine BRADY. *From Peirce to Skolem.* T. 4. Studies in the History and Philosophy of Mathematics. A neglected chapter in the history of logic. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 2000, p. xii+468

[**Sko19**] : Thoralf SKOLEM. *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls.* Kristiania, 1919. 37 p.

[**Cro75**] : John CROSSLEY. « Reminiscences of logicians ». In : *Algebra and logic (Fourteenth Summer Res. Inst., Austral. Math. Soc., Monash Univ., Clayton, 1974).* 1975, 1-62. Lecture Notes in Math., Vol. 450

*monomorphe*, comme [LT36, II.].

- **Axiomatisabilité finie.** Un *schéma d'axiomes* est une commodité. Quitte à augmenter le langage, on peut toujours le ramener à un énoncé. Le théorème suivant est inspiré par [Kle52a] mais on recommande sa version dans [CV58].

**Théorème.** Soit $\Theta$ une théorie élémentaire en langage $\mathcal{L}$ fini. On suppose que $\Theta$ possède une axiomatisation récursive, et que tous ses modèles sont infinis. Alors il existe un langage fini $\mathcal{L}'$ contenant $\mathcal{L}$ et une $\mathcal{L}'$-théorie élémentaire $\Theta'$ contenant $\Theta$ :

– finiment axiomatisable dans $\mathcal{L}'$,
– et *conservative* sur $\Theta$, i.e. telle que si $\varphi \in \mathcal{L}$-Én, alors $\Theta' \models \varphi$ ssi $\Theta \models \varphi$.

• La démonstration n'est pas difficile mais demande du recul sur les notions en jeu, et sur la puissance d'expression de l'arithmétique. • La construction générale est abstraite, et ne produit pas d'unicité. Mais certaines théories ont une telle extension *naturelle*. Par exemple, $\mathrm{ACA}_0$ (centrale en « mathématiques à rebours ») est une extension conservative finie de PA, et BGN en est une de ZF ; v. compléments § R.

- **Axiomatisabilité finie et catégoricité.** • Par conjonction, une théorie finiment axiomatisable se ramène à un énoncé. • Il existe des énoncés élémentaires $\aleph_0$-catégoriques : p. ex. DLO. • Il existe des énoncés élémentaires $\aleph_1$-catégoriques [Per80]. • Aucun énoncé élémentaire n'est à la fois $\aleph_0$- et $\aleph_1$-catégorique [Zil80].

- **Complétude et catégoricité au deuxième ordre (o).** • Les liens entre les deux notions sont parfois appelés *problème de Carnap-Fraenkel*, ou *Gabelbarkeitssatz* de Carnap (de l'allemand *Gabel*, car une théorie $\Theta$ non complète admet une « fourche » d'extensions $\Theta \cup \{\varphi\}$ et $\Theta \cup \{\neg\varphi\}$). • On recommande [AR02a] et [AR02b], écrits pour philosophes. La question n'a pas reçu l'attention méritée [WG05]. • Dans l'ex. 8.7, la question a. n'a pas d'exemple « naturel » ; sans doute une axiomatisation au deuxième ordre ne semble-t-elle naturelle que si elle est finie. On n'affirme pas qu'il n'y a pas d'exemple dans le cas fini ; car la question n'est pas décidée par ZFC. Suite en § 12, notes conclusives.

- **Interpolation de Craig, satisfaisabilité disjointe de Robinson.** On donne déjà

[LT36] : Adolf Lindenbaum et Alfred Tarski. « Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien ». In : 1936
[Kle52a] : Stephen Kleene. « Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols. Two papers on the predicate calculus ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 10 (1952), p. 27-68
[CV58] : William Craig et Robert Vaught. « Finite axiomatizability using additional predicates ». In : *J. Symbolic Logic* 23 (1958), p. 289-308
[Per80] : Mikhail Peretjatkin. « Example of an $\omega_1$-categorical complete finitely axiomatizable theory ». In : *Algebra i Logika* 19.3 (1980), p. 314-347, 382-383
[Zil80] : Boris Zilber. « Solution of the problem of finite axiomatizability for theories that are categorical in all infinite powers ». In : *Theory of models and its applications (Russian).* Kazakh. Gos. Univ., Alma-Ata, 1980, p. 47-60
[AR02a] : Steve Awodey et Erich Reck. « Completeness and categoricity I. Nineteenth-century axiomatics to twentieth-century metalogic ». In : *Hist. Philos. Logic* 23.1 (2002), p. 1-30
[AR02b] : Steve Awodey et Erich Reck. « Completeness and categoricity II. Twentieth-century metalogic to twenty-first-century semantics ». In : *Hist. Philos. Logic* 23.2 (2002), p. 77-94
[WG05] : George Weaver et Benjamin George. « Fraenkel-Carnap properties ». In : *MLQ Math. Log. Q.* 51.3 (2005), p. 285-290

deux énoncés importants. Des démonstrations et applications sont régulièrement proposées en exercices. On se place en logique élémentaire.

**Lemme** (« interpolation » de Craig)**.** Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient $\varphi_1, \varphi_2$ des $\mathcal{L}_i$-formules. On suppose $\varphi_1 \models \varphi_2$. Alors il existe une $\mathcal{L}_\cap$-formule $\chi$ telle que $\varphi_1 \models \chi \models \varphi_2$.

**Lemme** (« satisfaisabilité disjointe » de Robinson)**.** Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient $\Theta_1, \Theta_2$ des $\mathcal{L}_i$-théories. On suppose que $\Theta_1 \cap \Theta_2$ est une $\mathcal{L}_\cap$-théorie complète. Alors $\Theta_1 \cup \Theta_2$ est satisfaisable.

# § 9. Déductions

Cette section formalise la démontrabilité. Celle-ci est relative à un système d'axiomes ; on parle de *déduction*, notée $\Phi \vdash \chi$. Il n'y a pas de « $\mathbb{A} \vdash \chi$ » car la relation est purement syntaxique. Après la notion de *cohérence* (§ 9.1), on présente les *règles pour* $\vdash$ (§ 9.2). La quantification donne lieu à des questions de *substitutions*, dont l'effet sémantique est décrit en § 9.3. Invitation facultative à un peu de théorie de la démonstration, l'exposé reste en déduction naturelle classique.

Prérequis : § 6.

---

La conséquence sémantique $\models$ (§ 6.4) reflète la *vérité* des mathématiques, pas la pratique de leur rédaction. Celle-ci repose sur la méthode axiomatique et sur l'outil déductif ; on formalise ce dernier. L'exposé comporte un choix méthodologique et un choix pédagogique.

— Méthodologique : on travaille en *déduction classique*, i.e. avec le tiers-exclu. (La déduction intuitionniste rejette ce principe ; compléments § G.)

— Pédagogique : on présente la *déduction naturelle*, qui transcrit directement la pratique usuelle. (Les « calculs à la Hilbert » sont préhistoriques. Le « calcul des séquents », moins naïf et plus symétrique, est mentionné aux compléments § J.)

La présente section décrit une conséquence syntaxique $\vdash$. Par la suite § 10 établit son équivalence avec $\models$.

## § 9.1. Notions syntaxiques

**Définition A** (séquent naturel, déduction naturelle)**.** $\vdash$

— Un *séquent naturel* est une expression $\Phi \vdash \chi$, où $\Phi$ est un ensemble de formules et $\chi$ une formule (on ne note pas les variables libres ici).

— Une *déduction naturelle* est un arbre fini de séquents obéissant aux règles de § 9.2. On parle d'*arbre de déduction* ; en logique élémentaire, ces objets sont toujours finis.

— Une formule est *conséquence syntaxique* de $\Phi$, noté $\Phi \vdash \chi$, s'il existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ fini et une déduction dont les feuilles sont des axiomes de $\Phi_0$ et la racine le séquent $\Phi_0 \vdash \chi$.

La notation ne présente aucun risque d'ambiguité.

Cette nouvelle notion de conséquence appelle un développement parallèle à § 8.1 et § 8.2.

$\mathrm{Th}(\Phi)$

**Définition B** (cohérence, théorie, axiomatisation, complétude)**.**

— Un ensemble de formules $\Phi$ est *cohérent* si $\Phi \nvdash \bot$.

— Une *théorie* $\Theta$ est un ensemble d'énoncés cohérent et clos sous $\vdash$.

— Si $A$ est un ensemble cohérent d'énoncés, soit $\mathrm{Th}(A) = \{\varphi \in \mathcal{L}\text{-Én} : A \vdash \varphi\}$ la *théorie engendrée* par $A$. (C'est bien une théorie.)

— Si $\mathrm{Th}(A) = \Theta$, on dit que $A$ *axiomatise* $\Theta$.

— Une théorie $\Theta$ est *complète* si pour tout énoncé $\varphi$, on a soit $\Theta \vdash \varphi$ soit $\Theta \vdash \neg\varphi$.

*Remarque.* Le dédoublement de la notion de conséquence entraîne d'apparents conflits terminologiques.

| Sémantique | Syntaxe |
|---|---|
| $\Phi \models \chi$ | $\Phi \vdash \chi$ |
| satisfaisabilité | cohérence |
| théorie | théorie |
| $\mathrm{Th}(A)$ | $\mathrm{Th}(A)$ |
| axiomatisation | axiomatisation |
| complétude | complétude |

L'équivalence des deux colonnes, et notamment des deux notions de complétude, est elle-même appelée *complétude de la logique élémentaire* (§ 10). Le terme est malheureux. Il signifie qu'en logique élémentaire, la conséquence sémantique $\models$ (en théorie des modèles) et la conséquence syntaxique $\vdash$ (en théorie de la démonstration) coïncident.

**Lemme.** Soient $\Phi$ un ensemble de formules, $\chi$ une formule, et $\Theta$ une théorie.

1. $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi \cup \{\neg\chi\}$ n'est pas cohérent.
2. Sont équivalents :
   (i) $\Theta$ est complète ;
   (ii) $\Theta$ est maximale dans l'ensemble des théories ordonné par inclusion.

**Démonstration.** La démonstration anticipe et motive les règles de § 9.2.

1. On suppose $\Phi \vdash \chi$. Par Aff, $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \chi$. Par Ax et Aff, $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \neg\chi$. Donc par $\perp_i$, on a $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \perp$. On suppose $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \perp$. Par $\neg_i$, on a $\Phi \vdash \neg\neg\chi$. Donc par $\perp_c$, $\Phi \vdash \chi$.
2. Ici « théorie » est bien sûr au sens syntaxique. Supposons $\Theta$ complète et $\Theta \subseteq \Theta'$ ; soit $\varphi \in \Theta'$. Si $\Theta \vdash \neg\varphi$, alors $\Theta' \vdash \neg\varphi$, donc $\Theta'$ n'est pas cohérente ; absurde. Donc $\Theta \vdash \varphi$ et $\Theta' = \Theta$.

   Supposons $\Theta$ maximale. Soit $\varphi$ un énoncé. Si $\Theta \nvdash \varphi$, alors $\Theta \cup \{\neg\varphi\}$ est cohérente, donc par maximalité $\neg\varphi \in \Theta$ et $\Theta \vdash \neg\varphi$. C'est la complétude.

□

## § 9.2. Règles de déduction

On allège les notations autant que possible : pas d'accolades pour les ensembles, pas de parenthèses inutiles, pas d'indication des variables libres.

Les règles se répartissent en trois groupes : *structurel* (règles indépendantes de la logique), *propositionnel* (pour les connecteurs et $\perp$), *élémentaire* (pour les quantificateurs et $=$).

- **Groupe structurel.** Les règles structurelles sont simples. 1. Pour commencer une démonstration, on fait une hypothèse (*axiome*). 2. On peut ajouter des hypothèses inutiles (*affaiblissement*).

**Axiome :**

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ \text{Ax}$$

**Affaiblissement :**

$$\frac{\Phi \vdash \chi}{\Phi, \psi \vdash \chi}\ \text{Aff}$$

- **Groupe propositionnel.** Les symboles peuvent être *introduits* et *éliminés*. Les règles sont intuitives car faites pour modéliser la pratique. L'introduction de la négation $\neg_i$ n'est *pas* la démonstration par l'absurde ; celle-ci demande une règle dédiée $\perp_c$. L'élimination de conjonction $\wedge_e$ vient en deux déclinaisons, selon le côté conservé ; remarque analogue pour $\vee_i$. La ternarité dans $\vee_e$ reflète une démonstration par disjonction de cas.

**Absurdité :**

$$\frac{\Phi \vdash \chi \quad \Phi \vdash \neg\chi}{\Phi \vdash \perp}\ \perp_i \qquad \Bigg| \qquad \frac{\Phi \vdash \perp}{\Phi \vdash \chi}\ \perp_e$$

**Négation :**

$$\frac{\Phi, \chi \vdash \bot}{\Phi \vdash \neg\chi}\;{\scriptstyle \neg_i} \qquad\Bigg|\qquad \frac{\Phi \vdash \neg\chi}{\Phi \cup \{\chi\} \vdash \bot}\;{\scriptstyle \neg_e}$$

**Démonstration par l'absurde :**

$$\frac{\Phi \vdash \neg\neg\chi}{\Phi \vdash \chi}\;{\scriptstyle \bot_c}$$

**Conjonction :**

$$\frac{\Phi \vdash \chi_1 \quad \Phi \vdash \chi_2}{\Phi \vdash \chi_1 \wedge \chi_2}\;{\scriptstyle \wedge_i} \quad\Bigg|\quad \frac{\Phi \vdash \chi_1 \wedge \chi_2}{\Phi \vdash \chi_1}\;{\scriptstyle \wedge_{e(1)}} \qquad \frac{\Phi \vdash \chi_1 \wedge \chi_2}{\Phi \vdash \chi_2}\;{\scriptstyle \wedge_{e(2)}}$$

**Disjonction :**

$$\frac{\Phi \vdash \chi_1}{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2}\;{\scriptstyle \vee_{i(1)}} \qquad \frac{\Phi \vdash \chi_2}{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2}\;{\scriptstyle \vee_{i(2)}} \quad\Bigg|\quad \frac{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2 \quad \Phi, \chi_1 \vdash \psi \quad \Phi, \chi_2 \vdash \psi}{\Phi \vdash \psi}\;{\scriptstyle \vee_e}$$

**Implication :**

$$\frac{\Phi, \chi \vdash \psi}{\Phi \vdash \chi \to \psi}\;{\scriptstyle \to_i} \qquad\Bigg|\qquad \frac{\Phi \vdash \chi \to \psi \quad \Phi \vdash \chi}{\Phi \vdash \psi}\;{\scriptstyle \to_e}$$

*Remarques*

- La redondance entre $\bot$ et $\neg$ est claire : $\neg\varphi$ et $\varphi \to \bot$ se démontrent l'une l'autre, même sans démonstration par l'absurde. La théorie de la démonstration considère donc $\neg\varphi$ comme une abréviation. En mathématiques, la négation est plus naturelle que $\bot$ ; d'où le choix de la conserver.
- La démonstration par l'absurde est une *élimination de la double négation*. La logique intuitionniste garde $\bot_e$ mais perd $\bot_c$. La logique minimale perd les deux. V. compléments § G.

*Exemples*

- Relire et vérifier la démonstration du lemme 9.1.
- $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ et $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ se démontrent l'une l'autre. En effet :

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi_1 \vdash \varphi_1}\;{\scriptstyle \mathrm{Ax}}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \varphi_1}\;{\scriptstyle \mathrm{Aff}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \vdash \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2}\;{\scriptstyle \mathrm{Ax}}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2}\;{\scriptstyle \mathrm{Aff}}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \neg\varphi_1}\;{\scriptstyle \wedge_e}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \bot}\;{\scriptstyle \bot_i}$$

  et de même pour $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_2 \vdash \bot$. Soit $\overline{S_i}$ le séquent $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_i \vdash \bot$. La barre indique qu'il en existe une dérivation dont les feuilles sont des axiomes. Alors :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\,{\scriptstyle \mathrm{Ax}}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\,{\scriptstyle \mathrm{Aff}} \quad \dfrac{}{S_1} \quad \dfrac{}{S_2}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \bot}\,{\scriptstyle \vee_e}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \vdash \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)}\,{\scriptstyle \neg_i}$$

La réciproque est un exercice.

- **Groupe élémentaire.** Il demande une notion de *substitution*.

**Définition** (terme substituable, substitution)**.** Un terme $t$ est *substituable* à une variable $x$ dans une formule $\varphi$ si $x \notin \operatorname{VarLié} \varphi$ et $\operatorname{Var} t \cap \operatorname{VarLié} \varphi = \varnothing$. Si c'est le cas on note $\varphi[x := t]$ le résultat de la *substitution* de chaque occurrence de $x$ dans $\varphi$ par $t$. $\varphi[x := t]$

S'il n'y pas ambiguïté sur $x$, par exemple si $\varphi$ possède une seule variable libre, on note $\varphi[t]$. Ne pas confondre avec le *remplacement* $\varphi(t)$ (§ 6.3).

*Remarques*

— On peut aussi procéder à des substitutions simultanées $\varphi[\mathbf{x} := \mathbf{t}]$, mais l'esprit de la déduction est plutôt de revenir à des étapes minimales $[x := t]$, sans uplets. Noter leur non-commutativité.

— Avec une notion plus permissive de formule (§ 6.3.B et la remarque la suivant), la définition est plus pénible car elle doit exclure les « captures de variables » ; v. notes conclusives.

**Égalité :**

$$\begin{array}{r|l} \dfrac{}{\vdash t = t}\,{\scriptstyle =_i} & \dfrac{\Phi \vdash \chi[x := t_1] \quad \Phi \vdash t_1 = t_2}{\Phi \vdash \chi[x := t_2]}\,{\scriptstyle =_e} \\ \text{pour chaque terme } t & \text{si } t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont substituables à } x \text{ dans } \chi \end{array}$$

**Quantificateur universel :**

$$\begin{array}{r|l} \dfrac{\Phi \vdash \chi}{\Phi \vdash \forall x\ \chi}\,{\scriptstyle \forall_i} & \dfrac{\Phi \vdash \forall x\ \chi}{\Phi \vdash \chi[x := t]}\,{\scriptstyle \forall_e} \\ \text{si } x \notin \operatorname{VarLib} \Phi & \text{si } t \text{ est substituable à } x \text{ dans } \chi \end{array}$$

**Quantificateur existentiel :**

$$\begin{array}{r|l} \dfrac{\Phi \vdash \chi[x := t]}{\Phi \vdash \exists x\ \chi}\,{\scriptstyle \exists_i} & \dfrac{\Phi \vdash \exists x\ \psi \quad \Phi, \psi \vdash \chi}{\Phi \vdash \chi}\,{\scriptstyle \exists_e} \\ \text{si } t \text{ est substituable à } x \text{ dans } \chi & \text{si } x \notin \operatorname{VarLib}(\Phi \cup \{\chi\}) \end{array}$$

*Remarques*

— Pour plus de symétrie entre $\forall_i$ et $\exists_e$, noter que dans le premier cas, la clause équivaut à : « $x \notin \mathrm{VarLib}(\Phi \cup \{\forall x\ \chi\})$ ».

— On peut déduire $\vdash \exists x\ x = x$, d'où le besoin de ne traiter que des structures *non vides* (§ 6.1.B) ; voir V. notes conclusives.

*Exemples*

— $\neg\exists x\ \varphi$ et $\forall x\ \neg\varphi$ se démontrent l'une l'autre.

Par construction de Form (§ 6.3.B), considérer de telles formules présuppose que $x$ n'est pas liée dans $\varphi$ ; notamment $x$ est substituable à $x$ dans $\varphi$, et $\varphi[x := x]$ reste $x$. D'une part :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Ax}$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ \varphi \vdash \neg\exists x\ \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Aff}$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ \varphi, \varphi \vdash \neg\exists x\ \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Ax}$}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Aff}$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ \varphi, \varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \exists_i$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ \varphi, \varphi \vdash \exists x\ \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \bot_i$}
\BinaryInfC{$\neg\exists x\ \varphi, \varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ \varphi \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \forall_i$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ \varphi \vdash \forall x\ \neg\varphi$}
\end{prooftree}
$$

et d'autre :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Ax}$}
\UnaryInfC{$\exists x\ \varphi \vdash \exists x\ \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Aff}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \exists x\ \varphi \vdash \exists x\ \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Ax}$}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Aff}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \exists x\ \varphi, \varphi \vdash \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Ax}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi \vdash \forall x\ \neg\varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Aff}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \exists x\ \varphi, \varphi \vdash \forall x\ \neg\varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \forall_e$}
\UnaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \exists x\ \varphi, \varphi \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \bot_i$}
\BinaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \exists x\ \varphi, \varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg_i$}
\UnaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \varphi \vdash \neg\exists x\ \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \mathrm{Aff}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \exists x\ \varphi, \varphi \vdash \neg\exists x\ \varphi$}
\RightLabel{$\scriptstyle \exists_e$}
\BinaryInfC{$\forall x\ \neg\varphi, \exists x\ \varphi \vdash \neg\exists x\ \varphi$}
\end{prooftree}
$$

Donc en introduisant $\bot$ puis $\neg$, on trouve $\forall x\ \neg\varphi \vdash \neg\exists x\ \varphi$.

— Grâce à $\bot_c$, $\exists x\ \varphi$ et $\neg\forall x\ \neg\varphi$ se démontrent l'une l'autre.

— Toute formule est $\vdash$-équivalente à une où $x$ n'est pas variable liée (« $\alpha$-renommage »).

• **Simplification de la présentation.** On peut heureusement alléger les arbres de déduction. Les hypothèses sont notées en feuilles. Quand une hypothèse est consommée (par $\neg_i$, $\rightarrow_i$, $\vee_e$ ou $\exists_e$), on la barre, comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Phi & \cancel{\chi}\\ \vdots & \vdots \\ \psi & \neg\psi\end{matrix}}{\bot}\ \bot_i}{\neg\chi}\ \neg_i$$

Il faut bien barrer toutes les occurrences pertinentes, i.e. celles qui majorent l'emploi de la règle. Au moment d'introduire $\forall x$, vérifier que $x$ n'est libre dans aucune feuille majorante. Au moment d'éliminer $\exists x$, barrer la formule non quantifiée, et s'assurer qu'aucune autre formule n'a $x$ dans ses variables libres.

La lecture d'un arbre aux feuilles barrées étant ardue, on indique l'étape d'élimination comme dans l'exemple suivant.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)} \quad \cancel{\varphi\rightarrow\chi}^{(3)}}{\chi}\ \rightarrow_e \quad \cancel{\neg\chi}^{(2)}}{\bot}\ \bot_i}{\neg\varphi}\ \neg_i\ (1)}{\neg\chi\rightarrow\neg\varphi}\ \rightarrow_i\ (2)}{(\varphi\rightarrow\chi)\rightarrow(\neg\chi\rightarrow\neg\varphi)}\ \rightarrow_i\ (3)$$

*Exemple.* On montre à nouveau que $\neg\exists x\ \varphi$ et $\forall x\ \neg\varphi$ se déduisent l'une de l'autre. D'une part :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\ \varphi \quad \dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\exists x\ \varphi}\ \exists_i}{\bot}\ \bot_i}{\neg\varphi}\ \neg_i\ (1)}{\forall x\ \neg\varphi}\ \forall_i$$

et d'autre :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists x\ \varphi}^{(3)} \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \quad \dfrac{\forall x\ \neg\varphi}{\neg\varphi}\ \forall_e \quad \cancel{\exists x\ \varphi}^{(1)}}{\bot}\ \bot_i}{\neg\exists x\ \varphi}\ \neg_i\ (1)}{\neg\exists x\ \varphi}\ \exists_e\ (2)}{\bot}\ \bot_i}{\neg\exists x\ \varphi}\ \neg_i\ (3)$$

## § 9.3. Effet sémantique des substitutions

Les substitutions ont l'effet attendu sur la satisfaction. Pour une variable $x$, on note $x^c$ l'ensemble $\mathcal{V}\backslash\{x\}$. Si des paramètres $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ coïncident sur toutes les variables sauf éventuellement $x$, on écrit donc $\mathbf{a}_{|x^c} = \mathbf{a}'_{|x^c}$.

**Proposition.** Soient $\mathbb{A}$ une structure, $\mathbf{a}$ des paramètres, $\varphi$ une formule, $x$ une variable, et $\tau$ un terme substituable à $x$ dans $\varphi$. Soient $\varphi^*$ la formule $\varphi[x := \tau]$ et $\mathbf{a}^*$ les paramètres tels que $\mathbf{a}^*_{|x^c} = \mathbf{a}_{|x^c}$ et $\mathbf{a}^*(x) = \tau(\mathbf{a})$. Alors $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$.

**Démonstration.** Elle est incluse pour l'exhaustivité ; on peut la traiter comme un exercice, ou ne pas la lire. Elle utilise deux lemmes.

**Lemme A.** Soient $\mathbb{A}$ une structure, $\mathbf{a}$ des paramètres, $t$ un terme, $x$ une variable, $\tau$ un second terme. Soient $t^*$ le terme $t[x := \tau]$ et $\mathbf{a}^*$ les paramètres tels que :

$$\mathbf{a}^*_{|x^c} = \mathbf{a}_{|x^c} \text{ et } \mathbf{a}^*(x) = \tau(\mathbf{a}).$$

Alors $t^*(\mathbf{a}) = t(\mathbf{a}^*)$.

**Démonstration.** Récurrence sur $t$. Si $t$ est une variable $y \neq x$, alors $t^*$ reste $t$. Si $t$ est $x$, alors $t^*$ est $\tau$, d'où $t^*(\mathbf{a}) = \tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^*(x) = t(\mathbf{a}^*)$. Si $t$ est une constante, $t^*$ reste $t$. Enfin si $t$ est de la forme $f(t_1, \dots, t_n)$, alors $t^*$ est $f(t_1^*, \dots, t_n^*)$ et par récurrence :

$$\begin{aligned} t^*(\mathbf{a}) &= f[\mathbb{A}]\,(t_1^*(\mathbf{a}), \dots, t_n^*(\mathbf{a})) \\ &= f[\mathbb{A}]\,(t_1(\mathbf{a}^*), \dots, (t_n(\mathbf{a}^*)) \\ &= t(\mathbf{a}^*). \end{aligned}$$

□

**Lemme B.** Soient $\mathbb{A}$ une structure, $\tau$ un terme, $x, y$ deux variables *distinctes* avec $y \notin \operatorname{Var} \tau$, et $b \in \mathbb{A}$. Pour tous les paramètres $\mathbf{a}$ on note :

— $\mathbf{a}^*$ les paramètres tels que $\mathbf{a}^*_{|x^c} = \mathbf{a}_{|x^c}$ et $\mathbf{a}^*(x) = \tau(\mathbf{a})$ ;

— $\mathbf{a}'$ les paramètres tels que $\mathbf{a}'_{|y^c} = \mathbf{a}_{|y^c}$ et $\mathbf{a}'(y) = b$.

Alors pour tous les paramètres $\mathbf{a}$, on a l'égalité $(\mathbf{a}')^* = (\mathbf{a}^*)'$.

**Démonstration.** Si $z \in \mathcal{V}$ est distincte de $x$ et $y$, alors pour chaque $\mathbf{a}$ :

$$(\mathbf{a}')^*(z) = \mathbf{a}'(z) = \mathbf{a}(z) = \mathbf{a}^*(z) = (\mathbf{a}^*)'(z).$$

En $y$, on a :

$$(\mathbf{a}')^*(y) = \mathbf{a}'(y) = b = (\mathbf{a}^*)'(y).$$

Enfin en $x$, puisque $y \notin \operatorname{Var} \tau$, on a :

$$(\mathbf{a}')^*(x) = \tau(\mathbf{a}') = \tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^*(x) = (\mathbf{a}^*)'(x). \qquad \square$$

On démontre la proposition par récurrence sur $\varphi$.

— Si $\varphi$ est de la forme $R(\mathbf{t})$ (dont $\perp$ ou l'égalité), soit $\mathbf{t}^*$ le uplet de termes $\mathbf{t}[x := \tau]$. La formule $\varphi^*$ est alors $R(\mathbf{t}^*)$. Grâce au lemme A :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a}) &\text{ ssi } \mathbf{t}^*(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}] \\ &\text{ ssi } \mathbf{t}(\mathbf{a}^*) \in R[\mathbb{A}] \\ &\text{ ssi } \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*). \end{aligned}$$

— Le cas des connecteurs propositionnels est trivial.

— Supposons $\varphi$ de la forme $\exists y\ \chi$. Comme $\tau$ est substituable à $x$ dans $\varphi$, on a $x \notin \operatorname{VarLié} \varphi$, et donc $y \neq x$. En outre $y \notin \operatorname{Var} \tau$. Il suit que $\tau$ est aussi substituable à $x$ dans $\chi$, et $\varphi^*$ est $\exists y\ \chi^*$. On montre : $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$.

  — Supposons $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$. Alors il existe $b \in \mathbb{A}$ tel que pour $\mathbf{a}'$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sauf en $\mathbf{a}'(y) = b$, on ait $\mathbb{A} \models \chi^*(\mathbf{a}')$. Par récurrence, $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}'^*)$. D'après le lemme B, $\mathbf{a}'^* = \mathbf{a}^{*\prime}$, donc $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^{*\prime})$ et $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$.

  — Supposons $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$. Alors il existe $b \in \mathbb{A}$ tel que pour $(\mathbf{a}^*)'$ coïncidant avec $\mathbf{a}^*$ sauf en $(\mathbf{a}^*)'(y) = \mathbf{a}^*(b)$, on ait $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^{*\prime})$. Ici encore on obtient $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}'^*)$, d'où $\mathbb{A} \models \chi^*(\mathbf{a}')$ et $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$.

— $\forall$ est redondant, par équivalence sémantique entre $(\forall y)\chi$ et $\neg(\exists y)(\neg\chi)$. $\square$

Altérer la définition des formules (§ 6.3.B) pour permettre plus de souplesse dans les variables complique la démonstration pour un gain médiocre.

---

## Exercices

**9.1.** Établir les propriétés suivantes :

a. (i) $\varphi_1 \vdash \varphi_2$ ssi $\vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ ; (ii) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ ; (iii) $(\varphi_1 \to \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_2 \to \neg\varphi_1)$ ; (iv) $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$ ; (v) $\vdash \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$ ; (vi) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ ;

b. la *règle de Tarski* :

$$\frac{\Phi, \varphi_1 \vdash \chi \quad \Phi, \varphi_1 \to \varphi_2 \vdash \chi}{\Phi \vdash \chi} \ ;$$

c. la *loi de Peirce* :

$$\vdash ((\varphi \to \chi) \to \varphi) \to \varphi.$$

**9.2 (sur les quantificateurs).**

a. Montrer que si $\varphi \vdash \chi$, alors $\exists x\ \varphi \vdash \exists x\ \chi$ et $\forall x\ \varphi \vdash \forall x\ \chi$.

b. A-t-on $\vdash (\varphi \to \chi) \to (\exists x\ \varphi \to \exists x\ \chi)$ ? A-t-on $\vdash (\varphi \to \chi) \to (\forall x\ \varphi \to \forall x\ \chi)$ ?

c. On suppose $\Phi \vdash \exists x\ R(x)$ et $\Phi \vdash \exists x\ S(x)$. Trouver l'erreur :

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Phi \vdash \exists x\ R(x)$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Phi \vdash \exists x\ S(x)$}
\UnaryInfC{$\Phi, R(x) \vdash \exists x\ S(x)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$R(x) \vdash R(x)$}
\UnaryInfC{$\Phi, R(x), S(x) \vdash R(x)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$S(x) \vdash S(x)$}
\UnaryInfC{$\Phi, R(x), S(x) \vdash S(x)$}
\BinaryInfC{$\Phi, R(x), S(x) \vdash R(x) \wedge S(x)$}
\UnaryInfC{$\Phi, R(x), S(x) \vdash \exists x\ R(x) \wedge S(x)$}
\BinaryInfC{$\Phi, R(x) \vdash \exists x\ R(x) \wedge S(x)$}
\BinaryInfC{$\Phi \vdash \exists x\ R(s) \wedge S(x)$}
\end{prooftree}$$

**9.3 (sur l'égalité).**

a. Montrer qu'on peut prendre pour $=_i$ le seul axiome $\vdash x_1 = x_1$ (en conservant $=_e$).

b. Montrer qu'on peut prendre pour $=_e$ les seuls cas où $\chi$ est $R(\mathbf{t})$ (en conservant $=_i$).

c. Montrer que $\Phi \vdash t_1 = t_2$ est une relation d'équivalence sur les termes.

d. Soit $t$ substituable à $x$ dans $\varphi$. Montrer que $\varphi[x := t]$ et $(\exists x)(\varphi \wedge x = t)$ se démontrent l'une l'autre.

**9.4 (redondance des opérateurs logiques).** Suite de l'exercice 6.4, dont on reprend les notations. Soit $\vdash^s$ la notion de déduction employant les seules règles structurelles et relatives à $\bot, \to, \exists, =$ (dont $\bot_c$). Montrer que $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi^s \vdash^s \chi^s$.

**9.5 (pureté des méthodes).** Soient $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ deux langages, $\Phi \subseteq \mathcal{L}$-Form, et $\chi \in \mathcal{L}$-Form. On suppose $\Phi \vdash \chi$ dans $\mathcal{L}'$. Montrer que $\Phi \vdash \chi$ dans $\mathcal{L}$. [Neutraliser les symboles en trop.] Suite à l'ex. 10.3.

**9.6 (élimination des constantes et des fonctions).** Suite de l'exercice 6.5, dont on reprend les notations.

a. Montrer que $\alpha_c \wedge \beta_c \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^*$. En déduire que si $\Phi \vdash \chi$, alors $\Phi^*, \alpha_c \vdash \chi^*$.

b. La *détraduction* d'une formule $\chi$ est $\chi^\circ$ obtenue en remplaçant chaque occurrence de $R_c(t)$ par $t = c$. Montrer que si $\Theta^*, \alpha_c \vdash \varphi^*$, alors $\Theta \vdash \varphi$. [Détraduire un arbre.]

(*) c. Éliminer un symbole de fonction. [Pénible.]

**9.7 (formes prénexes : syntaxe).** Suite de l'exercice 6.3. Vérifier que si $\varphi$ est une formule et $\varphi'$ une forme prénexe judicieusement construite, alors $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$. Même question avec une formule sans quantificateurs et une forme $\bigvee$-prénexe.

**9.8 (lemme de généralisation).** On suppose $\Phi \vdash \chi$. Soit $c$ un symbole de constante n'apparaissant pas dans $\Phi$. Montrer qu'il existe une variable $x \notin \mathrm{Var}\,\chi$ telle que $\Phi \vdash (\forall x)(\chi[c := x])$. (L'abus de notation $\chi[c := x]$ est sans risque.)

**9.9 (lemme de renommage).** Le lemme suivant est utile en théorie de la démonstration.

**Lemme.** Soient $\varphi$ une formule, $t$ un terme, et $x$ une variable. Alors il existe une formule $\varphi'$ obtenue de $\varphi$ en renommant seulement des variables liées, telle que :

– $\varphi$ et $\varphi'$ se démontrent l'une l'autre ;
– $t$ est substituable à $x$ dans $\varphi'$.

On dit que $\varphi$ et $\varphi'$ sont *$\alpha$-équivalentes.* Avec $t = x$, toute formule est $\alpha$-équivalente à une où $x$ est substituable à $x$, i.e. $x \notin \operatorname{VarLié} \varphi'$.

**9.10 (logique multisorte).** Suite de l'exercice 7.1, dont on reprend les notations. On note $\vdash$ la déduction unisorte dans $\mathcal{L}_\mathcal{T}$. Chaque $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$-terme possède un type $t\colon \tau$. Ceci affecte la notion de substituabilité. On a maintenant des règles $\forall_i(\tau), \forall_e(\tau), \exists_i(\tau), \exists_e(\tau)$ pour chaque type. Ceci définit la déduction multisorte $\Vdash$ dans $\mathcal{L}\colon \mathcal{T}$.

a. Montrer que si $t\colon \tau$ dépend des variables libres $x_i\colon \tau_i$, alors $\Theta_\mathcal{T}, R_{\tau_1}(x_1), \dots R_{\tau_n}(x_n) \vdash R_\tau(t)$. En déduire que si $\Phi \Vdash \chi$ et que les variables libres de $\Phi \cup \{\chi\}$ sont les $x_i\colon \tau_i$, alors $\Phi', \Theta_\mathcal{T}, R_{\tau_i}(x_i) \vdash \chi'$.
b. On suppose $\Theta_\mathcal{T} \vdash \varphi'$. Montrer $\Vdash \varphi$. [Retyper les variables puis trivialiser les $R_\tau$.]
c. En déduire que pour des $(\mathcal{L}\colon \mathcal{T})$-énoncés, on a $\Phi \Vdash \chi$ ssi $\Phi', \Theta_\mathcal{T} \vdash \chi'$.

Le typage des variables mène naturellement à la notion de *contexte* : v. notes conclusives.

---

## Notes conclusives

La théorie de la démonstration est un domaine légitime, mais il peut ressortir à l'informatique plus qu'aux mathématiques. Pour s'initier, [David-Nour-Raffalli]. Pour approfondir la déduction naturelle, [Prawitz].

### • Repères historiques

> *In 1926 Prof. J. Łukasiewicz called attention to the fact that mathematicians in their proofs do not appeal to the theses of the theory of deduction, but make use of other methods of reasoning. The chief means employed in their method is that of an arbitrary supposition. The problem raised by Mr Łukasiewicz was to put these methods unter the form of structural rules and to analyze their relation to the theory of deduction. The present paper contains the solution of that problem.* [Jaś34]

***Préhistoire.*** • Automatiser la déduction est un vieux rêve : *ars magna* de Lulle, *calculus ratiocinator* de Leibniz... • On trouve des preuves formelles chez Peano, mais ce n'est pas la même chose que *formaliser* les preuves formelles ; Peano et ses émules abrégeaient leurs arguments dans une sténo. C'est la différence entre l'emploi d'un calcul déductif et l'*étude* d'un calcul déductif.

***Débuts.*** • Hilbert est une figure tutélaire du domaine, pour avoir non seulement promu le renouveau de la méthode axiomatique, mais amorcé son étude. [**Hil00a**, Problem 2] demandait une preuve de la cohérence de l'arithmétique ; ceci requit de créer une théo-

[David-Nour-Raffalli] : René David, Karim Nour et Christophe Raffalli. *Introduction à la logique.* 2e éd. Sciences sup. 2004. 352 p.
[Prawitz] : Dag Prawitz. *Natural deduction. A proof-theoretical study.* T. 3. Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy. Stockholm : Almqvist & Wiksell, 1965, p. 113
[Jaś34] : Stanisław Jaśkowski. « On the rules of suppositions in formal logic ». In : Studia logica 1 (1934), p. 32
[**Hil00a**] : David Hilbert. « Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900 ». In : *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1900), p. 253-297

rie de la démonstration [Thi03]. • [Hil22] proposa une *axiomatique de la déduction* ; le concept de règle n'étant alors pas clarifié, ce calcul reposait sur le seul $\to_e$ et des axiomes ou tautologies admises gérant notamment les quantificateurs. L'inconvénient de cette approche (encore suivie dans certains traités du XXI[e] siècle) est la tentation d'optimiser la liste d'axiomes admis, sans gain de clarté. Ce fut une mode. • Elle doit également beaucoup à ses collaborateurs : Bernays, Ackermann, von Neumann, lancés à la quête de preuves de cohérence. V. §§ 19–20. • Paul Hertz (sans lien de parenté avec le découvreur des ondes radio) fut le premier à chercher de la structure intrinsèque aux déductions. Il voulait surtout isoler des axiomatisations logiquement indépendantes ; v. compléments § E. [Her22], [Her23], [Her29b], alors novateurs, semblent maintenant superficiels. *Hertz est un inspirateur direct de Gentzen* [Sch02]. • Déjà moderne, Herbrand. Un théorème important porte son nom ; v. compléments § J. On rappelle son intérêt pour la déduction multisorte. Réduction au cas unisorte (ex. 9.10) [Sch51] ; [Sch38] contiendrait une erreur.

***Histoire moderne.*** • La déduction naturelle fut introduite par Gentzen [**Gen35a**] et [**Gen35b**] (trad. [Gentzen]). Concomitamment Jaśkowski publiait ses propres travaux [Jaś34] ; sa déduction est linéaire et non arborescente. • Gödel avait également développé, pour s'entraîner en logique, une déduction naturelle inaboutie [Pla18b], encore linéaire. • L'idée de structure arborescente, en tout cas de non-linéarité de la preuve, est en germe dans les travaux de Hertz. • Les travaux de Gentzen sont plus profonds que ceux de Jaśkowski, pour le calcul des séquents et le « Hauptsatz » (compléments § J). Le formalisme de Gentzen s'est imposé ; un seul regard à [**Gen35a**] convainc de sa pertinence. Par ses articles somptueux de lisibilité et de lucidité, *Gentzen est le fondateur de la théorie de la démonstration.*

---

[Thi03] : Rüdiger Thiele. « Hilbert's twenty-fourth problem ». In : *Amer. Math. Monthly* 110.1 (2003), p. 1-24

[Hil22] : David Hilbert. « Die logischen Grundlagen der Mathematik ». In : *Math. Ann.* 88.1-2 (1922), p. 151-165

[Her22] : Paul Hertz. « Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme 1 ». In : *Math. Ann.* 87 (1922), p. 246-269

[Her23] : Paul Hertz. « Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme II ». In : *Math. Ann.* 89 (1923), p. 76-102

[Her29b] : Paul Hertz. « Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme ». In : *Math. Ann.* 101 (1929), p. 457-514

[Sch02] : Peter Schroeder-Heister. « Resolution and the origins of structural reasoning : early proof-theoretic ideas of Hertz and Gentzen ». In : *Bull. Symbolic Logic* 8.2 (2002), p. 246-265

[Sch51] : Arnold Schmidt. « Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik ». In : *Math. Ann.* 123 (1951), p. 187-200

[Sch38] : Arnold Schmidt. « Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen ». In : *Math. Ann.* 115.1 (1938), p. 485-506

[**Gen35a**] : Gerhard Gentzen. « Untersuchungen über das logische Schließen I ». In : *Math. Z.* 39.1 (1935), p. 176-210

[**Gen35b**] : Gerhard Gentzen. « Untersuchungen über das logische Schließen II ». In : *Math. Z.* 39.1 (1935), p. 405-431

[Gentzen] : Gerhard Gentzen. *Recherches sur la déduction logique.* T. 5. Philosophie de la matière. Traduction et commentaire par Robert Feys et Jean Ladrière. Paris : Presses Universitaires de France, 1955, p. xi+170

[Pla18b] : Jan von Plato. « Kurt Gödel's first steps in logic : formal proofs in arithmetic and set theory through a system of natural deduction ». In : *Bull. Symb. Log.* 24.3 (2018), p. 319-335

• Le foisonnant [Menzler-Trott] (trad. anglaise [Menzler-Trott2]) dresse de Gentzen le portrait d'un naïf ou d'un conformiste, victime de représailles d'après-guerre ; cette lecture n'est pas universelle.

• **Terminologie, notations.** • Peut-être faudrait-il traduire l'allemand *Sequenz* (absent de [Gen32]) par « séquence » au lieu de « séquent » ; la confusion viendrait de la traduction anglaise (l'anglais *sequence* voulant dire *suite*, était pris). • Les règles ont des noms désuets dans la littérature : *modus ponens* pour $\neg_e$, *modus tollens* pour $\to_i$, *absurdité intuitionniste* pour $\perp_e$, etc. • Le $\vdash$ trouve son origine dans [Frege1]. Le formalisme de Frege étant bi-dimensionnel, en tout cas non strictement linéaire, son « nagerechte Urt(h)eilsstrich » est un *dessin* introduisant une sorte de tableau déductif. L'entité typographique $\vdash$ vient des [Russell-Whitehead] qui l'ont popularisée.

• **Déductions linéaires ou arborescentes.** La clarté du formalisme de Gentzen vient de l'emploi d'*arbres* de déduction, au lieu de listes. On peut convertir un formalisme en l'autre algorithmiquement ; une solution possible dans [Pla17].

• **Substitutions avec des formules plus permissives.** Discussion très optionnelle car pénible. Si l'on tolère les formules du type $(R(x) \wedge (\forall x)(\exists x)S(x))$, il faut affiner la notion de substituabilité pour éviter les captures.

**Définition.** Un terme $t$ est *substituable* à une variable $x$ dans une formule $\varphi$ si aucune variable de $\mathrm{Var}\, t$ ne devient liée quand on remplace simultanément toutes les occurrences libres de $x$ dans $\varphi$ par $t$.

Les résultats de § 9.3 restent corrects.

• **Notion de *contexte*.** • À cause de la facilité à introduire $\exists$, on peut dériver $\vdash \exists x\ x = x$. La déduction naturelle présentée n'est donc correcte que pour les structures *non vides* : d'où la restriction sémantique dès § 6.1. • On peut y remédier.

**Définition.** Un *contexte* pour un séquent $\Phi \vdash \chi$ est une partie $C \subseteq \mathcal{V}$ contenant les variables qui ont au moins une occurrence libre dans $\Phi \cup \{\chi\}$. Un *séquent contextualisé* est un triplet $\Phi \vdash_C \chi$, où $C$ est un contexte.

• On donne alors des règles *pour les séquents contextualisés* ; un axiome ou une $=_i$ à variables libres possède un contexte non vide. Les règles sont comme précédemment, en préservant le contexte (pour lier des arbres, prendre la réunion $C_1 \cup C_2$) ; l'affaiblissement permet aussi d'étendre les contextes. Un $\forall_e$ peut requérir d'étendre le contexte, pour contenir les variables libres du terme substitué. • On ne peut plus montrer $\vdash \exists x\ x = x$, seulement $\vdash_x \exists x\ x = x$. La déduction résultante est adéquate à la sémantique permettant l'ensemble vide. • Ces subtilités sont étudiées en *logique inclusive*, l'une des *logiques libres*, i.e. logiques où des termes peuvent rester ininterprétés. C'est légitime en philosophie analytique. Celle-ci cherche notamment à modéliser mathématiquement le langage naturel, où l'on peut parler d'un objet sans qu'il fasse référence à rien.

[Menzler-Trott] : Eckart Menzler-Trott. *Gentzens Problem.* Mathematische logik im nationalsozialistischen Deutschland. Basel : Birkhäuser Verlag, 2001, p. xviii+411
[Menzler-Trott2] : Eckart Menzler-Trott. *Logic's lost genius.* T. 33. History of Mathematics. The life of Gerhard Gentzen, Translated from the 2001 German original by Craig Smoryński and Edward Griffor, With appendices by Smoryński and Jan von Plato. Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, p. xxii+440
[Gen32] : Gerhard Gentzen. « Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen ». In : *Math. Ann.* 107 (1932), p. 329-350
[Frege1] : Gottlob Frege. *Begriffsschrift.* Halle : Louis Nebert, 1879
[Pla17] : Jan von Plato. « From Gentzen to Jaskowski and back : algorithmic translation of derivations between the two main systems of natural deduction ». In : *Bull. Sect. Logic Univ. Łódź* 46.1-2 (2017), p. 65-73

En mathématiques, c'est pousser le scrupule un peu loin ; l'ensemble vide ne mérite pas qu'on s'y attarde.

• **Autres logiques.** (Prérequis : § 7.) La logique élémentaire n'est pas seule à posséder un calcul déductif, ni même seule à posséder un calcul déductif modélisant bien la conséquence $\models$.

***Logique multisorte.*** Esquissé à l'ex. 9.10.

***Logique d'ordre supérieur.*** Donné en § 12.1. Capture très mal $\models$.

***Logique infinitaire.*** • $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ possède un système déductif naturel, qui tolère des arbres de déduction infinitaires. Propriétés correctes ; v. § SÉ2.5. • Cf. [Hil26, p. 162] : « *So wenn z. B. im Sinne einer einschränkenden Bedingung die Forderung betont wird, daß in der strengen Mathematik nur eine* endliche *Anzahl von Schlüssen in einem Beweise zulässig sei — als ob es schon irgend jemandem einmal gelungen wäre, unendlich viele Schlüsse auszuführen.* »

***Quantificateurs généralisés.*** • $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ possède un système déductif naturel, aux déductions finitaires. Propriétés correctes ; v. § SÉ2.6. • Rien de bon pour $\exists_{\geqslant\aleph_0}$.

***Logiques non classiques.*** Elles sont apparues comme calculs déductifs, qui se sont avérés très adaptés à leur sémantique postérieure. V. compléments § G et § H.

• **« Speed-up ».** • Soient $\Lambda, \mathbb{A}$ deux logiques et $\vdash, \Vdash$ deux calculs déductifs associés. On suppose $\Lambda$-Form $\subseteq$ $\mathbb{A}$-Form et $\vdash\ \subseteq\ \Vdash$, i.e. tout ce qui est $\vdash$-dérivable est $\Vdash$-dérivable. • Il se peut qu'en outre toute $\Lambda$-formule $\Vdash$-dérivable soit déjà $\vdash$-dérivable ; c'est une hypothèse de *conservativité syntaxique.* • Même dans ce cas, il peut exister $\varphi \in \Lambda$-Form ayant une $\Vdash$-déduction raisonnable, mais dont toutes les $\vdash$-déductions sont impraticables. Cela signifie que le système $\Vdash$ ne permet pas de gain théorique mais des gains pratiques incommensurables. • Ce phénomène est appelé *speed-up.* Suite en § 10, notes conclusives.

# § 10. Adéquation

Les relations $\Phi \vdash \chi$ et $\Phi \models \chi$ sont équivalentes en logique élémentaire. Le sens direct, « *correction* de la logique élémentaire », est trivial ; le sens réciproque, « *complétude* de la logique élémentaire », occupe toute la section.

Prérequis : § 6, § 9.

---

**Théorème** (« complétude » de la logique élémentaire ; Skolem, Gödel)**.** On se place en logique élémentaire. Soient $\mathcal{L}$ un langage relationnel, $\Phi \subseteq \mathcal{L}$-Form et $\chi \in \mathcal{L}$-Form. Alors sont équivalents :

(i) $\Phi \vdash \chi$ ;

(ii) $\Phi \models \chi$ ;

(iii) pour toute structure $\mathbb{A}$ *de cardinal* $\leqslant \max(\operatorname{card}\mathcal{L}, \aleph_0)$ et tout choix de paramètres $\mathbf{a}$, si $\mathbb{A} \models \Phi(\mathbf{a})$, alors $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a})$.

*Remarques*

---

[Hil26] : David Hilbert. « Über das Unendliche ». In : *Math. Ann.* 95.1 (1926), p. 161-190

— La logique élémentaire, plus précisément la paire $(\models, \vdash)$, est dite *complète*. On appelle *complétude faible* la variante où $\Phi$ est vide. Certaines logiques ne possèdent que cette forme.

— En particulier la déduction naturelle est non contradictoire, i.e. $\nvdash \perp$. La théorie de la démonstration établit ce phénomène sans faire appel à la notion sémantique de modèle, mais par analyse de la structure des déductions. V. compléments § J.

— Le cardinal $\max(\operatorname{card} \mathcal{L}, \aleph_0)$, égal à $\operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$, est aussi le cardinal de $\mathcal{L}$-Form. C'est le plus petit cardinal infini plus grand que $\mathcal{L}$.

  Par convention, on appelle *cardinal de* $\mathcal{L}$ le cardinal de $\mathcal{L}$-Form. Notamment $\operatorname{card} \mathcal{L}$ est infini même quand l'ensemble $\mathcal{L}$ est fini.

— On appelle (iii) la *complétude à cardinaux contrôlés*.

La section est consacrée à établir ce théorème.

**Démonstration.** (i)⇒(ii) est la *correction de la logique élémentaire*. C'est une récurrence sur la structure de la déduction, laissée en exercice. (La preuve utilise la proposition 9.3 sur l'effet sémantique des substitutions. On peut limiter le nombre de cas à traiter en montrant la redondance du langage, de la notion de satisfaction et des règles.) (ii)⇒(iii) est évident. On va montrer (iii)⇒(i).

## § 10.1. Lemme sémantique et stratégie

**Étape 1** (lemme sémantique)**.** Il suffit de montrer que pour tout langage $\mathcal{L}$, tout ensemble cohérent d'énoncés a un modèle de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$-Form.

*Vérification.* Supposons vraie cette propriété, dite « satisfaisabilité contrôlée ». On veut montrer (iii)⇒(i).

On généralise d'abord la satisfaisabilité contrôlée aux ensembles de *formules*. Soit $\Theta$ un tel ensemble. On le transforme en un ensemble d'énoncés en langage étendu. (On ne peut pas « clore universellement » $\Theta$, i.e. quantifier universellement les variables libres, car cela change trop le sens ; par exemple $\Theta$ pourrait contenir $\{R(x_1), \neg R(x_2)\}$.) On introduit une nouvelle constante $c_x$ par variable $x \in \mathcal{V}$. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_x : x \in \mathcal{V}\}$. Comme $\operatorname{card} \mathcal{V} = \aleph_0$, on a $\operatorname{card} \mathcal{L}' = \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$. Dans chaque $\mathcal{L}$-formule $\varphi$, on remplace chaque variable *libre* $x$ par $c_x$. Le résultat $\varphi'$ est un $\mathcal{L}'$-*énoncé*. En outre $\vdash \varphi$ ssi $\vdash \varphi'$. En particulier, comme $\Theta$ est cohérent, $\Theta'$ l'est aussi. Par satisfaibilité contrôlée, il possède un modèle $\mathbb{A}'$ de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}'$-Form $= \operatorname{card} \mathcal{L}$-Form. Soit $\mathbb{A}$ la

$\mathcal{L}$-structure sous-jacente, avec les paramètres $\mathbf{a}(x) = c_x[\mathbb{A}']$. Une récurrence montre que pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi$, on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A}' \models \varphi'$. En particulier, $\mathbb{A} \models \Theta(\mathbf{a})$. On a étendu la satisfaisabilité contrôlée aux ensembles de $\mathcal{L}$-formules.

On montre alors (iii)$\Rightarrow$(i). Soient $\Phi, \chi$ formés de $\mathcal{L}$-formules et tels que tout modèle de $\Phi$ de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$-Form soit modèle de $\chi$. Donc $\Theta = \Phi \cup \{\neg\chi\}$ n'admet pas de modèle de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$-Form. Par satisfaisabilité contrôlée, $\Theta$ n'est pas cohérent. Par $\neg_i$, $\Phi \vdash \neg\neg\chi$. Puis par $\bot_c$, $\Phi \vdash \chi$. ◇

*Remarque.* On a utilisé l'élimination de double négation $\bot_c$ du formalisme. La suite de l'argument utilise aussi des raisonnements par l'absurde, mais en-dehors du calcul déductif.

**Stratégie.** On part d'un ensemble cohérent d'énoncés $\Theta$, dont on cherche un modèle de cardinal contrôlé. La stratégie est la suivante :

— 1ère idée : demander la maximalité.

Pour ne pas hésiter entre $\varphi$ et $\neg\varphi$, se ramener à $\Theta$ cohérent maximal (i.e. une *théorie complète* au sens syntaxique de § 9.1.B ; on évite le terme par risque de confusion avec son acception sémantique). Ce point est sans difficulté, traité à l'étape 4.

— 2e idée : sémantiser la syntaxe.

On entend mettre une $\mathcal{L}$-structure sur l'ensemble des $\mathcal{L}$-termes. Mais si $\Theta \vdash t_1 = t_2$, il faut alors identifier $t_1$ à $t_2$. On prévoit donc une relation d'équivalence et un ensemble quotient. C'est fait à l'étape 5 (Grâce à la 3e idée, le domaine à quotienter s'avère plus simple que $\mathcal{L}$-Term.)

— 3e idée (Henkin) : ajouter des témoins existentiels.

Si $\Theta \vdash \exists x\ \varphi$, on veut un « témoin » qui vérifie $\varphi$. Pour garantir sa présence on ajoute au langage un nouveau symbole de constante $c_{(x,\varphi)}$, et à $\Theta$ un axiome dédié $(\exists x\ \varphi) \to \varphi[x := c_{(x,\varphi)}]$. Cet ajout est mené à l'étape 3.

La description n'est pas dans l'ordre d'implémentation. Pour avoir les « axiomes dédiés », il faut *d'abord* étendre le langage. Or :

— les nouveaux témoins créent de nouvelles formules, qui appellent de nouveaux témoins, à l'infini ;

— a priori, la notion de cohérence change quand on étend le langage.

Ces points sont mineurs et facilement résolus.

## § 10.2. Méthode de Henkin

**Notation** (langage henkinisé)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel.

— Soit $\mathcal{L}$-Én$_\exists$ l'ensemble des paires $(x, \varphi) \in \mathcal{V} \times \mathcal{L}$-Form avec $\mathrm{VarLib}\,\varphi \subseteq \{x\}$ et $x \notin \mathrm{VarLié}\,\varphi$. (Noter que $\exists x\ \varphi$ est alors un énoncé.)

— Les *constantes de Henkin* pour $\mathcal{L}$ sont de nouveaux symboles, distincts entre eux et de $\mathcal{L}$, de constantes $c_{(x,\varphi)}$ pour $(x, \varphi) \in \mathcal{L}$-Én$_\exists$.

— Soient $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \sqcup \{c_{(x,\varphi)} : (x, \varphi) \in \mathcal{L}\text{-Én}_\exists\}$ et $\mathcal{L}^{(n+1)} = (\mathcal{L}^{(n)})'$.

— Le *langage henkinisé de* $\mathcal{L}$ est $\mathcal{L}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^{(n)}$. Soit $\mathcal{C}^*$ l'ensemble des constantes de $\mathcal{L}^*$ (ce qui inclut celles de $\mathcal{L}$).

*Remarques*

— Un énoncé $(\exists x)(x = c)$ commande l'ajout d'une constante $c'$. Apparaît alors l'énoncé $(\exists x)(x = c')$, qui commande $c''$, etc. Noter qu'on a aussi des constantes associées à $(\exists x)(x = t)$ pour chaque terme $t$. (Les axiomes de Henkin ci-dessous permettent d'identifier ces constantes démultipliées.)

— On ne peut pas dire que « $\mathcal{L}^*$ est son propre henkinisé », car en toute rigueur les constantes de Henkin d'un langage en sont disjointes. Cette stratification est utile à l'étape 3. En revanche, pour toute paire $(x, \varphi) \in \mathcal{L}^*$-Én$_\exists$, la constante $c_{(x,\varphi)}$ est déjà dans $\mathcal{L}^*$.

— Si $\mathcal{L}$ est au plus dénombrable, resp. effectif, alors $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}^*$ le sont.

Ajouter des constantes crée de nouvelles instances des règles d'égalité et des substitutions pour les quantificateurs, donc semble affecter la déduction.

**Étape 2.** Si $\Theta$ est un ensemble cohérent de $\mathcal{L}$-énoncés, il reste $\mathcal{L}^*$-cohérent.

*Vérification.* Soit $\vdash [\mathcal{L}^*]$ la notion de déduction dans $\mathcal{L}^*$, qui étend $\vdash [\mathcal{L}]$.

On affirme que si $\Phi \vdash \chi\ [\mathcal{L}^*]$, où $\Phi$ et $\chi$ sont dans $\mathcal{L}$, alors $\Phi \vdash \chi\ [\mathcal{L}]$. On considère en effet une déduction $D\colon \Phi_0 \vdash \chi\ [\mathcal{L}^*]$, où $\Phi_0 \subseteq \Phi$ est fini. Soit $c$ une constante de $\mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}$ apparaissant dans $D$ ; on veut l'enlever. Soit $x$ une variable ne figurant pas dans $D$. On note $[c := x]$ le fait de remplacer les occurrences de $c$ par $x$ (il n'y a aucun risque de confusion). Par inspection des règles, $D[c := x]\colon \Phi_0[c := x] \vdash \chi[c := x]$ est encore une déduction, cette fois dans $\mathcal{L}^*$. Comme $\Phi_0$ et $\chi$ sont dans $\mathcal{L}$, on a même $D[c := x]\colon \Phi_0 \vdash \chi\ [\mathcal{L}^*]$, et $c$ n'apparaît plus dans cette déduction. On recommence ; $D$ étant finie, on enlève ainsi toutes les nouvelles constantes pour arriver à $\Phi_0 \vdash \chi\ [\mathcal{L}]$.

En particulier la cohérence est préservée en étendant le langage. ◇

Ceci justifie de dire « cohérent » sans préciser le langage.

**Notation.** Pour $(x, \varphi) \in \mathcal{L}^*$-Én$_\exists$, l'*axiome de Henkin* associé est $\eta_{(x,\varphi)}$ : $(\exists x\ \varphi) \to \varphi[x := c_{(x,\varphi)}]$. Soit $H_{\mathcal{L}^*} = \{\eta_{(x,\varphi)} : (x, \varphi) \in \mathcal{L}^*\text{-Én}_\exists\}$ leur ensemble.

S'il n'y a pas d'ambiguité, on note simplement $\eta : (\exists x\ \varphi) \to \varphi[x := c]$.

**Étape 3** (axiomes de Henkin)**.** Si $\Theta$ est un ensemble cohérent de $\mathcal{L}$-énoncés, alors $\Theta \cup H_{\mathcal{L}^*}$ reste cohérent.

*Vérification.* $\mathcal{L}^*$ est obtenu comme réunion de langages $\mathcal{L}^{(n)}$, avec $\mathcal{L}^{(n+1)} = \mathcal{L}^{(n)\prime}$. Par finitude de $\vdash$, il suffit de montrer que l'ajout des axiomes de niveau $n$ préserv la cohérence ; par récurrence il suffit de le faire une fois. À niveau fixé les $c_{(x,\varphi)}$ n'interagissent pas, donc il suffit de montrer que $\Theta \cup \{\eta\}$ reste cohérent pour un seul axiome $\eta : (\exists x\ \varphi) \to \varphi[x := c]$.

Sinon $\Theta \vdash \neg\eta$, et notamment $\Theta \vdash \neg\varphi[x := c]$. Mais $c$ n'apparaît pas dans $\Theta$, donc comme à l'étape 2, il existe $\Theta_0 \subseteq \Theta$ et $D \colon \Theta_0 \vdash \neg\varphi[x := c]$. Soit $y$ une variable ne figurant pas dans $D$. Alors $\Theta_0[c := y] \vdash \neg\varphi[x := c][c := y]$, et donc $\Theta_0 \vdash \neg\varphi[x := y]$. On conclut $\Theta_0 \vdash \neg(\exists y)(\varphi[x := y])$, et par jeux de renommage, $\Theta \vdash \neg(\exists x)\varphi$. En particulier $\Theta \vdash \eta$. Mais alors $\Theta \vdash \bot$, contre l'hypothèse. ◇

## § 10.3. Maximisation et construction de modèle

Le principe suivant est général et indépendant de la méthode de Henkin.

**Étape 4** (maximisation ; « lemme de Lindenbaum »)**.** Tout ensemble cohérent d'énoncés est inclus dans un tel ensemble *maximal.*

*Vérification.* Il est préférable d'éviter un raisonnement par maximalité ; v. notes conclusives. L'argument demande donc une technique ordinale (§ 3.3).

On énumère les énoncés par $\{\varphi_k : k \in \alpha\}$ pour un ordinal $\alpha$. Soit $\Theta_0 = \Theta$ cohérent donné. Aux limites on prend la réunion : cela préserve la cohérence. On suppose $\Theta_k$ formé et cohérent pour un $k < \alpha$, et l'on construit $\Theta_{k+1}$ comme suit :

— si $\Theta_k \cup \{\varphi_k\}$ est cohérent, soit $\Theta_{k+1} = \Theta_k \cup \{\varphi_k\}$, qui reste cohérent ;

— sinon, alors $\Theta_k \vdash \neg\varphi_k$ ; soit $\Theta_{k+1} \cup \{\neg\varphi_k\}$, qui reste cohérent.

Soit $\hat{\Theta} = \bigcup_{k<\alpha} \Theta_k$. Sa cohérence est par caractère finitaire de $\vdash$. On montre sa maximalité. Soit $\varphi$ un énoncé. Il est de la forme $\varphi_k$ pour $k < \alpha$. Si $\Theta_k \cup \{\varphi_k\}$ est cohérent, alors $\varphi_k \in \Theta_{k+1} \subseteq \hat{\Theta}$. Sinon, alors $\neg\varphi_k \in \hat{\Theta}$. C'est la maximalité. $\diamond$

On se place dans le langage henkinisé $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{L}$. Soit $\Theta^*$ un ensemble cohérent d'énoncés contenant $H_{\mathcal{L}^*}$ et maximal. Clairement $\Theta^*$ est clos par déduction : pour chaque énoncé $\chi$ on a $\chi \in \Theta^*$ ssi $\Theta^* \vdash \chi$.

**Notation** ($\mathcal{L}^*$-structure)**.**

— Sur l'ensemble $\mathcal{C}^*$ des constantes de $\mathcal{L}^*$, soit $\sim$ la relation : $c \sim d$ si $\Theta \vdash c = d$. C'est une relation d'équivalence. On note $[c]$ la classe de $c$. Par exemple, si $d$ est la constante de Henkin de $(\exists x)(x = c)$, alors $H_{\mathcal{L}^*} \vdash c = d$, donc $[c] = [d]$.

— Soit $\mathbb{A} = \mathcal{C}_H/\sim$.

— Sur $\mathbb{A}$ on définit la $\mathcal{L}^*$-interprétation suivante :

  — $c[\mathbb{A}] = [c]$ ;

  — $([c_1], \ldots, [c_n]) \in R[\mathbb{A}]$ ssi $\Theta^* \vdash R(c_1, \ldots, c_n)$ ;

  — $f[\mathbb{A}]([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$, où $d$ est la constante associée à $(\exists x)(x = f(c_1, \ldots, c_n))$.

**Étape 5.** C'est bien défini.

*Vérification.* $\Theta^*$ contient les propriétés démontrables de l'égalité, donc $\sim$ est une relation d'équivalence. En outre si $\Theta^* \vdash R(c_1, \ldots, c_n)$ et $c_i \sim c'_i$, alors $\Theta^* \vdash c_i = c'_i$ donc $=_e$ donne $\Theta^* \vdash R(c'_1, \ldots, c'_n)$. Un argument similaire pour les fonctions montre que l'interprétation est bien définie. $\diamond$

Lors de la construction d'un modèle, un « lemme de vérité » décrit précisément quels énoncés sont satisfaits.

**Étape 6** (lemme de vérité)**.** Soit $\varphi$ un $\mathcal{L}^*$-énoncé. Alors $\mathbb{A} \models \varphi$ ssi $\varphi \in \Theta^*$.

*Vérification.* Récurrence sur $\varphi$. L'absence de paramètres dans la satisfaction tient à ce que l'on ne considère que des énoncés ; on peut prendre pour **a** n'importe quels paramètres, par exemple la fonction vide.

— $\Theta^*$ est cohérent, donc ne contient pas $\perp$.

— Si $\varphi$ est de la forme $R(c_1, \ldots, c_n)$, dont l'égalité, c'est par construction (étape 5).

— Si $\varphi$ est de la forme $\neg\chi$ ou $\chi_1 \wedge \chi_2$, c'est évident (employer la maximalité). Les autres cas propositionnels aussi, mais superflus par redondance du langage.

— Supposons $\varphi$ de la forme $\exists x\ \chi$. Comme $\varphi$ est un énoncé, $\mathrm{VarLib}(\chi) \subseteq \{x\}$ ; notamment $\chi[x := c]$ est un énoncé. Soit $\eta$ l'axiome de Henkin associé à $(x, \varphi)$, i.e. $(\exists x\ \chi) \to \chi[x := c]$.

— Supposons $\varphi \in \Theta^*$. Comme $\Theta^*$ est clos par déduction, $\chi[x := c] \in \Theta^*$. Soient $\mathbf{a}^*$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sauf en $\mathbf{a}^*(x) = [c]$, et $\chi^*$ l'énoncé $\chi[x := c]$. Par récurrence, $\mathbb{A} \models \chi^*$ i.e. $\mathbb{A} \models \chi^*(\mathbf{a})$. Par la théorie des substitutions (§ 9.3), on a $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^*)$. Donc $\mathbb{A} \models \exists x\ \chi$.

— Supposons $\mathbb{A} \models \varphi$. Par définition il existe $\mathbf{a}^*$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sauf en $x$ et tel que $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^*)$. Par construction de $\mathbb{A}$, il existe une constante $d \in \mathcal{L}^*$ telle que $\mathbf{a}^*(x) = [d]$. Il n'y a pas de problème de substituabilité donc $\mathbb{A} \models \chi[x := d]$. Par récurrence, $\chi[x := d] \in \Theta^*$ ; puis par $\exists_i$, on a $(\exists x\ \chi) \in \Theta^*$. $\diamond$

On démontre (iii)⇒(i). D'après l'étape 1, il suffit de montrer que pour tout langage $\mathcal{L}$, tout ensemble cohérent d'énoncés possède un modèle de cardinal $\leqslant \mathrm{card}\,\mathcal{L}\text{-Form}$. Soit $\Theta$ un tel ensemble. Soit $\mathcal{L}^*$ le langage henkinisé de $\mathcal{L}$ ; on a $\mathrm{card}\,\mathcal{L}^*\text{-Form} = \mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0 = \mathrm{card}\,\mathcal{L}\text{-Form}$. D'après l'étape 3, l'ensemble $\Theta \cup H_{\mathcal{L}^*}$ reste cohérent dans $\mathcal{L}^*$. On l'inclut dans un ensemble de $\mathcal{L}^*$-énoncés cohérent maximal $\Theta^*$ grâce à l'étape 4. Soit $\mathbb{A}^*$ la structure de Henkin résultante. D'après l'étape 6, $\mathbb{A}^* \models \Theta^*$. Comme $\Theta \subseteq \Theta^*$, la $\mathcal{L}$-structure sous-jacente à $\mathbb{A}^*$ vérifie $\Theta$. Mais $\mathrm{card}\,\mathbb{A} \leqslant \mathrm{card}\,\mathcal{L}^*$, donc le cardinal est contrôlé. Ceci achève la démonstration. $\square$

*Remarques*

— On emploie désormais les expressions « théorie » et « théorie complète » sans risque de conflit entre sémantique et syntaxe.

— L'argument contient très peu de théorie de la démonstration : un $\bot_c$, quelques $\to$ et $\exists$. La preuve montre donc aussi la complétude des « systèmes à la Hilbert ».

— La complétude étaie la méthode axiomatique mais ne change pas la pratique des mathématiques. Pour établir que $\varphi$ est vraie, on en donne une démonstration ; pour établir qu'il n'y a pas de démonstration de $\varphi$, on montre qu'elle est fausse. Ces deux méthodes reposent sur la seule correction. Pour établir que $\varphi$ est démontrable, on ne démontre pas qu'elle est vraie dans tout modèle ; on la démontre.

— Le « paradoxe de Skolem » est le raisonnement suivant : *si la théorie des ensembles* ZF *est cohérente, alors elle un modèle de cardinal* $\leqslant \aleph_0$ *; ce modèle contient* $\mathbb{R}$*, pourtant non dénombrable.* On revient sur le phénomène en § 15.2.

---

## Exercices

**10.1.** Montrer le théorème de correction.

**10.2.** Montrer, abstraitement, que la correction d'une paire $(\models, \vdash)$ équivaut au principe : « tout ensemble satisfaisable d'énoncés est cohérent ».

**10.3 (pureté des méthodes).** Soient $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ deux langages, $\Phi \subseteq \mathcal{L}$-Form, et $\chi \in \mathcal{L}$-Form. On suppose $\Phi \vdash \chi$ dans $\mathcal{L}'$. Montrer *sémantiquement* que $\Phi \vdash \chi$ dans $\mathcal{L}$.

**10.4.** Soient $\Theta$ une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire et $\varphi$ un $\mathcal{L}$-énoncé élémentaire. Montrer que $\Theta \vdash \varphi$ ssi pour toute $\mathcal{L}$-théorie complète $\hat{\Theta}$ contenant $\Theta$, on a $\hat{\Theta} \vdash \varphi$.

**10.5 (phénomènes de Löwenheim-Skolem).** Suite de l'exercice 8.3. ⟶

a. En langage dénombrable, soit $\Theta$ une théorie ayant un modèle infini. Montrer que $\Theta$ a un modèle dénombrable.
b. Soit $\Theta$ une théorie ayant un modèle infini. Montrer qu'elle a des modèles de tout cardinal infini. [Nouvelles constantes.]

**10.6 (lemmes de Craig et Robinson).** (*)

**Lemme** (« interpolation » de Craig)**.** Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient $\varphi_1, \varphi_2$ des $\mathcal{L}_i$-formules. On suppose $\varphi_1 \models \varphi_2$. Alors il existe une $\mathcal{L}_\cap$-formule $\chi$ telle que $\varphi_1 \models \chi \models \varphi_2$.

**Lemme** (« satisfaisabilité disjointe » de Robinson)**.** Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient $\Theta_1, \Theta_2$ des $\mathcal{L}_i$-théories. On suppose que $\Theta_1 \cap \Theta_2$ est une $\mathcal{L}_\cap$-théorie complète. Alors $\Theta_1 \cup \Theta_2$ est satisfaisable.

Deux $\mathcal{L}_i$-théories $\Theta_1, \Theta_2$ sont *séparables* s'il existe $\chi \in \mathcal{L}_\cap$-Én tel que $\Theta_1 \vdash \chi$ et $\Theta_2 \vdash \neg\chi$.

a. Montrer que l'inséparabilité est préservée par extension des langages *par des constantes.*
b. On suppose $\Theta_1$ et $\Theta_2$ inséparables *maximales*, i.e. si $\chi_1 \in \mathcal{L}_1$-Én$\setminus\Theta_1$, alors $\Theta_1 \cup \{\chi_1\}$ et $\Theta_2$ sont séparables (et de même en échangeant les indices). Montrer leur complétude.
c. On suppose $\Theta_1$ et $\Theta_2$ inséparables maximales. Soit $\mathcal{L}'_i$ étendant $\mathcal{L}_i$ par des constantes de Henkin, et $H_{\mathcal{L}'_i}$ les $\mathcal{L}'_i$-axiomes de Henkin pour $\mathcal{L}_i$. Montrer que les $\Theta'_i = \Theta_i \cup H_{\mathcal{L}'_i}$ sont inséparables.
d. En déduire que si $\Theta_1$ et $\Theta_2$ sont inséparables, alors il existe des langages $\mathcal{L}^*_i$ et des $\mathcal{L}^*_i$-extensions $\Theta^*_1$ et $\Theta^*_2$ contenant les axiomes de Henkin et inséparables maximales. [Maximiser, henkiniser, recommencer.]
e. Établir que la réunion de deux théories inséparables est satisfaisable.

f. Démontrer le lemme de satisfaisabilité disjointe de Robinson. Montrer que sans complétude de $\Theta_1 \cap \Theta_2$, il peut être faux.
g. Démontrer le lemme d'interpolation de Craig.

Suite à l'exercice 11.9.

(*) **10.7.** Cet exercice établit un point de théorie des modèles (les définitions suivent).

**Lemme** (« omission des types »)**.** Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, $\Theta$ une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire, $\mathbf{x}$ un uplet fini de variables et $p(\mathbf{x})$ un type de $\Theta$ non principal. Alors il existe $\mathbb{A} \models \Theta$ dénombrable ne réalisant pas $p$.

– Un $\mathbf{x}$-*type* de $\Theta$ est une $\mathcal{L} \cup \{\mathbf{x}\}$-théorie cohérente étendant $\Theta$, i.e. un ensemble de $\mathcal{L}(\mathbf{x})$-formules $p(\mathbf{x}) = \{\varphi(\mathbf{x}) : \varphi \in p\}$ tel que $\Theta \cup p$ soit cohérente.
– Le type $p$ est *principal* (modulo $\Theta$) s'il existe une formule $\chi(\mathbf{x})$ telle que pour toute $\varphi(\mathbf{x}) \in p$, on ait $\Theta \models \chi(\mathbf{x}) \to \varphi(\mathbf{x})$. Il est *réalisé* dans $\mathbb{A} \models \Theta$ s'il existe $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ tel que pour toute $\varphi(\mathbf{x}) \in p$, on ait $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$.

Montrer le lemme, et généraliser à un nombre dénombrable de types non principaux. [Ajouter des constantes puis étendre par récurrence $\Theta$ en faisant trois choses : forcer la complétude, gérer les témoins existentiels, et empêcher la réalisation de $p$ dans le domaine de Henkin.] Suite à l'ex. 17.6.

Le sujet d'étude § SÉ2 permet d'aller beaucoup plus loin.

---

## Notes conclusives

• **Repères historiques**

*Wie ich (l. c.) angegeben habe, lässt sich jede Zählaussage mittels blosser Definitionen einiger Hilfsklassen und Hilfsrelationen auf eine Form bringen, die ich die* Normalform *genannt habe. Eine Zählaussage von Normalform hat die Gestalt*

$$\prod_{x_1}\prod_{x_2}\cdots\prod_{x_m}\sum_{y_1}\sum_{y_2}\cdot\cdot\sum_{y_n} U_{x_1\cdot\cdot x_m, y_1, \cdot\cdot, y_n},$$

[...]

*Der Beweis geschieht durch eine unendliche Reihe von Schritten. Der erste Schritt ist: Man wählt $x_1 = x_2 = \cdot\cdot = x_m = 1$. Dann muss es möglich sein $y_1 \cdot\cdot y_n$ unter den Zahlen $1, 2, \cdot\cdot, n+1$ so zu wählen, dass $U_{1,1,\cdot,1,y_1\cdot\cdot y_n}$ erfüllt ist. Man bekommt hierdurch eine oder mehrere Lösungen des ersten Schrittes* [...] *Der zweite Schritt besteht darin, dass mann statt $x_1 \cdot\cdot x_m$ jede Variation $m^{ter}$ Klasse im kombinatorischen Sinne unter den $n+1$ Zahlen $1, 2, \cdot\cdot, n+1$ wählt mit Ausnahme der schon im ersten Schritte betrachteten Variation $1, 1, \cdot\cdot, 1$. Für mindestens eine der im ersten Schritte erhaltenen Lösungen muss es dann für jede dieser $(1+n)^m - 1$ Variationen möglich sein, $y_1 \cdots y_n$ under den Zahlen $1, 2, \cdot\cdot, 1+n+((1+n)^m-1)\,n$ so zu wählen, dass die Aussage $U_{x_1\cdot\cdot x_m, y_1\cdot\cdot y_n}$ gültig wird für jede Variation $x_1 \cdot\cdot x_m$ innerhalb des Abschnitts $1, 2, \cdot\cdot, n+1$ der Zahlenreihe für eine zugehörige Wahl von $y_1 \cdot\cdot y_n$ innerhalb des Abschnitts $1, 2, \cdot\cdot, 1+n+((1+n)^m-1)\,n$.* [...] *In dieser Weise muss der Prozess ins Unendliche fortsetzbar sein, falls die gegebene Zählaussage widerspruchslos ist.*

[**Sko23**, pp. 220–221]

---

[**Sko23**] : Thoralf Skolem. « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre ». In: 5. Kongreß Skandinav. in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Helsinki: Akademiska Bokhandeln, 1923, S. 217–232

***Complétude propositionnelle.*** • Bernays, Hilbert et Post établirent la complétude de la logique propositionnelle. Plus précisément, Post [**Pos21**] (trad. anglaise [**Heijenoort**]) présenta son doctorat sans avoir connaissance de l'*Habilitationsschrift* de Bernays, conduite alors que ce dernier assistait Hilbert pour un cours sur les fondements des mathématiques, et publiée plus tard [Ber26]. Voir [Zac99]. • Le passage de la logique propositionnelle à la logique élémentaire n'est pas une simple adaptation technique. Au Congrès International de Bologne en 1928, Hilbert l'énonçait en problème ouvert [Hil30, Problem IV].

***Méthode de Skolem-Gödel.*** todoattention, peut-être migrer vers SÉ2• En un sens, Skolem aurait pu démontrer la complétude dès 1922 ; mais faute de calcul déductif, il ne pouvait pas l'énoncer. De Göttingen où il avait passé un semestre, rentré en Norvège en 1916, Skolem n'eut peut-être pas connaissance des cours de Hilbert de 1917–1918 sur la logique mathématique, très syntaxiques. Réciproquement le très sémantique [**Sko23**] passa plutôt inaperçu : *personne de Göttingen n'assistait à la conférence de Helsinki.* • Preuve de Gödel : issue du doctorat [Göd29], sous la direction de Hans Hahn, et publié en [**Göd30a**] (trad. anglaise [**Heijenoort**]). • Les techniques de Gödel sont exactement celles de Skolem : en fait l'essentiel de [**Göd30a**] tient sur une page de [**Sko23**]. [Brady, p. 203-204] présente ainsi la chose : « *What was an obscure tree argument in Löwenheim (1915) becomes a very simple closure argument in Skolem (1920), but in constructing it, Skolem uses the axiom of choice. It is transformed by Skolem (1923) into a choiceless argument, by transforming to a world of constants. He justifies that the needed disjunctions are true by semantic interpretation in the model $M$. In 1929 Gödel transformed this proof to observe that the hypothesis of formal consistency is sufficient to replace the hypothesis of truth in a model M. In this way the Gödel completeness theorem was born.* » • Mais Gödel n'a pas « transformé » la preuve de Skolem. Pendant sa thèse il avait cherché à se procurer [**Sko23**], mais sans succès [Att05].

***Méthode de Henkin.*** Issue du doctorat [Hen48], sous la direction d'Alonzo Church, et publiée en [Hen49]. Récit de sa découverte (initialement pour des logiques typées/d'ordre supérieur : voir § 12) [Hen96]. • L'étape 4 est en logique propositionnelle attribuée à Lindenbaum par [Tar31b, Theorem 12]. • Influencé par le typage, Henkin ajoutait les témoins par strates successives puis maximisait après chaque ajout, comme

[Ber26] : Paul Bernays. « Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der “Principia Mathematica” ». In : *Math. Z.* 25 (1926), p. 305-320

[Zac99] : Richard Zach. « Completeness before Post : Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic ». In : *Bull. Symbolic Logic* 5.3 (1999), p. 331-366

[Hil30] : David Hilbert. « Probleme der Grundlegung der Mathematik ». In : *Mathematische Annalen* 102 (1930). Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Bologna am 3. Sept. 1928, p. 1-9

[Göd29] : Kurt Gödel. « Über die Vollständigkeit des Logikkalküls ». Thèse de doct. Universität Wien, 1929

[**Göd30a**] : Kurt Gödel. « Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls ». In : *Monatsh. Math. Phys.* 37.1 (1930), p. 349-360

[Att05] : Mark van Atten. « On Gödel's awareness of Skolem's Helsinki lecture ». In : *History and Philosophy of Logic* 26.4 (2005), p. 321-326

[Hen48] : Leon Henkin. « The completeness of formal systems ». Thèse de doct. Princeton University, 1948

[Hen49] : Leon Henkin. « The completeness of the first-order functional calculus ». In : *J. Symbolic Logic* 14 (1949), p. 159-166

[Hen96] : Leon Henkin. « The discovery of my completeness proofs ». In : *Bull. Symbolic Logic* 2.2 (1996), p. 127-158

à l'ex. 10.6.d.. Il comprit bientôt qu'on pouvait incorporer tous les axiomes simultanément, puis maximiser une seule fois la théorie résultante ; procédé indépendamment découvert par Hasenjaeger [Has53, note 3].

***Méthode de Rasiowa-Sikorski.*** • C'est la preuve de troisième génération ; v. § SÉ2. • Elle ne traite que les théories dénombrables. Une autre approche pour démontrer la complétude générale est de se ramener au cas dénombrable (même, fini) grâce au théorème de compacité obtenu par ultraproduits (§ 16). Cette idée semble originaire de logique algébrique (compléments § F, notes conclusives, *Repères historiques*).

***Misc.*** • Paradoxe de Skolem : [**Sko23**, § 3], avec explications limpides. V. § 15, notes conclusives. • Théorème d'omission (ex. 10.7) : v. § 17, notes conclusives.

***Craig et Robinson (ex. 10.6).*** • Le premier est [**Cra57a**, Theorem 5], où il était établi par la théorie de la démonstration ; le second, [Rob56, 2.6]. Craig nota [Cra57b, p. 271] que son résultat impliquait celui de Robinson (avec emploi implicite de compacité, en logique élémentaire), s'interrogeant sur la réciproque. On ignore qui l'a notée ; v. ex. 11.9 et § 11, notes conclusives, *Logiques abstraites.* • Henkin a noté que sa méthode de construction de modèle permet de retrouver des variantes fines de l'interpolation ; [Hen63] est plus fin que la preuve de l'ex. 10.6. • On peut démontrer l'interpolation en logique infinitaire $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ [Lop65]. En revanche, c'est faux dans $\Lambda_{\kappa,\omega}$ pour $\kappa > \omega_1$ [Mal71]. L'interpolation reste valable en logique intuitionniste [Sch62]. • Plus de détails dans [Fef08]. Feferman signale que « Craig multisorte » n'est pas un simple aménagement du cas unisorte : c'est en faveur de la logique multisorte (§ 7.1) comme logique native, et non comme commodité d'écriture.

- **Terminologie.** Le nom *complétude* est malheureux pour l'*adéquation* entre $\models$ et $\vdash$. L'origine en est que Hilbert puis Gödel ne décrivaient pas le calcul déductif par règles, mais par axiomes. Cette axiomatisation est complète car un ajout mène à l'incohérence. V. § 8, notes conclusives, *Terminologie.* Les travaux de Gentzen ont changé le formalisme mais le nom est resté.

- **Lemme de Lindenbaum (étape 4).** • C'est une construction de filtre maximal, sans invoquer de principe de maximalité (théorème de Krull, ni même sa version dans les anneaux de Boole) : elle se fait *sans choix.* En effet comme $\varphi_k$ est plus court que $\neg\varphi_k$, il y a un choix canonique. • La récurrence demande d'avoir bien ordonné les formules. Si $\mathcal{L}$ est bien ordonné, alors ($\mathcal{L}^*$ aussi et) les formules sont bien ordonnées. Si $\mathcal{L}$ n'est pas bien ordonné d'emblée, le munir d'un bon ordre demande une forme de choix (comp-

[Has53] : Gisbert Hasenjaeger. « Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe ». In : *J. Symbolic Logic* 18 (1953), p. 42-48

[**Cra57a**] : William Craig. « Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem ». In : *J. Symbolic Logic* 22 (1957), p. 250-268

[Rob56] : Abraham Robinson. « A result on consistency and its application to the theory of definition ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **59** = *Indag. Math.* 18 (1956), p. 47-58

[Cra57b] : William Craig. « Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory ». In : *J. Symbolic Logic* 22 (1957), p. 269-285

[Hen63] : Leon Henkin. « An extension of the Craig-Lyndon interpolation theorem ». In : *J. Symbolic Logic* 28 (1963), p. 201-216

[Lop65] : Edgar Lopez-Escobar. « An interpolation theorem for denumerably long formulas ». In : *Fund. Math.* 57 (1965), p. 253-272

[Sch62] : Kurt Schütte. « Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik ». In : *Math. Ann.* 148 (1962), p. 192-200

[Fef08] : Solomon Feferman. « Harmonious logic : Craig's interpolation theorem and its descendants ». In : *Synthese* 164.3 (2008), p. 341-357

tage ordinal de Zermelo, § 3.3). • Donc pour $\mathcal{L}$ et $\Theta$ ensemblistement effectifs, il existe une complétion, et donc un modèle $\mathbb{A} \models \Theta$ *sans invoquer l'axiome du choix.* • En revanche le processus de l'étape 4 n'est pas *décidable* : il est impossible de savoir algorithimiquement si $\Theta_k \cup \{\varphi_k\}$ est cohérent ou non, car la longueur des déductions n'est pas bornée. La notion intuitive d'effectivité ne se limite pas à l'emploi ou non de l'axiome du choix. • Dans le cas de l'axiomatique de Peano PA, l'existence d'une complétion décidable contredirait le premier théorème d'incomplétude de Gödel.

- **Niveau de constructivité.** La discussion du lemme de Lindenbaum montre l'ambiguïté des mots « effectif », « constructif », etc. Les *mathématiques à rebours* ont plus de précision. $\mathrm{RCA}_0$ est un fragment de l'arithmétique du deuxième ordre, couramment employé comme socle de raisonnement.

**Théorème** ([Simpson, Theorem IV.3.3]). Au-dessus de $\mathrm{RCA}_0$, les énoncés suivants sont équivalents :

– le lemme de Kőnig faible (§ 1.3) ;
– le lemme de Lindenbaum dénombrable (toute théorie dénombrable a une complétion) ;
– le th. de complétude dénombrable (toute théorie dénombrable a un modèle dénombrable) ;
– le th. de compacité dénombrable (v. § 11).

- **Longueur des preuves (« speed-up »).** Suite de § 9, notes conclusives. L'existence d'une démonstration $\Phi \vdash \chi$ ne garantit pas sa praticabilité.

***Un exemple*** [Boo87]. Dans $\mathcal{L} = \{0, R, s, f\}$, soit $\Phi$ l'axiomatisation :

– $(\forall x)[f(x,0) = s(0)]$ ;
– $(\forall y)[f(0,s(y)) = s(s(f(0,y)))]$ ;
– $(\forall x)(\forall y)[f(s(x),s(y)) = f(x,f(s(x),y))]$ ;
– $R(0)$ ;
– $(\forall x)[R(x) \to R(s(x))]$.

Soit $\chi$ l'énoncé $R(f(s^4(0),s^4(0))$, en abréviation évidente. Alors $\Phi \models \chi$.

**Démonstration.** Soit $\mathbb{A} \models \Phi$. Soit $A_0 \subseteq \mathbb{A}$ l'orbite de 0 sous $s$, i.e. l'intersection de tous les ensembles clos sous $s$ et contenant 0. $A_0$ peut être fini mais $\mathbb{N}$ se surjecte sur $A_0$, de sorte qu'on peut lui appliquer la récurrence.

On montre : $(a \in A_0 \wedge b \in A_0) \to f(a,b) \in A_0$. Si $a = 0$, par récurrence $(\forall b)(b \in A_0 \to f(a,b) \in A_0)$. Soit $a$ ayant cette propriété. Alors pour $b = 0$ il vient $f(s(a),b) = s(a) \in A_0$, et si $b$ a cette propriété, alors $f(s(a),s(b)) = f(a,f(s(a),b)) \in A_0$.

$\chi$ est un cas particulier. □

Cette démonstration s'écrit naturellement en logique *du deuxième ordre* (§ 12.1), et la déduction formelle résultante est courte. • Par complétude, on a en outre $\Phi \vdash \chi$ en logique élémentaire. Boolos montre qu'une telle déduction élémentaire serait de longueur astronomique. (Il faut des outils de théorie de la démonstration.)

***Speed-up.*** • Ceci illustre un phénomène annoncé sans démonstration par Gödel [Göd36] et nommé « speed-up » depuis les années 1960 : augmenter la logique peut raccourcir les preuves formelles, et il n'y a même pas de borne calculable aux facteurs de réduction. • La « longueur » d'une preuve peut être mesurée de deux façons, ce qui donne deux versions du speed-up :

– par son nombre de symboles (version démontrée par [Mostowski]) ;

[Simpson] : Stephen SIMPSON. *Subsystems of second order arithmetic.* 2e éd. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge ; Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, 2009. xvi+444
[Boo87] : George BOOLOS. « A curious inference ». In : *J. Philos. Logic* 16.1 (1987), p. 1-12
[Göd36] : Kurt GÖDEL. « Über die Länge von Beweisen ». In : *Ergebn. math. Kolloqu. Wien* 7. 1936, p. 23-24
[Mostowski] : Andrzej MOSTOWSKI. *Sentences undecidable in formalized arithmetic. An ex-*

- par son nombre de règles (version plus difficile, [Bus94]).

• De manière générale, les questions de longueur sont très dépendantes du langage ; v. § 20, notes conclusives, *conjecture de Kreisel*. Bonne référence [Cav08].

***Raisonnons-nous en logique élémentaire ?*** Retour à l'exemple. $\Phi \models \chi$ est évident intuitivement, donc l'intuition ne reste pas en logique élémentaire. De cela Boolos tire une critique :

- du rejet de la logique d'ordre supérieur comme non pertinente ;
- de l'équation « logique élémentaire = logique du raisonnement humain ».

• **Autres logiques.** (Prérequis : § 7.) Un théorème de complétude pour une logique $\Lambda$ est l'existence d'un système déductif naturel $\vdash [\Lambda]$ reflétant exactement $\models [\Lambda]$. Si $\Lambda$ étend $\Lambda_{\omega,\omega}$, cette notion de déduction doit étendre $\vdash [\Lambda_{\omega,\omega}]$.

***Logique multisorte.*** Adaptation immédiate. On peut aussi invoquer les ex. 7.1 et 9.10 pour se ramener au cas unisorte.

***Logiques d'ordre supérieur.*** • Pas de théorème de complétude pour la sémantique naïve où les *parties* sont exactement les parties ensemblistes ; pas même de complétude faible. V. ex. 20.11. • Mais on a complétude en « sémantique de Henkin », qui est élémentaire ; v. § 12.2.

***Logiques infinitaires.*** Pour le système déductif naturel (qui tolère des arbres de déduction infinitaires), $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ est faiblement complète. Elle ne l'est pas fortement. V. § SÉ2.

***Quantificateurs généralisés.*** • Pour le système déductif naturel, $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ est dénombrablement complète. Elle ne l'est pas fortement. V. § SÉ2. • Pas de complétude, même faible, pour $\exists_{\geqslant\aleph_0}$ : ex. 20.11. • Logique à relations infinitaires (v. § 7, notes conclusives) : complétude, [Kei63].

***Logique continue.*** [BP10].

***Logiques non classiques.*** V. compléments § G et § H.

# § 11. Compacité ; phénomènes non standard

La *compacité* de la logique élémentaire affirme qu'une théorie finiment satisfaisable l'est globalement ; c'est la compacité d'un espace topologique (§ 11.1). Ce théorème a d'importantes conséquences d'*uniformité* ou d'*inexprimabilité* en logique élémentaire (§ 11.2). En outre les *phénomènes non standard* sont inévitables (§ 11.3).

Prérequis : §§ 6, 8.

---

*position of the theory of Kurt Gödel*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1952, p. viii+117

[Bus94] : Samuel Buss. « On Gödel's theorems on lengths of proofs I ». In : *J. Symbolic Logic* 59.3 (1994), p. 737-756

[Cav08] : Stefano Cavagnetto. « The lengths of proofs : Kreisel's conjecture and Gödel's speed-up theorem ». In : *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 358.Issledovaniya po Konstruktivnooĭ Matematike i Matematicheskoĭ Logike. XI (2008), p. 153-188, 304

[BP10] : Itaï Ben Yaacov et Arthur Pedersen. « A proof of completeness for continuous first-order logic ». In : *J. Symbolic Logic* 75.1 (2010), p. 168-190

## § 11.1. Le phénomène de compacité

On rappelle qu'un ensemble $\Phi$ de formules :

— est dit *satisfaisable* (§ 8.1.A) s'il possède un modèle ;

— est souvent assimilé $\Phi$ à l'ensemble de ses conséquences $\mathrm{Th}(\Phi)$.

C'est sans danger car $\Phi$ est satisfaisable ssi $\mathrm{Th}(\Phi)$ l'est. La notion est surtout utile avec des ensembles d'énoncés. On laisse désormais un peu de latitude au mot « théorie », qui en contexte pourra supposer la satisfaibilité ou non.

**Définition A** (satisfaisabilité finie)**.** Une théorie $\Theta$ est *finiment satisfaisable* si tout sous-ensemble fini $\Theta_0 \subseteq \Theta$ est satisfaisable.

**Théorème** (compacité de la logique élémentaire ; Gödel, Maltsev)**.** En logique élémentaire, soient $\mathcal{L}$ un langage relationnel et $\Theta$ une théorie. Alors $\Theta$ est satisfaisable ssi elle est finiment satisfaisable.

Variante : soient $\Phi \subseteq \mathcal{L}$-Form et $\chi \in \mathcal{L}$-Form. Alors $\Phi \models \chi$ ss'il existe un sous-ensemble fini $\Phi_0 \subseteq \Phi$ tel que $\Phi_0 \models \chi$.

**Démonstration.** Par adéquation de $\models$ et $\vdash$ (§ 10), et caractère local de la seconde relation. Supposons $\Theta$ finiment satisfaisable ; par correction, elle est finiment cohérente. Mais la cohérence est une notion finitaire, donc $\Theta$ est cohérente. Par complétude, elle est satisfaisable. La variante suit, en traitant $\Theta = \Phi\{\cup\neg\chi\}$ comme un ensemble de $(\mathcal{L} \cup \mathcal{V})$-énoncés. □

*Remarques*

— Par complétude à cardinaux contrôlés (§ 10.(iii)), il existe même un modèle de cardinal $\leqslant \operatorname{card}\Theta + \aleph_0$. On peut parler de *compacité à cardinaux contrôlés.*

— Ce résultat purement mathématique (sémantique) est obtenu en passant par la théorie de la démonstration. C'est contre la pureté des méthodes. § 16.3 donne une preuve algébrique du théorème de compacité.

• **Interprétation topologique.** (Prérequis : §§ 4 et 5.) Une théorie est *complète* si elle est satisfaisable et maximale en tant que telle (§ 8.2).

**Définition B** (espaces de théories)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. $S_{\mathcal{L}}$, $S_{\mathcal{L}}(T)$

— L'espace topologique $S_{\mathcal{L}}$ a pour points l'ensemble des $\mathcal{L}$-théories élémentaires complètes, et pour fermés de base les $F_\varphi = \{\Theta \in S_{\mathcal{L}} : \Theta \models \varphi\}$.

— Si $\Theta_0$ est une $\mathcal{L}$-théorie fixée (éventuellement vide), soit $S_{\mathcal{L}}(\Theta_0)$ l'ensemble des théories complètes contenant $\Theta_0$, muni de la topologie de sous-espace.

Les $F_\varphi$ forment un anneau de Boole car $F_\varphi^c = F_{\neg\varphi}$. En outre $S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{L}}(\varnothing)$ ; s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le langage on peut simplement noter $S$.

*Remarques*

— Un fermé de $S$ est exactement une théorie (non supposée complète). Un point isolé est exactement une théorie complète finiment axiomatisable.

— La collection quotient $\mathcal{L}$-**Str**/$\equiv$-des $\mathcal{L}$-structures modulo équivalence élémentaire peut être assimilée à l'ensemble $S_{\mathcal{L}}$. Quand on la topologise par les fermés $F_\varphi = \{[\mathbb{A}] : \mathbb{A} \models \varphi\}$ pour $\varphi \in \mathcal{L}$-Én, on retrouve un espace compact topologiquement isomorphe à $S_{\mathcal{L}}$.

— On peut même introduire les $S_{\Lambda(\mathcal{L})}(\Theta_0)$ en variant la logique.

**Corollaire.** En logique élémentaire, $S(\Theta_0)$ est un espace profini, dont les ferverts sont exactement les $F_\varphi$.

**Démonstration.** On peut supposer $\Theta_0 = \varnothing$ car la topologie de sous-espace se comporte bien pour un fermé. Comme les $F_\varphi$ forment un anneau de Boole, les fermés sont exactement les intersections arbitraires des $F_\varphi$, et les ouverts en sont les réunions arbitraires.

Montrons que $S$ est séparé. Soient $\Theta_1 \neq \Theta_2$ deux théories distinctes. Alors il existe $\varphi$ tel que $\Theta_1 \models \varphi$ mais $\Theta_2 \not\models \varphi$, de sorte que $\Theta_1 \in F_\varphi$ et $\Theta_2 \in F_{\neg\varphi}$ : on a deux ouverts séparant $\Theta_1$ et $\Theta_2$.

Montrons que $S$ a la propriété de Borel-Lebesgue. Si $\{F_i : i \in I\}$ est une famille de fermés ayant la propriété des intersections finies, on peut écrire $F_i = \bigcap_{j \in J_i} F_{\varphi_{i,j}}$, et la famille $\{F_{\varphi_{i,j}} : i \in I, j \in J_i\}$ a encore la propriété des intersections finies. Il suit que $\{\varphi_{i,j} : i \in I, j \in J_i\}$ est finiment satisfaisable. Par compacité de la logique élémentaire, la famille est satisfaisable. Soit $\Theta$ une théorie complète la contenant. Alors $\Theta \in \bigcap_{i,j} F_{\varphi_{i,j}}$.

Il suit que $S(\Theta_0)$ est un espace profini. Comme les $F_\varphi$ constituent une famille séparante de ferverts *et* un anneau, ils forment exactement l'anneau fervert d'après le lemme d'engendrement § 4.1. $\square$

Ces espaces dits « de Stone » sont centraux en théorie des modèles. V. § 17.

*Remarque* (une erreur dangereuse). Le corollaire n'est pas une conséquence immédiate de la dualité de Stone (§ 5.3) : le raisonnement suivant est incorrect.

On munit $\mathcal{L}$-Én de l'équivalence $\varphi_1 \sim \varphi_2$ : si $\Theta \models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$. L'ensemble quotient $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ est alors un anneau de Boole en posant :

— $[\varphi_1] + [\varphi_2] = [(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \vee (\varphi_2 \wedge \neg\varphi_1)]$ ;

— $[\varphi_1] \cdot [\varphi_2] = [\varphi_1 \wedge \varphi_2]$.

Une $\mathcal{L}$-théorie complète est un ultrafiltre de $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta)$. Quitte à échanger filtres et idéaux, l'espace topologique $S_{\mathcal{L}}(\Theta)$ est exactement le dual de Stone de $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta)$. Il est donc profini, et compact.

C'est incorrect car les théories complètes sont *certains* ultrafiltres, pas tous. En effet la seule structure booléenne ne rend pas compte de la quantification ; on peut former des ultrafiltres contenant à la fois $(\exists x\ \varphi)$ et $(\forall x)(\neg\varphi)$, mais cette paire n'est incluse dans aucune théorie complète. Ainsi $S_{\mathcal{L}}(\Theta)$ apparaît comme un sous-ensemble propre de $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta)$, et sa fermeture relative n'a rien d'évident. (Le raisonnement serait correct en logique propositionnelle.)

La *logique algébrique* étudie les anneaux de Boole augmentés d'opérateurs décrivant la quantification. V. compléments § F.

## § 11.2. Raisonnements par compacité

De même que la compacité topologique uniformise la continuité, *en logique élémentaire on a fini = uniformément fini*, i.e. borné. On peut en tirer l'inexprimabilité de nombreuses notions en logique élémentaire. La plus simple est la finitude, qui n'est pas caractérisable dans $\Lambda_{\omega,\omega}(=)$.

**Proposition A.** Soit $\Theta$ une théorie élémentaire ayant pour chaque entier $n$ un modèle de cardinal $\geqslant n$. Alors $\Theta$ a un modèle infini.

Variante : aucune théorie élémentaire ne caractérise la finitude.

**Démonstration.** Soit pour $n$ entier l'énoncé $\varphi_n$ :

$$(\exists x_1)\dots(\exists x_n)\left(\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j\right).$$

La conjonction porte sur $i \neq j$ dans $\{1,\dots,n\}$. Cet énoncé signifie « le domaine a au moins $n$ éléments » ; en particulier $\varphi_n \models \varphi_k$ pour $k \leqslant n$. Soit alors $\Theta' = \Theta \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. On peut traiter cette axiomatisation comme la théorie qu'elle engendre. Soit $\Theta'_0 \subseteq \Theta'$ une partie finie de $\Theta'$. Elle mentionne un nombre fini d'axiomes de $\Theta$, et un nombre fini d'axiomes $\varphi_n$. Soit $n$ maximal tel que $\varphi_n \in \Theta'_0$. Par hypothèse, il existe un modèle $\mathbb{A}$ de $\Theta$ ayant au moins

$n$ éléments. Alors $\mathbb{A} \models \Theta_0'$. Donc $\Theta_0'$ est satisfaisable. Par compacité, $\Theta'$ est satisfaisable. Un modèle $\mathbb{A}' \models \Theta'$ est alors un modèle infini de $\Theta$. □

On donne une autre application, dont la méthode est également à retenir.

**Proposition B** (extension d'ordres partiels)**.** Tout ordre partiel peut être étendu en un ordre total (cf. § 2.1).

**Démonstration.** Il faut d'abord se convaincre que c'est vrai sur un ensemble fini ; c'est de la combinatoire intuitive, non de la logique.

Soit $\mathbb{A} = (A; \sqsubseteq)$ un ordre partiel. Soit $\mathcal{L}$ le langage contenant des constantes $c_a$ indexées par $a \in A$ et une relation binaire $R$. Soit la théorie $\Theta$ donnée par :

— l'axiome « $R$ est un ordre total » ;

— les axiomes $c_a R c_b$ pour $a \sqsubseteq b$ dans $A$.

(Ici encore, on peut assimiler l'axiomatisation formée par les axiomes et la théorie engendrée.)

Cette théorie est finiment satisfaisable, car une partie finie $\Theta_0 \subseteq \Theta$ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, donc une partie finie $A_0 \subseteq A$. Sur cet ensemble fini, l'ordre partiel $\sqsubseteq$ possède une extension totale $R$. On interprète alors les $c_a$ par $a$. Ceci montre que $\Theta_0$ est satisfaisable. Par compacité, $\Theta$ est satisfaisable. Soit $\mathbb{M} \models \Theta$ un modèle. La partie $\{c_a[\mathbb{M}] : a \in A\}$ est totalement ordonnée par $R$, et la transporter sur $A$ donne une extension totale de $\sqsubseteq$. □

*Remarque.* On peut invoquer la seule compacité de la logique propositionnelle. Il suffit en effet de remplacer l'axiome unique « $R$ est un ordre total » par tous les axiomes $aRa$, $aRb \wedge bRa \to a = b$, $aRb \wedge bRc \to aRc$, et $aRb \vee bRa$ pour $a, b, c \in A$.

## § 11.3. Phénomènes non standard

« Non standard » n'est pas un terme technique ; il s'oppose à « standard » qui désigne le modèle prévu. Un principe est fondamental.

> Toute formalisation en logique élémentaire d'une structure infinie crée des artéfacts non standard. Aucune théorie élémentaire de structure infinie n'est absolument catégorique.

**Proposition.** Soit $\Theta$ une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire ayant un modèle infini. Alors $\Theta$ a des modèles de tout cardinal infini $\geqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$.

**Démonstration.** Soit $\mathbb{A} \models \Theta$ infini. Soit $\kappa$ infini et majorant $\operatorname{card} \mathcal{L}$, i.e. $\kappa \geqslant \max(\operatorname{card} \mathcal{L}, \aleph_0)$. Soient $\{c_i : i \in \kappa\}$ un ensemble de nouvelles constantes et $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_i : i \in \kappa\}$. On considère la $\mathcal{L}'$-théorie élémentaire $\Theta' = \Theta \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}$. Noter que toute partie finie de $\Theta'$ est satisfaisable, car il suffit d'interpréter le nombre fini de $c_i$ mentionnées par des éléments distincts de $\mathbb{A}$. Donc $\Theta'$ est finiment satisfaisable. Par compacité à cardinaux contrôlés (théorème 11.1 et la remarque le suivant), $\Theta'$ possède un modèle $\mathbb{A}' \models \Theta'$ de cardinal $\leqslant (\max \operatorname{card} \mathcal{L}', \aleph_0) = \kappa$. Grâce aux $c_i[\mathbb{A}]$ on a $\operatorname{card} \mathbb{A}' \geqslant \kappa$, d'où l'égalité. En outre $\mathbb{A}' \models \Theta$. □

*Remarques*

— *L'absolue catégoricité (§ 8.3) est donc impossible en logique élémentaire*, sauf pour les théories décrivant des structures finies.

— La proposition est renforcée en § 15.2.

On peut affiner $\Theta'$ de la démonstration pour forcer l'existence d'éléments aux propriétés inattendues, « non standard ». Les exemples suivants sont à retenir.

*Exemple* (arithmétique non standard). Il existe des modèles de PA avec des infiniment grands.

*Vérification.* On ajoute au langage $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ une constante $\nu$. Pour chaque entier $n$, soit $\chi_n$ l'axiome $(\exists x)(\nu = x + 1 + \cdots + 1)$, où 1 apparaît $n$ fois. Intuitivement $\chi_n$ signifie $\nu \geqslant n$ (mais l'ordre est absent du langage). Soit l'axiomatisation :

$$A_1 = \mathrm{PA} \cup \{\chi_n : n \in \mathbb{N}\},$$

où il y a autant d'énoncés que d'entiers intuitifs.

Cette axiomatisation $A_1$ est finiment satisfaisable car une partie finie $A_0 \subseteq A_1$ ne fait intervenir que des énoncés vrais dans $\mathbb{N}$ et des informations $\nu \geqslant k$ pour un nombre fini d'entiers. Prenant leur maximum et interprétant $\nu$ par $k + 1$, on peut faire de $\mathbb{N}$ un modèle de $\mathbb{A}_0$, qui est donc satisfaisable. Par compacité, $A_1$ est satisfaisable. Un modèle $\mathbb{N}^* \models A_1$ vérifie PA, mais $\nu[\mathbb{N}^*]$ est « infiniment grand », car supérieur à tout entier.

Noter que la compacité à cardinaux contrôlés donne même un tel $\mathbb{N}^*$ dénombrable avec des infiniment grands. ◇

Attention : dans $\mathbb{N}^*$, la relation $(\exists x)(z = x + y)$ définit encore un ordre $z \geqslant y$. Mais le type d'ordre de $(\mathbb{N}^*; \leqslant)$ est très éloigné d'être un ordinal : il n'y a pas de « plus petit élément non standard ».

*Exemple* (renforcement du précédent). Il existe des structures $(\mathbb{N}^* \,;\, 0, s, +, \cdot)$ élémentairement équivalentes aux vrais entiers, mais avec des infiniment grands.

*Vérification.* Au lieu de PA on part de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$, l'ensemble des énoncés vrais dans $\mathbb{N}$. L'axiomatisation $A_{\mathbb{N}} = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\chi_n : n \in \mathbb{N}\}$ est encore satisfaisable dans un modèle $\mathbb{N}^*$. Cette fois, pour tout $\mathcal{L}$-énoncé $\varphi$ on a $\mathbb{N} \models \varphi$ ssi $\mathbb{N}^* \models \varphi$ : c'est l'élémentaire équivalence. ◇

L'un a pourtant des infiniment grands ; l'autre pas. En effet la propriété « être infiniment grand » n'est pas élémentaire : c'est une conjonction infinie (indexée par les vrais entiers) de formules élémentaires.

*Exemple* (analyse non standard de base). Un corps ordonné $(\mathbb{K}; +, \cdot, \leqslant)$ est *réel clos* si tout polynôme de degré impair possède une racine, et que les éléments positifs coïncident avec les carrés. Évidemment $(\mathbb{R}; +, \cdot, \leqslant)$ est réel clos. Il existe des corps réels clos non archimédiens.

*Vérification.* On note RCF la théorie élémentaire des corps réels clos (dex axiomatisations sont proposées en § 8.1). On ajoute une constante et l'on forme la théorie :

$$\Theta = \mathrm{RCF} \cup \{x > \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Il n'y a aucun risque à voir en $x$ (souvent employée comme variable) une constante. Toute partie finie de $\Theta$ est satisfaisable dans $\mathbb{R}$, en interprétant $x$ par un réel assez grand. Par compacité, $\Theta$ est satisfaisable. Un modèle $\mathbb{K}$ est un corps réel clos avec un infiniment grand, donc aussi un infinitésimal. C'est un corps réel clos non archimédien. ◇

On a même $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ car RCF est complète (compléments K, ex. K.5).

La théorie des modèles fait une force des phénomènes non standard, en fonctorialisant l'information définissable (§§ 13, 14).

---

## Exercices

**11.1 (quelques applications classiques de la compacité).** Montrer les points suivants.

a. Le lemme de Kőnig (§ 1.3).

b. Un graphe $\Gamma = (S \,;\, R)$ est *k-colorable* s'il existe une fonction $f\colon S \to k$ telle que pour tous sommets $s_1, s_2$, on ait $s_1 R s_2 \to f(s_1) \neq f(s_2)$. Montrer que $\Gamma$ est $k$-colorable ssi tout sous-graphe fini l'est.

c. Un groupe, non nécessairement abélien, est ordonnable (les multiplications à gauche et à droite doivent préserver l'ordre) ssi tout sous-groupe finiment engendré l'est.

d. Un anneau non commutatif peut être plongé dans un corps gauche ssi tout sous-anneau finiment engendré peut l'être.

e. Tout anneau possède un idéal *premier* (cet énoncé est plus faible que le théorème de Krull ; v. § 23, notes conclusives). [Tout anneau de type fini est noethérien.] (*)

Certains ne demandent que la compacité de la logique *propositionnelle* (sans quantificateurs).

**11.2 (inexprimabilité en logique élémentaire).** Montrer qu'aucune des propriétés suivantes ne peut être caractérisée par une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire : a. pour un ordre, être bon ; b. pour un graphe, être connexe ; c. pour un groupe, être de torsion, être finiment engendré, (*) être simple ; d. pour un corps ordonné, être archimédien. Cf. ex. 7.2, 7.3, 7.4.

**11.3 (axiomatisations finies).** On rappelle un lemme important (v. ex. 8.2).

**Lemme.** Si une théorie élémentaire possède une axiomatisation finie, alors *chaque* axiomatisation contient une axiomatisation finie.

Montrer ce lemme, puis le généraliser ainsi : s'il existe une axiomatisation de cardinal $< \kappa$, alors chaque axiomatisation en contient une de cardinal $< \kappa$.

**11.4 (classes élémentaires).** Si $\Theta$ est une théorie, on note $\mathbf{Mod}(\Theta)$ la collection de ses modèles. Une collection de cette forme est appelée *classe logique.* Si $\Theta$ est élémentaire, on parle de *classe élémentaire.*

a. Soient $I$ un ensemble et, pour $i \in I$, des théories élémentaires $\Theta_i$ telles que $\bigcap_I \mathbf{Mod}(\Theta_i) = \varnothing$. Montrer qu'il existe $I_0 \subseteq I$ fini ayant la propriété.

b. Soit $\mathcal{C}$ une collection de $\mathcal{L}$-structures telle que $\mathcal{C}$ et sa collection complémentaire $\mathcal{C}^c$ soient élémentaires. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}$-Én tel que $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}(\varphi)$.

**11.5.** Soit $\Gamma$ un groupe *linéaire*, i.e. tel qu'il existe un corps $\mathbb{K}$ et un entier $n$ pour lesquels $\Gamma \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (à isomorphisme près). Soit $G \equiv \Gamma$. Montrer que $G$ est linéaire, pour le même entier.

**11.6 (théorème de Ramsey).** Seule la première question est de logique ; le reste est de combinatoire infinie. Soit $E$ un ensemble. (*)

– L'ensemble des parties à $d$ éléments, appelées *$d$-parties*, est noté $\binom{E}{d}$ (ou parfois $[E]^d$).

– Un *coloriage* des $d$-parties en $k$ couleurs est une fonction $f\colon \binom{E}{d} \to \{1, \ldots, k\}$.

– Une partie $F \subseteq E$ est *$f$-monochrome* si la restriction de $f$ à $\binom{F}{d}$ est constante.

**Théorème** (« Ramsey fini »)**.** Pour tous $d, k, n \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout ensemble à $\geqslant N$ éléments dont on $k$-colorie les $d$-parties a une partie monochrome de cardinal $\geqslant n$.

**Théorème** (« Ramsey infini »)**.** Pour tous $d, k \in \mathbb{N}$, tout ensemble infini dont on $k$-colorie les $d$-parties a une partie monochrome infinie.

a. Montrer que « Ramsey infini » entraîne « Ramsey fini ». [Compacité.]

b. Preuve de « Ramsey infini » par récurrence.

   (i) (Question facultative.) Montrer que si « Ramsey infini » est vrai pour $k = 2$, il l'est pour tout $k$ entier.
   On suppose dorénavant « Ramsey infini » vrai pour $k = 2$ et $d - 1$.

(ii) Soient $E_0$ infini et $f_0\colon \binom{E_0}{d} \to \{0,1\}$ ; on fixe $x_0 \in E_0$. Montrer qu'il existe $E_1 \subseteq E_0\backslash\{x_0\}$ infinie et $c_0 \in \{0,1\}$ tels que toute $d$-partie de $E_0$ *contenant* $x_0$ est de couleur $c_0$.

(*) (iii) En itérant, démontrer « Ramsey infini » pour les $d$-parties, et conclure.

c. (Prérequis : 5.2.) Preuve de « Ramsey infini » par les ultrafiltres. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $E$.

(i) Soit $\mathbf{a} \in \binom{E}{d-1}$. Montrer qu'il existe $c_{\mathbf{a}} \in \{1,\dots,k\}$ tel que $\{b \in E : f(\mathbf{a} \cup \{b\}) = c_{\mathbf{a}}\} \in \mathcal{U}$. En déduire que $f$ s'étend en un coloriage $\hat{f}\colon \bigsqcup_{\delta \leqslant d} \binom{E}{\delta} \to \{1,\dots,k\}$ tel que : si $\mathbf{a} \in \binom{E}{\delta}$, alors $G_{\mathbf{a}} = \{b \in E\backslash\mathbf{a} : \hat{f}(\mathbf{a} \cup \{b\}) = \hat{f}(\mathbf{a})\} \in \mathcal{U}$.

(ii) Former une partie $\hat{f}$-monochrome infinie. [Récurrence.]

**11.7 (autres logiques).** (Prérequis : § 7.) La *compacité dénombrable* est la propriété : *toute théorie dénombrable et finiment satisfaisable est satisfaisable.*

a. Montrer que $\mathbb{A}^{2,p}$ et $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0})$ ne sont pas dénombrablement compactes.

b. Montrer que $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ n'est pas compacte. (Elle l'est dénombrablement, v. § SÉ2.6).

c. Montrer que $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ n'est pas dénombrablement compacte. Elle est pourtant dénombrablement complète (v. § SÉ2.5). Est-ce un paradoxe ?

**11.8 (logiques abstraites : compacité réciproque).** Une logique $\Lambda$ est *compacte** si elle a la propriété suivante pour tout langage. Si $\Theta$ est une théorie telle que toute structure est modèle d'un $\varphi \in \Theta$, alors il existe $\Theta_0 \subseteq \Theta$ finie telle que toute structure est modèle d'un $\varphi \in \Theta_0$.

a. Une logique $\Lambda$ *a la négation* si pour tout $\varphi \in \mathcal{L}$-Én, il existe $\varphi^- \in \mathcal{L}$-Én tel que pour toute structure, $\mathbb{A} \models \varphi^-$ ssi $\mathbb{A} \not\models \varphi$. Montrer qu'une telle logique est compacte ssi compacte*.

b. On suppose que $\Lambda$ *a la conjonction* dans un sens évident. Sur la classe des (disons, « petites », i.e. plus petites qu'un cardinal inaccessible donné) structures on met la topologie engendrée par les fermés $F_\varphi = \{\mathbb{A} \in \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str} : \mathbb{A} \models \varphi\}$. Montrer que $\Lambda$ est compacte* ssi cette topologie est de Borel-Lebesgue.

**11.9 (logiques abstraites : interpolation et satisfaisabilité disjointe).** (Prérequis : § 7.) Suite de l'exercice 10.6. Relire les lemmes de Craig et de Robinson. On prend une logique abstraite au sens de la définition 7.6. En présence de (négation, disjonction et) compacité, montrer leur équivalence. Suite à l'exercice 14.7.

---

## Notes conclusives

### • Repères historiques

*В алгебре и особенно в теории групп существует довольно много теоремгимеющих вид: если некоторое свойство имеет место для всех частей какой-либо области (группы, кольца и т. п.), порожденных конечным множествомэлементов этой области, то свойство A имеет место и для всей области. Цельнастоящей заметки — показать, что такие предложения не являются, в сво-своем большинстве, специфически алгебраическими и могут быть полученыкак непосредственные следствия одного общего предложения математиче-математической логики. Этот общий подход к локальным теоремам не дает, конечногрешения каких-либо трудных алгебраических проблем. Однако он во мно-многих случаях делает доказательства этих теорем излишними и иногда поз-позволяет* *непосредственно усмотреть, что соответствующие теоремы имеют местои в несколько более широких условиях.* [Mal41]

***Compacité.*** • Son histoire illustre le faux départ de la logique mathématique, initialement fascinée par la syntaxe [Daw93]. • Phénomène observé dans le cas dénombrable par [**Göd30a**, Sätze IX–X] (absent du doctorat) ; ses intérêts n'allant pas aux applications mathématiques, Gödel n'en a pas fait grand cas. • Généralisé à des théories non dénombrables *propositionnelles* par Maltsev [**Mal36**], qui employa la version de logique élémentaire en algèbre [Mal41] (v. infra). • « *Thus, in* 1936 *Maltsev 'proved' the theorem without ever stating it, while in* 1941 *he stated it without proof!* » [Daw93, p. 19] • Preuve sémantique de la compacité : v. § 16.

***Modèles non standard.*** • Histoire des phénomènes non standard : § 15, notes conclusives. • Skolem fut le premier à construire un modèle non standard des entiers [**Sko34**, Satz 2], par un *ultraproduit définissable.* Skolem n'a pas énoncé la compacité ; Maltsev avait connaissance des travaux de Skolem. • Le point de vue sémantique mit longtemps à s'imposer : d'où la relative indifférence aux travaux de Maltsev et Skolem, en avance sur une époque encore éprise de logicisme. • Skolem publiait dans diverses langues ; la plupart de ses travaux logiques ont été regroupés [Skolem]. Les œuvres de Maltsev ont été éditées, et certaines traduites en anglais [Maltsev]. *Ces deux mathématiciens sont sous-cotés, même dans l'histoire de la logique.* On peut tenter de l'expliquer par 1. le centrage sur Göttingen puis les mathématiques de langue anglaise, et 2. une certaine aversion de l'influent Tarski à reconnaître les mérites d'autrui.

***Analyse non standard.*** • L'évacuation des infinitésimaux au profit de $(\mathbb{R}\,;+,\cdot,\leqslant)$ et de ses sous-corps est récente, et ne répond *aucunement* à une « marche nécessaire vers la rigueur ». Le corps « de Dedekind-Cantor » $\mathbb{R}$ est absolument catégorique dans $\mathbb{A}^{2,p}$ ; v. ex. 8.8. Mais 1. son adéquation à l'intuition de droite est une thèse épistémologique jamais incontestable, et 2. trouver inanes les intuitions de Leibniz est certainement naïf. (Des textes de calcul différentiel purement standard comme celui de Dieudonné s'intitulent *Calcul infinitésimal* ; contradiction.) • Les alentours de 1900 virent les débuts de l'analyse non archimédienne, sans lien avec la logique (v. compléments § A, notes conclusives). Restait la question : comment concilier les propriétés élémentaires de $\mathbb{R}$ (archimédien) et la présence d'infinitésimaux ? • L'analyse non standard a été formalisée rigoureusement par A. Robinson [Rob61] puis [Robinson3]. (La visibilité de Robinson a

[Mal41] : Anatoly Maltsev. « On a general method for obtaining local theorems in group theory ». In : *Ivanov. Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. Fiz.-Mat. Fak.* 1.1 (1941), p. 3-9
[Daw93] : John Dawson. « The compactness of first-order logic : from Gödel to Lindström ». In : *Hist. Philos. Logic* 14.1 (1993), p. 15-37
[**Mal36**] : Anatoly Maltsev. « Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik ». In : *Rec. Math. Moscou, n. Ser.* 1 (1936), p. 323-336
[**Sko34**] : Thoralf Skolem. « Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen ». In : *Fundam. Math.* 23 (1934), p. 150-161
[Skolem] : Thoralf Skolem. *Selected works in logic.* Edited by Jens Erik Fenstad. Universitetsforlaget, Oslo, 1970, p. 732
[Maltsev] : Anatoliĭ Ivanovič Mal'cev. *The metamathematics of algebraic systems. Collected papers : 1936–1967.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 66. Translated, edited, and provided with supplementary notes by Benjamin Franklin Wells, III. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1971, p. xviii+494
[Rob61] : Abraham Robinson. « Non-standard analysis ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 = Indag. Math.* 23 (1961), p. 432-440
[Robinson3] : Abraham Robinson. *Non-standard analysis.* Amsterdam : North-Holland Pu-

pâti de celle de Tarski.) Première application frappante [BR66], immédiatement ramenée en langage standard [Hal66] ; la querelle des infinitésimaux était relancée. Application en économie [BR75], qui généralise le standard [DS63]. • L'analyse non standard eut sa vogue dans les années 1960–1970, promettant beaucoup ; peut-être est-il encore trop tôt pour juger ses applications. • Une raison du désamour peut être le traitement proposé par Nelson, qui la plongea dans une théorie des ensembles non standard (v. § 21, notes conclusives), de façon trop syntaxique pour la coutume mathématique. • Si le vrai but de l'analyse de première année est d'enseigner l'alternance de quantificateurs (différence entre continuité et continuité uniforme, etc.), il faut suivre le traitement prussien par « $\varepsilon, \delta$ ». Mais il existe des traités d'analyse reposant sur l'emploi d'infinitésimaux. Introductif : [Keisler2]. Plus avancé : [Goldblatt].

***Applications en algèbre.*** Ex. 11.1 : b.–d. viennent de [Neu54] (b. a un précurseur en [BE51]). Neumann les obtenait par algèbre universelle ; A. Robinson vit l'argument de compacité [Rob55a]. Łoś [Łoś54b] avait indépendamment retrouvé par la logique un critère finitaire plus fin pour l'ordonnabilité d'un groupe [Lor49]. • Ex. 11.5 : [Mal40].

• **Terminologie.** • Le nom *compacité* est récent [Tar52, p. 710] ; Maltsev parlait de *théorème local*, comme en théorie des groupes depuis. • Les modèles non standard de $\mathrm{Th}(\mathbb{R} ; +, \cdot, \leqslant)$ sont parfois dits *hyperréels* ; la terminologie est malheureuse. *Réel* désigne un modèle bien déterminé, et *hyperréel* n'importe quel autre modèle. Donc « un modèle hyper-

blishing Co., 1966. xi+293
[BR66] : Allen Bernstein et Abraham Robinson. « Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos ». In : *Pacific J. Math.* 16 (1966), p. 421-431
[Hal66] : Paul Halmos. « Invariant subspaces of polynomially compact operators ». In : *Pacific J. Math.* 16 (1966), p. 433-437
[BR75] : Donald Brown et Abraham Robinson. « Nonstandard exchange economies ». In : *Econometrica* 43 (1975), p. 41-55
[DS63] : Gerard Debreu et Herbert Scarf. « A limit theorem on the core of an economy ». In : *Int. Econ. Rev.* 4 (1963), p. 235-246
[Keisler2] : Jerome Keisler. *Elementary calculus. An infinitesimal approach.* 2e éd. Boston : Prindle, Weber & Schmidt, 1986. 913+65
[Goldblatt] : Robert Goldblatt. *Lectures on the hyperreals.* T. 188. Graduate Texts in Mathematics. An introduction to nonstandard analysis. New York : Springer-Verlag, 1998, p. xiv+289
[Neu54] : Bernhard Neumann. « An embedding theorem for algebraic systems ». In : *Proc. London Math. Soc. (3)* 4 (1954), p. 138-153
[BE51] : Nicolaas de Bruijn et Paul Erdős. « A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 54 = Indagationes Math.* 13 (1951), p. 369-373
[Rob55a] : Abraham Robinson. « Note on an embedding theorem for algebraic systems ». In : *J. London Math. Soc.* 30 (1955), p. 249-252
[Łoś54b] : Jerzy Łoś. « On the existence of linear order in a group ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.* 2 (1954), p. 21-23
[Lor49] : Paul Lorenzen. « Über halbgeordnete Gruppen ». In : *Math. Z.* 52 (1949), p. 483-526
[Mal40] : Anatoli Maltsev. « On isomorphic matrix representations of infinite groups ». In : *Rec. Math. Moscou, n. Ser.* 8 (1940), p. 405-422
[Tar52] : Alfred Tarski. « Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952, p. 705-720

réel » a un sens, mais « les nombres hyperréels » n'en a pas.

- **Théorie de Ramsey (ex. 11.6).** • Branche de la combinatoire étudiant les problèmes de sous-configurations inévitables dans les configurations assez grandes. La *théorie de Ramsey infinie* est la sous-branche consacrée aux partitions de cardinaux (sans trop affiner les configurations graphe-théoriques), donc plutôt classée en théorie des ensembles. Par ses applications originelles, et à cause des indécidabilités fréquentes en combinatoire infinie, la théorie de Ramsey est souvent associée à la logique ; mais c'est de la combinatoire. • Les théorèmes de Ramsey sont [Ram29, Theorems A et B] ; Ramsey utilise le théorème fini pour un problème de satisfaisabilité en logique élémentaire. On ignore qui nota l'emploi de la compacité pour réduire l'un à l'autre ; Ramsey démontre les deux. • Skolem identifia tout de suite l'intérêt du théorème de « Ramsay » (sic) [Sko33]. • Depuis [Sie33] (Sierpiński ne cite pas Ramsey mais répond à une question de Knaster) et surtout [ER50] (qui cite Ramsey mais pas Sierpiński), la théorie de Ramsey infinie, ou *calcul de partitions*, a suscité une abondante littérature. Introduction : [Katz-Reimann, pp. 70–83].

- **Autres logiques (ex. 11.7).** (Prérequis : § 7 et discussion de § 10, notes conclusives.)

***Logique multisorte.*** Compacité immédiate par complétude ; v. § 10, notes conclusives.

***Logiques d'ordre supérieur.*** Pas de compacité en sémantique pleine ; compacité immédiate en sémantique de Henkin par son caractère élémentaire. V. § 12.2.

***Logiques infinitaires.*** • Attention : malgré sa complétude dénombrable, $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ n'est *pas* dénombrablement compacte car $\vdash$ n'est plus finitaire (ex. 11.7). Ceci mènerait à la plus subtile *compacité de Barwise*, bien discutée dans [Nad85]. • La compacité de $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ est entièrement contrôlée par des questions (indécidables) de grands cardinaux ; v. § SÉ5.2.

***Quantificateurs généralisés.*** • Il suit de son théorème de complétude dénombrable (§ 10, notes conclusives) que $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ est *dénombrablement* compacte. La contrainte de dénombrabilité est essentielle : ex. 11.7. • Logique à relations infinitaires (v. § 7, notes conclusives) : compacte par complétude et finitude de la déduction adaptée [Kei63].

***Logiques non classiques.*** La compacité de la logique intuitionniste et de la logique modale peut être obtenue soit par complétude, soit par la même méthode sémantique que pour $\Lambda_{\omega,\omega}$. V. compléments § G et § H.

- **Logiques abstraites.** (Prérequis : définition 7.6.)

***Caractérisations.*** La compacité seule ne caractérise *pas* la logique élémentaire ; v. compléments § O.

***Compacité, Craig et Robinson (ex. 11.9).*** • V. énoncés en § 8, notes conclusives.

**Théorème** ([MS83, § 5.2] ; indépendam-

[Ram29] : Frank Ramsey. « On a Problem of Formal Logic ». In : *Proc. London Math. Soc. (2)* 30.4 (1929), p. 264-286

[Sko33] : Thoralf Skolem. « Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem ». In : *Fundam. Math.* 20 (1933), p. 254-261

[Sie33] : Wacław Sierpiński. « Sur un problème de la théorie des relations ». In : *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (2)* 2.3 (1933), p. 285-287

[ER50] : Pál Erdős et Richard Rado. « A combinatorial theorem ». In : *J. London Math. Soc.* 25 (1950), p. 249-255

[Katz-Reimann] : Matthew Katz et Jan Reimann. *An introduction to Ramsey theory.* T. 87. Student Mathematical Library. Fast functions, infinity, and metamathematics. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2018, p. xiv+207

[Nad85] : Mark Nadel. « $\mathcal{L}_{\omega 1 \omega}$ and admissible fragments ». In : *Model-theoretic logics.* Perspect. Math. Logic. Springer, New York, 1985, p. 271-316

[MS83] : Johann Makowsky et Saharon Shelah. « Positive results in abstract model theory : a theory of compact logics ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 25.3 (1983), p. 263-299

ment Mundici). Soit $\Lambda$ une logique abstraite dans laquelle la satisfaction d'un énoncé ne dépend que d'un nombre fini de relations. Alors $\Lambda$ vérifie la satisfaisabilité disjointe ssi $\Lambda$ vérifie la compacité et l'interpolation.

• En fait le théorème est plus fort. Le *nombre d'occurrence* de $\Lambda$ est le plus petit cardinal $\kappa$, s'il existe, tel que la satisfaction d'un $\Lambda$-énoncé dépende de $< \kappa$ relations. Pour la logique élémentaire, ce nombre existe et vaut $\aleph_0$ ; il existe encore pour la plupart des logiques naturelles. • Sous l'hypothèse que le nombre d'occurrence de $\Lambda$ est inférieur à l'éventuel plus petit cardinal mesurable (v. § SÉ5), [MS83] montre que la satisfaisabilité disjointe implique la compacité. • Les autres implications sont du folklore [MS83, Proposition 5.1].

# § 12. Logique d'ordre supérieur

La *logique ddu deuxième ordre*, qui quantifie sur les parties (§ 12.1), est séduisante a priori. Mais sa sémantique naïve n'est pas fiable ; ses propriétés abstraites sont mauvaises, et surtout trop dépendantes du cadre ensembliste. Un remède possible est la *sémantique de Henkin* (§ 12.2), qui se ramène à la logique élémentaire. On peut introduire des ordres encore supérieurs mais l'expressivité maximale est déjà atteinte à l'ordre 2 (§ 12.3).

Prérequis : §§ 6–11.

---

## § 12.1. Langage, déduction, sémantique naïve

Par opposition à la logique élémentaire, où l'on ne quantifie que sur les points de la structure étudiée, la logique du deuxième ordre n'est pas à prédicats fixés : on peut quantifier sur les relations. Le principe intuitif de séparation, i.e. le point de vue par graphes de relations, permet d'identifier les relations $n$-aires aux collections de $n$-uplets du domaine. (On parle de *séparation* plutôt que de *compréhension* car on reste au sein du domaine.) La logique du deuxième ordre permet ainsi les quantifications ensemblistes, plus précisément les quantifications sur les parties du domaine et de ses puissances cartésiennes. La logique du troisième ordre quantifie sur les parties de parties, etc. On commence au deuxième ordre, pour ne pas alourdir les notations, et parce qu'il permet d'encoder le cas général (§ 12.3).

On note $\Lambda_{\omega,\omega}$ la logique élémentaire (§ 6.4). La notation $\mathbb{\Lambda}^2$ possèdera un sens bien défini en syntaxe, mais pas en sémantique. Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel.

- **Syntaxe.** On étend la syntaxe de $\Lambda_{\omega,\omega}$ comme suit.

**Symboles.** On ajoute pour chaque entier intuitif $n$ les symboles $\mathbb{\forall}_n$ et $\mathbb{\exists}_n$, et des variables « ensemblistes/de deuxième ordre » $X_n$ d'arité $n$. Ces variables représenteront les relations $n$-aires, i.e. les parties de $\mathbb{A}^n$. (Les variables 0-aires sont les valeurs de vérité, pas les éléments.)

**Formules.** Aux formules de base $R(\mathbf{t})$ pour les multitermes $\mathbf{t}$ et relations $R$ du langage, on ajoute les $X_n(\mathbf{t})$ pour $X_n$ une variable de relation $n$-aire. Ce n'est pas une substitution mais une évaluation. Aux règles de formation des formules, on ajoute $(\mathbb{\forall} X_n\ \varphi)$ et $(\mathbb{\exists} X_n \varphi)$. Ceci définit $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$-Form. En pratique on omet de noter les arités et l'on écrit $(\mathbb{\forall} X)(X(x_1, x_2))$. Pour signaler une formule du deuxième ordre on peut écrire $\varphi^2$.

*Exemples*

— L'arithmétique du deuxième ordre $\mathrm{PA}^2$ s'obtient en remplaçant le schéma d'axiomes de PA (§ 8.1) par l'axiome unique :

$$(\mathbb{\forall} X)\,[X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \to X(s(x)))] \to [(\forall x) X(x)].$$

— La théorie $\mathrm{RCF}^2$ des corps ordonnés complets au sens de Dedekind-Hölder comporte les axiomes de corps ordonné, et l'axiome unique avec des abréviations évidentes :

$$(\mathbb{\forall} X)(\mathbb{\forall} Y)[(X \neq \varnothing \wedge Y \neq \varnothing \wedge X < Y) \to (\exists z)(X < \{z\} < Y)].$$

(Historiquement, c'est le contraire : $\mathrm{PA}^2$ et $\mathrm{RCF}^2$ précèdent les schématisations élémentaires PA et RCF.)

- **Déductions.** On adapte les règles de la déduction naturelle (§ 9.2), de manière à substituer non plus des termes mais des formules (substituables), en conservant les arguments élémentaires. Par exemple $X(\mathbf{t})[X := \varphi^2]$ est $\varphi^2[\mathbf{t}]$. Ci-dessous $\Phi$ est un ensemble de formules du deuxième ordre et $\chi, \psi$ de telles formules.

**Quantificateur universel :**

$$\begin{array}{r|l} \dfrac{\Phi \vdash \chi}{\Phi \vdash \mathbb{\forall} X\ \chi}\ \mathbb{\forall}_i & \dfrac{\Phi \vdash \mathbb{\forall} X\ \chi}{\Phi \vdash \chi[X := \psi]}\ \mathbb{\forall}_e \\ \text{si } X \notin \mathrm{VarLib}\,\Phi & \text{si } \psi \text{ est substituable à } X \text{ dans } \chi \end{array}$$

**Quantificateur existentiel :**

$$\begin{array}{r|l} \dfrac{\Phi \vdash \chi[X := \psi]}{\Phi \vdash \mathbb{\exists} X\ \chi}\ \mathbb{\exists}_i & \dfrac{\Phi \vdash \mathbb{\exists} X\ \psi \quad \Phi, \psi \vdash \chi}{\Phi \vdash \chi}\ \mathbb{\exists}_e \\ \text{si } \psi \text{ est substituable à } X \text{ dans } \chi & \text{si } X \notin \mathrm{VarLib}(\Phi \cup \{\chi\}) \end{array}$$

Comme c'est une extension naturelle de la déduction élémentaire (§ 9.2), on note simplement $\vdash$ au lieu de $\vdash[\mathbb{A}^2]$ (v. ex. 12.4).

*Remarques*

— On peut *démontrer* le schéma de séparation, où $X$ est d'arité la longueur de $\mathbf{x}$ :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash \varphi^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{Y})[X := \varphi^2]}\,\mathrm{Ax}}{\vdash \forall\mathbf{x}\left(\varphi^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{Y})\right)[X := \varphi^2]}\,\forall_i}{\vdash \exists X\ \forall\mathbf{x}\ \left(\varphi^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{Y})\right)}\,\exists_i$$

puis quantifier sur $\mathbf{y},\mathbf{Y}$. Toute formule en $\mathbf{x}$, même du deuxième ordre, définit donc une partie de la $n^{\mathrm{e}}$ puissance cartésienne.

— La déduction n'implémente pas de raisonnement par choix. En outre, les différentes formes de ce raisonnement perdent les interdépendances qu'elles entretiennent dans ZF. V. exercice 12.7.

Cette syntaxe reflète en fait la sémantique de Henkin de § 12.2. Car la sémantique naïve a de très mauvaises propriétés.

$\mathbb{A}^{2,p}$

• **Satisfaction.** Naïvement la satisfation paraît claire : $\mathbb{A} \models (\exists_n X)\varphi(X)$ s'il existe une partie $E \subseteq \mathbb{A}^n$ telle que $\mathbb{A} \models \varphi(E)$, etc. On note $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ la sémantique du deuxième ordre pour cette lecture des quantificateurs, dite « pleine » (ou « naïve »). Cette sémantique peut sembler attirante : elle permet d'écrire les énoncés $\mathrm{PA}^2$ et $\mathrm{RCF}^2$ qui caractérisent $(\mathbb{N}\,;+,\cdot)$ et $(\mathbb{R}\,;+,\cdot)$ à isomorphisme près, donc semble une bonne option pour des « fondements ». Mais sa clarté est illusoire. Il faut en effet s'accorder sur le sens de la quantification ensembliste, i.e. sur la notion de sous-ensemble. La relation $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ est donc entièrement tributaire du comportement de la puissance ensembliste $P(\cdot)$.

*Exemple.* On peut formuler un énoncé $\varphi$ affirmant $|2|^{|\aleph_0|} = \aleph_1$. Alors $\models \varphi\ [\mathbb{A}^{2,p}]$ dépend de la réalité ensembliste (si l'expression a un sens), ou du cadre ensembliste ambiant sinon. V. exercice 12.5.

Cette dépendance n'est pas nécessairement un inconvénient philosophique, mais porte un obstacle méthodologique à la maîtrise de $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$. Celle-ci a aussi des défauts techniques.

**Proposition.**

(i) La sémantique $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ n'est pas compacte.

(ii) La paire $(\models [\mathbb{A}^{2,p}], \vdash)$ n'est pas fortement complète : on peut avoir $\Phi \models \chi\ [\mathbb{A}^{2,p}]$ sans $\Phi \vdash \chi$.

(iii) La paire ($\models [\mathbb{A}^{2,p}], \vdash$) n'est même pas *faiblement* complète : on peut avoir $\models \chi\ [\mathbb{A}^{2,p}]$ sans $\vdash \chi$.

*Remarque.* Il n'existe en fait aucune $\vdash$ effective et adéquate. Redéfinir « $\vdash$ » par « $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ », reviendrait à définir le démontrable par le vrai. Ce serait renoncer à la notion même de démonstration mathématique.

**Démonstration.**

(i) Soit $\varphi^2$ un $\mathbb{A}^2$-énoncé ayant pour interprétation dans $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ « le domaine est fini », par exemple « toute injection est surjective ». Avec les énoncés élémentaires « le domaine a au moins $n$ éléments », on forme une théorie dénombrable et finiment satisfaisable, mais non satisfaisable.

(ii) Une telle complétude entraînerait la compacité car $\vdash$ reste finitaire (v. § 11.1).

(iii) Renforcement considérable, dû à Gödel. V. ex. 20.11. □

*Remarques*

— Le dernier point doit mener à l'abandon de $\mathbb{A}^{2,p}$ comme tentative de « fondements des mathématiques ». V. notes conclusives.

— La *sémantique de Henkin* (§ 12.2) corrige ces défauts, en renonçant à l'idée que l'expression « l'ensemble des parties de $\mathbb{A}$ » possède un sens intrinsèque.

— Comme il y a des sémantiques concurrentes, il est prudent de n'employer l'expression « *logique* du deuxième ordre » que :

  — dans un cadre syntaxique, mais on préférera « *déduction* du deuxième ordre »,

  — ou si l'on a bien explicité la sémantique choisie ; mais on préférera « *sémantique* (pleine, de Henkin, autre) du deuxième ordre ».

En conclusion, l'*outil* $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ a pu sembler naturel pour formaliser certaines structures ; mais les propriétés de l'*objet* $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ sont trop mauvaises.

## § 12.2. Sémantique de Henkin

§ 12.3 est indépendante de cette sous-section ; on peut s'y rendre directement.

La sémantique pleine est prétendument absolue ; en fait elle est implicitement extrinsèque. Elle prétend reposer sur la « vraie notion » de partie. Cette notion n'est pas intrinsèque à la structure car elle dépend du cadre ensembliste. Mais la sémantique pleine n'assume même pas cette dépendance, qui reste implicite dans sa notation. La *sémantique de Henkin* implémente le relativisme de la notion de partie, et l'affiche ouvertement. Par opposition à la sémantique pleine, elle n'est pas tributaire de notions ensemblistes externes.

On peut vouloir pallier l'absence d'intuition claire de ce qu'est une partie en contrôlant le comportement des variables de deuxième ordre. Cela revient à prescrire où elles prendront leurs valeurs.

**Définition A** (structure et sémantique points-parties)**.**

— Une *structure points-parties* (ou structure d'ordre 2) est la donnée d'une structure relationnelle $\mathbb{A}$, et pour chaque entier $n$ d'une collection $\mathcal{H}_n$ de parties de $\mathbb{A}^n$.

— Si $(\mathbb{A}\,;\mathcal{H})$ est une structure points-parties et $\varphi^2$ une formule du deuxième ordre (avec paramètres), on définit $(\mathbb{A}\,;\mathcal{H}) \models \varphi^2$ par la récurrence attendue, *les variables de deuxième ordre d'arité $n$ étant assignées dans $\mathcal{H}_n$.*

*Remarques*

— La définition d'une structure points-parties n'emploie pas l'axiome de la puissance. Elle signifie que $X \in \mathcal{H}_n$ entraîne $X \subseteq \mathbb{A}^n$.

— Soit $\mathbb{A}$ une structure relationnelle donnée. Des diverses structures points-parties sur $\mathbb{A}$, une est favorisée par la logique du deuxième ordre naïve : $\mathbb{A}$ avec toutes les vraies parties des $\mathbb{A}^n$. Ce modèle est dit « plein » (ou « standard », déconseillé).

— Cette notion de « vraie partie » est tributaire de structure ensembliste sur $\mathbb{A}$, typiquement d'un cadre ensembliste autour de $\mathbb{A}$. Malgré le nom « vraie partie », il n'y a rien d'absolu puisque cela dépend du cadre choisi.

— Vue depuis la logique multisorte (§ 7.1), une structure points-parties est une structure relationnelle :

  — à une infinité de sortes, $E$ (« éléments ») et les $H_n$ (« parties de $n$-uplets ») pour $n > 0$,

  — avec des relations $(n+1)$-aires $\varepsilon_n$, de type $E^n \times H_n$,

  — vérifiant une forme d'extensionnalité (v. exercice 12.2).

$\mathbb{A}^{2,H}$ **Définition B** (structure, sémantique, conséquence de Henkin)**.**

— Une *structure de Henkin* est une structure points-parties vérifiant le schéma de séparation suivant, où $X$ n'apparaît pas libre dans la formule du deuxième ordre $\varphi^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y})$ :

$$(\forall \mathbf{Y})(\forall \mathbf{y})(\exists X)(\forall \mathbf{x}) \left[\varphi^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x})\right].$$

(On a permis non seulement des paramètres mais aussi des *quantifications* des deux ordres dans $\varphi^2$.)

— L'expression « sémantique de Henkin » est souvent utilisée pour dire : « sémantique points-parties, étant entendu que la structure points-parties est de Henkin ». On note alors $(\mathbb{A}\,;\mathcal{H}) \models \varphi\ [\mathbb{A}^{2,H}]$.

— En dérive la notion de conséquence sémantique $\Phi \models \chi\ [\mathbb{A}^{2,H}]$ : c'est la conséquence *pour les structures de Henkin.*

*Remarques*

— On permet toutes les formules $\varphi^2$ du deuxième ordre. V. notes conclusives, *Prédicativisme.*

— La structure pleine est de Henkin. Si $\mathbb{A}$ est fini c'est même la seule car on a permis les paramètres dans la séparation. Mais si $\mathbb{A}$ est infini, alors par phénomènes de Löwenheim-Skolem (§ 15) il existe d'autres structures de Henkin sur $\mathbb{A}$.

— On n'exige pas de principe de choix. Diverses formulations de tels principes, connues équivalentes dans ZF, ne le sont pas en logique du deuxième ordre (exercice 12.7).

— Deux structures de Henkin sur la même structure relationnelle peuvent ne pas vérifier les mêmes $\mathbb{A}^2$-énoncés. En fait, même la $\mathbb{A}^2$-théorie de $(\mathbb{A}\,;\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}_n = P(\mathbb{A}^n)$ (i.e. la structure pleine) n'est pas déterminée par ZF ; penser par exemple à l'hypothèse du continu.

**Théorème.** La sémantique de Henkin est correcte et complète : si $\Phi \cup \{\chi\}$ est un ensemble de formules du deuxième ordre, alors $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi \models \chi\ [\mathbb{A}^{2,H}]$, i.e. ssi toute structure de Henkin vérifiant $\Phi$ vérifie $\chi$.

*Remarques*

— Il suit que la sémantique de Henkin est compacte.

— On peut même contrôler les cardinaux en jeu (v. § 10.(iii)).

**Démonstration.** La correction est claire, puisque la structure de Henkin a les propriétés de clôture requises pour valider les règles de déduction (v. remarque suivant la preuve). La complétude est celle de la logique élémentaire. Une structure de Henkin est en effet une structure de logique élémentaire « à plusieurs sortes » (§ 7.1), à interpréter comme {points} $\cup$ {parties de $\mathbb{A}$} $\cup$ {parties de $\mathbb{A}^2$} $\cup \dots$. Or la logique multisorte se réduit à la logique élémentaire « à une seule sorte » (exercices 7.1 et 9.10). Pour l'autonomie de cette preuve on donne un argument *ad hoc*.

Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. On ajoute des relations unaires $E$ et $P_n$ pour $n > 0$. La relation $E$ se lit « être un élément », et pour $n$ non nul, $H_n$ se lit « être une relation $n$-aire », i.e. une partie de la $n^{\text{e}}$ puissance cartésienne. On ajoute aussi des relations $(n+1)$-aires $\varepsilon_n$ entre $n$-uplets de $E$ et éléments de $H_n$. Soit $\mathcal{L}'$ le langage relationnel obtenu.

On sépare les variables élémentaires $x_i$ en une infinité de sous-ensembles infinis, les $x_i^e$ et $x_i^n$ pour $n > 0$. En effet $\mathbb{N}$ contient une infinité d'ensembles infinis. À une variable élémentaire $x_i$, on associe $x_i' = x_i^e$ ; à une variable du deuxième ordre $X_{n,i}$ d'arité $n > 0$, on associe $X_{n,i}' = x_i^n$. Ceci traduit les variables de tout ordre, et les termes.

La *traduction* d'une $\mathcal{L}$-formule $\varphi$ du 2e ordre est la $\mathcal{L}'$-formule élémentaire $\varphi'$ construite ainsi :

— $[X_{n,i}(\mathbf{t})]'$ est $(\mathbf{t}'\varepsilon_n X_{n,i}')$ ;

— définition évidente au niveau propositionnel ;

— $[(\forall x_i)\varphi]'$ est $(\forall x_i')(E(x_i') \to \varphi')$ ;

— $[(\exists x_i)\varphi]'$ est $(\exists x_i')(E(x_i') \wedge \varphi')$ ;

— $[(\mathbb{V}_n X_{n,i})\varphi]'$ est $(\forall X_{n,i}')(H_n(X_{n,i}') \to \varphi')$ ;

— $[(\mathbb{E}_n X_{n,i})\varphi]'$ est $(\exists X_{n,i}')(H_n(X_{n,i}') \wedge \varphi')$.

À une structure de Henkin $(\mathbb{A}\,;\mathcal{H})$ on associe la $\mathcal{L}'$-structure $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \sqcup \bigsqcup_{n>0} H_n$ munie de l'interprétation naturelle. (Si par bizarrerie ensembliste les $H_n$ ne sont pas disjoints entre eux ou de $\mathbb{A}$, on force cette disjonction en considérant $(\mathbb{A} \times \{0\}) \sqcup \bigsqcup_{n>0}(H_n \times \{n\})$. Alors pour toute $\mathcal{L}$-formule du deuxième ordre $\varphi$, on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ $[\mathbb{A}^{2,H}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A}' \models \varphi'(\mathbf{a})$ $[\Lambda(\mathcal{L}')]$, où la première satisfaction est en sémantique de Henkin et la seconde en logique élémentaire. Le théorème suit donc rapidement de la complétude de cette dernière (§ 10). □

*Remarque.* Le résultat tient à un équilibre subtil entre ce qu'on permet en syntaxe et ce qu'on exige des structures de Henkin.

— En syntaxe, on n'a pas mis de symbole « d'égalité du deuxième ordre », i.e. de relation entre varaiables du deuxième ordre. Si l'on en ajoute un (en toute rigueur, un par arité), alors les structures étant de fait extensionnelles vérifient toutes le principe d'extensionnalité :

$$\models (\mathbb{V}X)(\mathbb{V}Y)[X = Y \leftrightarrow (\forall \mathbf{z})(X(\mathbf{z}) \leftrightarrow Y(\mathbf{z}))],$$

qu'il faut intégrer au calcul déductif. V. exercice 12.2.

— La règle $\exists\mathrm{I}_e$ reflète le schéma de séparation : si l'on veut des structures « non séparatives » il faut modérer la règle (ex. 12.3).

— De même, si l'on veut incorporer un principe de choix, il faut se restreindre aux structures de Henkin ayant les propriétés attendues.

La logique du deuxième ordre oscille ainsi entre la réduction à la logique élémentaire (sémantique de Henkin) et l'ontologie ensembliste (sémantique pleine) : soit elle n'apporte rien de nouveau, soit elle n'apporte rien de sûr.

## § 12.3. Ordre encore supérieur

Cette sous-section n'utilise pas § 12.2.

L'énoncé « il existe sur $(G\,;\cdot)$ une topologie le rendant compact » n'est pas du deuxième mais du troisième ordre car une topologie est la donnée d'une *famille* de parties. On note $\mathbb{\Lambda}^n$ la logique du $n^{\mathrm{e}}$ ordre et $\mathbb{\Lambda}^\omega$ leur réunion. Les collections de formules et les relations de satisfaction s'étendent successivement, sans conflit. Mais ces ordres supérieurs sont redondants : tout énoncé du $n^{\mathrm{e}}$ ordre équivaut naturellement à un énoncé du 2$^{\mathrm{e}}$ ordre, dans le sens suivant. $\Lambda = \Lambda^1$ désigne la logique élémentaire.

**Théorème.** Pour tout langage $\mathcal{L}$, il existe un langage $\mathcal{L}^*$, et une traduction naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{\Lambda}^\omega(\mathcal{L})\text{-Form} & \to & \Lambda(\mathcal{L}^*)\text{-Form} \\ \varphi & \mapsto & \varphi^* \end{array}$$

telle que pour tout $\mathbb{\Lambda}^\omega(\mathcal{L})$-énoncé $\varphi$, il existe un énoncé $\theta_\varphi \in \mathbb{\Lambda}^2(\mathcal{L}^*)$ vérifiant : $\models \varphi\ [\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\models \theta_\varphi \to \varphi^*\ [\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$.

*Remarques*

— Soit $\varphi'$ l'énoncé $\theta_\varphi \to \varphi^*$. Étant du deuxième ordre en un langage étendu, il n'est pas littéralement équivalent à $\varphi$. Mais $\models \varphi\ [\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}]$ équivaut à $\models \varphi'\ [\mathbb{\Lambda}^{2,p}]$.

— L'énoncé traduit $\varphi^*$ est élémentaire, mais $\theta_\varphi$ est bien d'ordre supérieur. Sinon, on aurait ramené la sémantique pleine à la sémantique de la logique élémentaire ; elle hériterait alors de bonnes propriétés (compacité, complétude) qu'elle n'a pas (§ 12.1).

**Démonstration.** Elle se conduit naturellement en logique multisorte, mais pour ne pas dépendre de § 7.1 on donne un argument *ad hoc.*

**Types.** Ce sont les objets de la collection $\mathcal{T}$ définie par :

— 0 est un type ;

— si $n > 1$ et $\tau_1, \dots, \tau_n$ sont des types, alors $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ est un type.

Par construction, tout type non nul est de la forme $(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

**Structure supérieure pleine.** Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Notant $P(\cdot)$ l'ensemble des parties, on définit récursivement les $\mathcal{P}_\tau$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_0 & = & \mathbb{A} \\ \mathcal{P}_{(\tau_1,\dots,\tau_n)} & = & P(\mathcal{P}_{\tau_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{\tau_n}). \end{cases}$$

**Langage typant.** Pour chaque type $\tau$, soit $R_\tau$ une relation unaire. Pour chaque type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \neq 0$, soit $\varepsilon_\tau$ une relation $(n+1)$-aire, avec $n$ arguments à gauche et un seul à droite. Soit enfin :

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{R_\tau : \tau \in \mathcal{T}\} \cup \{\varepsilon_\tau : \tau \in \mathcal{T} \backslash \{0\}\}.$$

**Foncteur d'aplatissement vers structure typante.** À toute $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}$ on associe la $\mathcal{L}^*$-structure $\mathbb{A}^*$ :

— de domaine $\bigsqcup_\mathcal{T} \mathcal{P}_\tau$ (si les $\mathcal{P}_\tau$ sont non disjoints pour comportement ensembliste « mal fondé » de $\mathbb{A}$, forcer la disjonction en considérant $\mathcal{P}_\tau \times \{\tau\}$) ;

— où $R_\tau[\mathbb{A}^*] = \mathcal{P}_\tau$ ;

— où $\varepsilon_\tau[\mathbb{A}^*] = \{(\mathbf{y}, X) : \mathbf{y} \in X \wedge X \in \mathcal{P}_\tau\}$, i.e. le graphe de l'appartenance typée ;

— où $\mathcal{L}$ est interprété naturellement dans $R_0[\mathbb{A}^*] = \mathbb{A}$.

**Foncteur de restriction à la sous-structure pertinente.** À toute $\mathcal{L}^*$-structure $\mathbb{B}$, on associe la $\mathcal{L}^*$-structure $\check{\mathbb{B}}$ :

— de domaine $\bigsqcup_\mathcal{T} R_\tau[\mathbb{B}]$,

— pour la sous-$\mathcal{L}^*$-structure naturellement induite.

**Traduction des formules.** En ordre supérieur, il y a autant de collections de variables que de types. La différence minuscule/majuscule est dorénavant contextuelle, par commodité ; on renonce à distinguer $\forall$ et $\mathbb{V}$. On traduit les variables de tout type $X$ en variables *élémentaires* $X^*$ ; c'est possible car $\mathbb{N}$ contient une infinité d'ensembles infinis disjoints. Pour un uplet $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ (leur type peut ne pas être le même), on note $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$. La traduction $\mathbb{A}^\omega(\mathcal{L}) \to \Lambda(\mathcal{L}^*)$ est définie comme suit :

— si $R \in \mathcal{L}$, alors $(R(\mathbf{x}))^*$ est $R(\mathbf{x}^*)$ ;

— si $X$ est une variable de type $\tau$, alors $(X(\mathbf{y}))^*$ est $\mathbf{y}^*\varepsilon_\tau X^*$ ;

— $(\neg\varphi)^*$ est $\neg\varphi^*$, et $(\varphi_1 \boxdot \varphi_2)^*$ est $\varphi_1^* \boxdot \varphi_2^*$ ;

— $(\forall X \quad \varphi)^*$ est $(\forall X^*)(R_\tau(X^*) \rightarrow \varphi^*)$, et $(\exists X \quad \varphi)^*$ est $(\exists X^*)(R_\tau(X^*) \wedge \varphi^*)$.

Noter que $\varphi^*$ est *élémentaire.*

**Théorie typante.** Soit $\Theta$ la $\mathbb{\Lambda}^2(\mathcal{L}^*)$-théorie formée des axiomes suivants :

— le domaine de base n'est pas vide : $(\exists x)R_0(x)$ ;

— les types sont disjoints : pour $\tau_1 \neq \tau_2$, l'axiome $\neg(\exists x)(R_{\tau_1}(x) \wedge R_{\tau_2}(x))$ ;

— chaque relation du langage ne porte que sur les objets de base : pour chaque relation $R$ du langage $\mathcal{L}$, disons $n$-aire, l'axiome $(\forall \mathbf{x})(R(\mathbf{x}) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^n R_0(x_i))$ ;

— l'appartenance est typée : pour chaque type $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \neq 0$, l'axiome de typage :

$$(\forall x)(\forall \mathbf{y})\left(\mathbf{y}\varepsilon_\tau x \rightarrow R_\tau(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} R_{\tau_i}(y_i)\right);$$

— l'appartenance est extensionnelle : pour chaque type $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \neq 0$, l'axiome d'extensionnalité :

$$(\forall x)(\forall y)[(\neg R_0(x) \wedge \neg R_0(y) \wedge (\forall \mathbf{z})(\mathbf{z}\varepsilon_\tau x \leftrightarrow \mathbf{z}\varepsilon_\tau y)) \rightarrow (x = y)];$$

— pour chaque type $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \neq 0$, l'axiome *de deuxième ordre* de séparation/réduction, qui emploie l'abréviation évidente $X \subseteq R_{\tau_1} \times \cdots \times R_{\tau_n}$ :

$$(\forall X)\left\{\begin{array}{ll} & (X \subseteq R_{\tau_1} \times \cdots \times R_{\tau_n}) \\ \rightarrow & (\exists x)\,[R_\tau(x) \wedge (\forall \mathbf{y})(X(\mathbf{y}) \leftrightarrow \mathbf{y}\varepsilon_\tau x)] \end{array}\right\}.$$

(Vu dans $\mathbb{A}^*$, c'est une instance de la séparation. Mais vu depuis $\mathbb{A}$, l'axiome procure une forme de réduction.)

**Étape 1.** Dans ces notations :

(i) si $\mathbb{A} \in \mathcal{L}$-**Str**, alors $\mathbb{A}^* \models \Theta\ [\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$ ;

(ii) si $\mathbb{B} \models \Theta\ [\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, alors il existe $\mathbb{A}$ tel que $\check{\mathbb{B}} \simeq \mathbb{A}^*$ [$\mathcal{L}^*$-**Str**] ;

(iii) pour chaque $\varphi \in \mathbb{\Lambda}^\omega(\mathcal{L})$-Én, on a $\mathbb{A} \models \varphi\ [\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A}^* \models \varphi^*\ [\Lambda(\mathcal{L}^*)]$ ;

(iv) si $\mathbb{B} \models \Theta$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, alors :
- — $\check{\mathbb{B}} \models \Theta$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$ ;
- — pour $\varphi \in \mathbb{\Lambda}^{\omega}(\mathcal{L})$-Én, on a $\mathbb{B} \models \varphi^*$ $[\Lambda(\mathcal{L}^*)]$ ssi $\check{\mathbb{B}} \models \varphi^*$ $[\Lambda(\mathcal{L}^*)]$.

*Vérification.*

1. Tous les axiomes élementaires sont évidents. On considère une instance de type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ de la séparation. Soit $B$ une partie $n$-aire de type $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ ; elle a pour éléments des uplets de points de $R_{\tau_i}$. Ceci définit, au sens ensembliste, une partie de $\mathcal{P}_{\tau_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\tau_n}$, i.e. un point $b \in \mathcal{P}_\tau$. Il est clair que ce point convient.
2. Soit $\mathbb{A} = R_0[\mathbb{B}]$. On définit par récurrence un $\mathcal{L}^*$-isomorphisme en mettant en correspondance naturelle chaque $P_\tau$ avec $R_\tau[\mathbb{A}]$. La lecture unique des types en garantit le bien fondé.
3. Si $\mathbf{a}$ est un choix de paramètres « supérieur » (les variables de type $\tau$ prennent des valeurs dans $\mathcal{P}_\tau$), on définit un choix de paramètres élémentaires par $\mathbf{a}^*(X^*) = \mathbf{a}(X)$. On montre alors par récurrence immédiate sur les formules à paramètres : $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ $[\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A}^* \models \varphi^*(\mathbf{a}^*)$ $[\Lambda(\mathcal{L}^*)]$.
4. On montre même : si $\chi^2$ est une $\mathbb{\Lambda}^2(\mathcal{L}^*)$-formule « à quantification typée », i.e. où les variables élémentaires appartiennent à des $R_\tau$ et les variables d'ordre 2 sont incluses dans des $R_\tau$, avec des paramètres $\mathbf{a}$ bien typés, alors $\mathbb{B} \models \chi^2(\mathbf{a})$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$ ssi $\check{\mathbb{B}} \models \chi^2(\mathbf{a})$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. C'est une récurrence immédiate. Les deux points en dérivent. ◇

**Étape 2.** $\Phi \models \chi$ $[\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\Theta \cup \Phi^* \models \chi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$.

*Vérification.* Les références renvoient à l'étape 1.

- — Supposons $\Phi \models \chi$ $[\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. Soit $\mathbb{B} \models \Theta \cup \Phi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. D'après (ii), il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}$ telle que $\mathbb{A}^* \simeq \check{\mathbb{B}}$ $[\mathcal{L}^*\text{-}\mathbf{Str}]$. Comme $\mathbb{B} \models \Phi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, grâce à (iv) on a $\mathbb{A}^* \models \Phi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, d'où par (iii) $\mathbb{A} \models \Phi$ $[\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. Donc par hypothèse $\mathbb{A} \models \chi$ $[\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$, puis à nouveau par (iii) $\mathbb{A}^* \models \chi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. Ainsi $\check{\mathbb{B}} \models \chi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$ puis d'après (iv) $\mathbb{B} \models \chi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, comme voulu.
- — Supposons $\Theta \cup \Phi^* \models \chi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. Soit $\mathbb{A} \models \Phi$ $[\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. Alors $\mathbb{A}^* \models \Phi^*$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, mais aussi $\mathbb{A}^* \models \Theta$ $[\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. Par hypothèse,

$\mathbb{A}^* \models \chi^* \, [\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, d'où $\mathbb{A} \models \chi \, [\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. ◇

**Étape 3.** Si $\Phi$ est fini, alors une partie finie de $\Theta$ suffit.

(On n'affirme aucune forme de compacité.)

*Vérification.* Soit $\varphi$ un $\mathbb{\Lambda}^{\omega}(\mathcal{L})$-énoncé. Il n'emploie qu'un nombre fini de symboles de $\mathcal{L}$ et de types. On peut même supposer l'ensemble $\mathcal{T}_\varphi$ des types mentionnés dans $\varphi$ clos héréditairement, i.e. si $(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathcal{T}_\varphi$ alors les $\tau_i$ sont dans $\mathcal{T}_\varphi$ : il reste fini. Soit $\mathcal{L}^*_\varphi \subseteq \mathcal{L}^*$ qui emploie ces symboles et ces types. Soit $\Theta_\varphi = \Theta \cap \mathbb{\Lambda}^2(\mathcal{L}^*_\varphi)$-Én, qui est une axiomatisation *finie*. Elle se ramène donc à un $\mathbb{\Lambda}^2(\mathcal{L}^*_\varphi)$-énoncé $\theta_\varphi$.

On allège les foncteurs précédents en notant $\mathbb{A}^*_\varphi$ et $\check{\mathbb{B}}_\varphi$ la réunion des seuls types mentionnés. Les propriétés de l'Étape 1 restent valables, mutatis mutandis ; par exemple (iii) et (iv) ne valent que pour des $\mathcal{L}^*_\varphi$-énoncés. Comme à l'Étape 2, on conclut $\models \varphi \, [\mathbb{\Lambda}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\theta_\varphi \models \varphi^* \, [\mathbb{\Lambda}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. ◇

Ceci termine la démonstration. □

On rappelle l'importance de ne pas confondre *logique d'ordre supérieur*, où les types sont entièrement fixés à l'avance, et *théorie des types*, qui vise à décrire leur comportement.

*Remarque* (variante henkinienne). On peut également introduire la sémantique de Henkin d'ordre supérieur $\mathbb{\Lambda}^{\omega,H}$. La démonstration donne même $\models \varphi \, [\mathbb{\Lambda}^{\omega,H}(\mathcal{L})]$ ssi $\models \theta_\varphi \to \varphi^* \, [\mathbb{\Lambda}^{2,H}(\mathcal{L}^*)]$. L'intérêt est très relatif, puisque $\models [\mathbb{\Lambda}^{\omega,H}](\mathcal{L})$ est déjà naturellement de la logique élémentaire. V. ex. 12.9.

---

## Exercices

Soient $\Lambda_{\omega,\omega}$ la logique élémentaire, $\mathbb{\Lambda}^2$ la syntaxe du deuxième ordre, $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$ sa sémantique naïve, et $\mathbb{\Lambda}^{2,H}$ sa sémantique de Henkin.

**12.1 (des redondances inattendues).** On sait qu'avec $\perp_c$, les symboles de $\Lambda_{\omega,\omega}$ sont redondants (ex. 9.4). Or même sans $\perp_c$, $=, \wedge, \vee, \exists$ le sont dans $\vdash [\mathbb{\Lambda}^2]$.

a. Vérifier que la relation $(\forall X)(X(x) \to X(y))$ est une relation d'équivalence, et que les règles de $=$ sont dérivables.

b. On *définit* $(\exists x \, \varphi)$ par $(\forall Y)[(\forall x)(\varphi \to Y) \to Y]$, où $Y$ n'apparaît pas libre dans $\varphi$ (ni dans les éventuelles hypothèses en cours). De même on définit $(\exists\!\!\exists X \, \varphi)$ par $(\forall Y)[(\forall\!\!\forall X)(\varphi \to Y) \to Y]$ (idem). Montrer qu'on émule $\exists_i, \exists_e, \exists\!\!\exists_i, \exists\!\!\exists_e$ à partir des autres règles.

c. Montrer que $\vdash X \leftrightarrow (\forall Y)((X \to Y) \to Y)$. En déduire une définition de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ et une de $\varphi_1 \vee \varphi_2$ qui permettent de récupérer $\wedge_i, \wedge_e, \vee_i, \vee_e$.

**12.2 (structures non extensionnelles).** On ajoute au langage des relations d'égalité d'ordre 2 (une par arité). Une structure points-parties est dite *extensionnelle* si elle vérifie $(\mathbb{\forall} X)(\mathbb{\forall} Y)[X = Y \leftrightarrow (\forall \mathbf{x})(X(\mathbf{x}) \leftrightarrow Y(\mathbf{x}))]$.

a. À toute structure points-parties associer une structure extensionnelle.

b. Énoncer et démontrer un théorème de complétude à la Henkin avec les égalités d'ordre 2 (sans supposer l'extensionnalité).

**12.3 (structures non séparatives).** Pour la lisibilité on élimine $\mathbb{\exists}$ au profit de $\mathbb{\forall}$. Soit $\check{\mathbb{\Lambda}}^2$ le calcul déductif où $\mathbb{\forall}_e$ est affaiblie en :

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbb{\forall} X \ \varphi^2}{\Gamma \vdash \varphi^2[X := Y]} \ \mathbb{\forall}'_e.$$

a. Montrer que dans $\check{\mathbb{\Lambda}}^2$, le schéma de séparation *équivaut* aux règles $\mathbb{\forall}_e$.

b. Montrer la complétude de $\check{\mathbb{\Lambda}}^2$ pour la classe de toutes les structures points-parties.

Note. La séparation est une propriété ensembliste plutôt que logique. L'exercice distingue les deux plans : la règle $\mathbb{\forall}'_e$ qui permet seulement de changer de variable est *logique*, mais la règle $\mathbb{\forall}_e$ est son extension par le schéma de séparation *ensembliste*.

**12.4.** Soit $\Lambda$ la logique élémentaire. Montrer que si $\Phi, \chi$ sont élémentaires et $\Phi \vdash \chi \ [\mathbb{\Lambda}^2]$, alors $\Phi \vdash \chi \ [\Lambda]$. (V. § 10, notes conclusives, *Speed-up*.)

**12.5.** On se place dans le langage $=$, en sémantique pleine du deuxième ordre $\models [\mathbb{\Lambda}^{2,p}(=)]$.

a. Formuler : (i) $X$ est infini ; (ii) $X$ est dénombrable ; (iii) $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ ; (iv) $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ ; (v) $X$ est de cardinal continu ; (vi) $\operatorname{card} Y = |2|^{|X|}$.

b. Énoncer : (i) l'hypothèse du continu ; (ii) l'hypothèse généralisée du continu (pour tout ensemble infini, pas de cardinal intermédiaire entre $\operatorname{card} X$ et $\operatorname{card} P(X)$).

c. Énoncer *et démontrer* : (i) le « théorème du saut » de Cantor (§ 1.1) ; (ii) le théorème de Cantor-Bernstein (§ 1.2).

(*) **12.6.** Dans cet exercice, la réalité ensembliste vérifie une forme de choix à déterminer et énoncer. Construire une traduction $\varphi \rightsquigarrow \varphi^*$ entre $\mathcal{L}$-énoncés du deuxième ordre, telle que :

– les variables de relations de $\varphi^*$ sont *au plus binaires* ;

– pour toute $\mathcal{L}$-structure *infinie*, $\mathbb{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi^* \ [\mathbb{\Lambda}^{2,p}]$.

[Formaliser un appariement $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{A}^2 \simeq \mathbb{A}$ grâce à deux fonctions unaires $\pi_1$ et $\pi_2$.]

**12.7 (formes du choix en logique supérieure).** Cet exercice montre que diverses formes de choix connues équivalentes dans ZF (v. § 23.2) ne le sont pas dans $\mathbb{\Lambda}^2$. On ne fait pas d'hypothèses ensemblistes et l'on travaille en sémantique de Henkin $\mathbb{\Lambda}^{2,H}$. Soit $A = \mathbb{N}$. Le groupe $G = \operatorname{Sym}(A)$ agit sur $P(A^n)$ par $g \cdot B = \{g \cdot \mathbf{a} : \mathbf{a} \in B\}$. Pour éviter les confusions, on distingue deux notations :

– $\operatorname{Stab}(\{B\})$ le stabilisateur de $B \in P(A^n)$ dans son ensemble ;

– $\operatorname{Stab}(B) = \bigcap_{a \in B} \operatorname{Stab}(a)$ le stabilisateur de $B \subseteq A^n$ point par point.

Pour $n \geqslant 1$, soit $\mathcal{P}^n = \{B \subseteq A^n : \text{il existe } F \subseteq A \text{ } \textit{fini} \text{ tel que } \operatorname{Stab}(\{F\}) \leqslant \operatorname{Stab}(B)\}$.

a. Montrer que $\mathbb{A} = (A\,; (\mathcal{P}^n))$ est une structure de Henkin.

b. Montrer que $\mathbb{A} \not\models$« toute partie est bien ordonnable ».

(*) c. Montrer que $\mathbb{A} \models$« toute relation binaire possède une fonction de choix », i.e. $f\colon \operatorname{dom} R \to \operatorname{im} R$ de graphe inclus dans $R$. [Prendre $F$ fini tel que $\operatorname{Stab}(\{F\}) \leqslant \operatorname{Stab}(R)$, et effectuer des découpages pour se ramener à $\operatorname{dom} R \cap F = \varnothing$ puis $R \cap \{(a, a) : a \in A\} = \varnothing$.]

d. Conclure.

**12.8 (néologicisme).** Soit $\#$ un symbole de fonction du 3ᵉ ordre, qui prend en argument une relation unaire et renvoie un objet ; son type est $(0) \to 0$, ou encore $((0), 0)$. On forme la relation d'équipotence $X \sim Y$ :si $(\exists f)(f : X \simeq Y)$. Soit $\varphi^2_\infty$ un énoncé du deuxième ordre exprimant « le domaine est infini ». Soit l'énoncé :

$$\varphi^2_{\text{Hume}}: \quad (\forall X)(\forall Y)(\#X = \#Y \leftrightarrow X \sim Y).$$

Soit $0 = \#\bot$, où $\bot$ est vu comme relation unaire. Soit $s(x, y)$ la relation :

$$(\exists X)(\exists Y)(\exists z)\left[\begin{array}{r}(\#X = x) \wedge (\#Y = y) \wedge Y(z) \wedge \neg X(z)\\ \wedge (\forall t)(Y(t) \leftrightarrow X(t) \vee t = z)\end{array}\right].$$

Soit $\mathbb{A} \models \varphi^2_\infty \wedge \varphi^2_{\text{Hume}}$ $[\mathbb{A}^{2,H}]$. On montre que $\mathbb{A}$ « construit » les entiers.

a. Montrer que $s$ est fonctionnelle, puis justifier la définition : « soit $\mathbb{N}$ la $s$-orbite de 0, i.e. l'intersection de toutes les parties closes sous $s$ et contenant 0 ». Vérifier que $\mathbb{N}$ hérite d'une structure de Henkin.

b. Montrer que $s$ est totale sur $\mathbb{N}$.

c. Montrer que $(\mathbb{N} ; 0, s) \models \mathrm{PA}^2$ $[\mathbb{A}^{2,H}]$.

**12.9.** Esquisser les aménagements nécessaires pour obtenir l'analogue du théorème 12.3 en sémantique de Henkin, i.e. $\models \varphi$ $[\mathbb{A}^{\omega,H}(\mathcal{L})]$ ssi $\models \theta_\varphi \to \varphi^*$ $[\mathbb{A}^{2,H}(\mathcal{L}^*)]$.

---

## Notes conclusives

• Tout du long, $\Lambda_{\omega,\omega}$ désigne la logique élémentaire, $\mathbb{A}^2$ la syntaxe du deuxième ordre, $\mathbb{A}^{2,p}$ sa sémantique naïve et $\mathbb{A}^{2,H}$ sa sémantique de Henkin. Le choix de $\mathbb{A}^{2,p}$ revient à faire l'étude du cadre ensembliste ambiant.
• [Shapiro] célèbre $\mathbb{A}^2$ pour raisons épistémologiques discutables. Ses parties mathématiques [Shapiro, chapitres 5 et 6] sont instructives.

- **Repères historiques**

  *Diese nenne ich Functionen erster, jene Functionen zweiter Stufe. Ebenso unterscheide ich Begriffe erster und zweiter Stufe [1]). Functionen zweiter Stufe hat man eigentlich in der Analysis längst gehabt, z. B. in den bestimmten Integralen, sofern man die zu integrirende Function als Argument betrachtet.*

  Avec sa note :

  *1) Vergl. meine Grundlagen der Arithmetik (Breslau 1884) § 53 am Ende, wo ich statt „zweiter Stufe“„zweiter Ordnung“gesagt habe. Der ontologische Beweis für das Dasein Gottes leidet an dem Fehler, dass er die Existenz wie einen Begriff erster Stufe behandelt.*

  [Fre91, p. 27]

Frege fait référence à : « *So kann man einen Begriff unter einen höhern, so zu sagen einen Begriff zweiter Ordnung fallen lassen.* » [Frege2, § 53]

***Logique du deuxième ordre.*** • L'opposition entre « premier » et « deuxième ordre » est

[Shapiro] : Stewart Shapiro. *Foundations without foundationalism.* T. 17. Oxford Logic Guides. A case for second-order logic. New York : The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991, p. xx+277
[Fre91] : Gottlob Frege. « Function und Begriff ». In: Jena: Hermann Pohle, 1891
[Frege2] : Gottlob Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau : Wilhelm Koebner, 1884. 119 p.

souvent attribuée à Frege. Peirce [Pei85] a « first/second intentional ». • Hilbert attendait beaucoup de la logique du deuxième ordre, son fragment élémentaire n'étant pour lui qu'un terrain d'esai. • Quine a nié son statut de logique : $\mathbb{A}^{2,p}$ est une théorie des ensembles (v. § 7, notes conclusives).

***Sémantique de Henkin.*** Origine [**Hen50**]. En fait Henkin inventa la méthode suivie en § 10 pour établir la complétude de $\mathbb{A}^{2,H}$ : « *The very first question I asked myself was whether I could use the method that gave me completeness for type theory, to get a new proof of Gödel's completeness for first-order logic.* » [Hen96, p. 152]

***Réduction au deuxième ordre.*** [Hin55, p. 99], généralisé à des ordres transfinis dans [Mon65a, § 2].

- **Terminologie.** • L'expression « logique du deuxième ordre » est ambigüe. Elle peut désigner deux déductions (v. *Prédicativisme*), ainsi qu'une variété de sémantiques concurrentes, plus ou moins dépendantes du cadre ensembliste.

- **$\mathbb{A}^2$ comme fondements ?** • Par sa capacité à donner des axiomatisations finies absolument catégoriques de $(\mathbb{N} ; +, \cdot)$ et de $(\mathbb{R};+,\cdot)$, $\mathbb{A}^{2,p}$ paraît formaliser des structures incontournables. Pour « fonder les mathématiques », ce serait donc une option valable. (Le consensus « premier ordre + ZF » est récent — il date des années 1920 — mais l'idée même de *fondements* unifiés l'est presque autant.) • En mathématiques, le statut ontologique des objets est rarement débattu : par consensus, le criterium d'une théorie est sa fécondité. La logique élémentaire ne caractérise pas $(\mathbb{N} ; +, \cdot)$, mais elle a des applications en géométrie algébrique. • Inversement, on peut démontrer que les propriétés de $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ sont mauvaises ; cette relation ne formalise donc rien de sûr. • On peut tenir que la question des « fondements des mathématiques » n'est pas mathématique, et encore moins de logique mathématique. Celle-ci représente les théories mathématiques les unes dans les autres, avec pour conséquence que les mathématiques n'ont pas d'ordre. La tentative de fonder les mathématiques, et surtout le déni des phénomènes d'incomplétude, tient au *complexe de Descartes* brillamment nommé par Fraïssé. • La question des fondements ne suffit pas à justifier *mathématiquement* la logique du deuxième ordre.

- **Logicisme (ex. 12.8).** Suite de § 7, notes conclusives. • L'énoncé $\varphi^2_{\text{Hume}}$ est appelé « principe de Hume » [Hume, Book I, Part III, Section I] par les spécialistes de Frege, ce dernier ayant exhumé la référence [Frege2, § 63]. • À la suite du renouveau de l'intérêt pour Frege [Wright], il fut observé que l'argument de [Frege3, § 34 sqq] pour « construire les nombres » n'employait pas la loi V dont Russell établit l'inanité ; p. ex. [Boo95a, p. 443]. • En termes techniques de § 13, « le théorème de Frege » est que $\{\phi_\infty, \varphi^2_{\text{Hume}}\}$ *interprète* l'arithmétique.

[**Hen50**] : Leon Henkin. « Completeness in the theory of types ». In : *J. Symbolic Logic* 15 (1950), p. 81-91
[Hin55] : Jaakko Hintikka. « Reductions in the theory of types ». In : *Acta Philos. Fenn.* 8 (1955), p. 57-115
[Mon65a] : Richard Montague. « Reductions of higher-order logic ». In : *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley).* North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 251-264
[Hume] : David Hume. *A Treatise of Human Nature.* London : John Noon, 1739. 274 p.
[Wright] : Crispin Wright. *Frege's conception of numbers as objects.* T. 2. Scots Philosophical Monograph Series. Aberdeen University Press, Aberdeen, 1983, p. xxi+193
[Frege3] : Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band.* Jena : Hermann Pohle, 1893. xxxii + 245
[Boo95a] : George Boolos. « Saving Frege from contradiction ». In : *Frege's philosophy of mathematics.* Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 438-452

Plus de détails dans [Boo95b, Appendix]. • On appelle « néologicisme » l'abondant appareil de commentaires autour de ce mince énoncé. Première introduction [LZ06] ; référence [Burgess] ; on sort de la logique mathématique.

• **Prédicativisme.** • Par définition, une structure de Henkin vérifie la $\varphi$-séparation pour *toutes* les formules du deuxième ordre. On parle de séparation *imprédicative*. • Une version plus modérée se limite aux formules à quantification élémentaire ; on parle alors de *séparation prédicative*. Les structures points-parties vérifiant la seule séparation prédicative n'ont pas de nom. On propose *structures de Henkin prédicatives*. • Poincaré [Poi06, IX] puis Weyl virent en la séparation imprédicative un « cercle vicieux ». Si le rôle de la logique est de décrire des structures mathématiques, l'argument étonne. Après tout, la définition de l'existence du plus grand élément d'un ordre est : $(\exists x)(\forall y)(x \geqslant y)$. Elle fait référence à d'autres éléments (dont $x$ lui-même) ; mais est-elle circulaire ? • Thématiser le caractère prédicatif ou imprédicatif, c'est accorder beaucoup d'importance au langage naturel, et refuser la réflexion algébrique sur la combinatoire ensembliste.

• **Expressivité des relations binaires.** • Ex. 12.6 : attribué à David Kaplan dans [Mon65a, Lemma 2]. Précurseur [**Löw15**, Theorem 6]. V. aussi [Tar54a]. • Le maximum de complexité des mathématiques est déjà atteint avec les relations binaires ; d'ailleurs ZF formalise toute la pratique usuelle dans $\{\in\}$. Pas plus suprenant que : tout groupe dénombrable se plonge dans un groupe à deux générateurs. • V. *Logique monadique* infra.

• **Formes du choix (ex. 12.7).** • [Gaß94] étudie avec soin les (in)dépendances des formulations possibles par les méthodes de permutation « à la Fraenkel-Mostowski » [Shapiro, Theorem 5.4 p. 107] a un argument ensembliste bien plus complexe. • Toute forme du choix est en fait un schéma paramétré par les arités. [Gaß94] distingue neuf tels schémas. • Gaßner construit des modèles de Henkin, ce qui permet de statuer sur l'absence de *déduction* au deuxième ordre. Une étude dans $\mathbb{A}^{2,p}$ serait tributaire de la réalité ensembliste sous-jacente.

• **Catégoricité interne.** • On peut *internaliser* le phénomène de catégoricité (absolue) en logique du deuxième ordre $\mathbb{A}^2$. • Soit $\varphi^2$ un $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$-énoncé. On construit aisément un $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$-énoncé $\mathrm{Cat}^2_\varphi$ d'interprétation « $\varphi^2$ possède un unique modèle à isomorphisme près ». Quantifiant pour éliminer $\mathcal{L}$, c'est un $\mathbb{A}^2(\varnothing)$-énoncé. • La *catégoricité interne* de $\varphi^2$ est par définition $\models \mathrm{Cat}^2_\varphi\ [\mathbb{A}^{2,H}]$. Par complétude, elle équivaut à $\vdash \mathrm{Cat}^2_\varphi\ [\mathbb{A}^{2,H}]$. Elle entraîne la catégoricité (absolue), qui est $\models \mathrm{Cat}^2_\varphi\ [\mathbb{A}^{2,p}]$. Mais faute de complétude pour $\mathbb{A}^{2,p}$, la catégoricité interne est plus rare que la catégoricité. • Pourtant $(\mathbb{N}\,; 0, s)$ et $(\mathbb{R}\,; +, \cdot)$ sont internement catégoriques. • Il n'existe pas (encore ?) de formalisation

[Boo95b] : George Boolos. « The standard of equality of numbers ». In : *Frege's philosophy of mathematics*. Cambridge, MA : Harvard Univ. Press, 1995, p. 234-254
[LZ06] : Bernard Linsky et Edward Zalta. « What is neologicism ? » In : *Bull. Symbolic Logic* 12.1 (2006), p. 60-99
[Burgess] : John Burgess. *Fixing Frege*. Princeton Monographs in Philosophy. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2005, p. x+257
[Poi06] : Henri Poincaré. « Les mathématiques et la logique ». In : *Rev. de métaphys. et de morale* 14 (1906), p. 294-317
[**Löw15**] : Leopold Löwenheim. « Über Möglichkeiten im Relativkalkül ». In : *Math. Ann.* 76.4 (1915), p. 447-470
[Tar54a] : Alfred Tarski. « A general theorem concerning the reduction of primitive notions ». In : *J. Symbolic Logic* 159 (1954), p. 158
[Gaß94] : Christine Gassner. « The axiom of choice in second-order predicate logic ». In : *Math. Logic Quart.* 40.4 (1994), p. 533-546

de la catégoricité interne en logique élémentaire. Si $\varphi^1$ est élémentaire, on sait former $\mathrm{Cat}^2_\varphi$ au deuxième ordre, mais on n'a pas de stratégie générale pour l'émuler au premier. On recommande [Vää21b].

- **Du deuxième au premier ordre (1) : schématisation.** • Les axiomatisations naïves (des entiers, des réels, des ensembles) sont souvent du deuxième ordre. La présence de quantifications d'ordre supérieur exclut l'emploi d'outils logiques. Pour y remédier on peut *schématiser* ces axiomatisations en variantes élémentaires. • Soit $A^2$ une axiomatisation du deuxième ordre où les seules quantifications d'ordre supérieur sont universelles. Soit $A^1$ l'axiomatisation obtenue en remplaçant chaque axiome d'ordre supérieur $(\mathbb{\forall} X)\varphi^2$ par le schéma $(\forall \mathbf{z})\varphi^2[X := \chi^1]$, où $\chi^1$ parcourt toutes les formules *élémentaires* au bon nombre de variables libres ; on permet des paramètres. • Typiquement, schématiser $\mathrm{PA}^2$ donne PA ; schématiser $\mathrm{RCF}^2$ donne RCF. La première schématisation est la formalisation de ZF par Skolem [**Sko23**, § 4] pour donner corps à la théorie imprécise de Zermelo. • Attention : la schématisation dépend de l'axiomatisation (et non de la théorie engendrée). Deux axiomatisations distinctes $A^2$ et $B^2$ peuvent donner des théories élémentaires $\langle A^1 \rangle$ et $\langle B^1 \rangle$ très distinctes. Ainsi $A^2 = \mathrm{PA}^2$ et $B^2 = \mathrm{PA}^2 \cup \{\ulcorner \mathrm{Coh}(\mathrm{PA}) \urcorner\}$ engendrent la même théorie du deuxième ordre, mais $\ulcorner \mathrm{Coh}(\mathrm{PA}) \urcorner \in B_1 \backslash A_1$ par incomplétude (§ 20). • La schématisation est un affaiblissement considérable. Notamment la complétude ou la catégoricité de $A^2$ n'entraîne rien sur $A^1$ (songer à $\mathrm{PA}^2$, $\mathrm{RCF}^2$, $\mathrm{ZFC}^2$).

- **Du deuxième au premier ordre (2) : passage à $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$.** • L'autre option face à une théorie naïve $\Theta^2$ du deuxième ordre, est de l'interpréter dans $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$. Ceci revient à lire $\Theta^2$ comme théorie points-parties, à laquelle on ajoute un schéma de séparation. • Ce schéma a deux versions. On peut admettre toutes les formules du deuxième ordre (comme pour une structure de Henkin), ou le brider en se restreignant aux formules à quantification élémentaire. V. *Prédicativisme.* • $\mathrm{PA}^2$ imprédicative est $Z^2$, mais $\mathrm{PA}^2$ prédicative est $\mathrm{ACA}_0$. $\mathrm{ZFC}^2$ imprédicative KM alors que $\mathrm{ZFC}^2$ prédicative est BGN (v. compléments § R.1). • Orey demanda une théorie des modèles pour cette logique.

- **Complétude et catégoricité au deuxième ordre (1).** Suite de § 8, notes conclusives. • $(\mathbb{N} ; +, \cdot)$ et $(\mathbb{R} ; +, \cdot, <)$ sont absolument catégoriques dans $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$, et même finiment. • On peut demander si toutes les « structures usuelles » le sont ; mais l'expression « structure usuelle » n'a pas de sens précis. Au passage, on ne connait pas d'axiomatisation *naturelle* de $(\mathbb{C} ; +, \cdot, \exp)$. La question dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\exists_{\geqslant \aleph_1})$ est classique [Zil05]. • Soit $\Theta$ une théorie du deuxième ordre. Son absolue catégoricité dans $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$ entraîne sa complétude dans $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$. Faute de complétude pour la paire $(\models [\mathbb{\Lambda}^{2,p}], \vdash)$, ceci n'a pas de valeur pratique. • Il reste à comprendre si la complétude dans $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$ entraîne une forme de catégoricité. Cela ne peut être général (ex. 8.7) ; a minima il faut supposer la finitude du langage et l'équipotence des structures. Or même avec la finitude du langage et la dénombrabilité, la question est indécidable dans ZFC. Suite et fin en § 27, notes conclusives.

- **Modérer $\mathbb{\Lambda}^2$ (0).** $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$ est trop expressive. On peut modérer son expressivité ou nos exigences sémantiques.

- **Modérer $\mathbb{\Lambda}^2$ (1) : logique monadique.** • La complexité est liée aux relations binaires ; v. *Expressivité des relations binaires.* La logique *monadique* du deuxième ordre quantifie sur les seules parties/relations unaires. On la note $\mathbb{\Lambda}^2_m$. Cette logique a des

[Vää21b] : Jouko Väänänen. « Tracing internal categoricity ». In : *Theoria* 87.4 (2021), p. 986-1000

[Zil05] : Boris Zilber. « Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 132.1 (2005), p. 67-95

liens avec l'algorithmique mais aussi des développements abstraits difficiles. • $\mathbb{A}^3_m$ recapture $\mathbb{A}^2$. En effet une relation $n$-aire est une famille de $n$-uplets. On reste donc dans $\mathbb{A}^2_m$. • $\mathbb{A}^2_m$ contient toujours l'égalité par le « principe de Leibniz » $(x = y) \leftrightarrow (\forall X)(X(x) \leftrightarrow X(y))$ ; l'attribution est discutable. En interprétant les éléments $a \in \mathbb{A}$ comme les singletons $\{a\} \in P(\mathbb{A})$, $\mathbb{A}^2_m(=)$ se ramène à l'étude de $(P(\mathbb{A})\,;\triangle,\cap)$, autrefois appelée *Klassenkalkül*. Skolem a par élimination des quantificateurs effective montré l'inocuité de $\mathbb{A}^2_m(=)$ ; v. ex. 18.3. On va donc ajouter du langage. • L'ajout de relations unaires au langage reste au niveau monadique pur. On met donc (au moins) une relation binaire et l'on travaille dans $\mathbb{A}^2_m(R)$. Il n'y a pas de borne sur la complexité d'une relation binaire (penser à ZF). Sont donc étudiées *certaines* théories monadiques dans $\mathbb{A}^2_m(R)$. • Tour d'horizon de référence [Gur85]. La théorie monadique de l'arbre $\mathcal{A}$ muni des deux fonctions « successeur-gauche » et « successeur-droit » est décidable [Rab69]. La théorie monadique de $(\mathbb{R}; \leqslant)$ est indécidable [GS82]. Cela suggère une grande complexité pour la théorie monadique d'un ordre. En effet la logique du deuxième ordre est interprétable dans la théorie monadique d'un ordre total [She75b], amélioré en [She90]. Inversement, la théorie monadique des ordinaux dénombrables est décidable [Büc73]. • Après [Gur85], la décidabilité *effective* de théories monadiques a connu un regain d'intérêt [Cou90]. On quitte la logique mathématique pour l'algorithmique.

• **Modérer $\mathbb{A}^2$ (2) : sémantique faible.** • $\mathbb{A}^{2,H}$ ramène $\mathbb{A}^2$ à $\Lambda_{\omega,\omega}$. On peut vouloir *moins* modérer, par une autre sémantique. • La *sémantique faible* $\mathbb{A}^{2,f}$ interprète les variables de deuxième ordre par les parties finies. • $\mathbb{A}^{2,f}$ étend $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0})$. Notamment $(\mathbb{N}\,; s, <)$ reste absolument catégorique dans $\mathbb{A}^{2,f}$. Mais l'inclusion $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0}) \hookrightarrow \mathbb{A}^{2,f}$ est stricte [Cow79, Corollary p. 138] (l'étude de Cowles est beaucoup plus générale). • Pour un calcul déductif naturel (avec un analogue de la « règle $\omega$ » ; v. § 20, notes conclusives), $\mathbb{A}^{2,f}$ est complète [Lop67, Theorem 4.7].

• **Modérer $\mathbb{A}^2$ (3) : le théorème des quatre quantificateurs.** On peut s'interroger sur le spectre d'expressivité des diverses quantifications supérieures. Une formalisation du problème (mais pas la seule) est comme suit.

**Définition** (quantificateur définissable)**.** Soit $\chi(X)$ une $\Lambda_{\omega,\omega}(X)$-formule, où $X$ est un symbole de relation $n$-aire variable. Soit $\mathbb{E}_\chi$ le quantificateur d'interprétation $\mathbb{A} \models (\mathbb{E}_\chi X)\varphi^2(X)$ ss'il existe $R \subseteq \mathbb{A}^n$ tel que $(\mathbb{A}\,; R) \models \chi$ et $\mathbb{A} \models \varphi^2(R)$.

[Gur85] : Yuri Gurevich. « Monadic second-order theories ». In : *Model-theoretic logics.* Perspect. Math. Logic. Springer, New York, 1985, p. 479-506

[Rab69] : Michael Rabin. « Decidability of second-order theories and automata on infinite trees ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 141 (1969), p. 1-35

[GS82] : Yuri Gurevich et Saharon Shelah. « Monadic theory of order and topology in ZFC ». In : *Ann. Math. Logic* 23.2-3 (1982), 179-198 (1983)

[She75b] : Saharon Shelah. « The monadic theory of order ». In : *Ann. of Math. (2)* 102.3 (1975), p. 379-419

[She90] : Saharon Shelah. « Notes on monadic logic B. Complexity of linear orders in ZFC ». In : *Israel J. Math.* 69.1 (1990), p. 94-116

[Büc73] : Richard Büchi. « The monadic second order theory of $\omega_i$ ». In : *The monadic second order theory of all countable ordinals (Decidable theories, II).* 1973, 1-127. Lecture Notes in Math., Vol. 328

[Cou90] : Bruno Courcelle. « The monadic second-order logic of graphs I. Recognizable sets of finite graphs ». In : *Inform. and Comput.* 85.1 (1990), p. 12-75

[Lop67] : Edgar Lopez-Escobar. « A complete, infinitary axiomatization of weak second-order logic ». In : *Fund. Math.* 61 (1967), p. 93-103

• Ainsi $\mathbb{\exists}_\chi$ quantifie sur les relations pour lesquelles l'axiome élémentaire $\chi$ est satisfait. On parle de *quantificateur supérieur définissable*. • La formule élémentaire $\chi$ doit rester dans le langage $\{X\}$ (pas d'autres symboles d'un langage relationnel $\mathcal{L}$) et $\varphi^2$ est dans $\Lambda_{\omega,\omega}(\mathbb{\exists}_\chi)$. • Pour $\chi = \top$ on retrouve la quantification du deuxième ordre ; pour $\chi = \bot$, on l'interdit (donc on reste en logique élémentaire). Pour $\chi$ employant $X$ comme relation unaire, on trouve la logique *monadique* du deuxième ordre. Enfin, pour $\chi$ employant $X$ binaire et affirmant que c'est (le graphe d')une bijection partielle, on trouve une logique « à permutation près ». • Théorème difficile : Dans un sens technique, ce sont les seuls quantificateurs supérieurs définissables sur les structures infinies [She73]. • La *sémantique faible* $\mathbb{\Lambda}^{2,f}$ (v. supra) n'est pas prise en compte dans le théorème de Shelah. La notion de *quantificateur définissable* n'est donc qu'une façon de modéliser le problème « qu'y a-t-il entre le premier et le deuxième ordre ? ».

# § sé2. Sujet d'étude 2 : pour en finir avec la complétude

Ce sujet d'étude présente :

— des preuves alternatives de la complétude de la logique élémentaire (une variante à la Henkin, la preuve historique de Skolem-Gödel, et la preuve de Rasiowa-Sikorski),

— la complétude faible de la logique $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ ;

— la complétude dénombrable de la logique $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ (deuxième lecture seulement).

*Les parties sont indépendantes, mais de difficulté croissante.*

Prérequis : § 5 ; §§ 6–11. La partie § 6 sur $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ demande en outre §§ 14–15.

---

## 1. Logique propositionnelle

Cette partie ne demande que la maîtrise de la notion de complétude, et un peu de topologie dans les espaces de Stone.

La *logique propositionnelle* $\Lambda_{\omega,0}(\mathcal{L})$ emploie les connecteurs booléens $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ mais pas les quantificateurs. Par opposition aux expositions naïves, on conserve $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{L}$-termes ; mais les $\mathcal{L}$-formules considérées sont donc sans quantificateurs.

1.1. Montrer directement la complétude de cette logique en adaptant les arguments de § 10.3.

La suite propose une autre stratégie.

1.2. On appelle *complétude faible* la propriété : « si $\models \varphi$, alors $\vdash \varphi$ ».

Montrer, en dégageant les hypothèses faites sur $\models$ et $\vdash$, que la complétude équivaut à (compacité + complétude faible).

[She73] : Saharon Shelah. « There are just four second-order quantifiers ». In : *Israel J. Math.* 15 (1973), p. 282-300

1.3. Soit $T$ une théorie sans quantificateurs *ni égalité* dont toute partie finie est satisfaisable. Montrer que $T$ l'est. On pourra noter $A$ l'ensemble des termes, $S$ celui des $\mathcal{L}$-structures sur $A$, et mettre une topologie compacte sur $S$.

1.4. Prendre en compte l'égalité, et montrer la compacité de la logique propositionnelle.

1.5. Montrer que la logique propositionnelle est faiblement complète. On pourra raisonner par récurrence sur le nombre de formules de base présentes dans $\varphi$.

1.6. Conclure.

## 2. Preuve « à la Henkin » via la logique propositionnelle

Cette partie requiert la première, et une bonne compréhension de la méthode de Henkin (§ 10).

La méthode invoque l'idée de Henkin ainsi qu'une élimination des quantificateurs forcée par nouvelles relations. Par commodité on limite les symboles logiques employés à $\bot, \neg, \wedge, \exists$.

— Soient $\mathcal{L}$ un langage purement relationnel et $\mathcal{L}^*$ son langage henkinisé (§ 10.2). Pour chaque $\mathcal{L}^*$-formule $\varphi(\mathbf{x})$, soit $R_\varphi$ une relation de même arité. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^* \cup \{R_\varphi : \varphi \in \mathcal{L}^*\text{-Form}\}$.

— Soit $H^0_{\mathcal{L}'}$ l'ensemble des $\mathcal{L}'$-énoncés suivants, pour $\varphi \in \mathcal{L}^*$-Form et $\mathbf{a} \in \mathcal{L}^*$ :

  — $R_S(\mathbf{a}) \leftrightarrow S(\mathbf{a})$ pour chaque relation $S$ de $\mathcal{L}$ ;

  — $R_{\neg\varphi}(\mathbf{a}) \leftrightarrow \neg R_\varphi(\mathbf{a})$ ;

  — $R_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}(\mathbf{a}) \leftrightarrow R_{\varphi_1}(\mathbf{a}) \wedge R_{\varphi_2}(\mathbf{a})$ ;

  — $R_\varphi(b, \mathbf{a}) \to R_{\exists x\ \varphi}(\mathbf{a})$ ;

  — $R_{\exists x\ \varphi}(\mathbf{a}) \to R_\varphi(c, \mathbf{a})$, où $c$ est la constante de Henkin de $(\exists x)\varphi(x, \mathbf{a})$.

— Pour $T$ une $\mathcal{L}$-théorie, soit $T' = \{R_\varphi : \varphi \in T\} \cup H^0_{\mathcal{L}'}$.

2.1. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

> Montrons que la logique élémentaire est complète ; soit $T$ une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire cohérente. Par récurrence sur $\varphi$, pour tout énoncé $\varphi(\mathbf{a})$ avec $\mathbf{a} \in \mathcal{L}^*$, on a $H^0_{\mathcal{L}'} \vdash \varphi(\mathbf{a}) \leftrightarrow R_\varphi(\mathbf{a})$. En particulier $T \vdash \chi$ ssi $T' \vdash R_\chi$. Il suit que $T$ est cohérente ssi $T'$ l'est. La seconde est donc cohérente, mais c'est une théorie élémentaire sans quantificateurs. Par complétude propositionnelle, $T'$ est satisfaisable, et $T$ aussi.

2.2. Montrer que si $T$ est cohérente dans $\mathcal{L}$, alors $T'$ l'est dans $\mathcal{L}'$. Indication : enlever les $R$.

2.3. Montrer que si $T'$ est satisfaisable, alors $T$ l'est. Indication : ne garder que les constantes.

2.4. Déduire la complétude de la logique élémentaire.

## 3. La preuve de Skolem-Gödel

Cette partie indépendante est d'intérêt historique. Les questions suivent exactement le découpage de l'article de Gödel [**Göd30a**], moins dense que la communication de Skolem [**Sko23**].

Avec Gödel, on admet deux points.

— Toute formule équivaut syntaxiquement à une formule en forme prénexe, i.e. de la forme $(Q)(\varphi_0)$, où $Q$ est un bloc de quantifications et $\varphi_0$ une formule sans quantificateurs (v. ex. 9.7).

— Une formule sans quantificateurs est réfutable ou satisfaisable (v. première partie).

Les raisonnements par correction sont implicites chez Gödel, qui montre le résultat suivant.

**Théorème** (Satz I)**.** Toute formule élémentaire sans = vraie dans tout modèle est démontrable.

Sauf mention contraire, les formules ne comportent pas =.

3.1. **Le cas principal.** Une formule est *bonne* si elle est soit réfutable soit satisfaisable dans un modèle dénombrable.

(a) (Satz II.) Montrer qu'il suffit d'établir que toute formule est bonne.

3.2. **Réduction au cas $\forall\exists$.** Soit $K_n$ la collection des énoncés de forme prénexe $(\forall\exists)^n\varphi$, où :

— $\varphi$ est sans quantificateurs ;

— les uplets sont permis dans les quantifications : par exemple, $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y)(\forall z)(\exists t_1)(\exists t_2)\varphi$ est dans $K_2$ ;

— le langage n'est *pas* fixé.

Soit $K$ la réunion des $K_n$.

(a) (Satz III.) Montrer que si tout énoncé de $K$ est bon, alors toute formule aussi.

(*) (b) (Satz IV.) Montrer que si tout énoncé de $K_n$ est bon, alors tout énoncé de $K_{n+1}$ aussi.

Indication : ajouter un nouveau symbole de relation $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, et en faire une fonction « choisissant des témoins existentiels ».

3.3. **Réduction au cas sans quantificateurs.** Soit $(\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ un énoncé de $K_1$, où $\varphi$ est sans quantificateurs, $\mathbf{x}$ est de longueur $k$, et $\mathbf{y}$ de longueur $\ell$.

— Soient $a_0, a_1, \dots$ des symboles de variables, dont on énumère les $k$-uplets par $\mathbf{u}_1 = (a_0, \dots, a_0)$, $\mathbf{u}_2 = (a_1, a_0, \dots, a_0)$, ..., en classant d'abord par somme des indices. Soit aussi $\mathbf{v}_n = (a_{(n-1)\ell+1}, \dots, a_{n\ell})$.

Bien voir que $\mathbf{v}_n$ est disjoint de l'union des $\mathbf{u}_i$ pour $i \leqslant n$ : les uplets $\mathbf{v}_n$ vont chercher « toujours strictement plus loin ».

— Soit $\varphi_1$ la formule $\varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$, puis $\varphi_{n+1}$ la formule $\varphi_n \wedge \varphi(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1})$. Soit enfin $\chi_n$ l'énoncé $(\exists a_0) \cdots (\exists a_{n\ell})\varphi_n$.

(a) (Satz VI.) Montrer que pour chaque entier $n \geqslant 1$, on a $\vdash (\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y}\ \varphi) \to \chi_n$.

(b) (Satz V.) Par complétude de la logique propositionnelle, en déduire que tout énoncé de $K_1$ est bon, et le Satz I.

### 3.4. Extensions du résultat

(a) (Sätze VII et VIII.) Étendre au cas d'une formule pouvant comporter $=$.

(b) (Satz IX.) Montrer que tout ensemble dénombrable de formules est soit globalement satisfaisable, soit possède une partie finie de conjonction réfutable.

## 4. La preuve de Rasiowa-Sikorski

Cette partie indépendante est plus abstraite et demande une bonne compréhension de la dualité de Stone. *Elle ne fonctionne qu'en langage dénombrable.*

La preuve repose sur un lemme central en logique.

**Définition.** Soient $\mathbb{B}$ un treillis de Boole et $A \subseteq \mathcal{B}$ une partie admettant une borne inférieure $a = \bigwedge A$. Un filtre $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ de $\mathbb{B}$ *préserve la borne inférieure de* $A$ s'il vérifie : si $A \subseteq \mathcal{F}$, alors $a \in \mathcal{F}$.

**Lemme** (Rasiowa-Sikorski)**.** Soit $\mathbb{B}$ un treillis de Boole. On se donne une quantité dénombrable de parties $A_n \subseteq \mathbb{B}$ ayant chacune une borne inférieure $a_n$, ainsi qu'un point $b \neq 0$. Alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant $b$ et préservant les bornes inférieures des $A_n$.

### 4.1. Lemme de Rasiowa-Sikorski via la topologie

**Définition.** Un espace topologique a la *propriété de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses reste dense.

(a) Montrer que tout espace compact est de Baire.

(b) Soit $\mathbb{B}$ un anneau de Boole. Pour $\mathfrak{p} \lhd \mathbb{B}$ un idéal, on note $[x]$ la classe modulo $\mathfrak{p}$. Soit $A \subseteq \mathbb{B}$ une partie possédant une borne supérieure $a$. Montrer que $D_A = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{B} : \sup\{[x] : x \in A\} \text{ existe et vaut } [a]\}$ est un ouvert dense de $\operatorname{Spec}\mathbb{B}$.

(c) Réécrire l'énoncé en termes d'ultrafiltres et déduire le lemme de Rasiowa-Sikorski.

### 4.2. Variante de Tarski.

Montrer le lemme de Rasiowa-Sikorski directement dans les treillis, sans passer au dual. (*) On pourra construire une suite décroissante $(c_n)$ avec $c_0 = b$ et distinguer deux cas selon que $c_n \leqslant a_n$ ou non.

4.3. **Treillis de Lindenbaum syntaxique.** Soient $T$ une théorie élémentaire cohérente et $\mathrm{Lin}_{\vdash}(T)$ l'ensemble des formules modulo $\vdash$, i.e. modulo $\varphi_1 \sim \varphi_2$ :si $T \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$. On note encore $\varphi$ la classe de $\varphi$.

(a) Se convaincre que $\mathrm{Lin}_{\vdash}(T)$ est un anneau de Boole.

(b) Montrer que dans le treillis associé, $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ signifie $\vdash \varphi_1 \to \varphi_2$. En déduire que si $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ alors $(\exists x\ \varphi_1) \leqslant (\exists x\ \varphi_2)$.

(c) Soit $\mathcal{V}_0$ un ensemble *fini* de variables. Vérifier que toute formule équivaut à une formule sans variable liée dans $\mathcal{V}_0$. En déduire que pour tout terme $t$ (même non substituable à $x$ dans $\varphi$), l'expression $\varphi[x := t]$ possède un sens dans $\mathrm{Lin}_{\vdash}(T)$.

(d) Montrer que $(\exists x\ \varphi) = (\exists y)(\varphi[x := y])$ et que si $x$ n'est pas libre dans $\varphi$, alors $(\exists x\ \varphi) = \varphi$.

(e) Déduire que $(\exists x\ \varphi) = \bigvee_{t \in \mathrm{Term}} \varphi[x := t]$ (borne supérieure dans le treillis).

4.4. **Démonstration de la complétude.** Soit $T$ une théorie cohérente en langage dénombrable. Montrer que $T$ possède un modèle au plus dénombrable. On pourra préserver les bornes de type $(\forall x\ \varphi)$.

4.5. **Omission des types.** Affiner la méthode pour redémontrer un point vu à l'exercice 10.7 (les définitions y sont).

**Lemme.** Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, $T$ une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire, et $p(\mathbf{x})$ un type de $T$ non principal. Alors il existe un modèle dénombrable ne réalisant pas $p$.

## 5. Complétude faible de $\Lambda_{\omega_1,\omega}$

Cette partie est plus difficile. Il faut avoir assimilé la méthode de Rasiowa-Sikorski, et compris la définition de la logique infinitaire $\Lambda_{\omega_1,\omega}$.

La logique $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ (§ 7.3) étend la conjonction et la disjonction aux ensembles dénombrables de formules $\Phi$ tels que $\bigcup_\Phi \mathrm{VarLib}\,\varphi$ reste fini. Une $\Lambda_{\omega_1,\omega}$-formule a donc un nombre fini de variables libres. L'extension de la sémantique est immédiate. On veut démontrer le théorème suivant.

**Théorème.** Il existe une notion de déduction telle que pour les *énoncés* de $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\mathcal{L})$, cohérence et satisfaisabilité coïncident.

Dorénavant, $\varphi, \chi, \dots$ désignent des $\Lambda_{\omega_1,\omega}$-formules et $\Gamma, \Phi$ des ensembles de telles formules.

5.1. **Déductions dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}$.** Aux règles usuelles on ajoute les suivantes :

$$\frac{\dots \quad \Gamma \vdash \varphi_n \quad \dots}{\Gamma \vdash \bigwedge_n \varphi_n}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \bigwedge_n \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi_n}\ \wedge_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \bigvee_n \varphi_n}\ \vee_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \bigvee_n \varphi_n \quad \dots \quad \Gamma, \varphi_n \vdash \chi \quad \dots}{\Gamma \vdash \chi}\ \vee_e$$

Notamment les déductions dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ peuvent être infinitaires. On distingue dorénavant $\vdash [\Lambda_{\omega_1,\omega}]$ de $\vdash [\Lambda_{\omega,\omega}]$. On parlera de $\Lambda_1$-cohérence ou $\Lambda$-cohérence.

(a) Vérifier la correction de $\vdash [\Lambda_{\omega_1,\omega}]$. Déduire qu'une théorie satisfaisable est $\Lambda_1$-cohérente.

(b) Montrer que les deux notions de cohérence ne coïncident pas en général, mais qu'elles coïncident bien pour les $\Lambda_{\omega,\omega}$-théories.

(c) (Question syntaxique ; optionnelle mais amusante.) Le « paradoxe de Yablo » est le suivant. On fixe des formules $\alpha_n$. Soient les axiomes $\alpha_n \leftrightarrow \bigwedge_{k>n} \neg\alpha_k$ et $Y$ l'énoncé-conjonction. Donner une déduction infinitaire montrant $Y \vdash\perp$ dans $\vdash [\Lambda_{\omega_1,\omega}]$.

(d) Donner une *théorie* $\Lambda_1$-cohérente mais non satisfaisable. [On pourra prendre un $\Lambda_1$-énoncé caractérisant $(\mathbb{N} ; 0, s)$ à isomorphisme près, et ajouter $\omega_1$ constantes.] (*)

(e) En déduire l'échec de la complétude et de la compacité avec des *théories* de cardinal quelconque. 5.3 revient sur ce point.

5.2. **Preuve à la Rasiowa-Sikorski.** Montrer que tout *énoncé* cohérent est satisfaisable.

5.3. **Pas de complétude forte.** On revient sur 5.1.d, en langage fini.

(a) Écrire une $\Lambda_1(+, \preceq)$-théorie décrivant les groupes abéliens ordonnés archimédiens.

(b) On admet que tout ordinal est l'ensemble des ordinaux moindres. Pour chaque ordinal $\alpha < \omega_1$, construire une $\Lambda_1(<)$-formule $\varphi_\alpha(x)$ telle que dans un ordre $\mathbb{O} = (O; <)$, on a $\mathbb{O} \models \varphi(a)$ ssi $(\{x \in O : x < a\}, <) \simeq \alpha$ **[Ord]**.

(c) Construire une $\Lambda_1(+, \preceq, <)$-théorie $\Theta$ décrivant les groupes abéliens ordonnés archimédiens contenant une copie de $\omega_1$. On admet que $\Theta$ n'est pas satisfaisable (v. compléments § A). (*)

(d) Déduire que $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ n'est pas complète, même en langage fini.

(e) Y a-t-il paradoxe ?

## 6. Complétude dénombrable de $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$

Beaucoup plus difficile, cette partie n'est accessible qu'après compréhension des structures points-parties (§ 12) et maîtrise des techniques modèle-théoriques des §§ 14–15. Il faut aussi savoir omettre des types.

Soient $Q$ le quantificateur $\exists_{\geqslant\aleph_1}$ et $\Lambda = \Lambda_{\omega,\omega}(Q)$. Dorénavant, « formule » est au sens de $\Lambda$.

— Pour une $\mathcal{L}$-structure, on pose $\mathbb{A} \models (Qx)\varphi(x, \mathbf{a})$ si $\mathrm{card}\{b \in \mathbb{A} : \mathbb{A} \models \varphi(b, \mathbf{a})\} \geqslant \aleph_1$.

— Au calcul déductif on ajoute les règles suivantes :

$$\frac{}{\neg(Qx)(x = y \vee x = z)} \qquad \frac{\Phi \vdash (\forall x)(\varphi_1 \to \varphi_2)}{\Phi \vdash (Qx)(\varphi_1 \to \varphi_2)}$$

$$\frac{\Phi \vdash (Qx)\varphi}{\Phi \vdash (Qy)(\varphi[x := y])} \qquad \frac{\Phi \vdash (Qy)(\exists x)\varphi}{\Phi \vdash (\exists x\ Qy\ \varphi) \vee (Qx\ \exists y\ \varphi)}$$

Dorénavant, « cohérence » est au sens de $\vdash$.

On va montrer le théorème suivant.

**Théorème.** Si $\Theta$ est dénombrable et cohérente, alors $\Theta$ est satisfaisable en un modèle de cardinal $\leqslant \aleph_1$.

On fixe un langage dénombrable.

6.1. **Correction.** Montrer, sans hypothèses sur card $\Theta$, que si $\Theta \vdash \varphi$ alors $\Theta \models \varphi$.

6.2. **Quantification et disjonction.** Cette question est syntaxique ; on peut admettre le résultat.

**Lemme.** $\vdash [(Qx\ \varphi_1) \vee (Qx\ \varphi_2)] \leftrightarrow (Qx)(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

(a) Montrer le sens facile.

Soient $y, y_1, y_2$ trois nouvelles variables, et $\chi$ la formule $(y = y_1 \wedge \varphi_1) \vee (y = y_2 \wedge \varphi_2)$.

(b) Montrer que $(Qy)(\exists x)\chi \vdash \bot$.

(c) Montrer que $(\forall y_1)(\forall y_2)(y_1 = y_2) \vdash \bot$.

(d) Montrer que $(\exists y)(Qx)\chi, (\exists y_1)(\exists y_2)(y_1 \neq y_2) \vdash (Qx\ \varphi_1) \vee (Qx\ \varphi_2)$.

(e) Conclure.

6.3. **Sémantique points-parties.** Soient $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\mathcal{P} \subseteq P(\mathbb{A})$ une famille de parties. On pose $(\mathbb{A} ; \mathcal{P}) \models (Qx)\varphi(x, \mathbf{a})$ si $\{b \in \mathbb{A} : \mathbb{A} \models \varphi(b, \mathbf{a})\} \in \mathcal{P}$. Si $(\mathbb{A} ; \mathcal{P}) \models \Theta$, on dit que $(\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ est un *modèle points-parties* de $\Theta$ (ne pas confondre avec les modèles *de* Henkin de § 12.2). Par définition, son cardinal est celui de $\mathbb{A}$.

(a) À quelle famille $\mathcal{P}$ correspond la sémantique de $\exists_{\geqslant \aleph_1}$ ?

(*) (b) Soit $\Theta$ une $\Lambda(\mathcal{L})$-théorie cohérente. Montrer qu'il existe un modèle points-parties de cardinal $\leqslant$ card $\mathcal{L}+\aleph_0$. [Comme pour $\Lambda_{\omega,\omega}$, ajouter des constantes et axiomes de Henkin, maximiser en $\hat{\Theta}$, et former une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}$. Poser $E_\varphi = \{c[\mathbb{A}] : \hat{\Theta} \vdash \varphi[c]\}$ et $\mathcal{P} = \{E_\varphi : \hat{\Theta} \vdash (Qx)\varphi\}$.]

6.4. **Inclusions fortes et principe de chaîne.** Une inclusion $(\mathbb{A} ; \mathcal{P}) \subseteq (\mathbb{A}' ; \mathcal{P}')$ est dite *forte* si $(\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ et $(\mathbb{A}' ; \mathcal{P}')$ vérifient les mêmes formules à paramètres dans $\mathbb{A}$. On note alors $(\mathbb{A} ; \mathcal{P}) \leqslant (\mathbb{A}' ; \mathcal{P}')$ $[\Lambda]$.

Soient $(\mathbb{A}_\alpha ; \mathcal{P}_\alpha)$ une suite ordinale croissante de structures en inclusion forte, et $(\mathbb{A}^* ; \mathcal{P}^*) = \bigcup(\mathbb{A}_\alpha ; \mathcal{P}_\alpha)$. Montrer que pour tout indice, $(\mathbb{A}_\alpha ; \mathcal{P}_\alpha) \leqslant (\mathbb{A}^* ; \mathcal{P}^*)$ $[\Lambda]$.

6.5. **Lemme de croissance contrôlée.** Une formule (avec paramètres, mais avec une seule variable libre) $\varphi(x)$ est dite *croissante* si $(\mathbb{A} ; \mathcal{P}) \models (Qx)\varphi(x)$, et *stationnaire* sinon.

**Lemme.** Soient $(\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ une structure points-parties dénombrable et $\varphi_0(x)$ une formule croissante. Alors il existe $(\mathbb{A}^* ; \mathcal{P}^*) \geqslant (\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ $[\Lambda]$ dénombrable telle que :

(i) il existe $a^* \in \mathbb{A}^* \backslash \mathbb{A}$ tel que $(\mathbb{A}^* ; \mathcal{P}^*) \models \varphi_0(a^*)$ ;

(ii) si $\chi(x)$ est stationnaire, alors $\chi[\mathbb{A}^*] = \chi[\mathbb{A}]$.

(a) Soient $c$ une nouvelle constante et $\Theta$ la $\mathcal{L}_{\mathbb{A}} \cup \{c\}$-théorie :
— $\mathrm{Th}_{\Lambda(\mathcal{L}_{\mathbb{A}})}(\mathbb{A} ; \mathcal{P})$, i.e. les $\mathcal{L}$-formules à paramètres vraies dans $(\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ ;
— $\varphi_0(c)$ ;
— $\neg\chi(c)$ pour $\chi(x)$ stationnaire.

Montrer que pour chaque formule à paramètres, $\Theta \cup \{\psi(c)\}$ est cohérente ssi $(\mathbb{A} ; \mathcal{P}) \models (Qx)(\varphi_0(x) \wedge \psi(x))$. [Contraposer.]

(b) Soient $\chi(x)$ stationnaire et $p(y) = \{\chi(y)\} \cup \{y \neq a : a \in \mathbb{A}\}$. Montrer que si (*) $p(y)$ est cohérent à $\Theta$, alors il n'est pas isolé/principal dans $\Theta$. (Cela signifie qu'il n'existe pas de $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$-formule $\psi(y, c)$ cohérente à $\Theta$ et qui implique toutes les formules de $p(y)$.)

(c) En énumérant les formules stationnaires et en omettant une quantité dénombrable de types non principaux, montrer le lemme de croissance contrôlée.

6.6. **Application du lemme**

(a) Soit $(\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ une structure points-parties dénombrable. Montrer qu'il existe $(\mathbb{A}' ; \mathcal{P}') \geqslant (\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ $[\Lambda]$ dénombrable et telle que pour chaque formule $\varphi(x)$, on ait : $(\mathbb{A} ; \mathcal{P}) \models (Qx)\varphi(x)$ ss'il existe $a' \in \mathbb{A}' \backslash \mathbb{A}$ tel que $(\mathbb{A}' ; \mathcal{P}') \models \varphi(a')$.

(b) On pose $(\mathbb{A}_0 ; \mathcal{P}_0) = (\mathbb{A} ; \mathcal{P})$, puis $(\mathbb{A}_{\alpha+1} ; \mathcal{P}_{\alpha+1}) = (\mathbb{A}'_\alpha ; \mathcal{P}'_\alpha)$. Aux limites on (*) prend l'union. Soit enfin $(\hat{\mathbb{A}} ; \hat{\mathcal{P}}) = (\mathbb{A}_{\omega_1} ; \mathcal{P}_{\omega_1})$. Montrer que pour chaque énoncé à paramètres dans $\hat{\mathbb{A}}$, on a $(\hat{\mathbb{A}} ; \hat{\mathcal{P}}) \models \varphi$ ssi $\hat{\mathbb{A}} \models \varphi$.

(c) En déduire qu'une théorie dénombrable cohérente possède un modèle de cardinal $\leqslant \aleph_1$.

(d) Conclure que si $\Phi \models \chi$ avec $\Phi$ dénombrable, alors $\Phi \vdash \chi$. Montrer que c'est faux si $\Phi$ n'est pas supposé dénombrable.

---

## Notes conclusives

On relativisera l'importance de la complétude. En logique élémentaire, l'outil central de la théorie des modèles est la compacité ; celui de la théorie de la démonstration, le Hauptsatz. En général, la complétude d'une paire $(\models, \vdash)$ signale que la logique étudiée est commune à ces deux disciplines, mais elle ne fait l'étude fine ni de $\models$ ni de $\vdash$.

*In the opinion of the reviewer, this paper represents a distinct advance over*

> *all preceding proofs; for on the one hand, much less formal development from the axioms is required than in the proofs similar to Gödel's, and on the other hand, the doubly infinite passage to $S_\omega$ appearing in Henkin's proof is completely avoided here. Moreover, the present derivation, when combined with the suggested change in the proof of (iii), has the special advantage of bringing out the essentially algebraic character of the method first used by Henkin.*
> [Fef52], sur [**RS50**]

(iii) est le lemme de Rasiowa-Sikorski, et le « changement suggéré » est la variante de Tarski.

***Preuve de Gödel.*** Relire la communication de Skolem [**Sko23**] (traduite dans [**Heijenoort**]) : c'est *exactement* la construction de modèle retrouvée par Gödel. • Gödel exploite, sans le nommer, le lemme de Kőnig ; voir [Fra97]. • L'article de Gödel s'achève sur une discussion de l'indépendance des « axiomes » de déduction qu'il a donnés. • Pour une comparaison des preuves de Skolem-Gödel et Henkin, [Bal18] (qui ne mentionne pas l'argument de Rasiowa-Sikorski).

***Preuve de Rasiowa-Sikorski.*** Elle vient de [**RS50**] (amendé en [RS51] pour prendre en compte une théorie et non un énoncé) ; c'est aussi l'origine du « lemme », dont on ne saurait exagérer l'importance en logique. • Celui-ci fut revendiqué par Sikorski seul [Sikorski, p. 102], et aussi renommé après Tarski : « *Tarski's lemma was first proved by* Rasiowa *and* Sikorski *[1951] using topological methods* » [Bell-Slomson, p. 31]. • Par opposition au lemme de Rasiowa-Sikorski, la variante de Tarski n'emploie pas l'axiome de l'ultrafiltre mais un principe de choix dépendant. Plus de liens dans [Gol85]. • La preuve de Rasiowa-Sikorski est certainement l'aboutissement de la vision topologique de Mostowski [Mos37], qui eut aussi de l'influence hors de Pologne : [Bet51], [Has52].

***Complétude en logique catégorique.*** Dans cette algébrisation moderne de la logique employant les topous, le théorème de complétude est l'existence d'assez de points dans le topô associé à une théorie cohérente ; son nom devient « de Deligne-Gödel ».


[Fef52] : Solomon Feferman. « Review : H. Rasiowa, R. Sikorski, A Proof of the Completeness Theorem of Gödel ». In : *Journal of Symbolic Logic* 17.1 (1952), p. 72

[**Heijenoort**] : Jean van Heijenoort. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Fra97] : Miriam Franchella. « On the origins of Dénes Kőnig's infinity lemma ». In : *Arch. Hist. Exact Sci.* 51.1 (1997), p. 3-27

[Bal18] : John Baldwin. « The explanatory power of a new proof : Henkin's completeness proof ». In : *Truth, existence and explanation.* T. 334. Boston Stud. Philos. Hist. Sci. Springer, Cham, 2018, p. 147-162

[RS51] : Helena Rasiowa et Roman Sikorski. « A proof of the Skolem-Löwenheim theorem ». In : *Fund. Math.* 38 (1951), p. 230-232

[Sikorski] : Roman Sikorski. *Boolean algebras.* 3e éd. T. 25. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. New York : Springer-Verlag, 1969. x+237

[Bell-Slomson] : John Bell et Alan Slomson. *Models and ultraproducts : An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1969, p. ix+322

[Gol85] : Robert Goldblatt. « On the role of the Baire category theorem and dependent choice in the foundations of logic ». In : *J. Symbolic Logic* 50.2 (1985), p. 412-422

[Mos37] : Andrzej Mostowski. « Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik ». In : *Fundam. Math.* 29 (1937), p. 34-53

[Bet51] : Evert Beth. « A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel ». In : *Indag. Math.* 13 (1951). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 54, p. 436-444

[Has52] : Gisbert Hasenjaeger. « Topologische Untersuchungen zur Semantik und Syntax eines erweiterten Prädikatenkalküls ». In : *Arch. Math. Logik Grundlag.* 1 (1952), p. 99-129

***Complétude faible de*** $\Lambda_{\omega_1,\omega}$**.** Démontrée dans [**Karp**]. • L'exposition contemporaine la plus fréquente [Keisler], [Mal71] est par « notions de cohérence » abstraites, empruntées à [Smu63], [Smullyan] et popularisées par [Mak69]. On peut le déplorer. • L'exemple de 5.3 vient de [Sco65, p. 334]. • Paradoxe de Yablo : [Yab93]. • La complétude faible suit également d'une approche plus preuve-théorique [Eng63]. • Pas de complétude non dénombrable. On peut cependant montrer un théorème de complétude forte *en modèles booléens* : une théorie cohérente possède un tel modèle [**Karp**, p. 141], [Man72]. • Sous des hypothèses sur les cardinaux et un ajout de règles, $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ est complète. Référence : [Dickmann].

***Complétude dénombrable de*** $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$**.** Conjecturée par Craig et Fuhrken, démontrée dans [Kei70] ; les questions en viennent directement, mais l'article contient davantage. • Extensions par tous les $\exists_{\geqslant\aleph_n}$ : [MM77], extrêmement technique et sous une hypothèse ensembliste.

• **Complétude en logique informatique.** Une autre façon de procéder est la suivante.

**Démonstration de la complétude « à la Herbrand-Skolem ».** On axiomatise l'égalité, qui devient une relation $\approx$ du langage et non de la logique. Toute formule équivaut modulo $\vdash$ à une formule *prénexe* ; et quitte à rajouter du $\forall$ et du $\exists$, à une formule $(\forall\exists)^n\varphi_0$. Soit $\varphi$ de la forme $(\forall\mathbf{x})(\exists\mathbf{y})(Q)\varphi_0$, où $Q$ est un bloc $(\forall\exists)^{n-1}$. On lui associe un nouvel uplet de fonctions $\mathbf{f}_\varphi$ ; soit $\varphi'$ la formule $(\forall\mathbf{x})(Q)\varphi_0[\mathbf{y} := \mathbf{f}_\varphi(\mathbf{x})]$. Soit $\varphi^*$ la formule obtenue en réitérant ; elle est universelle, en langage étendu $\mathcal{L}^*$. On l'appelle *skolémisée* de $\varphi$.

[**Karp**] : Carol Karp. *Languages with expressions of infinite length.* North–Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964, p. xix+183

[Keisler] : Jerome Keisler. *Model theory for infinitary logic. Logic with countable conjunctions and finite quantifiers.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 62. Amsterdam-London : North-Holland Publishing Co., 1971. x+208

[Mal71] : Jerome Malitz. « Infinitary analogs of theorems from first order model theory ». In : *J. Symbolic Logic* 36 (1971), p. 216-228

[Smu63] : Raymond Smullyan. « A unifying principal in quantification theory ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 49 (1963), p. 828-832

[Smullyan] : Raymond Smullyan. *First-order logic.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 43. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1968, p. xii+158

[Mak69] : Michael Makkai. « On the model theory of denumerably long formulas with finite strings of quantifiers ». In : *J. Symbolic Logic* 34 (1969), p. 437-459

[Sco65] : Dana Scott. « Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers ». In : *Theory of Models Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley).* North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 329-341

[Yab93] : Stephen Yablo. « Paradox without self-reference ». In : *Analysis (Oxford)* 53.4 (1993), p. 251-252

[Eng63] : Erwin Engeler. « A reduction-principle for infinite formulas ». In : *Math. Ann.* 151 (1963), p. 296-303

[Man72] : Richard Mansfield. « The completeness theorem for infinitary logic ». In : *J. Symbolic Logic* 37 (1972), p. 31-34

[Dickmann] : Maximo Dickmann. *Large infinitary languages.* T. 83. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Model theory. Amsterdam-Oxford : North-Holland Publishing Co., 1975, p. xv+464

[Kei70] : Jerome Keisler. « Logic with the quantifier "there exist uncountably many" ». In : *Ann. Math. Logic* 1 (1970), p. 1-93

[MM77] : Menachem Magidor et Jerome Malitz. « Compact extensions of $L(Q)$. Ia ». In : *Ann. Math. Logic* 11.2 (1977), p. 217-261

Soit $T$ une théorie cohérente. Alors :

(1) la $\mathcal{L}^*$-théorie universelle $T^*$ obtenue en skolémisant les formes prénexes de $T$ reste cohérente ;

(2) l'ensemble des termes sans variables dans $\mathcal{L}^*$ porte une structure de modèle $\mathbb{A}^* \models T^*$ ;

(3) ceci donne un modèle $\mathbb{A} \models T$.

(3) est clair, en factorisant par $\approx$ pour retrouver la vraie égalité ; (2) vient de la complétude de la logique propositionnelle. En revanche (1) demande un peu de théorie de la démonstration. La façon la plus éclairante est d'établir le *Hauptsatz* puis la forme générale du théorème de Herbrand (§ J) : si $\varphi^*$ cause une contradiction, elle se détecte avec des instances précises, donc $\varphi$ causait déjà une contradiction. □

Cette preuve regarde vers la logique informatique. J'ignore s'il existe des arguments immédiats établissant la cohérence de $T^*$. • On peut même faire *encore plus* de théorie de la démonstration pour établir la complétude, et procéder directement en calcul des séquents ; [Bus98].

## • Autour de la preuve de Rasiowa-Sikorski

***Variantes du lemme.*** • On pourra vérifier l'énoncé suivant (dont la forme la plus utile reste le cas particulier du sujet).

**Lemme.** Soient $\mathbb{B}$ un anneau de Boole et $a \in \mathbb{B}$. Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux familles dénombrables de parties ; on suppose que $x_n = \bigwedge X_n$ et $y_n = \bigvee Y_n$ existent. Alors il existe un morphisme d'anneaux de Boole $\varphi\colon \mathbb{B} \to \mathbb{F}_2$ tel que :

– $\varphi(a) = 1$ ;

– pour chaque entier, $\varphi(x_n) = \bigwedge \varphi(X_n)$ et $\varphi(y_n) = \bigvee \varphi(Y_n)$.

• La première adaptation du lemme de Rasiowa-Sikorski pour les treillis de Heyting semble [Gör71, § 7]. Ceci inspire le trop général [RS75] : il est déjà temps de changer de sujet. • Quand on remet de la topologie, i.e. de la dualité pour treillis de Heyting, cela devient très peu lisible [Gol12].

***Réécriture algébrique de la preuve.*** V. compléments § F.

***Rasiowa-Sikorski en langage non dénombrable ?*** • En travaillant dans $\mathrm{Lin}_{\vdash} \Theta$, la méthode établit un peu mieux que la complétude faible, mais *reste en langage dénombrable.* C'est lié à l'emploi du théorème de Baire, qui porte sur les intersections dénombrables. • Pour généraliser la méthode à $\operatorname{card} \mathcal{L} = \kappa$, il faudrait préserver $\kappa$ bornes supérieures à la fois, i.e. trouver un point dans l'intersection de $\kappa$ ouverts denses. *J'ignore si un tel aménagement est possible.* • En général les propriétés type « $\kappa$-Baire » sont fausses ou directement liées à l'axiomatique ensembliste, mais l'espace topologique $\operatorname{Spec} \mathrm{Lin}_{\vdash} \Theta$ est assez particulier pour que la question ait un sens.

## • Complétude et compacité de Barwise.

• C'est un résultat plus profond et plus complexe ; on recommande [Nad85]. • Au lieu de la complétude finitaire de $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ on vise un peu mieux, la complétude pour les théories dites « fragments admissibles » ; c'est une condition de modération combinatoire.

[Bus98] : Samuel Buss. « An introduction to proof theory ». In : *Handbook of proof theory.* T. 137. Stud. Logic Found. Math. North-Holland, Amsterdam, 1998, p. 1-78

[Gör71] : Sabine Görnemann. « A logic stronger than intuitionism ». In : *J. Symbolic Logic* 36 (1971), p. 249-261

[RS75] : Cecylia Rauszer et Bogdan Sabalski. « Notes on the Rasiowa-Sikorski lemma ». In : *Studia Logica* 34.3 (1975), p. 265-268

[Gol12] : Robert Goldblatt. « Topological proofs of some Rasiowa-Sikorski lemmas ». In : *Studia Logica* 100.1-2 (2012), p. 175-191

[Nad85] : Mark Nadel. « $\mathcal{L}_{\omega 1 \omega}$ and admissible fragments ». In : *Model-theoretic logics.* Perspect. Math. Logic. Springer, New York, 1985, p. 271-316

• L'approche d'origine [Bar69] peut être avec profit remplacée par la méthode de Rasiowa-Sikorski [FS91] : « *a set of closed formulae has a model of cardinality not exceeding that of the variables if and only if the set of its classes in the Boolean algebra of equivalence classes of formulae can be extended to an ultrafilter which preserves the infinite meets* ».
• A posteriori, le théorème de Barwise est à peu près optimal : il est difficile de faire mieux que les ensembles admissibles [Sta73].

[Bar69] : Jon Barwise. « Infinitary logic and admissible sets ». In : *J. Symbolic Logic* 34.2 (1969), p. 226-252
[FS91] : Isidore Fleischer et Philip Scott. « An algebraic treatment of the Barwise compactness theory ». In : *Studia Logica* 50.2 (1991), p. 217-223
[Sta73] : Jonathan Stavi. « A converse of the Barwise completeness theorem ». In : *J. Symbolic Logic* 38 (1973), p. 594-612