Chapitre III
Analyse modèle-théorique

Aperçu du chapitre. Ce chapitre approfondit le versant mathématique de la logique appelé *théorie des modèles*. Les structures ne seront plus envisagées une à une mais *en familles*.

L'ordre de lecture des sections n'est pas trop rigide. L'information étudiée sur ces familles de structures est la classe des *parties définissables* (§ 13). On peut munir la classe des modèles d'une théorie élémentaire T d'une structure de catégorie $\mathbf{Mod}(T)$; les parties définissables sont alors des foncteurs vers **Ens** (§ 14). Or les *théorèmes de Löwenheim-Skolem-Tarski* (§ 15) forcent $\mathbf{Mod}(T)$ à représenter chaque cardinalité $\geqslant \operatorname{card} T$, d'où la notion de *catégoricité en cardinalité* (fixée). Par ailleurs les *ultraproduits* de structures relationnelles (§ 16) donnent une prise presque concrète sur les phénomènes non standard, et permettent de redémontrer la compacité de la logique élémentaire. Ce dernier phénomène s'interprète dans un espace profini, libérant des méthodes topologiques pour l'analyse de théories (§ 17). De simples *jeux de va-et-vient* (§ 18) peuvent parfois établir des équivalences logiques.

Ce chapitre pourrait être sous-titré *définissabilité en familles*, ou *géométrie de la définissabilité*.

Pour étudier un matériau, les sciences physiques le *perturbent* en espérant observer des *persistances* à travers ses *déformations*. Ainsi font les mathématiques, dont une méthode est de percevoir les objets *en famille*, et de faire varier ce qui est a priori fixe. En voici quelques exemples.

— Former une intégrale à paramètre $I(t) = \int f(x,t)dx$ pour calculer une intégrale numérique récalcitrante $I = \int f(x)dx$ est déjà un raisonnement en famille.

— La théorie de Lie ajoute à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des infinitésimaux (par l'artifice appelé « calcul différentiel ») ; pour le logicien, on déforme le groupe en un modèle non standard $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}^*)$, puis on récupère une information géométrique invisible dans le seul groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

— La géométrie algébrique fait varier le système de nombres plus radicalement car elle peut même changer la caractéristique du corps de base.

Pour un objet algébrique général, comme par exemple un groupe libre, l'information structurelle susceptible d'être étudiée par variation du système est la strate *définissable*. L'outil révélant des persistances est le théorème de compacité de la logique élémentaire. Dans cette optique, l'existence de modèles non standard n'est plus un défaut de la logique élémentaire, mais un outil. La science de cet outil est appelée *théorie des modèles*.

§ 13. Définissabilité

Prérequis : culture algébrique ; § 6.

La richesse d'une structure $\mathbb{S}$ est liée à sa combinatoire *définissable*, i.e. la collection des parties de $\mathbb{S}^n$ que l'on peut décrire dans la logique ambiante. On peut aussi demander quelles structures « vivent » dans $\mathbb{S}$: le concept d'*interprétation* formalise la chose.

§ 13.1. Parties définissables

On rappelle que si l'on indexe les variables en $x_1, \ldots,$ et que $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ est un uplet, alors $\mathbf{a}$ s'identifie naturellement aux paramètres $x_i \mapsto a_i$. Notamment $\varphi(\mathbf{a})$ est en pratique à lire comme $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Définition (partie définissable)**.** Soit $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure. On considère une formule $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, dans laquelle $\mathbf{y}$ sera remplacé par des paramètres de $\mathbb{S}$.

— Une partie $X \subseteq \mathbb{S}$ est *définie* par la formule à paramètres $\varphi(x, \mathbf{a})$ si pour chaque $b \in \mathbb{S}$ on a l'équivalence : $b \in X$ ssi $\mathbb{S} \models \varphi(b, \mathbf{a})$.

— $X \subseteq \mathbb{S}$ est *définissable* à paramètres dans $\mathbf{a}$ si elle est de cette forme.

— Définition analogue pour $X \subseteq \mathbb{S}^n$.

$P_{\text{déf}}$ On note $P_{\text{déf}}(\mathbb{S}^n)$ l'ensemble des parties définissables de $\mathbb{S}^n$. On peut indiquer la présence de paramètres par $P_{\text{déf}}(\mathbb{S}^n/\mathbf{a})$, ou leur absence par $P_{\text{déf}}(\mathbb{S}^n/\varnothing)$.

Définition (algèbre définissable)**.** On note $\text{Déf}\,\mathbb{S} = \bigsqcup_n P_{\text{déf}}(\mathbb{S}^n)$ la collection des parties définissables de $\mathbb{S}$, appelée *algèbre* (parfois : *univers*) *définissable de* $\mathbb{S}$. Elle consiste en les anneaux de Boole $P_{\text{déf}}(\mathbb{S}^n)$, les produits cartésiens $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+m}$, et les projections $\mathbb{S}^{n+1} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}^n$.

Définition (structure trace, structure quotient)**.**

— Si $E \in \text{Déf}\,\mathbb{A}$, alors $\mathbb{A}$ induit une structure définissable sur E, en posant $\text{Déf}\,E = \bigsqcup_n \{E^n \cap X : X \subseteq \mathbb{A}^n \text{ définissable}\}$.

— Si $R \in \text{Déf}\,\mathbb{A}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{A}$, alors $\mathbb{A}$ induit une structure définissable sur $\mathbb{A}/R$, en posant $\text{Déf}(\mathbb{A}/R) = \{Y \subseteq (\mathbb{A}/R)^n : \pi^{-1}(Y) \in \text{Déf}\,\mathbb{A}\}$.

§ 13.2. Structures interprétables

L'interprétabilité d'une structure $\mathbb{B}$ dans une structure $\mathbb{A}$ signifie que $\mathbb{B}$, avec toute sa structure, vit comme « sous-quotient définissable » de $\mathbb{A}$. L'exemple inspirateur est $(\mathbb{Q}\,;+,\cdot)$ obtenu à partir de $(\mathbb{Z}\,;+,\cdot)$.

Définition (structure interprétable)**.** Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux structures relationnelles, éventuellement en langage distinct. On dit que $\mathbb{B}$ est *interprétable* dans $\mathbb{A}$, noté $\mathbb{A} \Vdash \mathbb{B}$, s'il existe :

— une partie définissable $E \in \text{Déf}(\mathbb{A})$; bien noter qu'on peut avoir $E \subseteq \mathbb{A}^n$ pour $n > 1$;

— une surjection abstraite $f\colon E \twoheadrightarrow \mathbb{B}$ telle que pour chaque $Y \in \text{Déf}\,\mathbb{B}$, on ait $f^{-1}(Y) \in \text{Déf}\,E$.

Noter qu'alors la relation d'équivalence R_f donnée par $f(e_1) = f(e_2)$ est définissable, en tant qu'image réciproque de la diagonale de $\mathbb{B}$. En outre $\mathbb{B} \simeq E/R_f$ [**Ens**]. La clause sur $\text{Déf}\,\mathbb{B}$ signifie que dans cette bijection, on a $\text{Déf}\,\mathbb{B} \subseteq \text{Déf}(E/R_f)$.

Remarques

— L'interprétabilité n'est pas une propriété d'une réalisation donnée de $\mathbb{B}$, mais de sa classe d'isomorphisme.

— Il suffit de vérifier que les $f^{-1}(Y)$ sont E-définissables pour Y les graphes des relations du langage de $\mathbb{B}$.

Remarque. Soient $(\mathbb{A}_2\,;\mathcal{L}) \equiv (\mathbb{A}_1\,;\mathcal{L})$ deux $\mathcal{L}$-structures logiquement équivalentes. Supposons qu'une structure $(\mathbb{B}_1\,;\mathcal{M})$ soit interprétable *sans paramètres* dans $(\mathbb{A}_1\,;\mathcal{L})$, disons via $E_1/R_1 \simeq \mathbb{B}$.

Notons φ une définition sans paramètres de $E_1 \in \text{Déf}\,\mathbb{A}_1$; on écrira $E_1 = \varphi[\mathbb{A}_1]$. Alors $E_2 = \varphi[\mathbb{A}_2]$ est dans $\text{Déf}\,\mathbb{A}_2$; de même, si $\chi[\mathbb{A}_1] = E_1$, alors $\chi[\mathbb{A}_2] = R_2$ est une relation d'équivalence sur E_2. Enfin $\mathbb{B}_2 = E_2/R_2$ porte naturellement une $\mathcal{M}$-structure pour laquelle $(\mathbb{B}_2\,;\mathcal{M}) \equiv (\mathbb{B}_1\,;\mathcal{M})$.

Notamment $(\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}})\,;\cdot) \equiv (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\,;\cdot)$.

Une structure est la donnée d'une algèbre définissable, ou de la collection des structures interprétables ; tout le reste est lié à son étude, soit comme moyen, soit comme artéfact. Ni les axiomatisations ni les « autres modèles » du type $\mathbb{A}_2$ n'ont d'intérêt algébrique a priori. Mais on peut en faire des outils.

Choisir des relations « de base », puis présenter les définissables grâce aux formules élémentaires dans ce langage, importe seulement si l'on vise une description effective des définissables, comme pour l'élimination des quantificateurs (§ 17.2). Nommer un *langage* pour décrire une *structure* est analogue à travailler en coordonnées : utile en pratique, importun en théorie. Car seul est intrinsèque l'univers définissable.

§ 13.3. Bi-interprétabilité

Ou du même genre, ex. « la catégorie des interprétations ». Hodges ; Ahlbrandt-Ziegler ; le papier Khelif-Scanlon.

Note. Une interprétation entre théories, c'est un morphisme de Lindenbaum entre leurs Lin. L'équivalence définitionnelle entre théories, c'est l'isomorphisme ; je l'appellerai *interprétabilité mutuelle*. Mais ça reste plus faible que la bi-interprétabilité. (Et l'égalité d'anneaux de Lindenbaum ? Il faut pour cela que ce soit le même langage. Ça correspond exactement à l'élémentaire équivalence, qui elle aussi demande le même langage.)

Nb. Deux $\mathcal{L}$-structure de même domaine ayant exactement les mêmes définissables ne sont pas nécessairement $\equiv$. Considérer $(\mathbb{N}; >)$ et $(\mathbb{N}; >)$ — la définissabilité ne change pas puisqu'à chaque formule atomique $x < y$ correspond la co-formule $y > x$.

Exercices

13.1 (invariance et définissabilité).

a. Soient $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\sigma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un $\mathcal{L}$-automorphisme, au sens intuitif suivant : – $\sigma(c[\mathbb{A}]) = c[\mathbb{A}]$; – $\sigma(R(\mathbb{A})) = R[\mathbb{A}]$; – $\sigma \circ f[\mathbb{A}] = f[\mathbb{A}] \circ \sigma$ (quitte à penser en uplets). Par ailleurs $\sigma(\mathbf{a})$ désigne le uplet des $\sigma(a_i)$.
Montrer que si $\varphi(\mathbf{a})$ est à paramètres, alors $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\sigma(\mathbf{a}))$.

b. Soient $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure, et X une partie définissable à paramètres $\mathbf{a}$. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ *qui fixe* $\mathbf{a}$ *point-par-point.* Montrer que σ stabilise X dans son ensemble. Si réciproquement X est invariante sous $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}/\mathbf{a})$, est-elle définissable à paramètres dans $\mathbf{a}$?

c. Application. Soit A un groupe abélien d'exposant p premier. Déterminer les sous-ensembles définissables à paramètres de A^1. Indication : on connaît le groupe d'automorphismes des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels.

Suite à l'exercice 17.4.

13.2 (définissabilité). Les ensembles suivants sont-ils définissables dans les structures proposées ? (Une relation ou fonction est vue comme son graphe.) a. $+$ dans $(\mathbb{Z}; <)$; b. $<$ dans $(\mathbb{Z} ; +)$; c. $\mathbb{N}$ dans $(\mathbb{Z} ; +, \cdot)$; d. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ dans $(\mathbb{H} ; +, \cdot)$ (quaternions) ; e. $2\mathbb{N}$ dans $(\mathbb{N};)$ (langage vide) ; f. $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{C} ; +, \cdot)$; g. pour une matrice A, l'ensemble $\mathbb{K}A$ dans $(M_n(\mathbb{K}) ; +, \cdot)$. Dans l'affirmative, on pourra se demander si les paramètres sont nécessaires.

13.3 (interprétabilité). Les classes d'isomorphisme de structures suivantes sont-elles interprétables ? a. $(\mathbb{Z} ; +, \cdot)$, $(\mathbb{Q} ; +, \cdot)$ et $(\mathbb{R} ; +, \cdot)$ dans $(\mathbb{N} ; +, \cdot)$; b. $(\mathbb{C} ; +, \cdot)$ dans $(\mathbb{R} ; +, \cdot)$; c. pour $\mathbb{K}$ un corps, $(\mathbb{K} ; +, \cdot)$ dans $(M_n(\mathbb{K}) ; +, \cdot)$; d. (difficile) $(\mathbb{R} ; +, \cdot)$ dans $(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) ; \cdot)$.

13.4. Soit $\mathbb{A} = (\mathbb{N} \sqcup_< \mathbb{Z}; <)$, muni de sa structure définissable. On admet que toute partie définissable de $\mathbb{A}^1$ est réunion finie d'intervalles (évident avec les bons outils ; v. ex. 19.3). Montrer que la structure définissable sur $\mathbb{A}$ ne forme pas une structure de Henkin (§ 12.2).

13.5. Il faut connaître la sémantique de Henkin (§ 12.2). Soit $(\mathbb{A} ; \mathcal{H})$ une structure points-parties. Soit $\mathcal{G}_n = P(\mathbb{A}^n) \cap \text{Déf}(\mathbb{A};\mathcal{H}, \varepsilon)$ l'ensemble des parties de $\mathbb{A}^n$ qui sont *élémentairement* définissables à paramètres dans la structure points-parties avec l'incidence ε. Montrer que $(\mathbb{A} ; \mathcal{H})$ est de Henkin ssi pour chaque n, on a $\mathcal{H}_n = \mathcal{G}_n$.

13.6. Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure. Montrer que la collection des ensembles $\varnothing$-définissables (dans $\mathbb{S}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) est la plus petite collection $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathcal{D}_n \subseteq P(\mathbb{S}^n)$ telle que :

- pour tout symbole de relation c de $\mathcal{L}$, $c[\mathbb{S}]$ est dans $\mathcal{D}_1$;
- pour tout symbole de relation R de $\mathcal{L}$, $R[\mathbb{S}]$ est dans $\mathcal{D}$;
- pour tout symbole de fonction f de $\mathcal{L}$, le graphe de $f[\mathbb{S}]$ est dans $\mathcal{D}$;
- si X et Y sont dans $\mathcal{D}$ et de même arité, alors $X \cap Y$ est dans $\mathcal{D}$;
- si X est dans $\mathcal{D}$ d'arité n, alors $\mathbb{S}^n \setminus X$ est dans $\mathcal{D}$;
- si X est dans $\mathcal{D}$ d'arité $n+1$, alors la projection $\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n : (\exists x_{n+1})[(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in X]\}$ est dans $\mathcal{D}$;
- si X est dans $\mathcal{D}$ d'arité n, et si σ est une permutation, alors $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n : (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in X\}$ est dans $\mathcal{D}$;
- si X et Y sont dans $\mathcal{D}$, alors $X \times Y$ sont dans $\mathcal{D}$.

Vérifier en particulier que la structure induite sur une partie définissable, sur un quotient définissable, vérifient bien les propriétés de clôture requises.

13.7. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux structures relationnelles (pas forcément dans le même langage) et $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ une fonction abstraite. Sa *relation fibre* est $a_1 R_f a_2$:si $f(a_1) = f(a_2)$. Noter que f s'étend aux uplets ; on peut donc prendre images directes et réciproques pour des parties de $\mathbb{A}^n$, resp. $\mathbb{B}^n$.

On pose :

- $f(\text{Déf}\,\mathbb{A}) = \{f(X) : X \in \text{Déf}\,\mathbb{A}\}$ (retenir qu'en général, ce n'est pas la bonne notion) ;
- $f_\#(\text{Déf}\,\mathbb{A}) = \{Y \subseteq \mathbb{B}^n : f^{-1}(Y) \in \text{Déf}\,\mathbb{A}\}$;
- $f^\#(\text{Déf}\,\mathbb{B}) = \{X \subseteq \mathbb{A}^n : f(X) \in \text{Déf}\,\mathbb{B}\}$.

a. On suppose f surjective. Montrer que $f^\#(\text{Déf}\,\mathbb{A}) \subseteq f(\text{Déf}\,\mathbb{A})$, et que l'égalité équivaut à : $R_f \in \text{Déf}\,\mathbb{A}$.

b. On suppose encore f surjective. Montrer que $f^\#(\text{Déf}\,\mathbb{B}) \subseteq \text{Déf}\,\mathbb{A}$ ssi $\text{Déf}\,\mathbb{B} \subseteq f_\#(\text{Déf}\,\mathbb{A})$.

Notes conclusives

[Poizat] (traduit en russe et en anglais) a marqué ses lecteurs par la profondeur et l'originalité de sa vision. En anglais, [Chang-Keisler] s'imposait autrefois ; on peut déplorer sa notation et son soin de l'arithmétique transfinie. L'érudit [Hodges] est exhaustif ; l'appareil historique en fait référence. Les récents [Marker], [Tent-Ziegler] invitent à la théorie des modèles contemporaine.

- **Repères historiques**

> *Les mathématiciens, en général, n'aiment pas opérer avec la notion de définissabilité, leur attitude envers cette notion étant méfiante et réservée.*
>
> ...
>
> *Je tacherai de convaincre dans cet article le lecteur que l'opinion qui vient d'être citée n'est pas tout à fait juste. Sans doute la conception habituelle de la notion de définissabilité est de nature métamathématique. Je crois cependant d'avoir trouvé une méthode générale qui permet — avec une réstriction dont il sera question plus loin à la fin du § 1 — de réconstruire cette notion dans le domaine des mathématiques ; cette méthode est également appliquable à certaines autres notions qui présentent le caractère métamathématique.* [Tar31a, premiers paragraphes]

Histoire générale. • Le nom d'Alfred Tarski étant indissociable du présent chapitre, on consultera le résumé de son œuvre modèle-théorique esquissé dans [Vau86]. De manière générale on peut aimer l'écriture de Vaught et son attention historique. Pour un contrepoint critique sur la personnalité de Tarski, [Fef03]. • Sur l'histoire de la théorie des modèles, lire Hodges, par exemple [Button-Walsh, Appendix], ou les notes de [Hodges].

La querelle du « definit ». • L'essai d'axiomatisation ensembliste de Zermelo (§ 21, notes conclusives) reposait sur un concept mal clarifié : « *definit* ». Le mot fit couler de l'encre ; Weyl puis Skolem le critiquèrent. • Dès 1910 Weyl [**Wey10**] voulait préciser le sens de « definit », arrivant à la première tentative d'axiomatiser l'algèbre définissable. V. § F,

[Poizat] : Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985, p. vi+584

[Chang-Keisler] : Chen-Chung Chang et Jerome Keisler. *Model theory.* Third. T. 73. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, p. xvi+650

[Hodges] : Wilfrid Hodges. *A shorter model theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997, p. x+310

[Marker] : David Marker. *Model theory : An Introduction.* T. 217. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 2002. viii+342

[Tent-Ziegler] : Katrin Tent et Martin Ziegler. *A course in model theory.* T. 40. Lecture Notes in Logic. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; Cambridge University Press, Cambridge, 2012, p. x+248

[Tar31a] : Alfred Tarski. « Sur les ensembles définissables de nombres réels I ». In : *Fundam. Math.* 17 (1931), p. 210-239

[Vau86] : Robert Vaught. « Alfred Tarski's work in model theory ». In : *J. Symbolic Logic* 51.4 (1986), p. 869-882

[Fef03] : Solomon Feferman. « Alfred Tarski and a Watershed Meeting in Logic : Cornell, 1957 ». In : *Philosophy and Logic in Search of the Polish Tradition.* Sous la dir. de J Hintikka et al. T. 323. Synthese Library (Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science). Dordrecht : Springer, 2003

[Button-Walsh] : Tim Button et Sean Walsh. *Philosophy and model theory.* With a historical appendix by Wilfrid Hodges. Oxford University Press, Oxford, 2018, p. xvi+517

[**Wey10**] : Hermann Weyl. « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ». In : *Math. naturw. Bl.* 7 (1910), p. 93-95, 109-113

notes conclusives. (Contrairement à ce qu'on lit parfois [Boo95c, pp. 284–285], la recension de ce texte signée Sk dans le *Jahrbuch* n'est pas de Skolem, mais d'un Salkowski. Il est vrai que Boos remplace aussi *Mengenlehre* par *Menschen.*) • Incontestablement Skolem avait cerné et saisi la pertinence de la logique élémentaire en 1922, mais sans parler de définissabilité.

Définissabilité. • Dans [Tar31a], Tarski donne la notion de partie définissable de $\mathbb{R}$ (en ordre supérieur) ; son § 2 est voué au cas de la logique élémentaire ; la notion n'était pas entièrement au point, si bien que [Tar31a, Théorème 2] peut surprendre. • La définissabilité fut effectivement introduite avec fortune par Tarski, mais ce serait faire bon marché des préoccupations de Zermelo, de Weyl, et surtout de Skolem que de ne pas lui trouver de précurseur. [Tar31a] mentionne Schröder, Russell, Hilbert, Fraenkel ; mais ni Weyl ni Skolem. Plus sur les travaux de Tarski dans [Hod08].

• **Terminologie.** Le nom même du domaine, « théorie des modèles », a été trouvé faute de mieux. V. point suivant et § 14, notes conclusives.

• **Qu'est-ce que la théorie des modèles ?** • Elle est issue d'une branche de la logique mathématique, celle qui s'intéresse à la notion d'interprétation. • On a pu dans les années 1950 y voir une forme d'algèbre universelle ; ce point de vue a vécu. • Les liens avec la théorie descriptive des ensembles furent affirmés dans les décennies qui suivirent, notamment par les travaux de Morley (§ 17, notes conclusives). • Elle hésite à présent entre géométrie des structures « de complexité modérée » et combinatoire infinie. • Pour nous, elle est l'art d'employer en mathématiques les techniques liées à la logique élémentaire et à la définissabilité ; Angus Macintyre a même pu suggérer comme nom « théorie de la définissabilité ». • Il faut aller plus loin et parler de *géométrie de la définissabilité.* Cela recouvre en effet la double étude : à structure fixée, de sa combinatoire définissable vue depuis l'algèbre géométrique ; et en variant la structure, de l'information fonctorielle.

• **Définissabilité ou interprétabilité des entiers.** Contenir une copie de l'anneau $\mathbb{Z}$ provoque une explosion de la combinatoire définissable (v. § 19) car $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ est la théorie des ensembles finis. L'interprétabilité de l'anneau des entiers est donc une ligne de division marquée.

Définissabilité dans les rationnels. Cet aspect est intimement lié au dixième problème de Hilbert.

Théorème ([Rob49])**.** $\mathbb{Z}$ est définissable dans $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

Il suit que $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ y est interprétable. Pour une introduction, [FW91]. Julia Robinson est revenue au problème sur d'autres corps dans [Rob59]. $\mathbb{Z}$ est même définissable dans $(\mathbb{Q};+,\cdot)$ *par une formule universelle* [Koe16].

Interprétabilité dans $\mathbb{K}[X]$. Ne pas confondre avec un théorème de Raphael Robinson.

[Boo95c] : William Boos. « Thoralf Skolem, Hermann Weyl and "Das Gefühl der Welt als begrenztes Ganzes" ». In : *From Dedekind to Gödel (Boston, MA, 1992).* T. 251. Synthese Lib. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, p. 283-329
[Hod08] : Wilfrid Hodges. « Tarski's theory of definition ». In : *New essays on Tarski and philosophy.* Oxford Univ. Press, Oxford, 2008, p. 94-132
[Rob49] : Julia Robinson. « Definability and decision problems in arithmetic ». In : *J. Symbolic Logic* 14 (1949), p. 98-114
[FW91] : Daniel Flath et Stanley Wagon. « How to pick out the integers in the rationals : an application of number theory to logic ». In : *Amer. Math. Monthly* 98.9 (1991), p. 812-823
[Rob59] : Julia Robinson. « The undecidability of algebraic rings and fields ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 10 (1959), p. 950-957
[Koe16] : Jochen Koenigsmann. « Defining $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ». In : *Ann. of Math. (2)* 183.1 (2016), p. 73-93

Théorème ([Rob51])**.** $(\mathbb{Z};+,\cdot)$ est interprétable dans $(\mathbb{K}[X]\,;+,\cdot)$.

Plus généralement l'anneau $\mathbb{Z}$ est interprétable dans tout anneau commutatif unitaire infini de type fini [Nos83], la réciproque étant par définition de « de type fini ». (Pour la question plus fine de la « bi-interprétabilité », [Asc+20].) Il reste des questions ouvertes sur $\mathbb{K}(X)$.

Non-définissabilité dans les réels. Le résultat suivant mène à l'*o*-minimalité, abstraction modèle-théorique de la géométrie réelle ; v. § K, notes conclusives.

Théorème (conséquence de [**Tarski2**, Theorem 31 et Note 13])**.** $\mathbb{Z}$ n'est pas définissable dans $(\mathbb{R}\,;+,\cdot)$.

• **Structures définissables.** On rappelle la différence entre une *expression*, par exemple $2x+3$, et une *fonction*, par exemple $x \mapsto 2x+3$. La distinction est particulièrement nécessaire pour noter proprement les dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables. Cette différence expression/fonction se retrouve en l'opposition formule logique/forme logique : la forme logique est la fonction qui à des paramètres associe la valeur de vérité pertinente. • L'anneau de Lindenbaum d'une structure tient compte des variables ; il est moins intrinsèque que la structure définissable.

Définition. Une *structure définissable* abstraite $\mathbb{D}$ est la donnée :

- d'une famille $(\mathbb{D}_n : n \in \omega)$ d'anneaux de Boole disjoints ;
- pour chaque n, d'une fonction croissante (non supposé morphique) $\pi_n\colon \mathbb{D}_{n+1} \to \mathbb{D}_n$;
- pour m, n, d'une fonction bi-additive, bi-multiplicative, et intègre $\mu_{m,n}\colon \mathbb{D}_m \times \mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_{m+n}$,

vérifiant :

- les associativités $\mu_{m+n,p}(\mu_{m,n}(a,b),c)) = \mu_{m,n+p}(a,\mu_{n,p}(b,c))$;
- les relations $\pi_n(\mu_{n,1}(a,1)) = a$ et $[\mu_{n,1}(a,1)\cdot b = 0] \to [a\cdot\pi_n(b) = 0]$.

Grâce à l'associativité, on note simplement $a \times b$, et l'on itère les produits en μ librement.

Exemple. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Alors $\text{Déf}\,\mathbb{A} = \coprod_n P_{\text{déf}}(\mathbb{A}^n)$ est bien une structure définissable, avec les projections cartésiennes $\mathbb{A}^{n+1} \simeq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n$ et les produits cartésiens.

Définition. Une structure définissable $\mathbb{D}$ est concrète si :

- chaque $\mathbb{D}_n$ est atomique et $\text{At}(\mathbb{D}_n) = \{\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n : \boldsymbol{\alpha} \in \text{At}(\mathbb{A})^n\}$;
- dans chaque $\mathbb{D}_n$ existent des éléments $\Delta_{n,i,j}$ tels que pour $\alpha,\beta \in \text{At}\,\mathbb{D}_1$ on ait $1\times\alpha\times 1\times\beta\times 1 \in \Delta_{n,i,j}$ ssi $\alpha = \beta$.

Lemme. Soit $\mathbb{D}$ une structure définissable. Alors $\mathbb{D}$ est concrète ss'il existe une structure relationnelle $\mathbb{A}$ telle que $\mathbb{D} \simeq \text{Déf}\,\mathbb{A}$.

Démonstration. Un sens est clair. Soit réciproquement $\mathbb{D}$ concrète ; noter que l'hypothèse sur la structure des atomes de $\mathbb{D}_0$ montre $\mathbb{D}_0 = \{0,1\}$. Voir aussi que $a \leqslant a'$ implique $a \times b \leqslant a' \times b$, avec réciproque sitôt que $b \neq 0$. C'est utilisé quelques lignes plus bas.

Soit $A = \text{At}(\mathbb{D}_1)$. Pour $X \in \mathbb{D}_n$ soit R_X une relation n-aire ; soit $\mathcal{L}$ le langage résultant. On fait de A une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}$ en posant : $R_X[\mathbb{A}] = \{\boldsymbol{\alpha} \in A^n : \alpha_1 \times \cdots \times$

[Rob51] : Raphael Robinson. « Undecidable rings ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 70 (1951), p. 137-159
[Nos83] : Gennadi Noskov. « The elementary theory of a finitely generated commutative ring ». In : *Mat. Zametki* 33.1 (1983), p. 23-29, 157
[Asc+20] : Matthias Aschenbrenner et al. « The logical complexity of finitely generated commutative rings ». In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 1 (2020), p. 112-166
[**Tarski2**] : Alfred Tarski. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry.* Santa Monica, California : RAND Corporation, 1948, p. iii+60

$\alpha_n \leqslant X\}$. On affirme alors que :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon\colon & \mathbb{D} & \to & \text{Déf}\,\mathbb{A} \\ & X & \mapsto & R_X[\mathbb{A}] \end{array}$$

est un isomorphisme de structures définissables. En effet $\varepsilon(0) = \varnothing$ et $\varepsilon(1_n) = \mathbb{A}^n$. L'additivité et la multiplicativité sont évidentes, ainsi que la compabilité aux produits en μ (se rappeler que pour deux atomes, $\alpha\times\beta \leqslant X\times Y$ ssi $\alpha \leqslant X$ et $\beta \leqslant Y$). Reste la compatibilité des projections. Or supposons $\boldsymbol{\alpha} \in \varepsilon(\pi_n X)$, i.e. $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \pi_n(X)$; soit $X' = (\boldsymbol{\alpha} \times 1) \cdot X$, par hypothèse non nul. Par atomicité, il majore donc un atome $(\boldsymbol{\gamma}, \beta)$, et nécessairement $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}$. Donc $(\boldsymbol{\alpha}, \beta) \in R_X[\mathbb{A}]$ et $\boldsymbol{\alpha} \in \pi_n(\varepsilon X)$, où cette fois π_n est la projection ensembliste usuelle. La réciproque est claire. L'injectivité de ε vient de l'atomicité, et sa surjectivité est par construction. $\square$

• **Qu'est-ce qu'une constante logique ? (4) : définissabilité infinie** Suite et fin de la discussion de § 7, notes conclusives. • Soit $\mathbb{U}$ un domaine à une seule sorte. Un quantificateur élémentaire unaire s'abstrait comme une fonction $P(\mathbb{U}) \to 2$: car à chaque partie il associe une valeur de vérité. Par exemple $\exists$ est la fonction $P(\mathbb{U}) \to 2$ qui envoie $\varnothing$ sur 0 et chaque partie non vide sur 1, et $\exists_{\geqslant\aleph_0}$ la fonction validant les seules parties infinies. De même un quantificateur élémentaire binaire (quantifiant sur les paires) est une fonction $P(\mathbb{U}^2) \to 2$; un quantificateur du deuxième ordre monadique (sur les parties), une fonction $P(P(\mathbb{U})) \to 2$; etc. Toutes ces notions sont invariantes sous l'action de $\mathrm{Sym}(\mathbb{U})$. • La *thèse de Tarski-Sher* (TS) est le postulat « logique = invariant ». Indépendamment du contenu épistémologique de (TS), l'énoncé suivant caractérise l'invariance sous le groupe symétrique du domaine.

Théorème ([McG96]). Soit $\mathbb{U}$ un domaine à une seule sorte. Les opérateurs invariants sous l'action de $\mathrm{Sym}(\mathbb{U})$ sont exactement ceux définissables dans $\Lambda_{\infty,\infty}(=)$.

• On indique ici que $=$ fait partie du langage, car le statut logique de l'égalité dépend précisément de (TS). • Cet énoncé décrit un phénomène mais ne donne pas de certitude quant à (TS), notamment car $\Lambda_{\infty,\infty}$ dépend du cadre ensembliste sous-jacent. (Cette dépendance est rassurante, car la quantification d'ordre supérieur est logique selon (TS).) Par exemple $\exists_{\geqslant\aleph_1}$ est invariant, mais est-il logique alors que $\aleph_1$ est une notion ensembliste, que les spécialistes savent modifier par forcing ? • En outre l'énoncé caractérise la seule invariance *au sein d'un domaine donné*. Le relativisme skolémiste étant inévitable, n'est-ce pas se tromper de question d'emblée ? « La » logique $\Lambda_{\infty,\infty}$ procède univers par univers ; c'est insuffisamment fonctoriel. • Une réponse peut être d'affirmer que toute logique est relative et intrinsèque à un univers. • L'approche Mautner-Tarski, le résultat de McGee, et les travaux plus récents sont exposés dans [Fef10]. Mais Feferman oublie de mentionner Marc Krasner, premier logicien à avoir envisagé la théorie de Galois comme une idée logique et non comme sa seule application aux extensions de corps. V. compléments § F.

• **Bi-interprétabilité** Ahlbrandt-Ziegler : Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux structures dénombrables $\aleph_0$-catégoriques. alors sont équivalents :

– $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ **[GrpTop]** ;
– $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont bi-interprétables.

[McG96] : Vann McGee. « Logical operations ». In : *J. Philos. Logic* 25.6 (1996), p. 567-580
[Fef10] : Solomon Feferman. « Set-theoretical invariance criteria for logicality ». In : *Notre Dame J. Form. Log.* 51.1 (2010), p. 3-20

§ 14. Catégories de modèles

Cette section met une structure de catégorie sur les modèles d'une théorie. Les *morphismes* (§ 14.1) seront sans grande utilité. Les *plongements* (§ 14.2) n'ont pas non plus les bonnes propriétés. Nous prendrons pour flèches les plongements *logiques* ou *élémentaires* (§ 14.3). Les parties définissables deviennent alors des foncteurs ensemblistes.

La contrepartie syntaxique de cette étude délayée est la méthode dite « des diagrammes » pour construire des extensions de modèles.

Prérequis : définition d'une catégorie ; §§ 6, 8, 13.

On veut faire de la classe des $\mathcal{L}$-structures une catégorie ; le problème est en fait plus général. Une $\mathcal{L}$-structure étant un modèle de la $\mathcal{L}$-théorie sans axiomes, on part d'une $\mathcal{L}$-théorie T quelconque (non nécessairement complète), et l'on cherche à munir la classe de ses modèles $\mathbf{Mod}(T)$ d'une structure de catégorie. Nous donnerons trois notions de flèche s'affinant progressivement. Elles définissent trois catégories ; *la bonne est la troisième.*

Ici encore il y a un parallélisme entre sémantique (l'information catégorique, i.e. la notion de flèche) et syntaxe (la complexité logique, i.e. la classe de formules considérée).

$f(\mathbf{a})$ **Notation.** Soient A et B deux collections et $\sigma\colon A \to B$ une fonction. Pour $\mathbf{a} = (a_1, \dots,)$ un uplet de A éventuellement infini, on note $\sigma(\mathbf{a}) = (\sigma(a_1), \dots,)$.

$\mathcal{L}_A$, $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/A)$ **Définition** (langage augmenté ; formule à paramètres)**.**

- Soient $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq \mathbb{S}$ un sous-ensemble. On note $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$, où les c_a sont de nouvelles constantes.
- $\mathbb{S}$ porte une $\mathcal{L}_A$-structure naturelle en posant $c_a[\mathbb{A}] = a$; cela permet de faire rentrer A dans le langage et de décrire « la configuration de A dans $\mathbb{S}$ » grâce aux *formules à paramètres.*
- Soit φ une formule à variables libres $\mathrm{VarLib}(\varphi) \subseteq \mathbf{x}$; soient $\mathbf{a}\colon \mathcal{V} \to \mathbb{S}$ des paramètres définis en $\mathbf{x}$, d'image encore notée $\mathbf{a} \in \mathbb{S}$. On a bien $\mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{S} \models \varphi[\mathbf{x} := c_{\mathbf{a}}]$.
- Enfin on note $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/A) = \{\varphi(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}_A\text{-Form} : \mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{a})\}$.

Ceci légitime une fois de plus les notations usuelles.

§ 14.1. Morphismes (positifs)

On rappelle que les relations 0-aire $\perp$ et binaire $=$ sont présentes dans la logique ambiante.

→ **Définition** (morphisme)**.** Un $\mathcal{L}$-*morphisme* (positif) est une fonction $\sigma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ qui transporte l'interprétation, i.e. :

— pour c une constante, $\sigma(c[\mathbb{A}]) = c[\mathbb{B}]$;

— pour R une relation n-aire et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, si $\mathbf{a} \in R[\mathbb{A}]$ alors $\sigma(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{B}]$;

— pour f une fonction n-aire et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, on a $\sigma(f[\mathbb{A}](\mathbf{a})) = f[\mathbb{B}](\sigma(\mathbf{a}))$.

On note alors $\sigma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ (non conventionnel).

Cette condition exprime la compatibilité de structure entre $\sigma(\mathbb{A})$ et $\mathbb{B}$. Ces morphismes sont parfois appelés « positifs » pour leurs liens avec la logique positive (sans négation). Bien noter que $\mathbf{a} \notin R[\mathbb{A}]$ n'entraîne pas nécessairement $\mathbf{b} \notin R[\mathbb{B}]$.

Exemple. Un morphisme (algébrique) de groupes est un $\mathcal{L}_{\mathrm{grp}}$-morphisme entre groupes, etc. Mais il faut faire attention aux autres relations : un morphisme d'ordres larges est une fonction croissante ; un morphisme d'ordres stricts est une fonction strictement croissante.

• **La catégorie des morphismes**

L'opération de *colimite filtrante* (« limite inductive ») généralise la réunion croissante. Pour simplifier les choses, on peut dans la suite ne considérer que ce cas.

$\mathbf{Mod}_{0^+}(T)$ **Proposition** (et notation)**.** La classe $\mathbf{Mod}_{0^+}(\varnothing)$ des $\mathcal{L}$-structures, munie des morphismes, forme une catégorie ayant les colimites filtrantes.

Remarque. La notation 0 indique l'indifférence aux quantificateurs, et + l'indifférence aux négations (logique « positive ») ; $\varnothing$ signale l'absence de théorie. La suite affinera les notations.

Démonstration. L'identité est un morphisme ; la composée de deux morphismes est un morphisme ; on a bien une catégorie.

Montrons que tout diagramme compatible et dirigé dans $\mathbf{Mod}_{0^+}(\varnothing)$ possède une colimite. Soit $(I, \leqslant)$ un ordre partiel *dirigé/filtrant*, i.e. vérifiant $(\forall i)(\forall j)(\exists \ell)(i \leqslant \ell \wedge j \leqslant \ell)$. Soient $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures, et pour $i \leqslant j$ des morphismes $f_{i,j}\colon \mathbb{A}_i \to \mathbb{A}_j$, de sorte que chaque fois que cela possède un sens on ait $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$. (On s'est juste donné un morphisme de catégories, i.e. un foncteur, de $(I, \leqslant)$ vers $\mathbf{Mod}_{0^+}(\varnothing)$.)

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{A}_k \\ \mathbb{A}_i \arrow[urr, "f_{i,k}"] \arrow[r, "f_{i,j}"'] & \mathbb{A}_j \arrow[ur, "f_{j,k}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & \mathbb{A}_\ell \\ \mathbb{A}_i \arrow[urr, dashed, "f_{i,\ell}"] & \mathbb{A}_j \arrow[ur, dashed, "f_{j,\ell}"'] & \end{tikzcd}$$

(compatible) (dirigé)

On cherche à compléter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_i \arrow[rr, "f_{i,j}"'] \arrow[dr, "g_i"] \arrow[ddr, dashed] & & \mathbb{A}_j \arrow[dl, "g_j"'] \arrow[ddl, dashed] \\ & \mathbb{A}^* \arrow[d, dotted] & \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

On construit une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}^*$ comme suit. Soit $X = \bigsqcup_I \mathbb{A}_i = \bigcup_I \mathbb{A}_i \times \{i\}$ la réunion disjointe des domaines. Sur X mettons la relation d'équivalence $(x,i) \sim (y,j)$:si $(\exists k)(k \in I \wedge i \leqslant k \wedge j \leqslant k \wedge f_{i,k}(x) = f_{j,k}(y))$. Soit $\mathbb{A}^*$ l'ensemble quotient, muni de l'interprétation suivante :

— pour une constante c, $c[\mathbb{A}^*] = [(c[\mathbb{A}_i], i)]$ (pour n'importe quel i) ;

— si $\mathbf{a}^* \in \mathbb{A}^*$, disons $\mathbf{a}^* = [(\mathbf{a}, i)]$ pour un i assez grand (I étant dirigé cela existe), alors $\mathbf{a}^* \in R[\mathbb{A}^*]$ ss'il existe $j \geqslant i$ tel que $f_{i,j}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_j]$;

— si $\mathbf{a}^* \in \mathbb{A}^*$, disons $\mathbf{a}^* = [(\mathbf{a}, i)]$, alors $f[\mathbb{A}^*](\mathbf{a}^*) = [(f[\mathbb{A}_i](\mathbf{a}), i)]$.

C'est clairement bien défini. On forme enfin $g_i \colon \mathbb{A}_i \to \mathbb{A}^*$ qui envoie a sur $[(a, i)]$. C'est bien un morphisme, et $\mathbb{A}^*$ est bien la colimite du système. □

Remarques

— En revanche $\mathbf{Mod}_{0^+}(T)$ n'est pas close sous colimites filtrantes. On prendra $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{A}_i = (\{0, \ldots, i\}; \leqslant)$ pour les plongements naturels, et T l'axiome : « avoir un plus grand élément ».

— En général $\mathbf{Mod}_{0^+}(\varnothing)$ n'a pas de limites filtrantes ; elle a des produits (évidents), mais pas de coproduits. Les produits ont été étudiés à l'exercice 6.10.

— Un morphisme bijectif n'est pas nécessairement un isomorphisme, à cause des autres relations. On prendra $\mathbb{A} = \{a_1, a_2\}$ avec $\mathbb{A} \not\models R(a_1, a_2)$ et $\mathbb{B} = \{a_1, a_2\}$ avec $\mathbb{B} \models R(a_1, a_2)$, puis l'identité ensembliste $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$.

• **Pendant syntaxique : méthode des diagrammes**

Th_{0^+} **Lemme** (et notation). Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Alors sont équivalents :

(i) il existe un morphisme $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$;

(ii) $\mathbb{B}$ est (munissable d'une structure de) modèle de la *théorie positive sans quantificateurs* à paramètres de $\mathbb{A}$, $\mathrm{Th}_{0^+}(\mathbb{A}/\mathbb{A}) = \{\varphi(\mathbf{a}) \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}/\mathbb{A})$ sans $\neg$ ni $\to$ ni quantificateurs$\}$.

Démonstration. Supposons que $\sigma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ soit un morphisme. On interprète c_a en posant $c_a[\mathbb{B}] = \sigma(a)$. Cette interprétation fait de $\mathbb{B}$ une $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$-structure, qui est modèle de $\mathrm{Th}_{0^+}(\mathbb{A}/\mathbb{A})$: récurrence sur la formule $\varphi(\mathbf{a})$. En effet le cas de base est clair ; $\wedge$ et $\vee$ ne posent pas de problème.

Supposons réciproquement $\mathbb{B} \models \mathrm{Th}_{0^+}(\mathbb{A}/\mathbb{A})$ pour une $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$-structure idoine. On pose évidemment $\sigma(a) = c_a[\mathbb{B}]$. Par construction, σ est un morphisme. □

Remarque. Il y a légèrement mieux : on peut transporter de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$ les formules *existentielles positives*, i.e. de la forme $(\exists \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ où $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est positive sans quantificateurs. Mais on ne peut les rapatrier de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{A}$.

§ 14.2. Plongements

On rappelle qu'en géométrie, une variété $\mathbb{A}$ est *plongée* dans une autre variété $\mathbb{B}$ si $\mathbb{A}$ porte la structure induite par celle de $\mathbb{B}$. Une injection compatible (disons, continue) n'est pas toujours un plongement. Le même phénomène apparaît en algèbre universelle ; comme en géométrie le remède est de raisonner en structure induite.

$\rightarrowtail$ **Définition** (plongement). Un $\mathcal{L}$-*plongement* est une fonction $\sigma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ qui commute avec l'interprétation, i.e. :

— pour c une constante, $\sigma(c[\mathbb{A}]) = c[\mathbb{B}]$;

— pour R une relation n-aire et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, alors $\mathbf{a} \in R[\mathbb{A}]$ ssi $\sigma(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{B}]$;

— pour f une fonction n-aire et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, on a $\sigma(f[\mathbb{A}](\mathbf{a})) = f[\mathbb{B}](\sigma(\mathbf{a}))$.

On note alors $\sigma\colon \mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$ (non conventionnel).

Cette condition exprime que la structure sur $\sigma(\mathbb{A})$ coïncide avec celle induite par $\mathbb{B}$.

• **La catégorie des plongements**

$\mathbf{Mod}_0(T)$ **Proposition** (et notation)**.** La classe $\mathbf{Mod}_0(\varnothing)$ des $\mathcal{L}$-structures, munie des plongements, forme une catégorie ayant les colimites filtrantes.

Démonstration. L'identité est un plongement ; la composée de deux plongements est un plongement ; on a bien une catégorie.

On se donne un système dirigé par I : des $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{A}_i$ pour $i \in I$ et des *plongements* compatibles $f_{i,j} \colon \mathbb{A}_i \rightarrowtail \mathbb{A}_j$. À ce système construisons une colimite dans $\mathbf{Mod}_0(\varnothing)$. Soit $(\mathbb{A}^*, \{g_i : i \in I\})$ la colimite *au sens des morphismes*. On montre que les g_i sont bien des $\mathcal{L}$-plongements, i.e. que $\mathbb{A}^*$ ne satisfait pas plus de relations de base que les $\mathbb{A}_i$. Soient en effet $i \in I$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_i$ tels que $\mathbb{A}^* \models R(g_i(\mathbf{a}))$. Par construction, il existe j tel que $\mathbb{A}_j \models R(f_{i,j}(\mathbf{a}))$; filtrant, on peut même supposer $j \geqslant i$. Comme $f_{i,j}$ est un $\mathcal{L}$-plongement, on a bien $\mathbb{A}_i \models R(\mathbf{a})$. □

Remarques

— La définition (appliquée en la relation d'égalité) impose qu'un $\mathcal{L}$-plongement est injectif. Si le langage n'a pas d'autre relation, un plongement est exactement un morphisme injectif ; en général, par exemple en géométrie, il y a une différence.

— Ici la réciproque d'un $\mathcal{L}$-plongement bijectif est un $\mathcal{L}$-plongement : le comportement est meilleur que précédemment.

— La catégorie $\mathbf{Mod}(T)$ n'a toujours pas de colimites filtrantes : reprendre les ordres $(\{1, \ldots, i\}, \leqslant)$ indexés par $\mathbb{N}$.

• **Pendant syntaxique : méthode des diagrammes**

Th_0 **Lemme** (et notation)**.** Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Alors sont équivalents :

(i) il existe un plongement $\mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$;

(ii) $\mathbb{B}$ est (munissable d'une structure de) modèle de la *théorie sans quantificateurs* à paramètres de $\mathbb{A}$, $\mathrm{Th}_0(\mathbb{A}/\mathbb{A}) = \{\varphi(\mathbf{a}) \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}/\mathbb{A})$ sans quantificateurs$\}$.

Démonstration. Reprendre le cas positif. □

Remarque. Il y a légèrement mieux : on peut transporter de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$ les formules *existentielles*, i.e. de la forme $(\exists \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ où $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est sans quantificateurs. Mais toujours pas les rapatrier.

La satisfaction n'est pas préservée par les $\mathcal{L}$-plongements. On donne enfin la bonne notion.

§ 14.3. Plongements logiques

$\mathrel{\dot\rightarrowtail}$ **Définition.** Un $\mathcal{L}$-*plongement logique* est une fonction $\sigma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ qui commute avec la satisfaction, i.e. :

- pour $\varphi(\mathbf{a})$ une formule à paramètres dans $\mathbb{A}$, on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{B} \models \varphi(\sigma(\mathbf{a}))$.

On note alors $\sigma\colon \mathbb{A} \mathrel{\dot\rightarrowtail} \mathbb{B}$ (non conventionnel).

Cette condition exprime que la satisfaction dans $\sigma(\mathbb{A})$ coïncide avec celle induite par $\mathbb{B}$. On devrait dire « plongement satisfaisant ».

Remarques

- En logique élémentaire on parlera bien sûr de $\mathcal{L}$-*plongement élémentaire*.
- En instanciant aux formules $(x = c)$, $R(\mathbf{x})$, ou $y = f(\mathbf{x})$, on voit qu'une fonction logique est un morphisme, et même un plongement. Les terminologies « morphisme logique » et « plongement logique » (éventuellement remplacer par « élémentaire ») coexistent mais désignent la même chose.
- S'il existe un plongement logique $\sigma\colon \mathbb{A} \mathrel{\dot\rightarrowtail} \mathbb{B}$ alors on a l'équivalence logique $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ (prendre $\mathbf{a} = \varnothing$) ; la réciproque est fausse. En effet $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ne présuppose rien des cardinaux, alors que $\mathbb{A} \mathrel{\dot\rightarrowtail} \mathbb{B}$ (et même $\mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$) requiert a minima $\operatorname{card} \mathbb{A} \leqslant \operatorname{card} \mathbb{B}$.

  On peut même avoir $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ sans $\mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$ ni $\mathbb{B} \rightarrowtail \mathbb{A}$. En logique élémentaire, considérer $\mathbb{R}$ et un modèle dénombrable non archimédien de RCF : aucun n'a de plongement dans l'autre.

• La catégorie des plongements logiques

$\mathbf{Mod}(T)$ **Proposition** (et notation)**.** La classe $\mathbf{Mod}(\varnothing)$ des $\mathcal{L}$-structures, munie des plongements élémentaires, forme une catégorie ayant les colimites filtrantes.

Démonstration. On prend un système dirigé de structures $\mathbb{A}_i$ avec cette fois des plongements *élémentaires* $f_{i,j}\colon \mathbb{S}_i \mathrel{\dot\rightarrowtail} \mathbb{S}_j$. Soit $(\mathbb{A}^*, \{g_i : i \in I\})$ la colimite au sens des *morphismes* (ou des plongements car c'est la même). Il suffit de montrer que les g_i sont élémentaires.

On vérifie par récurrence sur la complexité de φ que pour $i \in I$ et $\varphi(\mathbf{a})$ à paramètres dans $\mathbb{S}_i$, on a $\mathbb{A}_i \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A}^* \models \varphi(g_i(\mathbf{a}))$. Le cas de base est connu, car les g_i sont des plongements. La logique propositionnelle est sans difficulté. On traite à présent une quantification existentielle. Un sens est clair. Pour la réciproque, si $\mathbb{A}^* \models (\exists x)\chi(x, g_i(\mathbf{a}))$, on prend un témoin $\beta = [(b, j)]$, et filtrant on peut supposer $j \geqslant i$. Par récurrence $\mathbb{A}_j \models \chi(b, f_{i,j}(\mathbf{a}))$, donc

$\mathbb{A}_j \models (\exists x)\chi(x, f_{i,j}(\mathbf{a}))$. Mais par hypothèse $f_{i,j} : \mathbb{A}_i \rightarrowtail \mathbb{A}_j$ est un plongement logique, donc $\mathbb{A}_i \models \varphi(\mathbf{a})$. □

L'argument suggère un critère d'élémentarité qui sera énoncé en § 15.1.

Corollaire (« réunion de chaîne élémentaire »)**.** $\mathbf{Mod}(T)$ a les colimites filtrantes ; en particulier une réunion croissante élémentaire de modèles reste un modèle.

Démonstration. On considère des modèles $\mathbb{A}_i \models T$ et des plongements logiques $f_{i,j} : \mathbb{A}_i \rightarrowtail \mathbb{A}_j$ entre eux. Les flèches de $\mathbf{Mod}(T)$ sont celles de $\mathbf{Mod}(\varnothing)$ entre objets de $\mathbf{Mod}(T)$; soit $\mathbb{A}^*$ la colimite au sens de $\mathbf{Mod}(\varnothing)$. Comme $\mathbb{A}^* \equiv \mathbb{A}_i \models T$; et dans $\mathbf{Mod}(T)$, on a $\mathbb{A}^* \in \mathbf{Mod}(T)$; en outre c'est la colimite dans cette sous-catégorie. □

Remarque. Cela ne veut pas dire qu'une réunion croissante arbitraire de modèles de T reste un modèle de T : reprendre des ordres totaux finis.

- **Pendant syntaxique : méthode des diagrammes**

Lemme. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Alors sont équivalents :

(i) il existe un plongement élémentaire $\mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$;

(ii) $\mathbb{B}$ est (munissable d'une structure de) modèle de $\mathrm{Th}(\mathbb{A}/\mathbb{A})$.

Démonstration. Cette fois c'est manifestement par définition. □

- **Les définissables comme foncteurs.** On peut désormais voir les parties définissables comme des foncteurs. À une formule sans paramètres $\varphi(\mathbf{x})$ on associe le foncteur $\varphi\colon \mathbf{Mod}(T) \to \mathbf{Ens}$ envoyant :
  - — un objet $\mathbb{M}$ sur $\varphi[\mathbb{M}] = \{\mathbf{m} \in \mathbb{M} : \mathbb{M} \models \varphi(\mathbf{m})\}$;
  - — une flèche (plongement élémentaire) $\sigma\colon \mathbb{M} \rightarrowtail \mathbb{N}$ sur la fonction ensembliste restreinte :
$$\begin{array}{rccc} \varphi[\sigma]\colon & \varphi[\mathbb{M}] & \to & \varphi[\mathbb{N}] \\ & \mathbf{m} & \mapsto & \sigma(\mathbf{m}) \end{array}$$
    En effet $\varphi[\sigma]$ est bien définie par élémentarité, i.e. $\mathbb{M} \models \varphi(\mathbf{m})$ ssi $\mathbb{N} \models \varphi(\sigma(\mathbf{m}))$.

Remarque. C'est encore valable avec des définissables à paramètres $\mathbf{a}$, mais il faut préserver la théorie de $\mathbf{a}$, typiquement travailler dans les modèles de $\mathrm{Th}(\mathbb{M}/\mathbf{a})$.

Avant d'aborder la suite on relira bien la différence entre morphismes, plongements, et plongements logiques. Les premiers servent à peine.

Exercices

14.1. Soit $\mathcal{C}$ une collection de $\mathcal{L}$-structures. Montrer que $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}(\varphi)$ pour un $\mathcal{L}$-énoncé élémentaire φ ssi $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^c$ sont de la forme $\mathbf{Mod}(T)$.

14.2. Soit Λ une extension de la logique élémentaire vérifiant :

- la propriété de compacité (générale) ;
- la « robustesse des colimites logiques » (aussi appelée « principe de la chaîne élémentaire ») :

> soient $(\mathbb{A}_i)_I$ une famille filtrante de $\mathcal{L}$-structures en Λ-plongement, i.e. pour tous $i \leqslant j$ on a $\mathrm{Th}_\Lambda(\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_i) = \mathrm{Th}_\Lambda(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_i)$. Soit $\mathbb{A}^*$ leur colimite dans $\mathcal{L}$-$\mathbf{Str}$. Alors pour tout i on a $\mathrm{Th}_\Lambda(\mathbb{A}^*, \mathbb{A}_i) = \mathrm{Th}_\Lambda(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_i)$, aux identifications près.

Montrer que Λ est la logique élémentaire, i.e. que deux $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes vérifient les mêmes $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncés.

14.3 (énoncés existentiels). Une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\mathbf{x})$ est existentielle modulo une théorie T s'il existe une formule sans quantificateurs $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ telle que $T \models (\forall \mathbf{x})[\varphi(\mathbf{x}) \leftrightarrow (\exists \mathbf{y})\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$.

On veut montrer le lemme suivant.

Lemme. Soit $\varphi(\mathbf{x})$ une $\mathcal{L}$-formule. On suppose que pour chaque paire de modèles $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ et chaque $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, si $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ alors $\mathbb{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Alors $\varphi(\mathbf{x})$ équivaut modulo T à une formule existentielle.

a. Montrer qu'un énoncé φ est existentiel (modulo T) ssi préservé par extension : si $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ sont des modèles de T et $\mathbb{A} \models \varphi$, alors $\mathbb{B} \models \varphi$.
   On pourra introduire l'ensemble X des énoncés existentiels impliquant φ (modulo T), puis $T \cup \{\neg\chi : \chi \in X\} \cup \{\varphi\}$.
b. Généraliser à des formules $\varphi(\mathbf{x})$.
c. Énoncer une caractérisation des formules existentielless positives (ni $\neg$, ni $\rightarrow$, ni $\forall$), et une des formules universelles.

Suite à l'exercice 15.3.

14.4 (axiomatisations universelles).

a. Pour T une théorie élémentaire, on note $T_\forall$ l'ensemble de ses conséquences universelles. Montrer que tout modèle de $T_\forall$ se plonge dans un modèle de T.
b. Déduire que si T est une théorie élémentaire, alors T possède une axiomatisation universelle ssi $\mathbf{Mod}(T)$ est close par passage aux sous-structures.
c. Application. Soient n un entier fixé et G un groupe. Montrer que si chaque sous-groupe de type fini de G a une représentation n-linéaire fidèle (le corps peut varier), alors G aussi.

d. Généralisation. Soient T, T' deux théories. Montrer que $T_\forall = T'_\forall$ ssi tout modèle de T se plonge dans un de T' et réciproquement. (On dit alors que T et T' sont *compagnes.*)

14.5.

a. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures relationnelles. Montrer que $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ss'il existe $\mathbb{C}$ et des plongements élémentaires $\mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{C}$ et $\mathbb{B} \rightarrowtail \mathbb{C}$. (Notamment, $\equiv$ est la plus petite relation d'équivalence contenant $\rightarrowtail$.)

b. Généraliser : si les $\mathbb{A}_i$ sont des structures élémentairement équivalentes, elles se plongent élémentairement dans une même structure.

c. Caractériser la plus petite relation d'équivalence contenant $\rightarrowtail$. (Penser aux termes sans variables.)

14.6 (critère d'élimination). Soient T une théorie et E un ensemble d'énoncés clos sous les opérateurs de la logique propositionnelle. On suppose que si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ sont deux modèles vérifiant exactement les mêmes énoncés de E, alors $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

a. Soit φ un énoncé. Si $\mathbb{A} \models T \cup \{\varphi\}$, montrer qu'il existe $\chi_\mathbb{A} \in E$ vrai dans $\mathbb{A}$ et tel que $T \models \chi_\mathbb{A} \to \varphi$.

b. En déduire qu'il existe $\psi \in E$ tel que $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

c. Généraliser à des formules.

Cet exercice sera redémontré en § 17 par des moyens topologiques.

14.7. Cet exercice propose une démonstration modèle-théorique du lemme de cohérence disjointe de Robinson. Si $\mathbb{M}_i$ est une $\mathcal{L}_i$-structure, $\mathbb{M}_\cap$ désigne la $\mathcal{L}_\cap$-structure sous-jacente obtenue en oubliant $\mathcal{L}_i \backslash \mathcal{L}_j$.

a. Soient $\mathbb{A}_1$ une $\mathcal{L}_1$-structure et $\mathbb{B}_2$ une $\mathcal{L}_2$-structure. On suppose $\mathbb{A}_\cap \equiv \mathbb{B}_\cap$ $[\mathcal{L}_\cap]$. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}_1$-structure $\mathbb{C}_1$ telle que $\mathbb{A}_1 \preccurlyeq \mathbb{C}_1$ $[\mathcal{L}_1]$ et $\mathbb{B}_\cap \preccurlyeq \mathbb{C}_\cap$ $[\mathcal{L}_\cap]$.

b. Soient $\mathbb{A}_1^0 \models T_1$ et $\mathbb{B}_2^1 \models T_2$. Construire des structures $(\mathbb{A}_1^{2n})$ et $(\mathbb{B}_2^{2n+1})$ telles que :

$$\mathbb{A}_\cap^0 \preccurlyeq \mathbb{B}_\cap^1 \preccurlyeq \mathbb{A}_\cap^2 \preccurlyeq \mathbb{B}_\cap^3 \preccurlyeq \dots \ [\mathcal{L}_\cap]$$
$$\mathbb{A}_1^0 \preccurlyeq \mathbb{A}_1^2 \preccurlyeq \dots \ [\mathcal{L}_1]$$
$$\mathbb{B}_2^1 \preccurlyeq \mathbb{B}_2^3 \preccurlyeq \dots \ [\mathcal{L}_2]$$

c. Conclure en considérant $\mathbb{C} = \bigcup_n \mathbb{A}_1^{2n} = \bigcup_n \mathbb{B}_2^{2n+1}$.

(Suite à l'exercice O.3.)

14.8 (théorème HSP de Birkhoff). Une classe de $\mathcal{L}$-structures est *équationnelle* si de la forme $\mathbf{Mod}(T)$ pour un ensemble T de formules atomiques (ou encore, d'énoncés qui sont clôture universelle de telles formules).

Théorème. Les classes équationnelles sont exactement celles closes sous homomorphismes, sous-structure, et produit.

Établir ce théorème. Indication pour la réciproque : soient $\mathcal{C}$ close et T l'ensemble des formules atomiques vraies dans tout membre de $\mathcal{C}$; soit $\mathbb{A} \models T$. Chaque fois que $\mathbb{A} \models \neg\varphi(\mathbf{a})$, choisir $\mathbb{B}_{\varphi(\mathbf{a})} \models \neg\varphi(\mathbf{a})$ dans $\mathcal{C}$ et former leur produit. Suite plus intéressante à l'exercice 16.4.

Notes conclusives

- **Repères historiques**

The present work [. . .] *sets out to make a positive contribution to Algebra using the methods and results of Symbolic Logic.*

[. . .] *We may quote H. Poincaré's comments on Couturat's claim that Symbolic Logic could fertilise the spirit of mathematical invention.*

'En ce qui concerne la fécondité il semble que M. Couturat se fasse de naïves illusions. La logistique, d'après lui prête à l'invention 'des échasses et des ailes', et à la page suivante 'Il y a dix ans que M. Peano a publié la premiere édition de son formulaire'. Comment, voilà dix ans que vous avez des ailes et vous n'avez pas encore volé!'. (H. Poincaré, Science et Méthode, ref. 57). Continuing in this vein, Poincaré then suggests that so far from lending it wings, Symbolic Logic has only provided Mathematics with fetters.

However, it will be shown that the synthesis of more recent results of Symbolic Logic and of the concepts and methods of Algebra leads to developments which justify Couturat's more optimistic point of view.

[**Robinson**, Preface]

Tarski, et les autres. • La fortune de l'école de Tarski tend à effacer deux autres fondateurs de la théorie des modèles : Abraham Robinson et Maltsev. Dans [**Robinson**], ouvrage issu de sa thèse, Robinson cite l'école de Tarski mais pas les travaux (encore inconnus hors de l'URSS) de Maltsev, premier à faire de la compacité de la logique élémentaire un outil algébrique, pour les groupes notamment (§ 11). • [Tar54b] ouvre une série de trois articles voués aux classes élémentaires (voir ci-dessous). C'est la première apparition du terme « theory of models » pour une discipline encore balbutiante. Tarski faisait alors école à Berkeley.

Misc. • Existence de colimites filtrantes pour les catégories de type $\mathbf{Mod}(T)$: [TV58, Theorem 1.9], sous une autre forme ; on revient sur l'article en § 15. • L'ex. 14.3 se généralise à $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ [Mal66, § 4] (non publié) ; v. [Keisler, p. 31]. C'est ouvert dans $\Lambda_{\kappa,\omega}$ si $\kappa > \omega_1$ mais faux dès $\Lambda_{\omega_1,\omega_1}$; v. [Dickmann, p. 151]. • La caractérisation des théories universelles (exercice 14.4) est souvent attribuée à Tarski [Tar54c, Theorem 1.8]. L'application aux groupes est de Maltsev [Mal40]. • Les caractérisations de classes de formules par leurs propriétés de préservation furent à la mode dans les années 1950 ; [Lyn59] donne d'autres exemples, avec attributions. L'article précède la bonne compréhension des formules de Horn et des produits réduits (exercice 16.9). • Ex. 14.8 : [Bir35, § 10]. On entre ici dans l'*algèbre universelle*,

[**Robinson**] : Abraham ROBINSON. *On the metamathematics of algebra.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951, p. ix+195

[Tar54b] : Alfred TARSKI. « Contributions to the theory of models I ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 57 (1954), 572-581 = Indagationes Math. 16, 572-581 (1954)

[TV58] : Alfred TARSKI et Robert VAUGHT. « Arithmetical extensions of relational systems ». In : *Compositio Math.* 13 (1958), p. 81-102

[Mal66] : Jerome MALITZ. « Problems in the model theory of infinite languages ». Thèse de doct. University of California, Berkeley, 1966, p. 87

[Tar54c] : Alfred TARSKI. « Contributions to the theory of models II ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 57 (1954), 582-588 = Indagationes Math. 16, 582-588 (1954)

[Mal40] : Anatoli MALTSEV. « On isomorphic matrix representations of infinite groups ». In : *Rec. Math. Moscou, n. Ser.* 8 (1940), p. 405-422

[Lyn59] : Roger LYNDON. « Properties preserved under algebraic constructions ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 65 (1959), p. 287-299

[Bir35] : Garrett BIRKHOFF. « On the structure of abstract algebras ». In : *Proc. Camb. Philos. Soc.* 31 (1935), p. 433-454

qui eut vogue en même temps que les treillis ; le sujet n'est pas si fécond.

- **Terminologie.** • Certains traités confondent morphismes et plongements. Heureusement ces notions sont peu utiles, et les expressions « morphisme élémentaire » et « plongement élémentaire » ont le même sens. • « Diagramme » était employé dans le sens de théorie par Abraham Robinson. • Encore marqués par l'époque de Tarski, les théoriciens des modèles restent hostiles à l'emploi du langage catégorique. On prendra [Mac03] comme antidote au caractère parfois laborieux du formalisme tarskien et à l'obsession syntaxique.

- **Classes élémentaires, classes élémentaires abstraites**

Classes élémentaires. On fixe un langage relationnel $\mathcal{L}$. Une *classe élémentaire* (ou *axiomatisable* ; v. ex. 11.5) est une collection de $\mathcal{L}$-structures de la forme $\mathbf{Mod}(T)$ pour une certaine axiomatique/théorie élémentaire T. (On ne tient pas compte ici des flèches.)

Caractérisations. Diverses caractérisations de telles classes ont été trouvées, notamment par Tarski et son école, mais aussi par Maltsev : exercices 14.4 ou 15.5. On peut notamment caractériser les axiomatisations Π_{2n} ; [Chang-Keisler, § 5.2].

Limites de la notion. De nombreuses classes naturelles ne sont *pas* élémentaires, i.e. pas axiomatisables en logique élémentaire : groupes localement finis, anneaux noethériens, corps ordonnés archimédiens. On peut les axiomatiser en étendant la logique (langages infinitaires, quantification généralisée, ordre supérieur), mais comme on quitte la logique élémentaire, les propriétés sont moins bonnes. La théorie des modèles pour ces logiques est moins développée mais le projet n'est pas absurde.

Question liée. On peut poser une question bien plus générale : *sans fixer de langage*, quelles catégories sont susceptibles d'être de la forme $\mathbf{Mod}(T)$? Fraïssé et Jónsson [Jón56] semblent les premiers à avoir envisagé un cadre abstrait (à l'origine, pour obtenir des structures « assez universelles », dans un sens étudié aux compléments § N).

Classes élémentaires abstraites. Pour englober l'étude des classes élémentaires, i.e. la théorie des modèles usuelle, dans un cadre conceptuel plus vaste, Shelah a introduit les *classes élémentaires abstraites* ; v. § 15, notes conclusives.

- **Groupes d'automorphismes.** • Associer à une structure $\mathbb{M}$ son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ n'a rien de fonctoriel : l'objet $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ est interprétable en logique d'ordre supérieur, mais a priori pas en logique élémentaire. • Une obstruction technique à systématiser l'étude de $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ est la suivante. Si $\mathbb{M}$ est infini, alors il existe une extension élémentaire (v. § 15) $\mathbb{M}^* \succcurlyeq \mathbb{M}$ telle que $\mathrm{Aut}(\mathbb{M}^*)$ est indécidable [Blu+08].

§ 15. Phénomènes de Löwenheim-Skolem et catégoricité

Le non-standard prend son essor. § 15.1 revient sur la notion d'inclusion élémentaire et donne un important critère. Puis en § 15.2 sont présentés les

[Mac03] : Angus Macintyre. « Model theory : geometrical and set-theoretic aspects and prospects ». In : t. 9. 2. New programs and open problems in the foundation of mathematics (Paris, 2000). 2003, p. 197-212

[Jón56] : Bjarni Jónsson. « Universal relational systems ». In : *Math. Scand.* 4 (1956), p. 193-208

[Blu+08] : Vasiliĭ Bludov et al. « Automorphism groups of models of first order theories ». In : *Models, modules and abelian groups.* Walter de Gruyter, Berlin, 2008, p. 325-328 théorèmes « de Löwenheim-Skolem » sur le déplacement cardinal : une théorie sans modèles finis en a de tout cardinal supérieur au langage ; on peut même travailler en extension élémentaire. Dès lors la *catégoricité* en logique élémentaire ne peut être que relative à un cardinal (§ 15.3).

Prérequis : §§ 8, 11, 14.

Le chapitre II considérait les structures une à une, sans tenter d'en engendrer de nouvelles ; et la nature de leur domaine (ensemble ou classe propre) importait peu. Dorénavant nous effectuerons des manipulations sur ces domaines, typiquement des construction de sous- ou sur-modèles. Les structures doivent donc avoir une réalisation ensembliste, i.e. être portées par les objets d'une théorie des ensembles.

§ 15.1. Sous-structures et sous-structures élémentaires

• Sous-structure et sous-structure engendrée

$\leqslant$ **Définition** (sous-structure/extension)**.** Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures, en inclusion ensembliste. On dit que $\mathbb{A}$ est une *sous-structure* de $\mathbb{B}$ (ou que $\mathbb{B}$ est une *extension* de $\mathbb{A}$) si la structure sur $\mathbb{A}$ coïncide avec celle induite par $\mathbb{B}$, i.e. :

— pour toute constante c de $\mathcal{L}$, $c[\mathbb{A}] = c[\mathbb{B}]$;

— pour toute relation n-aire R de $\mathcal{L}$, $R[\mathbb{A}] = R[\mathbb{B}] \cap \mathbb{A}^n$;

— pour toute fonction n-aire f de $\mathcal{L}$, $f[\mathbb{A}] = f[\mathbb{B}]_{|\mathbb{A}^n}$.

On note alors $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$.

Remarque. Ainsi $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ ssi l'injection d'inclusion est un $\mathcal{L}$-plongement ssi $\mathbb{B} \models \mathrm{Th}_0(\mathbb{A}/\mathbb{A})$ dans l'interprétation naturelle. On rappelle de § 14 que $\mathrm{Th}_0(\mathbb{A}/\mathbb{A})$ est la théorie sans quantificateurs, à paramètres dans $\mathbb{A}$, i.e. $\{\varphi(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}_{\mathbb{A}}\text{-Én} : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\}$.

$\langle\cdot\rangle$ **Définition** (sous-structure engendrée)**.** Soient $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq \mathbb{S}$ un sous-ensemble. Alors existe une plus petite sous-structure de $\mathbb{S}$ contenant A, notée $\langle A \rangle$ et appelée *sous-structure engendrée par A*.

La vérification est évidente : l'ensemble $\langle A \rangle$ est la clôture de $A \cup \{c[\mathbb{S}] : c \in \mathcal{L}\}$ sous les fonctions $f[\mathbb{S}]$, et l'on prend la restriction des relations à $\langle A \rangle$ pour finir l'interprétation. Cette construction est celle bien connue en algèbre (sous-groupe engendré, sous-espace vectoriel engendré, etc.) ; sa complexité ensembliste n'est pas immodérée. On maîtrise bien la cardinalité : $\operatorname{card}\langle A \rangle \leqslant \operatorname{card} A + \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$.

• **Sous-structure élémentaire**

$\preccurlyeq$ **Définition** (sous-structure élémentaire)**.** Soient $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathbb{A}$ est une *sous-structure élémentaire* de $\mathbb{B}$ (ou $\mathbb{B}$ une *extension élémentaire* de $\mathbb{A}$) si la satisfaction dans $\mathbb{A}$ coïncide avec celle dans $\mathbb{B}$, i.e. :

> pour toute formule $\varphi(\mathbf{a})$ à paramètres dans $\mathbb{A}$, on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{B} \models \varphi(\mathbf{a})$.

On note alors $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{B}$ ou $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, mais ce dernier symbole est peu lisible et prête à confusion.

Remarques

— Ainsi $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{B}$ ssi l'inclusion est un plongement élémentaire ssi $\mathbb{B} \models \mathrm{Th}(\mathbb{A}/\mathbb{A})$ dans l'interprétation naturelle ssi $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ $[\mathcal{L}_{\mathbb{A}}]$ (i.e. en tant que $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$-structures).

— Bien sûr $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{B}$ entraîne $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ et $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ mais la réciproque est fausse. L'inclusion $(2\mathbb{Z}, \leqslant) \leqslant (\mathbb{Z}, \leqslant)$ n'est pas élémentaire à cause de la paire $(0, 2)$; les structures sont pourtant logiquement équivalentes car isomorphes.

— En « sémantique pleine du deuxième ordre » la notion d'extension logique est dégénérée. En effet si $\mathbb{A}$ est une structure, alors posant $X = \mathbb{A}$ on a $\mathbb{A} \models (\forall x)X(x)$; si $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{B}$ en logique du deuxième ordre *dans la sémantique pleine*, il suit $\mathbb{A} = \mathbb{B}$. Quantifier sur *toutes* les parties empêche ainsi les raisonnements en famille au cœur de la théorie des modèles. (Remarque évidemment non valable en sémantique de Henkin.)

Proposition (critère d'élémentarité « de Tarski-Vaught »)**.** Soient $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq \mathbb{S}$. On suppose que pour toute formule $\chi(\mathbf{a}, x)$ à paramètres dans A :

> si $\mathbb{S} \models (\exists x)\chi(\mathbf{a}, x)$, alors il existe $\alpha \in A$ tel que $\mathbb{S} \models \chi(\mathbf{a}, \alpha)$.

Alors la $\mathcal{L}$-structure induite par $\mathbb{S}$ fait de A une $\mathcal{L}$-sous-structure élémentaire $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{S}$.

En conséquence on trouve une définition plus géométrique de l'élémentaire inclusion :

> $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{B}$ ssi toute partie $\mathbb{A}$-définissable non vide de $\mathbb{B}$ intersecte $\mathbb{A}$.

Démonstration. La conclusion entraîne en particulier que $A = \langle A \rangle$ contient les constantes et est clos sous les fonctions de $\mathbb{S}$; ce n'est pas une hypothèse en plus, mais bien une conséquence de celle faite. Commençons par ce point. Soit

c une constante. Comme $\mathbb{S} \models (\exists x)(x = c)$, on a un $\alpha \in A$ vérifiant $\mathbb{S} \models \alpha = c$: donc A contient bien les constantes. Même argument pour la clôture sous les fonctions. Il est donc légitime d'induire une structure notée $\mathbb{A}$.

Montrons l'élémentarité $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{S}$: montrons que pour toute formule $\varphi(\mathbf{a})$ à paramètres dans A, on a bien $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{a})$. Le cas de base est évident, ainsi que l'emploi de la logique propositionnelle. Reste à traiter le cas de la quantification élémentaire ; par négation on peut se ramener à $\exists$. On suppose donc $\varphi(\mathbf{a})$ de la forme $(\exists x)\chi(\mathbf{a}, x)$.

- Si $\mathbb{A} \models (\exists x)\chi(\mathbf{a}, x)$, on prend un $\alpha \in \mathbb{A}$ en témoignant ; par hypothèse et récurrence, $\mathbb{S} \models \chi(\mathbf{a}, \alpha)$, donc $\mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{a})$.
- Si réciproquement $\mathbb{S} \models (\exists x)\chi(\mathbf{a}, x)$, alors par hypothèse il existe $\alpha \in \mathbb{A}$ tel que $\mathbb{S} \models \chi(\mathbf{a}, \alpha)$; par récurrence on a bien $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}, \alpha)$ puis $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. □

Remarques

- On note toutefois que les paramètres sont dans A, alors que la satisfaction est dans $\mathbb{S}$. En outre l'hypothèse concerne χ de structure arbitraire (avec quantificateurs), et le « il existe » de l'énoncé ne peut être noté symboliquement.
- La simplification hâtive « les existentiels descendent » est donc trompeuse.

Exemple. Considérons l'inclusion $(\mathbb{N}, <) \leqslant (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, <)$. Les deux structures ne sont pas élémentairement équivalentes, donc l'inclusion n'est certainement pas élémentaire. Pourtant si $\chi(\mathbf{a}, x)$ est sans quantificateurs à paramètres dans $\mathbb{N}$, elle ne peut définir dans $\mathbb{N}$ qu'une réunion finie d'intervalles U. Si $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \models \chi(\mathbf{a}, n)$ pour un vrai entier, c'est encore le cas dans $\mathbb{N}$ par absence de quantificateurs. Si $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \models \chi(\mathbf{a}, \infty)$, alors U n'est pas borné : un entier assez grand conviendra. Dans tous les cas si $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \models (\exists x)\chi(\mathbf{a}, x)$, alors $\mathbb{N} \models (\exists x)\chi(\mathbf{a}, x)$: les existentiels « purs » descendent, mais l'inclusion n'est pas élémentaire.

Corollaire. Soient $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures et $\sigma\colon \mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$ un plongement. On suppose que pour toute formule $\chi(\mathbf{a}, x)$ à paramètres dans $\mathbb{A}$:

$$\text{si } \mathbb{B} \models (\exists x)\chi(\sigma(\mathbf{a}), x), \text{ alors il existe } \alpha \in \mathbb{A} \text{ tel que } \mathbb{B} \models \chi(\sigma(\mathbf{a}), \sigma(\alpha)).$$

Alors σ est élémentaire. On retrouve en particulier que tout $\mathcal{L}$-isomorphisme (et donc tout $\mathcal{L}$-plongement surjectif) est élémentaire.

Démonstration. Il est plus intuitif de se convaincre d'abord qu'un isomorphisme est élémentaire (quitte à conduire une récurrence sur les formules).

Soit $\sigma\colon \mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$ un plongement ; il induit un isomorphisme $\mathbb{A} \simeq \sigma(\mathbb{A})$. Si σ satisfait les hypothèses, alors par le point précédent $\sigma(\mathbb{A}) \leqslant \mathbb{B}$ est une inclusion élémentaire. La composée d'un isomorphisme (élémentaire) et d'une injection élémentaire reste un plongement élémentaire. □

On se méfiera comme toujours des morphismes surjectifs, qui ne sont pas nécessairement des isomorphismes (faute de savoir rapatrier les relations autres que l'égalité).

§ 15.2. Théorèmes à la Löwenheim-Skolem

Les théorèmes de, ou plutôt « à la », Löwenheim-Skolem expriment le phénomène suivant. Fors cas triviaux, *toutes* les cardinalités supérieures à celle du langage sont représentées par les modèles d'une théorie élémentaire. En particulier, le non-standard est inévitable. Ceci a déjà été rencontré en § 11.3 dont on renforce les résultats.

- **Pan descendant**

Théorème (« Löwenheim-Skolem descendant »)**.** Soient $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie et $A \subseteq \mathbb{S}$ un sous-ensemble. Soit κ un cardinal infini tel que $\operatorname{card} A + \operatorname{card} \mathcal{L} \leqslant \kappa \leqslant \operatorname{card} \mathbb{S}$. Alors il existe une sous-structure élémentaire $\mathbb{S}_0 \leqslant \mathbb{S}$ de cardinal κ contenant A.

Démonstration. On peut supposer $\operatorname{card} A = \kappa$. La méthode a des liens avec celle de Henkin pour la complétude mais nous montrons ici un résultat plus simple, et entièrement sémantique. Pour qu'une sous-structure soit élémentaire elle doit posséder des témoins existentiels ; l'idée de Skolem (bien antérieure aux travaux de Henkin) est d'ajouter des fonctions les choisissant.

Pour chaque formule $\varphi(y, \mathbf{x})$ ajoutons à $\mathcal{L}$ un nouveau symbole de fonction « de Skolem » $f_{\varphi(y,\mathbf{x})}$. Soit $\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}$ le langage obtenu ; notons que $\operatorname{card} \mathcal{L}_{\mathrm{Sk}} = \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$.

Par choix on peut faire de $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}$-structure (notée $\mathbb{S}_{\mathrm{Sk}}$) vérifiant les énoncés : $(\forall \mathbf{x})[(\exists y)\varphi(y, \mathbf{x})) \to \varphi(f_{\varphi(y,\mathbf{x})}, \mathbf{x})]$. Pour donner sens à une fonction $f_{\varphi(y,\mathbf{x})}$, il suffit en effet d'envoyer chaque $\mathbf{a}$ sur un b tel que $\mathbb{S} \models \varphi(b, \mathbf{a})$ s'il en existe, et n'importe où sinon.

Considérons la $\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}$-structure engendrée $\mathbb{S}_0 = \langle A \rangle_{\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}}$; notons que $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} \mathbb{S}_0 \leqslant \operatorname{card} A + \operatorname{card} \mathcal{L}_{\mathrm{Sk}} = \kappa + \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0 = \kappa$. Enfin $\mathbb{S}_0 \leqslant_{\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}} \mathbb{S}$, et nous affirmons que cela entraîne $\mathbb{S}_0 \leqslant_{\mathcal{L}} \mathbb{S}$ *en tant que $\mathcal{L}$-structures.* C'est une conséquence évidente du critère d'élémentarité de Tarski-Vaught. □

Remarques

— On n'a pas en revanche $\mathbb{S}_0 \preccurlyeq_{\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}} \mathbb{S}$. Il faudrait pour cela passer à $\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}_{\mathrm{Sk}}}$. De toute façon la structure additionnelle $\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}$ n'est qu'un moyen technique, pas une fin en soi.

— Sur l'axiome du choix (i). On peut vouloir ne pas introduire une fonction arbitraire de choix de témoins, mais les considérer tous : quand $\mathbb{S} \models (\exists y)\varphi(y, \mathbf{a})$, ajouter *tous* les b tels que $\mathbb{S} \models \varphi(b, \mathbf{a})$. C'est évidemment possible mais on perd alors tout contrôle sur la cardinalité ; on risque de reconstruire $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}$.

— Sur l'axiome du choix (ii). Les fonctions de Skolem sont non canoniques, et sauf cas favorables (typiquement quand la structure est munie d'un ordre vérifiant la propriété de la borne supérieure pour les parties définissables) on ne peut y remédier. Ceci justifie qu'il n'y ait en général *pas* de plus petite sous-structure élémentaire contenant A ; voir l'exemple suivant. La notation $\langle A \rangle$ est à proscrire pour les enveloppes de Skolem.

Exemple. Considérons $(\mathbb{Q}, <)$. On admet pour l'instant que les sous-structures élémentaires sont les ordres denses linéaires sans extrémités ; notamment la chaîne $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ des nombres dyadiques vérifie $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \preccurlyeq \mathbb{Q}$; il en va de même des nombres triadiques $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right] \preccurlyeq \mathbb{Q}$. Mais leur intersection est $\mathbb{Z}$, qui n'est pas sous-structure élémentaire.

Dans cet exemple les fonctions de Skolem choisissent :

— pour chaque élément, un élément strictement plus grand ;

— pour chaque élément, un élément strictement plus petit ;

— pour chaque paire d'éléments distincts, un élément strictement intermédiaire.

On pourrait penser qu'existe un choix naturel avec $x \pm 1$ et $\frac{x+y}{2}$: mais ces opérations algébriques ne font pas partie de la structure, et n'ont pas de canonicité dans $(\mathbb{Q}, <)$.

Pourtant dans $\mathbb{C}$, il existe bien une sous-structure élémentaire *canonique* contenant $A \subseteq \mathbb{C}$: la clôture algébrique du corps engendré. Ici la sous-structure algébriquement engendrée est élémentaire : c'est une conséquence de l'*élimination des quantificateurs* discutée en § 17.2.

Nous renforçons à présent un phénomène obtenu comme corollaire au théorème de complétude (§ 10). La preuve requiert de pouvoir opérer sur le modèle depuis l'extérieur, avec du choix.

Corollaire. Soit $\mathbb{U} \models \mathrm{ZF}$. Alors $\mathbb{U}$ contient une sous-structure dénombrable élémentaire $\mathbb{U}_0 \preccurlyeq \mathbb{U}$; notamment $\mathbb{U}_0 \models \mathrm{ZF}$.

- **Pan ascendant**

Théorème (« Löwenheim-Skolem ascendant »)**.** Soient $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie et $\kappa \geqslant \operatorname{card} \mathbb{S} + \operatorname{card} \mathcal{L}$ un cardinal. Alors il existe une extension élémentaire $\mathbb{S}^* \geqslant \mathbb{S}$ de cardinal κ.

Démonstration. Au langage $\mathcal{L}_\mathbb{S}$ qui nomme déjà tous les éléments de $\mathbb{S}$, ajoutons de nouvelles constantes c_i pour $i \in \kappa$; soit $\mathcal{L}'$ le langage résultant, de cardinal κ. Soit $T' = \mathrm{Th}(\mathbb{S}/\mathbb{S}) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}$. Cette $\mathcal{L}'$-axiomatisation est finiment satisfaisable, car une partie finie ne mentionne qu'un énoncé de $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/\mathbb{S})$ (satisfaisable dans $\mathbb{S}$ pour l'interprétation attendue) et un nombre fini d'énoncés $c_i \neq c_j$ (satisfaisable dans $\mathbb{S}$ car elle est infinie). Par compacité, T' est satisfaisable.

Soit $\mathbb{S}' \models T'$ un modèle. Comme $\mathbb{S}' \models c_i \neq c_j$ pour chaque $i \neq j$ dans κ, on a $\operatorname{card} \mathbb{S}' \geqslant \kappa$. Notons par ailleurs que $\mathrm{Th}(\mathbb{S}'/\mathbb{S}) = \mathrm{Th}(\mathbb{S}/\mathbb{S})$, i.e. $\mathbb{S}' \equiv \mathbb{S}\ [\mathcal{L}_\mathbb{S}]$, ou encore $\mathbb{S} \leqslant \mathbb{S}'\ [\mathcal{L}]$. Repassons alors au langage $\mathcal{L}_\mathbb{S}$. Par le pan descendant il existe une sous-structure élémentaire de cardinal κ telle que $\mathbb{S} \leqslant \mathbb{S}^* \leqslant \mathbb{S}'$, et comme $\mathbb{S} \leqslant \mathbb{S}'$ on en tire $\mathrm{Th}(\mathbb{S}'/\mathbb{S}) = \mathrm{Th}(\mathbb{S}/\mathbb{S}) = \mathrm{Th}(\mathbb{S}^*/\mathbb{S})$ d'où $\mathbb{S} \leqslant \mathbb{S}^*$. □

Remarque. On n'a pas besoin de théorie formelle des cardinaux (les cardinaux comme ordinaux minimaux, chapitre V § 24.1) pour faire croître un modèle : la notion de cardinalité naïve par équipotence suffit.

§ 15.3. Catégoricité

Une théorie du deuxième ordre peut en sémantique pleine être absolument catégorique (i.e. avoir un unique modèle à isomorphisme près : par exemple l'arithmétique de Peano du deuxième ordre, voir § 11). Mais d'après les théorèmes de Löwenheim-Skolem, c'est impossible en logique élémentaire si T a des modèles infinis, car elle aura des modèles de tout cardinal assez grand : aucune théorie de structure infinie n'est absolument catégorique. Parfois pourtant le cardinal est la seule obstruction.

Définition (κ-catégoricité)**.** Une théorie est *κ-catégorique* si elle possède, à isomorphisme près, un unique modèle de cardinal κ.

Par extension, on dit d'une structure $\mathbb{A}$ qu'elle est κ-catégorique si $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ l'est (et pas forcément pour $\operatorname{card} \mathbb{A} = \kappa$).

Remarque. Attention, une structure interprétable dans une structure catégorique ne l'est pas nécessairement. Il suit facilement du théorème de Feferman-Vaught (exercice 6.10) que $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\,;\cdot)$ n'est pas $2^{\aleph_0}$-catégorique.

Proposition (critère de complétude de Łoś et Vaught)**.** Si une théorie sans modèles finis T est κ-catégorique en un $\kappa \geqslant \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$, alors elle est complète.

Démonstration. Soient $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2 \models T$ deux modèles ; on montre $\mathbb{M}_1 \equiv \mathbb{M}_2$. D'après les théorèmes de Löwenheim-Skolem il existe $\mathbb{M}_1^*, \mathbb{M}_2^*$ de cardinal κ tels que $\mathbb{M}_1 \preccurlyeq \mathbb{M}_1^*$ ou l'inverse, et de même à l'indice 2. Par hypothèse $\mathbb{M}_1^*$ et $\mathbb{M}_2^*$ sont isomorphes ; par construction les inclusions sont élémentaires ; il vient $\mathbb{M}_1 \equiv \mathbb{M}_1^* = \mathbb{M}_2^* = \mathbb{M}_2$.

Le point de vue catégorique peut être plus agréable. Par les théorèmes de Löwenheim-Skolem et la κ-catégoricité, deux objets de $\mathbf{Mod}(T)$ sont dans l'une des configurations suivantes :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{M}_1 \\
\mathbb{N}^* \arrow[ur, tail, dotted] \arrow[dr, tail, dotted] & \\
 & \mathbb{M}_2
\end{tikzcd}
\quad ; \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{M}_1 \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{N}^* \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{M}_2
\end{tikzcd}
\quad ; \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{M}_1 \arrow[dr, tail, dotted] & \\
 & \mathbb{N}^*. \\
\mathbb{M}_2 \arrow[ur, tail, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

Dans tous les cas $\mathbb{M}_1 \equiv \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{M}_2^*$. □

Il n'y a pas de réciproque à ce principe utile (v. notes conclusives).

Exemples

— La théorie d'un ensemble infini sans structure est catégorique en tout cardinal, donc complète.

— La théorie des ordres linéaires denses sans extrémités est $\aleph_0$-catégorique, donc complète.

— La théorie des groupes abéliens sans torsion divisibles est catégorique en tout cardinal, donc complète.

— La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est κ-catégorique pour tout $\kappa > \aleph_0$, donc complète.

Exercices

15.1. On se place en logique élémentaire, d'abord dans le langage vide (mais la logique autorise $=$).

a. Existe-t-il une théorie élémentaire dont les modèles sont exactement les ensembles infinis ? Et au deuxième ordre en sémantique pleine ? Mêmes questions avec une théorie élémentaire *finie* (i.e. un énoncé).

b. Existe-t-il une théorie élémentaire capturant exactement les ensembles infinis dénombrables ? Et au deuxième ordre en sémantique pleine ? Mêmes questions avec un énoncé.

Dorénavant le langage contient une relation binaire R.

c. Existe-t-il une théorie élémentaire capturant exactement les ensembles infinis ? Et un énoncé ?

d. Existe-t-il une théorie élémentaire capturant exactement les ensembles infinis dénombrables ? Et un énoncé ?

15.2. Soient $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et φ une formule définissant une partie *infinie*. Soit $\kappa \geqslant \operatorname{card} \operatorname{card} \mathbb{A}$. Montrer qu'il existe $\mathbb{A}^* \geqslant \mathbb{A}$ de cardinal κ telle que $\operatorname{card} \varphi[\mathbb{A}^*] = \operatorname{card} \mathbb{A}^*$.

15.3. Renforcement de l'exercice 14.3 : montrer le lemme suivant.

Lemme. Soit $\varphi(\mathbf{x})$ une $\mathcal{L}$-formule. On suppose qu'il existe un cardinal $\kappa \geqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$ tel que pour chaque paire de modèles $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ *de cardinal* κ et chaque $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, si $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ alors $\mathbb{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Alors $\varphi(\mathbf{x})$ équivaut modulo T à une formule existentielle.

15.4 (théories nommant des témoins existentiels). Une $\mathcal{L}$-théorie T *nomme des témoins existentiels* (NTE ; aussi *théorie de Skolem*) si pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{y})$ il existe un $\mathcal{L}$-terme $t_\varphi(\mathbf{y})$ tel que $T \models (\forall \mathbf{y})[(\exists x)\varphi(x, \mathbf{y}) \leftrightarrow \varphi(t_\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y})]$.

a. Soit T une théorie NTE. Montrer que si $\mathbb{A} \models T$ et $X \subseteq \mathbb{A}$ est non vide, alors $\langle X \rangle \leqslant \mathbb{A}$. Donner une théorie modèle-complète non NTE.

b. Montrer que si T est NTE et que $\mathcal{L}$ contient une constante, alors toute formule équivaut modulo T à une formule sans quantificateurs.

c. Montrer que si T est une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire, alors il existe $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$ et $T \subseteq T^*$ tels que :

- $\operatorname{card} \mathcal{L}^* \leqslant \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$;
- tout modèle de T s'étend en un modèle de T^* ;
- T^* est NTE.

15.5 (existentiellement clos ; caractérisation des axiomatisations $\forall\exists$ et Nullstellensatz). On montre un énoncé classique.

Théorème (caractérisation des théories Π_2). Soit T une théorie élémentaire. Alors T possède une axiomatisation Π_2 ssi $\mathbf{Mod}(T)$ est close sous colimites filtrantes quelconques ssi $\mathbf{Mod}(T)$ est close sous réunions croissantes dénombrables.

- Un énoncé est Π_2, ou $\forall\exists$, s'il est de la forme $(\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où φ_0 est sans quantificateurs.
- Pour une théorie T, on note $T_\forall$ l'ensemble de ses conséquences universelles, $T_{\forall\exists}$ l'ensemble de ses conséquences $\forall\exists$, etc.

a. Montrer les directions faciles du théorème.

b. Une inclusion $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ est *existentiellement close*, noté $\mathbb{A} \leqslant_\exists \mathbb{B}$, si $\mathrm{Th}_\exists(\mathbb{A}/\mathbb{A}) = \mathrm{Th}_\exists(\mathbb{B}/\mathbb{A})$, de manière équivalente $\mathrm{Th}_\forall(\mathbb{A}/\mathbb{A}) = \mathrm{Th}_\forall(\mathbb{B}/\mathbb{A})$. On n'oubliera pas les paramètres.
Montrer que $\mathbb{A} \leqslant_\exists \mathbb{B}$ ss'il existe $\mathbb{A}^*$ tel que $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{A}^*$ et $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{A}^*$.

c. On suppose $\mathbb{A} \models T_{\forall\exists}$. Montrer qu'il existe $\mathbb{B} \models T$ tel que $\mathbb{A} \leqslant_\exists \mathbb{B}$.

d. Établir le théorème.

e. Un modèle $\mathbb{A} \models T$ est *existentiellement clos* (en tant que modèle) si toute extension $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$, où $\mathbb{B}$ est un autre modèle, est existentiellement close.
On suppose $T = T_{\forall\exists}$. Montrer qu'il existe des modèles existentiellement clos de tout cardinal $\geqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$.

f. En déduire le Nullstellensatz pour les corps algébriquement clos non dénombrables. (On admet que ACF_q est κ-catégorique en tout κ non dénombrable.)

15.6 (modèle-complétude). Cet exercice fait suite à l'exercice 15.5. Une théorie élémentaire T est *modèle-complète* si tout plongement entre modèles est élémentaire, en symboles $\mathbf{Mod}(T) = \mathbf{Mod}_0(T)$.

a. Donner une théorie modèle-complète non complète, et une théorie complète non modèle-complète.

b. Montrer les équivalences entre :
   - T est modèle-complète ;
   - chaque formule équivaut modulo T à une formule existentielle ;
   - chaque formule équivaut modulo T à une formule universelle ;
   - chaque formule universelle équivaut modulo T à une formule existentielle.

c. Montrer que toute théorie modèle-complète possède une axiomatisation $\forall\exists$.

d. On suppose que $T = T_{\forall\exists}$ est κ-catégorique. Montrer que T est modèle-complète.

e. Soit T élémentaire. Une *modèle-compagne* de T est une théorie T' modèle-complète et compagne de T, i.e. telle que $T_\forall = T'_\forall$ (v. ex. 14.4). Donner quelques exemples.

f. Montrer que si la modèle-compagne existe, elle est unique.

15.7. Grâce à l'omission des types (ex. 10.6) , montrer directement que toute théorie élémentaire en langage dénombrable ayant un modèle infini, en a un de cardinal $\aleph_0$.

15.8 (autres logiques). Une logique Λ possède :

- la *propriété de Löwenheim dénombrable* si elle vérifie : tout $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncé satisfaisable a un modèle de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$;
- la *propriété de Skolem dénombrable* si elle vérifie : toute $\Lambda(\mathcal{L})$-théorie satisfaisable a un modèle de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \Theta + \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$.

a. Montrer que $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\mathcal{L})$ a la propriété de Skolem dénombrable.

b. Donner $\mathcal{L}$ dénombrable et une $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\mathcal{L})$-théorie dont tout modèle est de cardinal au moins continu. Y a-t-il paradoxe ?

c. Soit $\Lambda_{\omega,\omega}(Q)$ obtenue en ajoutant à la logique élémentaire le quantificateur $\exists_{\geqslant\aleph_0}$. Montrer que cette logique a la propriété de Skolem dénombrable. Et pour le quantificateur $\exists_{\geqslant\kappa}$?

d. Montrer que ni la logique infinitaire $\Lambda_{\omega_1,\omega_1}$ ni la sémantique pleine du deuxième ordre $\mathbb{A}^{2,p}$ n'a la propriété de Löwenheim dénombrable.

e. La sémantique *faible/finie* du deuxième ordre $\mathbb{A}^{2,f}$ est celle où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ décrivent les parties *finies*. Montrer qu'elle a la propriété de Skolem dénombrable.

f. Qu'en est-il du volet ascendant ?

15.9 (cardinaux de Löwenheim, Skolem, Hanf, Tarski). (Deuxième lecture : il faut manier des cardinaux dans ZFC.) Abstraction de l'ex. 15.8. Soit Λ une logique telle que pour tout langage $\mathcal{L}$, la collection $\Lambda(\mathcal{L})$-Én reste un ensemble.

- Son *cardinal de Löwenheim* est le plus petit cardinal κ tel que pour tout langage $\mathcal{L}$, tout $\mathcal{L}$-énoncé satisfaisable possède un modèle de cardinal $\leqslant \kappa + \operatorname{card} \mathcal{L}$;
- son *cardinal de Skolem* est défini comme celui de Löwenheim mais avec une $\mathcal{L}$-théorie ;
- son *cardinal de Hanf* est le plus petit cardinal κ tel que pour tout langage $\mathcal{L}$, tout $\mathcal{L}$-énoncé satisfaisable en un modèle de cardinal $\geqslant \kappa$ possède des modèles arbitrairement grands ;
- son *cardinal de Tarski* est défini comme celui de Hanf mais avec une $\mathcal{L}$-théorie.

Montrer que c'est bien défini. (Remarque : l'hypothèse exclut des logiques violemment infinitaires comme $\Lambda_{\infty,\infty}$.) Pour $\Lambda_{\omega,\omega}$, ces cardinaux valent tous $\aleph_0$.

Notes conclusives

- **Repères historiques**

Ich bedaure es aus mehr als einem Grunde schwer, daß man von dem eleganten Peirce-Schröderschen Kalkul abgewichen ist und die Peano-Russellschen Zeichen benutzt [...] *Mit Russells Zeichen hätte ich manches nicht entdeckt, was ich gefunden habe* [...] *Ungünstige Zeichen lähmen die Produktivität.* [Löw40]

Was die Anwendung der transfiniten Kardinalzahlen auf einem solchen Gebiete betrifft, so kann man fragen, ob der Verf. auf den allgemeinen Relativismus aufmerksam ist, den man bei formalistischer Begründung der Mathematik nicht vermeiden kann. Skolem, recension de [Tar30a]

Was die höheren Mächtigkeiten betrifft, findet der Ref., daß es wünschenswert wäre, wenn diejenigen Forscher, welche diese anwenden, sagen wollten, woher sie diese haben, ob von der Cantor*schen Mengenlehre her oder etwa von einer axiomatischen Mengenlehre. Die erste Theorie kann man nicht als stichhaltig ansehen, weil ihr eine Denkweise zugrunde liegt, die bekanntlich zu Widersprüchen führt, und was die axiomatische Mengenlehre betrifft, so ist es mindestens zweifelhaft, ob man auf ihrer Grundlage den höheren Mächtigkeiten einen absoluten Sinn, also nicht nur einen relativen, beilegen kann.* Skolem, recension de [**Mal36**]

Extensions élémentaires. Elles apparaissent dans [TV58] ; tout l'article est devenu classique. Le « critère de Tarski-Vaught » est [TV58, Theorem 1.10].

Löwenheim, cet inconnu. Pour y remédier, [Thi07].

Théorème descendant. • Les énoncés d'origine ont la forme : si T est satisfaisable, elle possède un modèle dénombrable. • Cas d'un seul énoncé : [**Löw15**, Satz 2]. Les spécialistes débattent encore du sens à donner au

[Löw40] : Leopold Löwenheim. « Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul ». In : *J. Symbolic Logic* 5 (1940), p. 1-15
[Tar30a] : Alfred Tarski. « Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I ». In : *Monatsh. Math. Phys.* 37.1 (1930), p. 361-404
[Thi07] : Christian Thiel. « A short introduction to Löwenheim's life and work and to a hitherto unknown paper ». In : *Hist. Philos. Logic* 28.4 (2007), p. 289-302
[**Löw15**] : Leopold Löwenheim. « Über Möglichkeiten im Relativkalkül ». In : *Math. Ann.* 76.4 (1915), p. 447-470

résultat et de la correction de sa démonstration ; c'est analysé en détail dans [Badesa]. On recommande aussi [Brady]. • Skolem [Sko20, Satz 2] a clarifié et généralisé aux *ensembles* d'énoncés ; son texte est saisissant de précision, et le rôle de l'axiome de choix pointé avec acuité. (Par ailleurs [Sko20] traite trois autres sujets ; un guide à la lecture de cet article historique est [Pla07].) • Skolem y revint dans la révolutionnaire allocution d'Helsinki [**Sko23**]. • Version avec sous-structures élémentaires : [TV58, § 2]. • Outre Skolem, lire [Vau74] aux instructives remarques historiques sur ce théorème (entre autres).

Théorème ascendant. Mentionné dans une « remarque de la rédaction » du journal (vraisemblablement écrite par Tarski) ajoutée à [**Sko34**], et attribué à Tarski « als Zusatz zum bekannten Satz von Löwenheim-Skolem ». Également dans [**Mal36**, § 6], sans référence à Tarski.

Paradoxe de Skolem. Il remonterait à 1915 ou 1916 mais fut communiqué lors du Congrès des Mathématiciens Scandinaves de Helsinki. Zermelo combattit longtemps le « skolemisme » (« die Lehre, daß *jede* mathematische Theorie, auch die Mengenlehre, in einem *abzählbaren Modell* realisierbar sei » ; [Zer32], italiques de l'auteur). Rejet de la logique du premier ordre ou incompréhension ? Zermelo professait le caractère essentiellement infinitaire des mathématiques ; avec générosité [DE00] on peut voir en lui un précurseur des logiques infinitaires, même s'il ne semble pas avoir eu d'influence sur l'école de Berkeley. (Par la suite Zermelo refusa aussi les phénomènes d'incomplétude, pour de semblables motifs philosophiques.)

Catégoricité et complétude. • Le théorème ne vaut qu'en logique élémentaire ; revoir § 8, notes conclusives. • L'emploi de la κ-catégoricité pour montrer la complétude a été dégagé indépendamment par Łoś [Łoś54a, (3.1)] et Vaught [Vau54, Theorem 3] ; l'article de Łoś est clairement plus ancien mais celui de Vaught a des références

[Badesa] : Calixto Badesa. *The birth of model theory.* Löwenheim's theorem in the frame of the theory of relatives. Translated from the Spanish by Michael Maudsley. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2004, p. xiv+240

[Brady] : Geraldine Brady. *From Peirce to Skolem.* T. 4. Studies in the History and Philosophy of Mathematics. A neglected chapter in the history of logic. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 2000, p. xii+468

[Sko20] : Thoralf Skolem. *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.* Kristiania, 1920. 36 p.

[Pla07] : Jan von Plato. « In the shadows of the Löwenheim-Skolem theorem : early combinatorial analyses of mathematical proofs ». In : *Bull. Symb. Log.* 13.2 (2007), p. 189-225

[Vau74] : Robert Vaught. « Model theory before 1945 ». In : *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971).* 1974, p. 153-172

[**Sko34**] : Thoralf Skolem. « Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen ». In : *Fundam. Math.* 23 (1934), p. 150-161

[Zer32] : Ernst Zermelo. « Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen ». In : *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 41 (1932), p. 85-88

[DE00] : Dirk van Dalen et Heinz-Dieter Ebbinghaus. « Zermelo and the Skolem paradox ». In : *Bull. Symbolic Logic* 6.2 (2000). With an appendix in German by E. Zermelo, p. 145-161

[Łoś54a] : Jerzy Łoś. « On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems ». In : *Colloq. Math.* 3 (1954), p. 58-62

[Vau54] : Robert Vaught. « Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **57** = *Indagationes Math.* 16 (1954), p. 467-472

historiques intéressantes et consacre la terminologie « Löwenheim-Skolem-Tarski » (v. supra), tout en mentionnant Maltsev. Je n'ai pas pu me procurer le doctorat de Vaught (sous la direction de Tarski).

∃-clos, modèle-complétude, modèle-compagnes (ex. 15.5 et 15.6). • La caractérisation Π_2 est dans [ŁS57, Theorem 2], et indépendamment [Cha59] qui le mentionne. On peut trouver des intuitions de la chose dans [Rob55b, Theorem 2.3]. Il faudrait en chercher chez Maltsev. • L'étude des théories $\forall\exists$ κ-catégoriques (ex. 15.6 d.) est conséquence très faible de [Lin64, Corollary 4]. Cherlin m'a conseillé d'en tirer le Nullstellensatz. • Les modèles-compagnes forment un pan de la théorie des modèles de terminologie malencontreuse et daté. On s'étonne qu'il n'ait pas eu de réécriture catégorique. • Ces notions sont cependant utiles en algèbre modèle-théorique et plus spécialement pour les théories de modules [ES71]. • Toute théorie $\aleph_0$-catégorique a une modèle-compagne [Sar73].

• **Terminologie.** • Tarski et Vaught appelaient « arithmétiques » les extensions logiques ; on les dit aussi « élémentaires » par référence à la logique ambiante. • Skolem, sans être finitiste, était fort critique à l'égard de l'infini indénombrable actuel, ou plutôt de la hiérarchie cardinale selon Cantor ; v. citation ci-dessus. Il y a donc quelque licence à nommer « de Löwenheim-Skolem » la contrepartie ascendante de son résultat ; il faudrait sans doute dire *de Tarski-Maltsev*.

• **Théories avec témoins existentiels (ex. 15.4).** Il existe une variante forte.

Définition. Une théorie *définit des témoins existentiels* si pour chaque formule $\varphi(x,\mathbf{y})$ il existe une formule $\tau_\varphi(x,\mathbf{y})$ telle que $T \models (\forall\mathbf{y})[(\exists x)\varphi(x,\mathbf{y}) \leftrightarrow (\exists_{=1}x)\tau_\varphi(x,\mathbf{y}) \wedge (\forall x)(\tau_\varphi(x,\mathbf{y}) \to \varphi(x,\mathbf{y}))]$.

Les τ_φ permettent alors de définir des fonctions de Skolem. • L'exercice 15.4 montre même que toute théorie possède une extension DTE dans un langage à peine augmenté, mais la notion est surtout intéressante sans changer de langage. • Grâce au schéma de récurrence, l'arithmétique de Peano est DTE. La théorie des corps réels clos aussi (mais il faut avoir compris un peu d'*o*-minimalité).

• **Cardinaux de Löwenheim, Skolem, Hanf, Tarski (ex. 15.9).** En logique « d'ordre supérieur », on tombe tout de suite sur des questions de grands cardinaux [Mag71] ; une bonne référence est [Shapiro, § 6.4]. Autres logiques dans [MV11].

[ŁS57] : Jerzy Łoś et Roman Suszko. « On the extending of models IV ». In : *Fund. Math.* 44 (1957), p. 52-60

[Cha59] : Chen-Chung Chang. « On unions of chains of models ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 10 (1959), p. 120-127

[Rob55b] : Abraham Robinson. « On ordered fields and definite functions ». In : *Math. Ann.* 130 (1955), p. 275-271

[Lin64] : Per Lindström. « On model-completeness ». In : *Theoria (Lund)* 30 (1964), p. 183-196

[ES71] : Paul Eklof et Gabriel Sabbagh. « Model-completions and modules ». In : *Ann. Math. Logic* 2.3 (1970/71), p. 251-295

[Sar73] : Daniel Saracino. « Model companions for $\aleph_0$-categorical theories ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 39 (1973), p. 591-598

[Mag71] : Menachem Magidor. « On the role of supercompact and extendible cardinals in logic ». In : *Israel J. Math.* 10 (1971), p. 147-157

[Shapiro] : Stewart Shapiro. *Foundations without foundationalism.* T. 17. Oxford Logic Guides. A case for second-order logic. New York : The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991, p. xx+277

[MV11] : Menachem Magidor et Jouko Väänänen. « On Löwenheim-Skolem-Tarski numbers for extensions of first order logic ». In : *J. Math. Log.* 11.1 (2011), p. 87-113

- **Sur le paradoxe de Skolem.** On lit parfois qu'il s'agit d'un hiatus entre deux notions de dénombrabilité ; ceci demande une précision. Soient $\mathcal{U}_0 \preccurlyeq \mathcal{U}$ deux modèles de ZF, avec $\mathcal{U}_0$ dénombrable. La discussion emprunte des éléments au chapitre V.
  - Soit Ord la collection définissable des ordinaux formels (v. § 22) ; on évite évidemment désormais le mot « ensemble », mais on voit Ord comme un foncteur. Par élémentaire inclusion $\mathrm{Ord}[\mathcal{U}_0] = \mathrm{Ord}[\mathcal{U}] \cap \mathcal{U}_0$. Notamment $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_0$ ont même premier ordinal limite ω. Un objet de $\mathcal{U}_0$ est dénombrable au sens de $\mathcal{U}_0$ ss'il l'est au sens de $\mathcal{U}$. En effet la dénombrabilité est l'existence d'une bijection avec ω, i.e. d'un ensemble vérifiant une certaine formule ; c'est une propriété élémentaire $\varphi(x, \omega)$. Si a est un point de $\mathcal{U}_0$, on a bien que a est $\mathcal{U}_0$-dénombrable ssi $\mathcal{U}_0 \models \varphi(a, \omega)$ ssi $\mathcal{U} \models \varphi(a, \omega)$ ssi a est $\mathcal{U}$-dénombrable. Pour les objets de $\mathcal{U}_0$, *il n'y a donc pas de différence entre la dénombrabilité dans $\mathcal{U}_0$ et dans $\mathcal{U}$.*
  - Dans ZF on montre aisément que la classe de tous les ensembles n'est pas dénombrable ; $\mathcal{U}_0$ ne l'est donc pas. Le paradoxe serait plutôt là. Pour le lever on rappelle que le raisonnement précédent n'est valable que pour les objets de $\mathcal{U}_0$; or $\mathcal{U}_0$ n'est pas un objet de $\mathcal{U}_0$, plus précisément il n'existe pas d'objet de $\mathcal{U}_0$ codant toute la combinatoire d'appartenance de $\mathcal{U}_0$.
  - Il est temps d'inspecter le paragraphe précédent. Il y a deux interprétations à « la classe de tous les ensembles n'est pas dénombrable » :
    1. par référence à un ω propre au modèle (comme nous l'avons fait).

       Cette interprétation est formalisable ; la $\mathcal{U}$-dénombrabilité et la $\mathcal{U}_0$-dénombrabilité coïncident pour les objets de $\mathcal{U}_0$; $\mathcal{U}_0$ est un objet de $\mathcal{U}$, mais pas de $\mathcal{U}_0$; ainsi $\mathcal{U} \models (\exists f)(f : \mathcal{U}_0 \simeq \omega)$ mais cette information n'est pas transférable puisque le paramètre $\mathcal{U}_0$ n'est pas un élément de $\mathcal{U}_0$; il n'y a pas de paradoxe ;
    2. par référence à une entité absolue, indépendante des modèles.

       Dans ce second cas on voit mal où vivraient les bijections codant la dénombrabilité : la dénombrabilité cesse d'être une propriété formelle, et l'inclusion élémentaire $\mathcal{U}_0 \preccurlyeq \mathcal{U}$ est inexploitable ; il n'y a pas de paradoxe (ni d'ailleurs de cadre formalisant la dénombrabilité sans ambiguité).

  En conclusion si hiatus il y a, ce n'est pas entre deux notions relatives de dénombrabilité (dans $\mathcal{U}_0$ contre dans $\mathcal{U}$), mais entre une notion absolue, intuitive (et partant informalisable, inopérante) et une notion relative (formalisable). Dans aucun des deux cas on n'a de paradoxe.

- **Catégoricité : le théorème de Morley.** • Dès [Łoś54a, § 5], Łoś notait que le spectre de catégoricité (ensemble des cardinaux κ pour lesquelles une théorie est κ-catégorique) est toujours simple : le comportement en $\aleph_0$ et $\aleph_1$ est indépendant, mais à partir de $\aleph_1$ les cardinaux sont solidaires. • Morley démontra le phénomène dans [**Mor65a**], issu de son doctorat [Mor62] sous la direction de Vaught.

Théorème (Morley)**.** Soit T une théorie en langage dénombrable. Alors T est κ-catégorique en un $\kappa \geqslant \aleph_1$ ssi T est κ-catégorique en tout $\kappa \geqslant \aleph_1$.

Ce théorème est souvent considéré comme la naissance de la théorie des modèles moderne. • Shelah [She74a] supprima l'hypo-

[**Mor65a**] : Michael Morley. « Categoricity in power ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 114 (1965), p. 514-538
[Mor62] : Michael Morley. « Categoricity in power ». Thèse de doct. The University of Chicago, 1962
[She74a] : Saharon Shelah. « Categoricity of uncountable theories ». In : *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1971).* 1974, p. 187-203

thèse de dénombrabilité (il faut alors remplacer $\kappa \geqslant \aleph_1$ par $\kappa > \operatorname{card} \mathcal{L}$). • D'autres successeurs de Morley (Zilber notamment) s'interrogèrent sur les liens entre $\aleph_1$-catégoricité et géométrie algébrique. • La catégoricité fut le moteur de la théorie des modèles jusqu'à l'émergence de la stabilité abstraite (« théorie de la classification » de Shelah dans les années 1970) et l'essor de l'*o*-minimalité dans les années 1980.

• **Classes élémentaires abstraites**

Définition (classe élémentaire abstraite)**.** Une *classe élémentaire abstraite* est une classe de $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{C}$ munie d'une relation $\leqslant$ vérifiant les propriétés suivantes :

– $\mathcal{C}$ est close sous isomorphisme ;
– $\leqslant$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}$, compatible avec l'isomorphisme ;
– si $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in \mathcal{C}$ vérifient $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{C}$, $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{C}$, et $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$, alors $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$;
– réunions croissantes : si $(\mathbb{A}_i)_{i \in I}$ est une famille $\leqslant$-croissante, alors $\mathbb{A}^* = \bigcup_I \mathbb{A}_i$ est dans $\mathcal{C}$, et $\mathbb{A}_i \leqslant \mathbb{A}^*$; si en outre $\mathbb{A}_i \leqslant \mathbb{B}$, alors $\mathbb{A}^* \leqslant \mathbb{B}$;
– $\mathcal{C}$ possède un *cardinal de Skolem* abstrait, i.e. un $\lambda_{\mathcal{C}} \geqslant \operatorname{card} \mathcal{L} + \aleph_0$ vérifiant : si $A \subseteq \mathbb{B} \in \mathcal{C}$, alors il existe $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ contenant A et de cardinal $\leqslant \max(\operatorname{card} A, \lambda_{\mathcal{C}})$.

Toute classe élémentaire concrète $\mathbf{Mod}(T)$ (pour la vraie inclusion élémentaire) est bien une telle classe, avec $\lambda_{\mathcal{C}} = \max(\operatorname{card} \mathcal{L}, \aleph_0)$.

Conjecture (Shelah)**.** Il existe une fonction cardinale $\mu(\lambda)$ telle que pour toute classe élémentaire abstraite, si $\mathcal{C}$ est κ-catégorique en un $\kappa \geqslant \mu(\lambda_{\mathcal{C}})$, alors elle l'est en tous.

Le théorème de Morley établit cette conjecture pour les classes élémentaires *concrètes*, avec la fonction identité. • [Shelah2] est une lecture trop ambitieuse ; ni [Baldwin], ni [Gro02], ni [BV17] n'est accessible en première lecture ; il est vrai que le sujet se prête mal aux introductions.

§ 16. Ultraproduits

Cette section repart des *filtres* et *ultrafiltres* (§ 16.1) pour présenter une construction très utile en théorie des modèles : l'*ultraproduit* (§ 16.2), dont la théorie à paramètres est décrite par le *théorème de Łoś*. On verra notamment son application à l'intuition de phénomènes non standard, et à la compacité (§ 16.3).

Prérequis : §§ 11, 14.

[Shelah2] : Saharon Shelah. *Classification theory for elementary abstract classes.* T. 18. Studies in Logic (London). College Publications, London, 2009, p. vi+813
[Baldwin] : John Baldwin. *Categoricity.* T. 50. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, p. xii+235
[Gro02] : Rami Grossberg. « Classification theory for abstract elementary classes ». In : *Logic and algebra.* T. 302. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 165-204
[BV17] : Will Boney et Sebastien Vasey. « A survey on tame abstract elementary classes ». In : *Beyond first order model theory.* CRC Press, Boca Raton, FL, 2017, p. 353-427

§ 16.1. Filtres et ultrafiltres

On a déjà rencontré ces notions en § 5.2. (Emploi topologique mentionné en § C.)

- **Filtres**

Définition (filtre)**.** Soit I un ensemble non vide. Un *filtre de* $P(I)$ est une collection $\mathcal{F}$ de parties de I telle que :

— $I \in \mathcal{F}$ et $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

— si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;

— si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B \subseteq I$, alors $B \in \mathcal{F}$.

On dit souvent « filtre *sur* I ».

Exemple. Soit I un ensemble infini. L'ensemble $\mathcal{F}$ des parties *cofinies* (de complémentaire fini) de I est un filtre de $P(I)$. Plus généralement si $\lambda \leqslant \kappa$ sont deux cardinaux infinis, l'ensemble des parties de κ de cocardinal $< \lambda$ forme un filtre de $P(\kappa)$.

Lemme. Une collection $\mathcal{B}$ de parties de I peut être incluse dans un filtre ssi elle a la propriété des intersections finies (i.e. si $n \in \mathbb{N}$ et $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, alors $B_1 \cap \cdots \cap B_n \neq \varnothing$; v. § 4).

Démonstration. Un sens est clair. Pour la réciproque, voir que $\mathcal{F} = \{A \subseteq I :$ il y a $n \in \mathbb{N}$ et $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ tels que $B_1 \cap \cdots \cap B_n \subseteq A\}$ est un filtre. □

- **Ultrafiltres**

Définition (ultrafiltre)**.** Un *ultrafiltre* est un filtre maximal pour l'inclusion.

Exemple. Soit $a \in I$. L'ultrafiltre *principal*, ou *de Dirac*, en a est $\delta_a = \{Y \subseteq I : a \in Y\}$.

Si I est fini tout ultrafiltre est de cette forme. Si I est infini l'existence d'autres ultrafiltres demande un raisonnement non constructif, de type choix/Zorn/Krull.

Remarques

— Un ultrafiltre correspond à un idéal maximal de $P(I)$; pour en affirmer l'existence on n'a pas besoin du « théorème de Krull » en toute généralité (lequel équivaut à l'axiome du choix), mais seulement du théorème de Krull *pour les anneaux de Boole*. Une forme faible de choix est pourtant nécessaire.

— Un ultrafiltre correspond également à une mesure additive (mais pas σ-additive) sur $(I, P(I))$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. Ce point de vue est parfois le meilleur : un ultrafiltre donne une notion « tout ou rien » de généricité.

Lemme (suit de AC, mais est moins fort)**.** Toute famille ayant la propriété des intersections finies s'inclut dans un ultrafiltre.

Proposition. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de $P(I)$. Alors $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre ssi pour tout $A \subseteq I$, soit $A \in \mathcal{F}$ soit $A^c \in \mathcal{F}$.

Démonstration. La disjonction est clairement exclusive. Supposons que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre, et $A \notin \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F} \cup \{A\}$ a la propriété des intersections finies, on peut l'inclure dans un filtre, et donc dans un ultrafiltre : cela contredit la maximalité de $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} \cup \{A\}$ n'a pas la propriété : il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $A \cap B = \varnothing$. Alors $B \subseteq A^c$, d'où $A^c \in \mathcal{F}$.

Supposons réciproquement que $\mathcal{F}$ contient toujours A ou A^c. Soit $\mathcal{F} \subseteq \hat{\mathcal{F}}$ un filtre affinant $\mathcal{F}$; soit $A \in \hat{\mathcal{F}}$. Clairement $A^c \notin \mathcal{F}$, donc par hypothèse $A \in \mathcal{F}$. Ceci montre $\mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}$, i.e. la maximalité. □

Notamment un ultrafiltre est non principal ss'il contient le filtre cofini.

§ 16.2. Ultraproduits et ultrapuissances

• Ultraproduits

$\prod_I \mathbb{S}_i/\mathcal{U}$

Définition (ultraproduit)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Soit I un ensemble d'indices et $\{\mathbb{S}_i : i \in I\}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $P(I)$. On définit une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{S}^*$ comme suit.

— Sur $\prod_I \mathbb{S}_i$ on met la relation $(a_i) \sim (b_i)$ si $\{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$. C'est une relation d'équivalence.

— Soit $\mathbb{S}^* = \prod_I \mathbb{S}_i/\sim$ l'ensemble quotient ; on notera $[(a_i)]$ la classe d'une suite d'éléments ; on peut aussi noter $[(\mathbf{a}_i)]$ la classe d'une suite de uplets. (Pour éviter toute confusion nous noterons temporairement $\varphi[\![\mathbb{S}]\!]$ l'interprétation.)

— Pour $c \in \mathcal{L}$ constante, on pose $c[\![\mathbb{S}^*]\!] = [(c[\![\mathbb{S}_i]\!])]$.

— Pour $R \in \mathcal{L}$ relation n-aire, on pose $R[\![\mathbb{S}^*]\!] = \{[(\mathbf{a}_i)] \in (\mathbb{S}^*)^n : \{i : \mathbf{a}_i \in R[\![\mathbb{S}_i]\!]\} \in \mathcal{U}\}$.

— Pour $f \in \mathcal{L}$ fonction n-aire et $\mathbf{a}^* = [(\mathbf{a}_i)]$, on pose $f[\![\mathbb{S}^*]\!](\mathbf{a}^*) = [f[\![\mathbb{S}_i]\!](\mathbf{a}_i)]$.

C'est bien défini. La structure résultante est appelée l'*ultraproduit des $\mathbb{S}_i$ relativement à $\mathcal{U}$*, noté $\prod_I \mathbb{S}_i/\mathcal{U}$.

Remarque. La notion est légèrement plus générale : on peut factoriser par un filtre, et parler de *produit réduit*. Voir les exercices.

Théorème (Łoś)**.** Soit $\varphi(\mathbf{a}^*)$ une formule à paramètres dans $\mathbb{S}^*$, avec $\mathbf{a}^* = [(\mathbf{a}_i)]$. Alors $\mathbb{S}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$ ssi $\{i \in I : \mathbb{S}_i \models \varphi(\mathbf{a}_i)\} \in \mathcal{U}$.

Démonstration. On note $[\![\varphi(\mathbf{a}^*)]\!] = \{i \in I : \mathbb{S}_i \models \varphi(\mathbf{a}_i)\}$. Le théorème est donc : $\mathbb{S}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$ ssi $[\![\varphi(\mathbf{a}^*)]\!] \in \mathcal{U}$. Récurrence sur φ.

— Le cas de base $R(\mathbf{a}^*)$ (dont $\perp$ et $=$) est par définition.

— Supposons $\varphi(\mathbf{a}^*)$ de la forme $\chi_1(\mathbf{a}^*) \to \chi_2(\mathbf{a}^*)$. Alors l'ensemble

$$[\![\varphi(\mathbf{a}^*)]\!] = [\![\neg\chi_1(\mathbf{a}^*)]\!] \cup [\![\chi_2(\mathbf{a}^*)]\!] = [\![\chi_1(\mathbf{a}^*)]\!]^c \cup [\![\chi_2(\mathbf{a}^*)]\!]$$

est dans $\mathcal{U}$ ssi ($[\![\chi_1(\mathbf{a}^*)]\!] \notin \mathcal{U}$ ou $[\![\chi_2(\mathbf{a}^*)]\!] \in \mathcal{U}$), ssi $\mathbb{S}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$.
Par redondance des connecteurs booléens, cela suffit au niveau propositionnel ; on peut aussi vérifier les cas à la main pour manipuler un peu.

— Supposons $\varphi(\mathbf{a}^*)$ de la forme $(\exists x)\chi(x, \mathbf{a}^*)$. Si $\mathbb{S}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$, alors il existe $b^* = [(b_i)] \in \mathbb{S}^*$ tel que $\mathbb{S}^* \models \chi(b^*, \mathbf{a}^*)$. Clairement $[\![\chi(b^*, \mathbf{a}^*)]\!] \subseteq [\![(\exists x)\chi(x, \mathbf{a}^*)]\!]$; par récurrence, le premier est dans $\mathcal{U}$, donc le second aussi.
Supposons $J = [\![\varphi(\mathbf{a}^*)]\!] \in \mathcal{U}$. Pour $i \in J$ soit $b_i \in \mathbb{S}_i$ tel que $\mathbb{S}_i \models \chi(b_i, \mathbf{a}_i)$; pour $i \in J^c$ soit b_i quelconque ; on forme $b^* = [(b_i)]$. Alors $J \subseteq [\![\chi(b^*, \mathbf{a}^*)]\!]$ donc par récurrence $\mathbb{S}^* \models \chi(b^*, \mathbf{a}^*)$, et $\mathbb{S}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$. □

À titre d'exemple, on montre un emploi typique. La méthode est à retenir.

Corollaire (extension d'ordres partiels)**.** Tout ordre partiel peut être étendu en un ordre total.

Démonstration. Il faut d'abord se convaincre que c'est vrai sur un ensemble fini ; c'est de la combinatoire intuitive, non de la logique.

Soit $\mathbb{O} = (O, \sqsubseteq)$ un ordre partiel. Soit I l'ensemble des parties finies de O. Sur chaque $F \in I$, on met un ordre total $\leqslant_F$ étendant $\sqsubseteq_{|F}$. Soit $\mathbb{A}_F = (F, \leqslant_F)$, qui est un ordre total. Pour $a \in O$ soit $[\![a]\!] = \{F \in I : a \in F\}$. La famille $\{[\![a]\!] : a \in O\}$ a la propriété des intersections finies car $\{a_1, \ldots, a_n\} \in [\![a_1]\!] \cap \cdots \cap [\![a_n]\!]$. On inclut cette famille dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Soit $\mathbb{A}^* = \prod_I \mathbb{A}_F/\mathcal{U}$ l'ultraproduit résultant, muni de la relation $\leqslant^*$. D'après le théorème de Łoś, c'est un ordre total.

Montrons qu'il existe un plongement $\mathbb{O} \hookrightarrow \mathbb{A}^*$ [**Ord**]. En effet à $a \in O$ associons la suite constante $(a : F \in I)$. Noter que $a \in F$ seulement $\mathcal{U}$-*génériquement*, i.e. pour F dans un élément de $\mathcal{U}$ (en l'occurrence, $[\![a]\!]$), mais cela suffit pour former $[(a : F \in I)]$, par exemple en complétant arbitrairement sur $[\![a]\!]^c$. Soit $\varphi(a) = [(a : F \in I)]$. Alors $\varphi\colon \mathbb{O} \hookrightarrow \mathbb{A}^*$ [**Ord**]. En effet si $a \sqsubset b$ dans $\mathbb{O}$, alors :

$$[\![a]\!] \cap [\![b]\!] \subseteq \{F \in I : (a, b \in F) \wedge (a <_F b)\}.$$

L'ensemble de gauche est dans $\mathcal{U}$ par construction, d'où $\varphi(a) < \varphi(b)$ par définition de l'ultraproduit. □

Remarque. L'argument emploie, outre l'existence d'un ultrafiltre sur I (i.e. de $P(I)$), la possibilité de choisir un ordre total sur chaque $F \in I$. Le premier point est une forme faible de choix ; le second a sa pleine force.

- **Ultrapuissances.** Quand toutes les $\mathbb{S}_i$ sont égales, on parle d'*ultrapuissance*.

Lemme. Soient $\mathbb{S}$ une structure, I un ensemble non vide, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $P(I)$. On note $\mathbb{S}^*$ l'ultrapuissance associée. Alors le plongement diagonal $\mathbb{S} \rightarrowtail \mathbb{S}^*$ est élémentaire.

Démonstration. Le plongement diagonal $a \mapsto [(a)]$ emmène un élément sur la classe de la suite constante : il est élémentaire d'après le théorème de Łoś. □

Exemple. Soit $\mathbb{N}^*$ une ultrapuissance non principale des entiers $\mathbb{N}$. Alors $\mathbb{N}^* \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ (notamment $\mathbb{N}^* \models \mathrm{PA}$, mais ici c'est beaucoup plus précis), et c'est un modèle non standard. Voici comment se figurer les infiniments grands.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont assimilées dans $\mathbb{N}^*$ ssi elles coïncident $\mathcal{U}$-presque partout. On voit que pour chaque k donné, la suite constante $u_n = k$ et la suite $v_n = n$ sont différentes. En fait $v_n > u_n$ presque partout (puisque c'est vrai cofiniment souvent, et que $\mathcal{U}$ est non principal). Donc $[(v_n)]$ est un élément qui majore tous les entiers, un élément non standard.

On peut alors raisonner assez intuitivement sur les échelles de croissance de suites ; le passage au quotient vers l'ultraproduit garantit qu'après assimilation, le comportement élémentaire est le même que celui de $\mathbb{N}$.

On mentionne enfin un théorème difficile.

Théorème (Keisler-Shelah)**.** Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux structures relationnelles. Alors $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ss'il existe un ensemble I et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I tels que $\prod_I \mathbb{A}/\mathcal{U} \simeq \prod_I \mathbb{B}/\mathcal{U}$.

Remarque. Ce résultat caractérise algébriquement la logique élémentaire par la théorie des ultrafiltres ; vu la complexité de la combinatoire infinie, cette caractérisation n'est pas une simplification.

§ 16.3. Retour sur la compacité

Démonstration du théorème de compacité par les ultraproduits. Soit T un ensemble de formules finiment satisfaisable ; quitte à traiter les variables comme des constantes dans un langage étendu, on n'a que des énoncés. Soit $\{T_i : i \in I\}$ l'ensemble des sous-théories finies. Soit pour $i \in I$ un modèle $\mathbb{S}_i \models T_i$. Pour $\varphi \in T$ on forme $[\![\varphi]\!] = \{i \in I : \mathbb{S}_i \models \varphi\}$.

La famille $\{[\![\varphi]\!] : \varphi \in T\}$ a la propriété des intersections finies. En effet si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont dans T, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = T_{i_0}$, et comme $\mathbb{S}_{i_0} \models T_{i_0}$ on a $i_0 \in [\![\varphi_1]\!] \cap \cdots \cap [\![\varphi_n]\!]$.

Soit donc $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $P(I)$ étendant $\{[\![\varphi]\!] : \varphi \in T\}$; soit $\mathbb{S}^*$ l'ultraproduit résultant. Par construction, pour $\varphi \in T$ on a $[\![\varphi]\!] \in \mathcal{U}$, donc d'après le théorème de Łoś il vient $\mathbb{S}^* \models \varphi$: de sorte que $\mathbb{S}^* \models T$. □

Remarque. Cette remarque ne sera compréhensible qu'en faisant le sujet d'étude § SÉ5.

On a démontré de deux façons la compacité de la logique élémentaire $\Lambda_{\omega,\omega}$: « à la Henkin », et « à la Łoś ». L'argument à la Henkin se généralise aux logiques infinitaires $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ pour κ faiblement compact. Mais l'argument à la Łoś demande κ fortement compact. En effet la formation d'ultraproduit dépend peu du langage a priori : $\mathbb{S}^* = \prod_I \mathbb{S}_i/\mathcal{U}$ étant construit, toute nouvelle relation dans les $\mathbb{S}_i$ s'interprète naturellement dans $\mathbb{S}^*$ en conservant le théorème de Łoś.

Exercices

16.1. Montrer que tout filtre est l'intersection des ultrafiltres qui le contiennent.

16.2. Montrer que l'existence d'ultrafiltres non principaux dans les anneaux $P(E)$ avec E dénombrable entraîne le lemme de Kőnig. (Pour étendre à des arbres « de taille κ », sujet d'étude § SÉ5.)

16.3. On veut montrer le lemme suivant (par ailleurs corollaire trivial du théorème de Keisler-Shelah).

Lemme. Si $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, alors $\mathbb{A}$ se plonge élémentairement dans une ultrapuissance de $\mathbb{B}$.

⟶

a. On considère deux langages $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ et une $\mathcal{L}$-structure fixée $\mathbb{A}$. Montrer que si T' est une $\mathcal{L}'$-théorie élémentaire dont chaque partie finie est satisfaisable dans $\mathbb{A}$, alors T' est satisfaisable dans une ultrapuissance de $\mathbb{A}$.

b. Déduire le lemme.

16.4 (caractérisations des classes élémentaires).

Théorème. Soit $\mathcal{C}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures. Alors sont équivalents :

(i) il existe une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire T telle que $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}(T)$;

(ii) $\mathcal{C}$ est close sous $\equiv$ et ultraproduits ;

(iii) $\mathcal{C}$ est close sous $\simeq$, passage à sous-structure élémentaire, et ultraproduits ;

a. Donner des contre-exemples en affaiblissant « ultraproduits » en « ultrapuissances ».

(*) b. Démontrer le théorème (sans invoquer le théorème de Keisler-Shelah).

Une autre caractérisation est à l'exercice 16.5.

16.5 (quelques conséquences du théorème de Keisler-Shelah). On admet cet énoncé.

a. Démontrer le lemme de cohérence disjointe de Robinson.

b. Montrer qu'une classe de $\mathcal{L}$-structures est de la forme $\mathbf{Mod}(T)$ ssi elle est close sous isomorphisme, ultraproduits, ultraracines (si une ultrapuissance de $\mathbb{A}$ est dans $\mathcal{C}$, alors $\mathbb{A}$ l'était).

c. Montrer qu'une classe de $\mathcal{L}$-structures est de la forme $\mathbf{Mod}(\varphi)$ ssi elle et sa classe complémentaire sont closes sous isomorphisme et ultraproduits. Est-ce vrai avec isomorphisme et *ultrapuissances* ?

d. Déduire que si $\Lambda \supseteq \Lambda_{\omega,\omega}$ est une logique ayant une négation et vérifiant le théorème de Łoś, alors $\Lambda = \Lambda_{\omega,\omega}$ (i.e. tout Λ-énoncé équivaut à un énoncé élémentaire).

16.6 (structures pseudo-finies). Soit T une théorie. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(i) $\mathbb{M} \models \{\varphi :$ pour chaque modèle *fini* $\mathbb{M}_0 \models T$, on a $\mathbb{M}_0 \models \varphi\}$.

(ii) Pour chaque $\mathcal{L}$-énoncé φ, si $\mathbb{M} \models \varphi$, alors il existe un $\mathcal{L}$-modèle *fini* $\mathbb{M}_0 \models T \cup \{\varphi\}$.

(iii) $\mathbb{M}$ est élémentairement équivalent à un ultraproduit $\prod_I \mathbb{M}_i/\mathcal{U}$ où les $\mathbb{M}_i \models T$ sont finis.

On dit que $\mathbb{M}$ est un modèle *pseudo-fini* de T.

16.7 (propriété de Łoś abstraite et compacité). Une logique Λ a la *propriété de Łoś* si pour tout langage $\mathcal{L}$, toute famille $\{\mathbb{A}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{L}$-structure, et tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I, il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}^*$ telle que pour chaque énoncé : $\mathbb{A}^* \models \varphi$ ssi $\{i \in I : \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$.

Montrer que la propriété de Łoś équivaut à la compacité.

16.8 (cardinalité des ultrapuissances régulières). On fixe un ensemble infini A, un ensemble I, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Soit $A^* = \prod_I A/\mathcal{U}$.

Lemme.

(i) Si I est dénombrable et $\mathcal{U}$ non principal, alors card $A^* = A^{\aleph_0}$.

(ii) Plus généralement si $\mathcal{U}$ est *régulier*, alors card $A^* = A^I$.

Un ultrafiltre est *régulier* s'il existe des parties distinctes $[\![i]\!] \in \mathcal{U}$ indexées par $i \in I$, telles que pour chaque i l'ensemble $\{j \in I : i \in [\![j]\!]\}$ soit fini.

a. Application : sous ces hypothèses et en admettant le lemme, si $\varphi(\mathbf{x})$ est une $\mathcal{L}(\mathbf{x})$-formule et que $\varphi[\mathbb{A}]$ est infini, alors $\operatorname{card}\varphi[\mathbb{A}^*] = \operatorname{card}\varphi[\mathbb{A}]^{\operatorname{card} I}$.

b. On suppose I dénombrable et $\mathcal{U}$ non principal. Montrer que $\operatorname{card}\mathbb{A}^* = \operatorname{card}\mathbb{A}^{\aleph_0}$. Indication : pour chaque entier, A^n s'injecte dans A.

c. Montrer que si I est dénombrable, alors « régulier » équivaut à « non principal ».

d. Montrer l'existence d'ultrafiltres réguliers. On pourra noter F l'ensemble des parties finies de I et raisonner dans $P(F)$.

(*) e. On suppose $\mathcal{U}$ régulier. Montrer le lemme.

Ainsi, *les parties définissables infinies d'une ultrapuissance non triviale indexée par* $\mathbb{N}$ *sont de cardinal continu.*

16.9 (produits réduits et formules de Horn).

Définition (produit réduit)**.** Soient I un ensemble d'indices et $\mathcal{F}$ un filtre de $P(I)$. Le *produit réduit modulo* $\mathcal{F}$ d'une famille $(\mathbb{A}_i)_I$ de structures est $\mathbb{A}^* = \prod_I \mathbb{A}_i/\mathcal{F}$, construit comme suit.

- Sur $\prod_I \mathbb{A}_i$, la relation $(a_i) \sim (b_i)$:si $\{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{F}$ est d'équivalence ; on notera $[\cdot]$ ses classes ;
- $c[\mathbb{A}^*] = [(c[\mathbb{A}_i])]$;
- pour $\mathbf{a}^* = [(\mathbf{a}_i)]$, on a $\mathbf{a}^* \in R[\mathbb{A}^*]$ ssi $\{i \in I : \mathbf{a}_i \in R[\mathbb{A}_i]\} \in \mathcal{F}$;
- dans la même notation, $f[\mathbb{A}^*](\mathbf{a}^*) = [(f[\mathbb{A}_i](\mathbf{a}_i))]$.

a. Vérifier que les produits réduits sont bien définis.

b. On rappelle que $\{J^c : J \in \mathcal{F}\}$ est un idéal de l'anneau de Boole $P(I)$; l'anneau de Boole quotient est souvent noté $P(I)/\mathcal{F}$. Démontrer cette généralisation naturelle du théorème de Feferman-Vaught (on pourra vérifier que la construction proposée à l'exercice 6.10 convient). Comme toujours, on pose $[\![\varphi(\mathbf{a}^*)]\!] = \{i \in I : \mathbb{A}_i \models \varphi(\mathbf{a}_i)$.

Théorème (Feferman-Vaught)**.** Soit $\varphi(\mathbf{x})$ une $\mathcal{L}(\mathbf{x})$-formule. Alors il existe un uplet de variables $\mathbf{y}$, une $\mathcal{L}_{\mathrm{Bool}}$-formule $\beta(\mathbf{y})$ et des formules $\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})$ ayant la propriété suivante.

Pour tout ensemble $I \neq \varnothing$, tout filtre $\mathcal{F}$ sur I, toute famille $(\mathbb{A}_i)$, et tous paramètres $\mathbf{a}^* \in \mathbb{A}^*$, on a $\mathbb{A}^* \models \varphi(\mathbf{a}^*)$ ssi $P(I)/\mathcal{F} \models \beta([\![\varphi_1(\mathbf{a}^*)]\!] \mod \mathcal{F}, \dots, [\![\varphi_n(\mathbf{a}^*)]\!] \mod \mathcal{F})$.

c.
- Une *formule basique de Horn* est une formule $(\neg\varphi_1(\mathbf{x})) \vee \cdots \vee (\neg\varphi_n(\mathbf{x})) \vee \chi(\mathbf{x})$, où n peut être nul (pas de φ_i), χ peut être absente, et les φ_i et χ sont toutes de base, i.e. en $R(\mathbf{t})$. On peut aussi l'écrire $(\varphi_1(\mathbf{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(\mathbf{x})) \to \chi(\mathbf{x})$, en tolérant $\perp$ comme $\top$ pour χ.
- Une *formule de Horn* est de la forme $(Q)(\bigwedge_{k=1}^m \eta_k(\mathbf{x}))$, où Q est une suite de quantifications et les η_k sont de Horn basiques.

Démontrer que toute formule de Horn est préservée par produit réduit. (La réciproque est vraie, mais bien plus difficile : une formule préservée par produits réduits est de Horn.)

d. Soit $\Phi \subseteq \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ un ensemble de formules. Un Φ-*produit* est une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{B}$ munie d'une fonction ensembliste $h\colon \prod_I \mathbb{A}_i \to \mathbb{B}$ vérifiant :

si $\varphi(\mathbf{x}) \in \Phi$ et $\mathbf{a}^* = (\mathbf{a}_i) \in \prod_I \mathbb{A}_i$ sont tels que $[\![\varphi(\mathbf{a}^*)]\!] = I$, alors $\mathbb{B} \models \varphi(h(\mathbf{a}^*))$.

(i) Soit At l'ensemble des formules « atomiques », i.e. de la forme $R(\mathbf{a}^*)$. Montrer qu'un At-produit est exactement une image homomorphe.

(ii) Montrer qu'un Horn-produit est exactement un produit réduit.

(iii) Montrer qu'un Form-produit est exactement un ultraproduit.

16.10 (produit d'ultrafiltres). Soient I, J deux ensembles d'indices et $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ des ultrafiltres sur I, resp. J. On pose :

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{X \in P(I \times J) : \{j \in J : \{i \in I : (i,j) \in X\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}.$$

a. Montrer que $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ est un ultrafiltre sur $I \times J$.

b. Soit $\mathbb{A}$ une structure relationnelle. Montrer que $\prod_{I \times J} \mathbb{A}/\mathcal{U} \times \mathcal{V} \simeq \prod_J (\prod_I \mathbb{A}/\mathcal{U})/\mathcal{V}$.

c. Montrer que $\prod_I \mathbb{A}/\mathcal{U}$ et $\prod_J \mathbb{A}/\mathcal{V}$ se plongent élémentairement dans $\prod_{I \times J} \mathbb{A}/\mathcal{U} \times \mathcal{V}$.

(*) d. Montrer qu'en général, $\prod_{I \times J} \mathbb{A}/\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ et $\prod_{J \times I} \mathbb{A}/\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ ne sont pas isomorphes.

16.11 (théorème de Łoś en logique infinitaire). Montrer que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre clos sous intersections dénombrables, alors le théorème de Łoś reste valable dans $\Lambda_{\omega_1,\omega}$. Montrer que l'hypothèse est requise. Généraliser à $\Lambda_{\kappa,\lambda}$.

Un ultrafiltre clos sous intersections dénombrables est dit $\aleph_1$-*complet*. L'existence d'un ultrafiltre non principal et $\aleph_1$-complet équivaut à l'existence de cardinaux mesurables, non décidée par ZFC (§ SÉ5).

Notes conclusives

• **Points d'histoire.** L'enthousiasme pour les ultraproduits, dans les années 1960, put être excessif ; il est retombé. Pour approfondir, [Bell-Slomson] ou le récent [Goldbring].

> *On dit que l'algèbre Γ est obtenue par l'opération* (**P**)*, effectuée sur les algèbres Γ_i, si Γ est l'algèbre du champ simple* **P***, obtenu par le procédé suivant :*
>
> *I. sur chaque algèbre Γ_i on étend un champ simple $\mathbf{P}_i$;*
>
> *II. on construit le produit direct $\mathfrak{P}\mathbf{P}_i$ de tous les champs $\mathbf{P}_i$;*
>
> *III. dans le corps du champ $\mathfrak{P}\mathbf{P}_i$ on choisit un idéal premier I et on divise le champ produit $\mathfrak{P}\mathbf{P}_i$ par cet idéal : $\mathbf{P} = \mathfrak{P}\mathbf{P}/I$.*
>
> [. . .]
>
> *Il est à remarquer que les champs logiques ont été introduits sous une forme moins algébrique, dans* [5]*. Dans ce travail ils furent nommés „matrices algébriques".* [**Łoś55a**, p. 104-105]

([5] est [Łoś49].)

> *In other directions, we find enormous complications. The quotient fields $\mathfrak{C}(X,R)/\mathfrak{M}$, where $\mathfrak{M}$ is a maximal ideal in $\mathfrak{C}(X,R)$, need not be isomorphic to R, but may be very large non-Archimedean ordered, formally real extensions of R. We shall describe these fields in as much detail as possible.* [Hew48, § II.1]

Ultraproduits. • Skolem avait produit un modèle non standard de l'arithmétique [**Sko34**] ; on peut y voir une construction d'ultrapuissance « à la main ». • Hewitt

---

[Bell-Slomson] : John Bell et Alan Slomson. *Models and ultraproducts : An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1969, p. ix+322

[Goldbring] : Isaac Goldbring. *Ultrafilters throughout mathematics.* T. 220. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI : American Mathematical Society, 2022, p. xviii+399

[**Łoś55a**] : Jerzy Łoś. « Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres ». In : *Mathematical interpretation of formal systems.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955, p. 98-113

[Łoś49] : Jerzy Łoś. *O matrycach logicznych.* Wrocław, 1949, p. 42

[Hew48] savait quotienter un anneau de fonctions par un idéal maximal pour récupérer un corps, et notait son caractère non standard. • Les ultraproduits font irruption dans [**Łoś55a**], aboutissement trop discret des travaux de Łoś et de l'école polonaise. Malgré le goût de cette école pour l'analyse fonctionnelle, l'origine des ultraproduits est incertaine. Parmi les recherches antérieures de Łoś, [Łoś48] algébrisait la logique propositionnelle sans disposer de la quantification. Celle-ci est prise en compte dans [Łoś49, § 4], mais la méthode n'est pas exactement celle des ultraproduits ; ils sont également absents de la somme [Łoś55b]. En résumé, *j'ignore absolument comment l'idée des ultraproduits est venue à Łoś, et leur histoire est insuffisamment étudiée.* • Plus sur Łoś : [Bal+00]. • Les ultraproduits sont restés peu connus jusqu'à ce que l'école de Berkeley s'en empare vers 1960 ; ils connurent une grande vogue, qui culmina dans [Bell-Slomson] puis retomba. La théorie des modèles ne se limite pas au maniement d'ultraproduits. Il est dommage que la construction ne soit pas classique en mathématiques générales.

Théorème de Łoś. Il apparaît dans [**Łoś55a**, p. 2.6] (sans démonstration ; même l'énoncé reste implicite).

Compacité par ultraproduits. L'argument paraît dans [FMS62, Theorem 2.10], publication tardive précédée par quatre annonces sur les « Reduced products » [Fra+58] ; voir la 550-9, signée Morel, Scott et Tarski. (Le correctif [FMS62], « *at the suggestion of Professor Tarski* », met Tarski au centre de tout.) • L'exercice 16.3 est [FMS62, Theorem 2.12]. L'exercice 16.4 est [Fra+58, 550-10, Theorem III] ; Łoś n'était pas passé loin.

Théorème de Keisler-Shelah. • Keisler [Kei61b, Theorem 2.4] (issu de son doctorat [Kei61a], sous la direction de Tarski) supposait l'hypothèse du continu généralisée HCG. Plus précisément : si $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ sont de cardinal $\leqslant 2^\kappa$ *et que* $2^\kappa = \kappa^+$, alors il existe un ultrafiltre sur un ensemble de cardinal κ donnant lieu à des puissances isomorphes. • Kochen, dans son doctorat dirigé par Church, avait obtenu le même résultat [Koc60] ; devancé par Keisler il ne l'a pas publié. • Shelah [She71a] enleva l'hypothèse HCG en augmentant l'ensemble d'indexation. Plus précisément, si $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ sont de cardinal $\leqslant \lambda$, alors il existe un ultrafiltre sur un ensemble de cardinal 2^λ etc. [She71a] porte plus sur la combinatoire infinie que la logique à proprement parler ; il contient aussi des références historiques. • Étonnamment, la validité du théorème de Shelah pour des structures dénombrables *avec I dénombrable* entraîne HC [She92] ; derniers

[Łoś48] : Jerzy Łoś. « Sur les matrices logiques ». In : *Colloq. Math.* 1 (1948), p. 337-339

[Łoś55b] : Jerzy Łoś. « The algebraic treatment of the methodology of elementary deductive systems ». In : *Stud. Log.* 2 (1955), p. 151-212

[Bal+00] : Stanisław Balcerzyk et al. « Jerzy Łoś (1920–1998) ». In : *Studia Logica* 65.3 (2000), p. 301-314

[FMS62] : Thomas Frayne, Anne Morel et David Scott. « Reduced direct products ». In : *Fund. Math.* 51 (1962), p. 195-228

[Fra+58] : Thomas Frayne et al. « Notices 550-7 à 550-10 ». In : *Amer. Math. Soc. Notices* 5 (1958), p. 673-675

[Kei61b] : Jerome Keisler. « Ultraproducts and elementary classes ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 = Indag. Math.* 23 (1961), p. 477-495

[Kei61a] : Jerome Keisler. « Ultraproducts and elementary classes ». Thèse de doct. University of California, Berkeley, 1961

[Koc60] : Simon Kochen. « The isomorphism of ultrapowers of elementarily equivalent systems ». In : *Amer. Math. Soc. Notices* 7.7 (50 1960). Notice 576-199, p. 971

[She71a] : Saharon Shelah. « Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers ». In : *Israel J. Math.* 10 (1971), p. 224-233

[She92] : Saharon Shelah. « Vive la différence I. Nonisomorphism of ultrapowers of countable models ». In : *Set theory of the continuum (Berkeley, CA, 1989).* T. 26. Math. Sci. Res. Inst.

développements dans [GS21].

Caractérisation des formules de Horn (exercice 16.9). Ce sont celles préservées par produits réduits. Keisler le montra en supposant l'hypothèse du continu ; Galvin, sans l'hypothèse du continu, par des méthodes ad hoc ; Shelah sans, comme conséquence de [She71a]. On peut encore jouer un peu [Flu74].

- **Terminologie, notations.** Sans faire l'apologie de la notation de Leibniz au XXI^e siècle, on s'étonne de n'avoir jamais vu noter les ultraproduits $\int_I \mathbb{S}_i \, d\mathcal{U}_i$.

- **Sur l'existence des ultrafiltres.** On rappelle que dans ZF, sont équivalents :
  - l'axiome du choix ;
  - le théorème de Krull pour les anneaux (associatifs, commutatifs, unitaires) quelconques.

  Sont également équivalents :
  - l'existence d'ultrafiltres non triviaux dans les $P(X)$;
  - le théorème de Krull pour les anneaux de Boole ;
  - l'existence d'idéaux premiers dans les anneaux quelconques.

  Sur ZF, le premier groupe implique *strictement* le second : le choix entraîne l'existence d'ultrafiltres non principaux, mais la réciproque est fausse. • De toute façon, la preuve de compacité par ultraproduits demande bien de choisir un modèle par sous-théorie finiment engendrée.

- **Cardinalités d'ultraproduits (exercice 16.8).** Étude commencée dans [FMS62] ; plus d'estimations dans [Bell-Slomson, § 6.3] ou [Chang-Keisler, § 4.3].

- **Retour sur la logique du deuxième ordre.** La logique du deuxième ordre n'est pas compacte pour la sémantique pleine (§ 12). Montrons où le théorème de Łoś échoue *au deuxième ordre*.

  Soient $\mathbb{A}_i$ des structures relationnelles, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $P(I)$. On considère l'ultraproduit $\mathbb{A}^*$ des $\mathbb{A}_i$ modulo $\mathcal{U}$. Des sous-ensembles $E_i \subseteq \mathbb{A}_i$ étant fixés, on cherche à donner un sens à $[(E_i)]$ (qui doit être un sous-ensemble de $\mathbb{A}^*$) de manière à étendre le théorème de Łoś. Pour la préservation des formules du deuxième ordre, il faut pour tout élément $a^* = [(a_i)] \in \mathbb{A}^*$ avoir :

$$\mathbb{A}^* \models [(E_i)]([(a_i)]) \quad \text{ssi} \quad \{i \in I : \mathbb{A}_i \models E_i(a_i)\} \in \mathcal{U}.$$

  Cela incite à poser :

$$[(E_i)] := \{[(a_i)] : \{i \in I : \mathbb{A}_i \models E_i(a_i)\} \in \mathcal{U}\}.$$

  Même avec cette définition, le théorème de Łoś est faux. Le problème vient de l'étape en $\exists$. Soit $\varphi(X)$ une formule du deuxième ordre.

  - Si $\{i \in I : \mathbb{A}_i \models (\exists X)\varphi(X)\} \in \mathcal{U}$, soit pour chaque i un témoin $E_i \subseteq \mathbb{A}_i$; on note $E^* = [(E_i)]$. Alors $\{i \in I : \mathbb{A}_i \models \varphi(E_i)\} \in \mathcal{U}$ donc par récurrence, $\mathbb{A}^* \models \varphi(E^*)$, et ainsi $\mathbb{A}^* \models (\exists X)\varphi(X)$. Ce sens est correct.
  - Si réciproquement $\mathbb{A}^* \models (\exists X)\varphi(X)$, on ne peut pas conclure car un témoin E^* n'est pas nécessairement de la forme $[(E_i)]$ pour une famille de sous-ensembles $E_i \subseteq \mathbb{A}_i$.

    Par exemple si I est dénombrable et que les $\mathbb{A}_i$ sont de cardinal fini non borné, on a $2^{\aleph_0}$ « rectangles » $[(E_i)]$, mais card $\mathbb{A}^* = 2^{\aleph_0}$, et donc card $P(\mathbb{A}^*) = 2^{2^{\aleph_0}}$.

  On voit, pour avoir compacité, le besoin de restreindre les classes de parties : ce que fait la « sémantique de Henkin ». Les mathématiciens du non standard appellent *ensembles internes* les rectangles $[(E_i)]$.

Publ. Springer, New York, 1992, p. 357-405

[GS21] : Mohammad Golshani et Saharon Shelah. « The Keisler-Shelah isomorphism theorem and the continuum hypothesis ». arXiv 2108.03977. 2021

[Flu74] : Jörg Flum. « On Horn theories ». In : *Math. Z.* 138 (1974), p. 205-212

- **Structures pseudo-finies (exercice 16.6)**

  Corps pseudo-finis. Leur étude est due à Ax.

  Théorème ([Ax68, § 8, Proposition 5]). Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Alors $\mathbb{K}$ est pseudo-fini ssi :
  - $\mathbb{K}$ est parfait ;
  - $\mathbb{K}$ est *quasi-fini*, i.e. pour chaque $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}$ possède une unique extension de degré n ;
  - $\mathbb{K}$ est *pseudo-algébriquement clos* : toute variété affine irréductible définie sur $\mathbb{K}$ possède un $\mathbb{K}$-point.

  Groupes pseudo-finis. Le résultat suivant est démontré grâce à la classification des groupes simples finis.

  Théorème ([Wil95]). Un groupe simple pseudofini est élémentairement équivalent à un $\mathbb{G}(\mathbb{K})$, où $\mathbb{G}$ est un groupe de Chevalley et $\mathbb{K}$ un corps pseudo-fini.

  Les groupes pseudo-finis n'ont pas livré tous leurs secrets modèle-théoriques ; beaucoup plus dans [Mac18].

- **Point de vue géométrique.** Pour un point de vue géométrique sur les ultraproduits, [Mac06].

- **Canonicité des ultrapuissances.** Relire § 11, notes conclusives.
  - On s'intéresse d'abord aux ultrapuissances $(\mathbb{R}^* ; +, \cdot)$ par des ultrafiltres non principaux $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$. • Chaque tel $\mathbb{R}^*$ est un modèle de $\mathrm{Th}(\mathbb{R} ; +, \cdot)$ avec des infinitésimaux, un « corps hyperréel » (terminologie déconseillée). Cependant 1. toute ultrapuissance demande un ultrafiltre, i.e. une forme (faible) de choix et 2. la structure fine de $\mathbb{R}^*$ dépend de $\mathcal{U}$; à isomorphisme près, le nombre d'objets $\mathbb{R}^*$ pour $\mathcal{U}$ variant parmi les ultrafiltres sur $\mathbb{N}$ est $2^{2^{\aleph_0}}$ [FS10]. (Cf. cas complexe, où tous les corps $\mathbb{C}^*$ sont isomorphes par $2^{\aleph_0}$-catégoricité.) Le théorème de Farah–Shelah est plus général ; on recommande l'introduction de l'article.
  - Au-delà des ultrapuissances par ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, il existe pourtant une extension élémentaire $\mathbb{R}^\dagger$ privilégiée, canonique dans ZFC, obtenue par « ultrapuissance itérée » [KS04]. Son *existence* dépend du choix, mais pas le résultat de la construction. Maigre généralisation dans [KU06].

- **Une application inattendue.** La théorie des ultrafiltres permet de redémontrer un résultat d'« économie », en fait d'agrégation des préférences : le *théorème d'impossibilité d'Arrow* (compléments § M).

[Ax68] : James Ax. « The elementary theory of finite fields ». In : *Ann. of Math. (2)* 88 (1968), p. 239-271

[Wil95] : John Wilson. « On simple pseudofinite groups ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 51.3 (1995), p. 471-490

[Mac18] : Dugald Macpherson. « Model theory of finite and pseudofinite groups ». In : *Arch. Math. Logic* 57.1-2 (2018), p. 159-184

[Mac06] : Angus Macintyre. « Nonstandard analysis and cohomology ». In : *Nonstandard methods and applications in mathematics.* T. 25. Lect. Notes Log. Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2006, p. 174-191

[FS10] : Ilijas Farah et Saharon Shelah. « A dichotomy for the number of ultrapowers ». In : *J. Math. Log.* 10.1-2 (2010), p. 45-81

[KS04] : Vladimir Kanovei et Saharon Shelah. « A definable nonstandard model of the reals ». In : *J. Symbolic Logic* 69.1 (2004), p. 159-164

[KU06] : Vladimir Kanoveĭ et Vladimir Uspenskiĭ. « On the uniqueness of nonstandard extensions ». In : *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* 5 (2006), p. 3-10, 77

§ 17. Espaces de types

Les *espaces de types* sont les espaces topologiques associés aux théories élémentaires. Il faut assimiler ce concept qui est aussi point de vue et méthode (§ 17.1). L'*élimination des quantificateurs* (§ 17.2) est une propriété désirable pour une théorie car elle simplifie considérablement la combinatoire définissable dans ses modèles ; il ne faut pas en faire une obsession. Plus importante est la notion de *modèle saturé* (§ 17.3), i.e. de structure « assez riche » ; les techniques de va-et-vient discutées en § 18 s'y dérouleront mieux.

Prérequis : §§ 5, 13–16.

Il est conseillé pour cette leçon et la § K d'être à l'aise avec les bases de transcendance dans les corps algébriquement clos. Rappels dans [Lang, Chap. VIII, § 1].

§ 17.1. Espaces de théories et de types

Les parties définissables sont les fermés d'un espace topologique, dont les points sont les ultrafiltres, ou plus syntaxiquement les $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$-théories maximales (comme en géométrie). Commençons par une notation.

$\mathrm{tp}^{\mathbb{S}}(\mathbf{b}/A)$

Notation. Si $A \subseteq \mathbb{S}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{S}$, on pose $\mathrm{tp}^{\mathbb{S}}(\mathbf{b}/A) = \{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a}) : \mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})\}$ que l'on appelle le *type* de $\mathbf{b}$ à paramètres dans A. C'est une $\mathcal{L}_{A,\mathbf{x}}$-théorie complète.

Géométriquement, c'est l'ensemble des parties A-définissables de $\mathbb{S}$ auxquelles appartient $\mathbf{b}$. Noter que l'information ne varie pas si l'on passe à $\mathbb{S}^* \succcurlyeq \mathbb{S}$, car $\mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ ssi $\mathbb{S}^* \models \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

Exemple. On se place dans l'ordre $(\mathbb{Q}, <)$.

— Il y a un seul 1-type d'élément possible sur $\varnothing$ car « tous les points se valent ». Il y a trois 2-types envisageables : essentiellement déterminés par $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$, ou $x_1 > x_2$. On devine combien il y a de types sans paramètres de n-uplets.

— Ajouter un ensemble fini de paramètres $\mathbf{a}$ ne change pas la chose ; on place à présent les x_i entre eux et par rapport aux a_j.

— Si A est infini c'est plus intéressant. En effet si par exemple $A = \mathbb{Z}$, il n'y a pas de $b \in \mathbb{Q}$ vérifiant simultanément $\{x > a : a \in A\}$, alors que dans une extension élémentaire, c'est finiment satisfaisable : v. types *réalisés* plus bas.

[Lang] : Serge Lang. *Algebra.* third. T. 211. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002, p. xvi+914

Exemple. Dans l'anneau $\mathbb{C}$, les entiers de $\mathbb{Z}$ sont définissables dans le langage. Pour cet exemple on n'a pas besoin de $A = \mathbb{Z}$; prendre $A = \varnothing$ suffit. Pour la clarté nous notons différemment les nombres complexes z, les variables x, et les indéterminées X.

— Soit $z \in \mathbb{C}$. Le type de z (sous-entendu : sur $\varnothing$) peut avoir deux formes :
  - — si z est un nombre algébrique, $\mathrm{tp}^{\mathbb{C}}(z)$ contient une formule $P(x) = 0$ pour $P(X)$ le polynôme minimal de z sur $\mathbb{Z}$;
  - — si z est un nombre transcendant, $\mathrm{tp}^{\mathbb{C}}(z)$ contient $\mathrm{tr}(x) = \{Q(x) \neq 0 : Q \in \mathbb{Z}[X]\backslash\{0\}\}$. On dit que z a *le* type transcendant. (Remarquablement, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ agit transitivement sur les éléments transcendants.)

— Soit maintenant une paire (z_1, z_2). Le type de (z_1, z_2) peut avoir cinq formes :
  - — z_1 et z_2 algébriques (et notamment, algébriquement liés). L'information est essentiellement portée par $P_1(x_1) = P_2(x_2) = Q(x_1, x_2) = 0$ pour des polynômes de degré minimal.
  - — z_1 algébrique, z_2 transcendant : on a tout dit avec $\{P_1(x_1) = 0\} \cup \mathrm{tr}(x_2)$ pour $P_1(X_1)$ le polynôme irréductible de z_1.
  - — z_1 transcendant, z_2 algébrique : comme le précédent.
  - — z_1 et z_2 transcendants, mais algébriquement liés : l'information portée est de nature $\mathrm{tr}(x_1) \cup \mathrm{tr}(x_2) \cup \{Q(x_1, x_2) = 0\}$ pour Q minimal.
  - — z_1 et z_2 algébriquement indépendants : cette fois l'information est $\{R(x_1, x_2) \neq 0 : R \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]\backslash\{0\}\}$.

Nous avons jusqu'ici parlé du descriptif d'un élément *déjà existant.* Pour atteindre la notion générale on procède à rebours : le descriptif préexiste à l'élément.

Définition (type)**.** Un *n-type de $\mathbb{S}$ à paramètres dans A* est une $\mathcal{L}_{A,\mathbf{x}}$-théorie $p(\mathbf{x})$ telle que $p(\mathbf{x}) \cup \mathrm{Th}(\mathbb{S}/A)$ soit satisfaisable.

Remarques

— Erreur de débutant : croire que cela revient à « $\{(\exists \mathbf{x}) p(\mathbf{x})\} \cup \mathrm{Th}(\mathbb{S}/A)$ est satisfaisable ». Cela n'a même pas de sens, puisque « $(\exists \mathbf{x}) p(\mathbf{x})$ » n'est pas une formule.

C'est typiquement le cas avec le type transcendant dans ACF : la transcendance n'est pas une propriété élémentaire, c'en est une limite infinie. C'est la raison pour laquelle les types ne sont pas nécessairement réalisés dans la structure de départ.

— Si $\mathbb{S} \preccurlyeq \mathbb{S}'$, ou plus généralement si $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/A) = \mathrm{Th}(\mathbb{S}'/A)$, alors les n-types à paramètres dans A de $\mathbb{S}$ et de $\mathbb{S}'$ sont les mêmes. Comme on raisonne à extension élémentaire près, on omet souvent de préciser « de $\mathbb{S}$ » ; cela peut perturber les débutants puisque $\{x^2 = -1\}$ ne définit pas un type dans $\mathbb{R}$ (ce n'est pas satisfaisable relativement à la théorie ambiante).

— L'expression « n-type à paramètres dans A » a donc un sens. Certes $\mathbb{S}$ reste implicite, mais on n'a pas vraiment besoin de $\mathbb{S}$; en revanche $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/A)$ reste implicite, et c'est bien plus gênant.

Définition. On note $S_n(A)$ l'ensemble des n-types *maximaux* (encore appelés « complets ») à paramètres dans $\mathbb{A}$. Cet ensemble est topologisé comme en 11.1 : les fermés de base sont les $F_\varphi = \{T \in S_\mathcal{L} : T \models \varphi\}$ pour $\varphi \in \mathcal{L}_{A,\mathbf{x}}$.

En toute rigueur on devrait noter $S_{\mathcal{L}_{A\cup\{\mathbf{x}\}}}(\mathrm{Th}(\mathbb{S}/A))$.

Définition (type réalisé)**.** Un type p à paramètres dans A est *réalisé* dans $\mathbb{S}'$ s'il existe un élément $\mathbf{b}$ de $\mathbb{S}'$ dont il est le type, i.e. $p \subseteq \mathrm{tp}(\mathbf{b}/A)$.

Exemple. Soient T une $\mathcal{L}_A$-théorie complète et $\mathbb{S} \models T$ fixée (donc $A \subseteq \mathbb{S}$ est dans la configuration prévue par T). Alors l'ensemble des types sur A réalisés dans $\mathbb{S}$ est dense dans $S_n(T)$.

En effet par définition de la topologie sur cet espace, un ouvert non vide contient un fervert $F_\varphi \neq \varnothing$ pour une formule $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ avec $\mathbf{a} \in A$. Le caractère non vide signifie que $(\exists \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ est cohérent à T. Par complétude, $T \models (\exists \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$; notamment $\mathbb{S}$ possède un témoin $\mathbf{b}$ de φ. Mais alors $\mathrm{tp}(\mathbf{b}/A) \in F_{\varphi(\mathbf{x},\mathbf{a})}$: l'ensemble des types réalisés dans $\mathbb{S}$ est dense.

Par définition, tout type de $\mathbb{S}$ à paramètres dans A est réalisé dans un modèle de $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/A)$. Il y a mieux.

Lemme. Tout type de $\mathbb{S}$ (on a droit aux paramètres) est réalisé dans une extension élémentaire $\mathbb{S}^* \succcurlyeq \mathbb{S}$.

Démonstration. Soit $p(\mathbf{x})$ un n-type à paramètres dans $A \subseteq \mathbb{S}$. A priori p est réalisé dans un modèle de $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/A)$, mais on veut même un modèle de $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/\mathbb{S})$.

Formons le $\mathcal{L}_\mathbb{S} \cup \{\mathbf{x}\}$-ensemble d'énoncés $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/\mathbb{S}) \cup p$; il suffit de montrer qu'il est satisfaisable. Par compacité et conjonction finie, ramenons-nous à une partie finie $\{\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{a}), \chi(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}$ avec $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ et $\mathbf{a} \in A$ vérifiant $\mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{s}, \mathbf{a})$ et $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in p(\mathbf{x})$. Par hypothèse il existe $\mathbb{S}' \models \mathrm{Th}(\mathbb{S}/A)$ qui réalise p ; soit $\mathbf{b}$ une réalisation. Clairement $\mathbb{S}' \models \chi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. D'autre part $\mathbb{S} \models \varphi(\mathbf{s}, \mathbf{a})$, donc $\mathbb{S} \models (\exists \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{a})$, de sorte qu'il existe $\mathbf{t} \in \mathbb{S}'$ avec $\mathbb{S}' \models \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{a})$. □

§ 17.3 revient sur la réalisation de types.

§ 17.2. Élimination des quantificateurs

Définition (élimination des quantificateurs)**.** Une théorie T *élimine les quantificateurs* si pour toute formule $\varphi(\mathbf{x})$ il en existe une sans quantificateurs $\chi(\mathbf{x})$ telle que $T \models (\forall \mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \chi(\mathbf{x}))$.

Exemples

— Dans $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$, la formule $(\exists x)(ax^2 + bx + c = 0)$ équivaut à $[b^2 - 4ac \geqslant 0] \vee [a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0)]$. En fait RCF élimine les quantificateurs (dans $\mathcal{L}_{\mathrm{Ann,ord}}$).

— Dans $\mathrm{Th}(\mathbb{C})$, $(\exists x)(a_n x^n + \cdots + a_0 = 0)$ équivaut à $(\bigwedge_{i=1}^n a_i = 0) \to (a_0 = 0)$. En fait ACF élimine les quantificateurs.

Remarques

— Si T élimine les quantificateurs, alors $\mathbf{Mod}_0(T) = \mathbf{Mod}(T)$: tout plongement est élémentaire. La réciproque est fausse. Par exemple tout plongement d'anneaux entre modèles de RCF est élémentaire, mais on a besoin de $<$ pour éliminer les quantificateurs.

— Toute théorie élimine les quantificateurs dans un langage augmenté. À $\mathcal{L}$ ajouter pour chaque $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\mathbf{x})$ une nouvelle relation $R_{\varphi(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$, obtenant $\mathcal{L}'$; à T ajouter les axiomes $(\forall \mathbf{x})(R_{\varphi(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}))$. Alors toute $\mathcal{L}'$-formule équivaut modulo T' à une formule sans quantificateurs.

Définition (ensemble d'élimination)**.** Soit T une théorie. Un ensemble de formules E est un *ensemble d'élimination* pour T si chaque formule $\varphi(\mathbf{x})$ est équivalente modulo T à une combinaison propositionnelle de formules de E.

Par définition, T élimine les quantificateurs ssi l'ensemble des formules sans quantificateurs est un ensemble d'élimination.

Théorème. Soient T une théorie et E un ensemble de formules. Alors E est un ensemble d'élimination ssi :

> pour tous $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$, deux uplets $\mathbf{a} \in \mathbb{A}, \mathbf{b} \in \mathbb{B}$ vérifiant les mêmes formules de E ont même type.

Démonstration. Ce théorème a déjà été obtenu, par méthodes syntaxiques, à l'exercice 14.6 ; donnons un meilleur argument. Le sens direct est trivial ; montrons le sens réciproque. On peut supposer E clos sous opérations propositionnelles, i.e. que E forme un anneau de Boole.

Considérons l'espace profini $S_n(T)$ dans sa topologie $\mathcal{T}$, engendrée par les fermés F_φ pour $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}$-Form. L'hypothèse est que deux types complets distincts sont séparés par au moins une formule de E. Alors $\{F_\chi : \chi \in E\}$ est une famille *séparante* de ferverts ; d'après le lemme d'engendrement dans les espaces profinis (§ 4.1), il suit que l'anneau fervert de $\mathcal{T}$ est engendré par E, i.e. égal à E. Donc pour toute formule $\varphi(\mathbf{x})$, il existe $\chi(\mathbf{x}) \in E$ telle $F_\varphi = F_\chi$. Cela signifie que $\varphi(\mathbf{x})$ et $\chi(\mathbf{x})$ sont équivalentes modulo T. ☐

§ 17.3. Modèles saturés

Un type peut être ou non réalisé dans un modèle donné ; la richesse d'un modèle est mesurée par la quantité de types qu'il réalise.

Définition. Une structure $\mathbb{S}$ est *ω-saturée* si tout n-type à paramètres dans un ensemble fini de $\mathbb{S}$ est réalisé dans $\mathbb{S}$.

Remarques

— Interprétation géométrique : $\mathbb{S}$ est ω-saturée ssi pour chaque ensemble fini de paramètres $\mathbf{a}$, si une collection de $\mathbf{a}$-définissables a la propriété des intersections finies, alors cette collection a une intersection globale non vide *déjà dans* $\mathbb{S}$. (On insiste sur l'importance d'avoir fixé $\mathbf{a}$ fini à l'avance.)

— Il existe une notion plus générale de *κ-saturation* (exercice 17.2) ; elle n'est pas employée dans le reste du cours.

Lemme. $\mathbb{S}$ est ω-saturée ssi elle réalise tous ses 1-types à paramètres dans des ensembles finis.

Démonstration. Un sens est trivial. Pour la réciproque, récurrence sur n. Soit $p(\mathbf{x}, y)$ un $(n+1)$-type à paramètres dans un ensemble fini $A \subseteq \mathbb{S}$. Soit $q(\mathbf{x}) = \{(\exists y)\varphi(\mathbf{x}, y) : \varphi \in p\}$, clairement un n-type à paramètres dans A. Soit par récurrence $\mathbf{s}$ le réalisant. On forme alors $r(y) = \{\varphi(\mathbf{s}, y) : \varphi \in p\}$, clairement un 1-type à paramètres dans $A \cup \{\mathbf{s}\}$. Soit par ω-saturation t le réalisant. Clairement $(\mathbf{s}, t) \in \mathbb{S}$ réalise p. ☐

Proposition. Toute structure possède une extension élémentaire ω-saturée.

Démonstration. Soit $\{p_i : i \in I\}$ l'ensemble de tous les 1-types complets ayant leurs paramètres dans les ensembles finis de $\mathbb{S}$. Pour chaque $i \in I$ il existe une extension élémentaire $\mathbb{S} \preccurlyeq \mathbb{S}_i$ où p_i est réalisé. Toutes ces structures sont extension élémentaire de $\mathbb{S}$, donc il existe une extension élémentaire commune (« amalgame ») :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}_i \arrow[dr, hook, dotted] & \\
\mathbb{S} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbb{S}' \\
 & \mathbb{S}_j \arrow[ur, hook, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Alors $\mathbb{S}'$ réalise tous les 1-types complets ayant leurs paramètres dans les ensembles finis de $\mathbb{S}$.

Une approche plus directe sans parler d'amalgames élémentaires est d'introduire, pour chaque type p_i comme plus haut, une nouvelle constante c_i, et de former $\mathrm{Th}(\mathbb{S}/\mathbb{S}) \cup \bigcup_{i \in I}\{\varphi(c_i) : \varphi(x) \in p_i\}$; on s'assure de la satisfaisabilité par compacité.

Pour montrer la proposition on part de $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}$ et l'on construit $\mathbb{S}_{n+1} = \mathbb{S}'_n$. Soit enfin $\mathbb{S}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_n$. Un 1-type à paramètres dans un ensemble fini de $\mathbb{S}^*$ les prend dans un $\mathbb{S}_n$, donc est réalisé dès $\mathbb{S}_{n+1}$. D'après le lemme, $\mathbb{S}^*$ est ω-saturée. $\square$

Remarques

— Comparer avec la démonstration de [Lang, V, Theorem 2.5] : on trouve une extension commune, et l'on réitère.

— En particulier, T a un modèle ω-saturé dénombrable ssi pour tout n, l'espace $S_n(T)$ est au plus dénombrable.

— En général on n'a pas vraiment de contrôle sur le cardinal de $\mathbb{S}^*$, car I peut être grand (la réunion sur $\mathbb{N}$ n'a rien d'impressionnant, du point de vue cardinal). La *théorie de la stabilité* est l'étude des théories dont le nombre de types est contrôlé.

Exercices

17.1. On se place en langage dénombrable. Une structure est $\aleph_1$-*saturée* si tout 1-type à paramètres dénombrables est réalisé.

Lemme. Tout ultraproduit non principal indexé par $\mathbb{N}$ est $\aleph_1$-saturé.

a. Familiarisation. Montrer que toute structure possède une extension élémentaire $\aleph_1$-saturée.

b. Familiarisation. Soit $(\mathbb{K}; \leqslant, +, \cdot)$ un corps ordonné $\aleph_1$-saturé. Montrer qu'il est fortement complet au sens de Cantor, et que toutes ses suites de Cauchy sont stationnaires (v. ex. B.3).

c. Montrer le lemme. On pourra prendre $p(x)$ de la forme $\{\chi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ où $\chi_{n+1}(x) \to \chi_n(x)$, et contrôler que les $\mathbb{S}_i$ réalisent des χ_{n_i} avec (n_i) croissante.

d. Application. Soient $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}^*$ l'ultrapuissance associée de $(\mathbb{Q} ; +, \cdot, <)$. Soient $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{Q}^* : (\exists n \in \mathbb{N}_{>0})(|x| \leqslant n)\}$ et $\mathfrak{m} = \{x \in \mathbb{Q}^* : (\forall n \in \mathbb{N}_{>0})(|x| \leqslant \frac{1}{n})\}$. Montrer que $\mathbb{A}/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}$ en tant que corps ordonnés (compléments § B si besoin).

(*) e. Généralisation du lemme. Si I est un ensemble quelconque et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I *non* clos sous intersection dénombrable, le lemme est encore valable. Montrer que l'hypothèse de non-clôture est nécessaire. (Note. Cette dernière condition est une forme faible de la *régularité* de l'exercice 16.8, qui lui équivaut pour I dénombrable.)

17.2 (saturation, universalité et homogénéité). Soit $\kappa > \operatorname{card} \mathcal{L}$ un cardinal infini. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}$ est :

- $(< \kappa)$-*saturée* si tout 1-type ayant $< \kappa$ paramètres de $\mathbb{A}$ est réalisé dans $\mathbb{A}$;
- $(< \kappa)$-*(élémentairement) homogène* si chaque fois que $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ sont des uplets de $\mathbb{A}$ de cardinal $< \kappa$, et que $\alpha \in \mathbb{A}$, il existe $\beta \in \mathbb{A}$ tel que $\mathbf{a}, \alpha \equiv \mathbf{b}, \beta$;
- $(< \kappa)$-*universelle* si chaque $\mathbb{B} \equiv \mathbb{A}$ de cardinal $< \kappa$ se plonge élémentairement dans $\mathbb{A}$.

Montrer que sont équivalents : (i) $\mathbb{A}$ est $(< \kappa)$-saturée ; (ii) $\mathbb{A}$ est $(< \kappa)$-homogène et $(< \kappa)$-universelle ; (iii) $\mathbb{A}$ est $(< \kappa)$-homogène et $(< \kappa^+)$-universelle, où κ^+ désigne le cardinal suivant.

17.3. Démontrer topologiquement le résultat suivant. Soient $\mathbb{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A, \mathbf{b} \subseteq \mathbb{M}$. Soit $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ une formule à paramètres. On suppose que chaque fois que $\mathbb{M} \leqslant \mathbb{M}_i$ et $\mathbf{m}_i \in \mathbb{M}_i$:

si $\operatorname{tp}(\mathbf{m}_1/A) = \operatorname{tp}(\mathbf{m}_2/A)$, alors $\mathbb{M}_1 \models \varphi(\mathbf{m}_1, \mathbf{b})$ ssi $\mathbb{M}_2 \models \varphi(\mathbf{m}_2, \mathbf{b})$.

Montrer qu'il existe $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ *à paramètres dans* A telle que $\mathbb{M} \models \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \leftrightarrow \chi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$.

17.4 (définissabilité dans une structure : théorème de Svenonius). Soient $\mathcal{L}$ un langage élémentaire et R d'arité n ; soit $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{R\}$. Pour une $\hat{\mathcal{L}}$-structure $\hat{\mathbb{A}}$ soit $\mathbb{A}$ la $\mathcal{L}$-structure associée.

Théorème (définissabilité de Svenonius)**.** Soient $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et $X \subseteq \mathbb{A}^n$. On fait de $\mathbb{A}$ une $\hat{\mathcal{L}}$-structure en posant $R[\hat{\mathbb{A}}] = X$. Alors X est $\mathcal{L}$-définissable sans paramètres ssi pour toute $\hat{\mathcal{L}}$-extension élémentaire $\hat{\mathbb{A}} \leqslant \hat{\mathbb{B}}$ $[\hat{\mathcal{L}}]$, la partie $R[\hat{\mathbb{B}}]$ est $\operatorname{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{B})$-invariante.

(1) **Invariance et définissabilité (1).** On note $\operatorname{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{A})$, ou $\operatorname{Aut}(\mathbb{A})$ quand il n'y a pas d'ambiguité, le groupe des $\mathcal{L}$-automorphismes de $\mathbb{A}$. Un ensemble $X \subseteq \mathbb{A}^n$ est *invariant* si pour tout $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathbb{A})$ on a $\sigma(X) = X$ (en tant qu'ensemble).

   (a) Si X est $\varnothing$-définissable, est-il invariant sous $\operatorname{Aut}(\mathbb{A})$?

   (b) Si X est invariant sous $\operatorname{Aut}(\mathbb{A})$, est-il $\varnothing$-définissable ? définissable avec paramètres ?

   Pour une réciproque et que X conserve un sens dans les extensions, on augmente le langage.

(2) **Un lemme préliminaire.** Montrer que si $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ sont deux $\mathcal{L}$-structures, alors il existe une extension élémentaire commune $\mathbb{C} \geqslant \mathbb{A}, \mathbb{B}$, au sens où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ se plongent élémentairement dans $\mathbb{C}$.

(3) **Extension de plongements partiels.** Un *plongement partiel élémentaire* de $\mathbb{A}$ dans lui-même est une fonction partielle $\sigma\colon \operatorname{dom}\sigma \to \operatorname{im}\sigma$ telle que : pour toute formule $\varphi(\mathbf{a})$ à paramètres dans $\operatorname{dom}\sigma$, on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\sigma(\mathbf{a}))$.

(a) Soit σ un plongement partiel élémentaire de $\mathbb{A}$ dans lui-même. Montrer qu'il existe une extension élémentaire $\mathbb{A}' \geqslant \mathbb{A}$ et un plongement partiel élémentaire σ' de $\mathbb{A}'$ dans lui-même étendant σ à $\mathbb{A}$, i.e. $\mathbb{A} \subseteq \operatorname{dom} \sigma'$ et $\sigma'_{|\operatorname{dom}\sigma} = \sigma$.

[On pourra prendre de nouvelles constantes c_a et d_a pour chaque $a \in \mathbb{A}$, et former la théorie $\Theta = \{\varphi(\mathbf{c_a}) : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\} \cup \{\varphi(\mathbf{d_a}) : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\} \cup \{d_b = c_{\sigma(b)} : b \in \operatorname{dom}\sigma\}$.]

(b) En déduire que si σ est un plongement partiel élémentaire de $\mathbb{A}$, alors il existe une extension élémentaire $\mathbb{A}^* \geqslant \mathbb{A}$ et $\sigma^* \in \operatorname{Aut}(\mathbb{A}^*)$ étendant σ. [Indication : va-et-vient comme en § 2.2.]

(c) Indiquer ce qu'il faut changer dans l'argument pour montrer l'affirmation suivante :

> Soient $\hat{\mathbb{A}}$ une $\hat{\mathcal{L}}$-structure et σ un $\mathcal{L}$-plongement partiel $\mathcal{L}$-élémentaire de $\hat{\mathbb{A}}$; alors il existe $\hat{\mathbb{A}}^* \geqslant_{\hat{\mathcal{L}}} \hat{\mathbb{A}}$ et $\sigma^* \in \operatorname{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{A}^*)$ étendant σ.

(4) **Un critère de définissabilité.** Soit $\hat{\Theta}$ une $\hat{\mathcal{L}}$-théorie vérifiant la propriété :

> si $\hat{\mathbb{A}}_1, \hat{\mathbb{A}}_2 \models \hat{\Theta}$ sont des modèles et $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ des uplets extraits vérifiant $\operatorname{tp}_{\mathcal{L}}(\mathbf{a}_1) = \operatorname{tp}_{\mathcal{L}}(\mathbf{a}_2)$, alors $\hat{\mathbb{A}}_1 \models R(\mathbf{a}_1)$ ssi $\hat{\mathbb{A}}_2 \models R(\mathbf{a}_2)$.

Montrer que R est $\mathcal{L}$-définissable dans $\hat{\Theta}$: il existe une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\mathbf{x})$ telle que $\hat{\Theta} \models (\forall \mathbf{x})(R(\mathbf{x}) \leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}))$. [Poser $\Theta = \hat{\Theta} \cap \mathcal{L}$-Én, et $\rho\colon S_n(\hat{\Theta}) \to S_n(\Theta)$ qui fait $\rho(\hat{p}) = \hat{p} \cap \mathcal{L}$-Form$(\mathbf{x})$.]

(5) **Invariance et définissabilité (2).** En déduire le théorème de Svenonius.

17.5 (définissabilité dans une théorie : théorème de Beth). Mêmes notations que dans l'exercice 17.4 : $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{R\}$.

Théorème (définissabilité de Beth)**.** Soit $\hat{\Theta}$ une $\hat{\mathcal{L}}$-théorie et $\Theta = \hat{\Theta} \cap \mathcal{L}$-Én. Alors R est $\mathcal{L}$-définissable modulo $\hat{\Theta}$ (i.e. définie par une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\mathbf{x})$) ssi chaque modèle de Θ provient d'*au plus* un modèle de $\hat{\Theta}$.

On rappelle deux énoncés classiques.

Lemme (« interpolation » de Craig)**.** Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient φ_1, φ_2 des $\mathcal{L}_i$-formules. On suppose $\varphi_1 \models \varphi_2$. Alors il existe une $\mathcal{L}_\cap$-formule χ telle que $\varphi_1 \models \chi \models \varphi_2$.

Théorème (Keisler-Shelah)**.** Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux structures relationnelles. Alors $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ss'il existe un ensemble I et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I tels que $\prod_I \mathbb{A}/\mathcal{U} \simeq \prod_I \mathbb{B}/\mathcal{U}$.

a. Démontrer le théorème de Beth grâce au théorème de Svenonius. (Pour chaque définition possible φ, introduire $\Theta_\varphi = \hat{\Theta}[R := \varphi]$.)

b. Le redémontrer grâce au lemme d'interpolation (dupliquer R en R_1 et R_2).

c. Le redémontrer grâce au théorème de Keisler-Shelah et au critère de définissabilité de l'exercice 17.4.

17.6. Le lemme suivant a déjà été montré à l'exercice 10.6.

Lemme (« omission des types »)**.** Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire, et $p(\mathbf{x})$ un type de T non principal. Alors il existe un modèle dénombrable ne réalisant pas p.

En donner une preuve topologique. On pourra augmenter le langage, ajouter à T les axiomes de Henkin, et songer au théorème de Baire.

17.7 (théories $\aleph_0$-catégoriques). Soit T une théorie complète en langage dénombrable. Montrer que sont équivalents :

(i) T est $\aleph_0$-catégorique ;
(ii) tout n-type est principal ;
(iii) pour chaque n, T n'a qu'un nombre fini de n-types complets ;
(iv) pour chaque $\mathbf{x}$, il n'y a qu'un nombre fini de formules en $\mathbf{x}$ modulo T ;
(v) tous les modèles dénombrables sont ω-saturés.

Indications : (ii)⇔(iii)⇔(iv) est purement topologique ; (i)⇒(ii) demande l'omission des types (ex. 17.6 ; (v)⇒(i) demande un va-et-vient comme en § 2.2 (méthode approfondie en § 18.)

(*) **17.8.** Suite de l'exercice 3.1. Montrer que tout ordinal dénombrable est (pour la topologie de l'ordre) topologiquement isomorphe à un *fermé* de $\mathbb{R}$ (pour la topologie induite). Pour contrôler les limites on ometra des types.

17.9 (modèles resplendissants). On fixe un langage relationnel $\mathcal{L}$.

Définition. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}$ est *resplendissante* à la condition suivante :

> si $\mathcal{L}_\mathbb{A} \subseteq \mathcal{L}'$ et $\varphi \in \mathcal{L}'$-Én est tel que $\mathrm{Th}(\mathbb{A}/\mathbb{A}) \cup \{\varphi\}$ est satisfaisable, alors il existe une $\mathcal{L}'$-structure sur $\mathbb{A}$ telle que $\mathbb{A}' \models \varphi$.

a. Montrer que $(\mathbb{N}\,; +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}\,; +, \cdot)$ ne sont pas resplendissantes.
b. On suppose $\mathcal{L}$ fini et $\mathbb{A}$ resplendissant. Montrer que deux uplets finis $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de même type sont conjugués sous $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$.
c. Mêmes hypothèses. Montrer que si $X \subseteq \mathbb{A}$ est une partie définissable infinie, alors $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, \mathbb{A}$.
(*) d. Montrer l'existence d'extensions élémentaires resplendissantes. [Cohérence disjointe. Itérer ω fois.]
e. De l'existence de modèles resplendissants, tirer l'interpolation de Craig. [Par réccurence, se ramener à $\varphi_1(R_1) \models \varphi_2(R_2)$.]
(*) f. Montrer que toute structure infinie possède une extension élémentaire resplendissante *de même cardinal*. En déduire qu'une structure catégorique en son cardinal est resplendissante.

17.10. Soit T une théorie élémentaire dénombrable et complète. Alors T élimine les quantificateurs ssi :

> pour $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ avec $\mathbb{A}$ dénombrable et $\mathbb{B}$ $\aleph_1$-saturé (ex. 17.1), si $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}$ est une sous-structure et $f_0 \colon \mathbb{A}_0 \rightarrowtail \mathbb{B}$ un $\mathcal{L}$-plongement, alors f_0 s'étend en $f \colon \mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{B}$.

Notes conclusives

Die Ergebnisse Stone's haben übrigens einen noch anderen Einfluß auf die im folgenden behandelten Sätze gehabt. Meine komplizierten und schwierigen Beweise dieser Sätze haben sich als überflüssig erwiesen, da die seit langem bekannten topologischen Überlegungen leichter und schneller zum selben

Ziel führen. [Mos37]

- **Repères historiques.**

Espaces de types. • L'analyse topologique de l'espace des théories est en germe dès les travaux de Mostowski, avec un fin emploi des avancées récentes de Stone ; Mostowski a notamment montré que sur un langage dénombrable, un espace de types est au plus dénombrable ou de cardinal continu [Mos37, Satz 6]. • L'emploi du théorème de Baire (comme à l'exercice 17.6) était connu de l'école polonaise d'après-guerre [**RS50**]. • Un jalon important dans leur étude est [Vau61] ; Vaught emploie les types sans les nommer, en y pensant comme aux ultrafiltres de l'anneau pertinent. • Morley n'est donc aucunement l'inventeur des espaces de types. En revanche il y déploya les méthodes topologiques et descriptives [**Mor65a**].

Omission des types (exercice 17.6). Souvent attribué à Morley ; or de son aveu même [Mor65b], « *This process was carried out, in one form or another by Ryll-Nardzewski, Ehrenfeucht, Engeler, Svenonius, and Vaught* ». [Vau63, § 2] est très précis sur l'histoire. • Shelah [Shelah, Conclusion IV.5.17] a généralisé à l'omission simultanée de $\kappa < 2^{\aleph_0}$ types non isolés. On approche ici la théorie descriptive. • Pour approfondir le point de vue topologique sur la théorie des modèles, [EHT21].

Caractérisation de l'$\aleph_0$-catégoricité (exercice 17.7). • Indépendamment [Ryl59] (premier, sans détails), [Eng59], [Sve59a] (qui cite [Ryl59]). La méthode est essentiellement la même et dénuée de topologie ; le style d'Engeler est assez syntaxique et celui de Svenonius plus abstrait. • Analogue en logique continue [Ben+08, Theorem 12.10]. C'est encore plus intéressant en relaxant la notion d'$\aleph_0$-catégoricité [Ben08].

Saturation. • Elle semble apparaître dans [Vau61, § 4]. Auparavant on disposait de notions d'universalité et d'homogénéité (v. ex. 17.2) ; la saturation semble être le bon concept. Par exemple elle trivialise une bonne part des phénomènes algébriques sur les η_α de Hausdorff (ex. T.2). • Ce fut

[Mos37] : Andrzej Mostowski. « Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik ». In : *Fundam. Math.* 29 (1937), p. 34-53

[Vau61] : Robert Vaught. « Denumerable models of complete theories ». In : *Infinitistic Methods (Proc. Sympos. Foundations of Math., Warsaw, 1959).* Pergamon, Oxford ; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1961, p. 303-321

[Mor65b] : Michael Morley. « Omitting classes of elements ». In : *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley).* North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 265-273

[Vau63] : Robert Vaught. « Models of complete theories ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), p. 299-313

[Shelah] : Saharon Shelah. *Classification theory and the number of nonisomorphic models.* Second. T. 92. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, p. xxxiv+705

[EHT21] : Christopher Eagle, Clovis Hamel et Franklin Tall. « Two applications of topology to model theory ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 172.5 (2021), Paper No. 102907, 16

[Ryl59] : Czesław Ryll-Nardzewski. « On the categoricity in power $\leqslant \aleph_0$ ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.* 7 (1959), 545-548. (unbound insert)

[Eng59] : Erwin Engeler. « Äquivalenzklassen von n-Tupeln ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 5 (1959), p. 340-345

[Sve59a] : Lars Svenonius. « $\aleph_0$-categoricity in first-order predicate calculus ». In : *Theoria (Lund)* 25 (1959), p. 82-94

[Ben+08] : Itaï Ben Yaacov et al. « Model theory for metric structures ». In : *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2.* T. 350. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, p. 315-427

[Ben08] : Itaï Ben Yaacov. « On perturbations of continuous structures ». In : *J. Math. Log.* 8.2 (2008), p. 225-249

néanmoins le cheval de Troie de l'arithmétique cardinale en théorie des modèles. On peut s'interroger sur la pertinence de cette intrusion en logique élémentaire, dont Löwenheim, Skolem et Tarski, et Morley, ont montré qu'elle n'avait pas vocation à parler des cardinaux. Rouvrir [Mac03] pour sonder l'opportunité de la théorie des ensembles en théorie des modèles.

Élimination des quantificateurs. C'est l'un des aspects les plus anciens de la théorie des modèles, en fait des mathématiques formalisées. On cite parfois un texte de Fourier en 1824 s'occupant de systèmes d'inégalités linéaires :

> *Lorsqu'on a remplacé les inégalités qui contenaient $x, y, z \dots u, t$, par celles qui contiennent seulement $y, z \dots u, t$, on élimine y suivant le même procédé, et continuant l'application de cette règle, on obtient des conditions finales où il n'entre qu'une seule inconnue t. On en déduit pour cette dernière inconnue des limites numériques, dont les unes sont de la forme $t > a$, et les autres de la forme $t < b$. On n'a plus à considérer que la plus petite B des limites b, et la plus grande A des limites a. S'il arrive que A soit un nombre plus grand que B, on en conclut avec certitude que la question proposée n'a aucune solution possible, et c'est à ce caractère que l'on reconnaît si les conditions proposées en v* [sic]*, $y, z \dots u, t$, peuvent toutes subsister à la fois.* [Fou27, p. LI]

Mais dans cette veine il faudrait alors parler de l'élimination pour les égalités linéaires, redécouverte par Gauß après avoir été connue en Chine. Parlons de logique. • La préoccupation est apparemment chez Schröder (j'en crois [Brady]), et de là chez Skolem [Sko19]. Notamment l'élimination des quantificateurs dans les anneaux de Boole atomiques en langage étendu (exercice 18.3) est bien de Skolem, avec algorithme effectif [Sko19, § 4]. • L'élimination effective pour ce *Klassenkalkül* fut redécouverte par Behmann [MZ15]. • 18.3 c. est mentionnée par Łoś [**Łoś55a**, § 2.9] qui l'attribue à Vaught ; on la trouve effectivement dans [FV59, p. 6.7]. • L'élimination pour DLO est étudiée par Langford [Lana], qui ne connaissait pas Skolem. • À la fin des années 1920, Tarski dans son séminaire varsovien envisageait des théories de nombres (voir chapitre IV), en parallèle à son intérêt de toujours pour les réels. Les corps algébriquement clos ne reçurent de l'attention que plus tard ; voir § K, notes conclusives. • L'élimination effective, que Tarski poursuivit toute sa carrière avec en vue la décidabilité, mène à des questions difficiles d'algorithmique ; la théorie des modèles contemporaine se contente d'élimination théorique.

> MOSTOWSKI — *At that time* [1930] *the method of eliminating quantifiers was pretty well known. Tarski took it over from Skolem, but he taught it at the university and applied it to several problems.*
>
> SACKS — *I did not know that. The method of elimination of quantifiers was invented by Skolem?*
>
> MOSTOWSKI — *Yes.*
>
> ...
>
> KEISLER — *What is the year on that?*

[Fou27] : Joseph FOURIER. « Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année 1824 ». In : t. 7. Paris : Firmin Didot, père et fils, 1827

[Sko19] : Thoralf SKOLEM. *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls.* Kristiania, 1919. 37 p.

[MZ15] : Paolo MANCOSU et Richard ZACH. « Heinrich Behmann's 1921 lecture on the decision problem and the algebra of logic ». In : *Bull. Symb. Log.* 21.2 (2015). With an original lecture in German and partial English translation by Zach, p. 164-187

[FV59] : Solomon FEFERMAN et Robert VAUGHT. « The first order properties of products of algebraic systems ». In : *Fund. Math.* 47 (1959), p. 57-103

[Lana] : Cooper LANGFORD. « Some theorems on deducibility ». In : *Ann. of Math. (2)* 28.1-4 (), p. 16-40

Mostowski — The year is 1919.

Sacks — 1919! [**Cro75**, pp. 24–25]

Définissabilité (exercices 17.4 et 17.5). Respectivement [Sve59b] et [Bet53] ; à leur manière ils répondent aux préoccupations de Padoa (v. § 6). Le théorème de Svenonius peut sembler plus naturel car plus sémantique, plus « géométrique ». • En prenant les valeurs de vérité dans des anneaux de Boole assez grands, plus besoin de considérer aussi les extensions dans le théorème de Svenonius [BM99].

Modèles resplendissants (ex. 17.9). • Formalisés dans [BS76] dont on lira les remarques historiques. • Soit $\mathbb{A}$ dénombrable. Alors $\mathbb{A}$ est resplendissante ssi *récursivement* ω-saturée, i.e. réalise tout type récursif [BS76, p. 2.3] (seul le sens direct survit en indénombrable). • Le groupe d'automorphismes d'une structure resplendissante est prévisiblement très compliqué : sa théorie est indécidable [Sch12] (cf. § 14, notes conclusives). • Compter les modèles resplendissants de cardinal donné est une question non triviale de stabilité à la Shelah [Bal90]. • Les structures resplendissantes ont été attaquées comme étrangères à la théorie des modèles. Sans doute, en raison de la quantification $\exists\!\!\exists$; la condition une forme de saturation Σ^1_1, i.e. pour les énoncés $(\exists\!\!\exists X)\varphi$ où φ est à quantification élémentaire. Ces structures font bien partie de la logique. Elles sont régulièrement invoquées pour parler d'arithmétique et de parties entières dans les corps réels clos. Introduction douce dans [Kos11].

• **Terminologie.** • Elle est catastrophique ; mais les théoriciens des modèles refusent d'entendre que pour tout le monde, un « type » désigne autre chose. • Le mot « type » est attesté dès [Sve59a, p. 93] ; avant, je ne sais pas. • On gagnerait à parler d'« espaces (de) descriptifs » car 1. les types sont des descriptifs d'éléments, 2. ces espaces décrivent en retour la théorie, et 3. ils s'étudient par des moyens de théorie descriptive des ensembles • Une autre bonne option serait « espaces de Morley », vu ce que Michael Morley fit pour leur étude. • L'observation que toute théorie élimine dans un langage enrichi est souvent appelée « morleyisation ». On trouve l'expression dans [Sacks], sans référence en justification. L'examen des travaux de Morley ne m'a pas permis de statuer sur l'attribution.

• **Plus sur les espaces de types.** On peut aller plus loin dans la description des espaces de types : $S_n(T)$ est un espace normal « T_4 » (deux fermés disjoints sont séparables des ouverts disjoints), donc il vérifie le lemme

[**Cro75**] : John Crossley. « Reminiscences of logicians ». In : *Algebra and logic (Fourteenth Summer Res. Inst., Austral. Math. Soc., Monash Univ., Clayton, 1974).* 1975, 1-62. Lecture Notes in Math., Vol. 450

[Sve59b] : Lars Svenonius. « A theorem on permutations in models ». In : *Theoria (Lund)* 25 (1959), p. 173-178

[Bet53] : Evert Beth. « On Padoa's method in the theory of definition ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **56** *= Indagationes Math.* 15 (1953), p. 330-339

[BM99] : Carsten Butz et Ieke Moerdijk. « An elementary definability theorem for first order logic ». In : *J. Symbolic Logic* 64.3 (1999), p. 1028-1036

[BS76] : Jon Barwise et John Schlipf. « An introduction to recursively saturated and resplendent models ». In : *J. Symbolic Logic* 41.2 (1976), p. 531-536

[Sch12] : James Schmerl. « The automorphism group of a resplendent model ». In : *Arch. Math. Logic* 51.5-6 (2012), p. 647-649

[Bal90] : John Baldwin. « The spectrum of resplendency ». In : *J. Symbolic Logic* 55.2 (1990), p. 626-636

[Kos11] : Roman Kossak. « What is... a resplendent stucture ? » In : *Notices Amer. Math. Soc.* 58.6 (2011), p. 812-814

[Sacks] : Gerald Sacks. *Saturated model theory.* Second. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2010, p. xii+207

d'Urysohn (des fermés disjoints sont séparés une fonction continue $S \to [0,1]$ valant 0 sur l'un et 1 sur l'autre), donc le théorème de Tietze (si $f\colon F \to \mathbb{R}$ est continue, où F est un fermé de S, alors f possède un prolongement continu). Et si S est topologiquement dénombrable, i.e. si $\mathcal{L}$ est au plus dénombrable, il est même ultramétrisable (plonger dans $2^{\mathbb{N}}$). Je n'ai jamais réussi à utiliser cette méthode en théorie des modèles.

- **Théorèmes de Beth et Svenonius**

Optimalité. Il y a bien équivalence entre :

– si $\hat{\mathbb{A}} \models \hat{\Theta}$, alors $R[\hat{\mathbb{A}}]$ est $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{A})$-invariant ;
– si $\hat{\mathbb{A}} \models \hat{\Theta}$, alors $R[\hat{\mathbb{A}}]$ est $\mathcal{L}$-définissable sans paramètres.

Mais ces énoncés n'entraînent *pas* la $\mathcal{L}$-définissabilité de R modulo $\hat{\Theta}$.

Exemple. Soient c constante, R unaire, E binaire. Soit Θ affirmant que E est une relation d'équivalence ayant exactement deux classes, chacune infinie. Soit $\hat{\Theta}$ ajoutant que R est l'une de ces classes.

Dans $\hat{\mathbb{A}} \models \hat{\Theta}$, un $\mathcal{L}$-automorphisme préserve $E[\hat{\mathbb{A}}]$ et fixe $c[\hat{\mathbb{A}}]$, donc stabilise la classe de c et l'autre : il préserve $R[\hat{\mathbb{A}}]$.

Pourtant R n'est pas $\mathcal{L}$-définissable modulo $\hat{\Theta}$. Par va-et-vient (§ 18), Θ élimine les quantificateurs. Donc toute $\mathcal{L}$-formule en x équivaut modulo $\hat{\Theta}$ à l'une des formules $\{\bot, \neg\bot, xEc, \neg(xEc)\}$. Or aucune n'est une définition de R indépendante du modèle.

En conclusion, *un foncteur $\hat{\mathcal{L}}$-élémentaire à valeurs $\mathcal{L}$-définissables, n'est pas nécessairement un foncteur $\mathcal{L}$-élémentaire.*

Généralisations. • Logiques infinitaires : l'idéal est que la logique vérifie l'interpolation de Craig ; c'est le cas de $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ (v. § 10) mais faux d'autres extensions. Revoir [Fef08]. • Logique continue : [Ben+08, Theorems 9.11, 9.32]. • Logique intuitionniste : [Sch62].

- **Saturation (exercice 17.2).** L'ω-saturation, qui formalise le caractère universel de certaines structures, est la plus pertinente algébriquement ; les logiciens demandent parfois plus. (Dans la notation de l'exercice 17.2 on écrit ω- ou $(<\aleph_0)$-saturation. On oppose l'emploi des cardinaux dans des propriétés comme « κ-catégorique », qui se vérifient en κ, à celui des ordinaux dans « α-saturé », dont la vérité dépend des $\lambda < \alpha$.)

Une structure est *saturée* (tout court) si elle l'est en son cardinal ; on ne peut pas demander plus car $\{x \neq a : a \in \mathbb{A}\}$ ne peut être réalisé dans $\mathbb{A}$. • (Deuxième lecture.) L'existence de modèles saturés n'est pas décidée par ZFC. On ne peut donc pas démontrer dans ZFC que chaque théorie élémentaire possède un modèle saturé. V. ex. 24.7. C'est pourtant vrai de théories aux bonnes propriétés combinatoires, comme la *stabilité* [Har75].

- **Stabilité**

La définition. L'œuvre de Shelah commence avec [**She69**] et la définition suivante, où κ désigne un cardinal infini.

Définition (théorie stable)**.**

– Une théorie est *κ-stable* si pour tout modèle $\mathbb{M} \models T$ et tout ensemble de paramètres $A \subseteq \mathbb{M}$ de cardinal $\leqslant \kappa$, on a $\operatorname{card} S_n(A) \leqslant \kappa$. Elle est *stable* si elle l'est en un κ. (Il suffit d'ailleurs de le vérifier en $n = 1$.)
– Une *structure* $\mathbb{M}$ est κ-stable si $\mathrm{Th}(\mathbb{M})$ l'est. (C'est donc par définition une propriété de la théorie.)

[Fef08] : Solomon Feferman. « Harmonious logic : Craig's interpolation theorem and its descendants ». In : *Synthese* 164.3 (2008), p. 341-357
[Sch62] : Kurt Schütte. « Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik ». In : *Math. Ann.* 148 (1962), p. 192-200
[Har75] : Victor Harnik. « On the existence of saturated models of stable theories ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 52 (1975), p. 361-367
[**She69**] : Saharon Shelah. « Stable theories ». In : *Israel J. Math.* 7 (1969), p. 187-202

La stabilité est une ligne de division essentielle, au cœur du programme de Shelah consistant à classifier les théories du premier ordre selon leur classe de complexité combinatoire [Shelah].

Stabilité contre ordres. On voit que ACF est κ-stable en tout κ ; que DLO ne l'est en aucun. La présence d'un ordre dans DLO est en fait assez caractéristique.

Proposition. T est stable ss'il n'existe pas de formule $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et pas de modèle $\mathbb{M} \models T$ où φ ordonne un ensemble infini (i.e. des uplets $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbb{M}$ indexés par $\mathbb{N}$ avec $\mathbb{M} \models \varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)$ ssi $i < j$).

Attention, on ne demande pas que φ induise un ordre sur une partie définissable.

Spectre de stabilité

Théorème (Shelah)**.** Soit T une théorie complète en langage dénombrable. On note S_T la collection des cardinaux κ tels que T soit κ-stable (« spectre de stabilité »). Il y a pour cette collection exactement quatre possibilités :

– T est κ-stable pour tout $\kappa \geqslant \aleph_0$;
– T est κ-stable ssi $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$;
– T est κ-stable ssi $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$;
– T n'est κ-stable pour aucun κ.

Stabilité et géométrie. Un autre trait marquant (mais non caractéristique) de la stabilité est de permettre de développer une bonne théorie de l'indépendance généralisant celles des espaces vectoriels et des corps algébriquement clos. C'est le début de la « théorie géométrique des modèles », qui cherche à retrouver de l'information algébrique à l'intérieur de la combinatoire fine des structures.

Proposition (Morley)**.** Si T est κ-catégorique pour un $\kappa \geqslant \aleph_1$, alors T est $\aleph_0$-stable.

(La réciproque est fausse ; il faut incorporer la notion de « paire de Vaught ».)

On a pensé dans les années 1970 que la stabilité décrivait une forme de géométrie algébrique abstraite ; le passionnant [Poizat2] illustre cette thèse. Depuis que Sela a montré la stabilité de F_n (groupe libre à n générateurs) et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ [Sel06], il faut soit l'abandonner *soit généraliser la notion de géométrie algébrique.*

§ 18. Méthodes de jeux : va-et-vient

Les techniques de va-et-vient permettent d'étendre des correspondances *partielles* (§ 18.1). Elles s'appliquent surtout dans le cas de structures relationnelles ; on s'en sort encore avec des fonctions unaires, mais à moins que la théorie ne soit spécialement favorable, les fonctions binaires sont impossibles à maîtriser. Dans les cas favorables on donne des critères de complétude, d'$\aleph_0$-catégoricité, d'élimination des quantificateurs (§ 18.2). Il suffit même de travailler dans des modèles saturés (§ 18.3).

Prérequis : §§ 2–3, 8, 17.

On a déjà rencontré (§ 2.2, et divers exercices) la méthode de va-et-vient ; systématisons-la. La notion d'isomorphisme, ou même celle de plongement, est trop fine pour la logique élémentaire. La satisfaction élémentaire dépend de données *locales*, ne mettant en jeu que des uplets finis d'éléments.

[Poizat2] : Bruno Poizat. *Groupes stables.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987, p. vi+218

[Sel06] : Zlil Sela. « Diophantine geometry over groups VI. The elementary theory of a free group ». In : *Geom. Funct. Anal.* 16.3 (2006), p. 707-730

Notation. Si σ est une fonction (éventuellement partielle), on note $\operatorname{dom}\sigma$ son domaine et $\operatorname{im}\sigma$ son image.

On définit par une récurrence immédiate le *rang de quantification* d'une formule. Ce n'est pas le nombre de quantificateurs mais leur profondeur, i.e. le nombre maximal de quantifications intriquées. Par exemple le rang de quantification de la formule suivante est 3 :

$$\{[(\forall x)(\forall y)(x < y)] \to [(\exists z)(x < z < y)]\} \wedge \{(\exists u)(\forall v)(u < v)\}.$$

tp_n **Notation.** Soient $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ un uplet, et n un entier. On note $\mathrm{tp}_n(\mathbf{a}) = \{\varphi(\mathbf{x})$ de rang de quantification au plus $n : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\}$.

Le type de $\mathbf{a}$ est donc la réunion de tous ces « types en rang de quantification borné ».

§ 18.1. Hauteur d'isomorphisme

$\simeq_0$ **Définition** (0-isomorphisme)**.** Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures.

- Un 0-*isomorphisme* est une fonction partielle $\sigma\colon \operatorname{dom}\sigma \to \operatorname{im}\sigma$ (avec $\operatorname{dom}\sigma \subseteq \mathbb{A}$ et $\operatorname{im}\sigma \subseteq \mathbb{B}$) qui induit un $\mathcal{L}$-isomorphisme $\langle\operatorname{dom}\sigma\rangle \simeq \langle\operatorname{im}\sigma\rangle$.
- Deux uplets (éventuellement infinis) de même longueur $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{B}$ sont 0-isomorphes, noté $\mathbf{a} \simeq_0 \mathbf{b}$ si la fonction $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ est un 0-isomorphisme.
- $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont 0-isomorphes, noté $\mathbb{A} \simeq_0 \mathbb{B}$, si $\varnothing_{\mathbb{A}} \simeq_0 \varnothing_{\mathbb{B}}$.

En pratique ce cours emploiera les seuls 0-isomorphismes de domaine fini ; les logiques infinitaires peuvent demander plus.

Remarques

- En particulier, $\mathbf{a} \simeq_0 \mathbf{b}$ ssi $\mathrm{tp}_0(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}_0(\mathbf{b})$ (types sans quantificateurs), i.e. ssi $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ « sont dans la même configuration sans quantificateurs ».
  Un instant de réflexion algébrique et l'on voit en effet que $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ induit $\langle\mathbf{a}\rangle \simeq \langle\mathbf{b}\rangle$ si et seulement si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ vérifient mêmes formules de base, i.e. $\mathbf{a} \simeq_0 \mathbf{b}$ ssi $\mathrm{tp}_0(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}_0(\mathbf{b})$.
  Noter que même si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont infinis, on travaille avec des formules de longueur finie.
- Un 0-isomorphisme n'a aucune raison de préserver la satisfaction de formules plus complexes : l'inclusion $\langle\mathbf{a}\rangle \leqslant \mathbb{A}$ n'est a priori pas élémentaire.
- La notation $\mathbb{A} \simeq_0 \mathbb{B}$ est malheureuse. En tout cas la propriété $\varnothing_{\mathbb{A}} \simeq_0 \varnothing_{\mathbb{B}}$ n'est pas toujours garantie : $\langle\varnothing\rangle$ est la clôture des constantes sous les fonctions. Ainsi $\mathbb{A} \simeq_0 \mathbb{B}$ ssi $\mathrm{Th}_0(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}_0(\mathbb{B})$ (théories sans quantificateurs et sans paramètres).

Exemples

— Si $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ sont deux corps, alors $\mathbb{K} \simeq_0 \mathbb{L}$ ssi $\operatorname{car} \mathbb{K} = \operatorname{car} \mathbb{L}$.

— $(\mathbb{Z}, <) \simeq_0 (\mathbb{Z} \sqcup_< \mathbb{Z}, <)$.
Pour plus de clarté notons $\mathbb{Z}_g$ et $\mathbb{Z}_d$ (pour gauche et droite) les deux copies en jeu dans la réunion, avec éléments les n_g et n_d. Alors $0 \simeq_0 0_g$ et $(0,1) \simeq_0 (0_g, 0_d)$.

— $(\mathbb{Z}, s) \simeq (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}, s)$. Ici encore $0 \simeq_0 0_g$ mais cette fois $(0,1) \not\simeq_0 (0_g, 0_d)$.

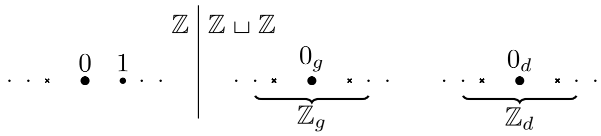


Illustration des deux derniers exemples. De telles visualisations sont utiles pour le va-et-vient.

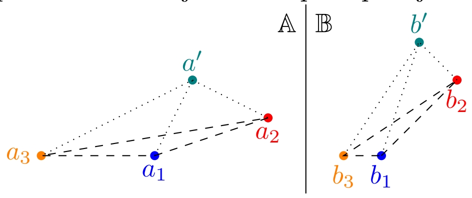
$\simeq_\alpha$ **Définition** (α-isomorphisme)**.** Soit α un ordinal.

— Un $(\alpha+1)$-*isomorphisme* est un α-isomorphisme $\sigma\colon \mathbf{a} \simeq_\alpha \mathbf{b}$ tel que :
  — pour tout $a' \in \mathbb{A}$, il existe $b' \in \mathbb{B}$ tel que $\mathbf{a}, a' \simeq_\alpha \mathbf{b}, b'$ (condition *va*) ;
  — pour tout $b' \in \mathbb{B}$, il existe $a' \in \mathbb{A}$ tel que $\mathbf{a}, a' \simeq_\alpha \mathbf{b}, b'$ (condition *vient*).

— Si α est limite, un α-isomorphisme est un β-isomorphisme pour tout $\beta < \alpha$.

$\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont α-isomorphes si $\varnothing$ est un α-isomorphisme.

Remarque. L'interprétation qui suit a valeur de méthode. On joue à deux joueurs, partageant les deux échiquiers $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. À chaque tour, le premier joueur choisit un échiquier et place un pion desus. Le second joueur doit agir sur l'autre échiquier pour *refléter la configuration* ; alors commence un nouveau tour. La partie s'arrête quand le second joueur ne peut plus jouer.



Deux échiquiers en regard

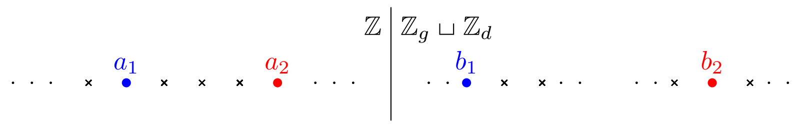
Deux structures sont n-isomorphes (pour n entier) si le second joueur a une stratégie lui garantissant de tenir au moins n coups. Deux structures sont

ω-isomorphes si pour tout n, le second joueur a une stratégie lui permettant de tenir au moins n coups ; ce n'est pas la même chose qu'en tenir une infinité.

Notamment, *l'interprétation en termes de « tenir au moins α coups » n'a plus grand sens passé ω* ; elle est éclairante aux seuls ordinaux finis. Le cardinal de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ n'est pas une donnée pertinente, car aucun joueur ne placera plusieurs coups de suite.

Exemples

— $(\mathbb{Z}, s) \simeq_1 (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}, s)$ mais $(\mathbb{Z}, s) \not\simeq_2 (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}, s)$.
Comme pour tout langage sans constantes, on a 0-isomorphisme. En l'absence de relations unaires, mettre un pion sur un échiquier peut être reflété sur l'autre : on a 1-isomorphisme. Mais $a_1 \simeq_0 b_1$ étant alors fixés, si le premier joueur prend $b_2 \in \mathbb{B}$ à distance infinie de b_1, la configuration n'est pas reflétable. En effet quel que soit $a_2 \in \mathbb{A}$, il y aura un entier k tel que $a_2 = s^k(a_1)$ ou $a_1 = s^k(a_2)$; or aucune de ces formules n'est vraie de $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ dans $\mathbb{B}$. Il suit que $a_1 \not\simeq_1 b_1$, et donc $\varnothing_{\mathbb{A}} \not\simeq_2 \varnothing_{\mathbb{B}}$.



— $(\mathbb{Z}, <) \simeq_{\omega+1} (\mathbb{Z} \sqcup_< \mathbb{Z}, <)$, mais $(\mathbb{Z}, <) \not\simeq_{\omega+2} (\mathbb{Z} \sqcup_< \mathbb{Z}, <)$.
En l'absence de fonction la situation est différente. Un premier coup sur l'un des deux échiquiers se reflète aisément sur l'autre. Au deuxième coup, le premier joueur choisira évidemment un point b_2 à distance infinie de b_1. À ce moment le second joueur sait qu'il pourra, s'il se fixe k comme objectif, tenir k coups. Donc $a_1 \simeq_\omega b_1$ et $\varnothing_{\mathbb{A}} \simeq_{\omega+1} \varnothing_{\mathbb{B}}$, comme voulu. En revanche, sitôt que le second joueur a rejoué en a_2, on n'a certainement *pas* $(a_1, a_2) \simeq_\omega (b_1, b_2)$: d'où $\varnothing_{\mathbb{A}} \not\simeq_{\omega+2} \varnothing_{\mathbb{B}}$.

— Si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models$ DLO, le va-et-vient « ne s'arrête pas » : ce qui motive la prochaine définition.

$\simeq_\infty$ **Définition** (∞-isomorphisme)**.** Soit $\Sigma \neq \varnothing$ une famille de 0-isomorphismes entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, close sous restriction (notamment $\varnothing \colon \varnothing_{\mathbb{A}} \mapsto \varnothing_{\mathbb{B}}$ est dans Σ). On dit que Σ permet le *va-et-vient sans restrictions* si elle satisfait aux conditions de va-et-vient. Les éléments de Σ sont alors appelés ∞-*isomorphismes*. S'il existe une telle famille, on note $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$.

Remarques

— Malgré la notation c'est une propriété de famille et non pas d'une fonction en particulier.

— Quand on ne travaille qu'avec des uplets finis (i.e. de longueur $< \omega$), une meilleure notation serait $\mathbb{A} \simeq_{\infty,\omega} \mathbb{B}$.

— Deux structures élémentairement équivalentes et ω-saturées sont ∞-isomorphes. En effet l'ensemble des fonctions partielles « élémentaires » à support fini, i.e. des $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ entre uplets finis vérifiant $\mathrm{tp}(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}(\mathbf{b})$, permet un va-et-vient sans restriction.

(Les 0-isomorphismes ne suffisent pas : pour refléter α, il faut vérifier que $\{\varphi(x, \mathbf{b}) : \mathbb{A} \models \varphi(\alpha, \mathbf{a})\}$ forme un type, ce qui demande de transférer un quantificateur.)

— Si les 0-isomorphismes sont des 1-isomorphismes, alors ce sont des α-isomorphismes pour tout α, et même des ∞-isomorphismes. Notamment *deux modèles de* DLO *sont toujours ∞-isomorphes*, via les 0-isomorphismes de domaine fini.

— Les ∞-isomorphismes sont des α-isomorphismes pour tout α.

(Ainsi $(\mathbb{Q}, <) \simeq_{\omega_1} (\mathbb{R}, <)$; d'ailleurs clair par récurrence, en revenant à la définition.)

— On répète que le cardinal de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ importe peu dans la mesure de la qualité des isomorphismes partiels.

— Pour $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ fixés il existe α tel que les α-isomorphismes soient des ∞-isomorphismes.

Pour $\alpha \geqslant \beta \geqslant \omega$ on a donc ces implications, *auxquelles existent des réciproques partielles* (exercice 18.6) :

$$\mathbb{A} \simeq \mathbb{B} \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B} \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{A} \simeq_\alpha \mathbb{B} \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{A} \simeq_\beta \mathbb{B} \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{A} \simeq_\omega \mathbb{B}.$$

En pratique ∞ et ω sont les hauteurs les plus intéressantes en logique élémentaire, et pour la syntaxe ω suffit.

§ 18.2. Applications

Lemme (préservation des types)**.** Si $\mathbf{a} \simeq_n \mathbf{b}$, alors $\mathrm{tp}_n(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}_n(\mathbf{b})$. Notamment si $\mathbb{A} \simeq_\omega \mathbb{B}$, alors $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

Démonstration. Récurrence sur n. Au niveau 0 c'est par définition d'un 0-isomorphisme, et la réciproque est même vraie. Supposons la propriété vraie en n ; supposons $\mathbf{a} \simeq_{n+1} \mathbf{b}$; montrons $\mathrm{tp}_{n+1}(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}_{n+1}(\mathbf{b})$. Il suffit de montrer que si $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathrm{tp}_{n+1}(\mathbf{a})$ est de la forme $(\exists y)\chi(\mathbf{x}, y)$, alors $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathrm{tp}_{n+1}(\mathbf{b})$. Noter que $\chi(\mathbf{x}, y)$ est de rang de quantification $\leqslant n$.

Par hypothèse $\mathbb{A} \models (\exists y)\chi(\mathbf{a}, y)$. Soit α convenant. Par hypothèse $\mathbf{a} \simeq_{n+1} \mathbf{b}$, donc par *va* il existe $\beta \in \mathbb{B}$ tel que $(\mathbf{a}, \alpha) \simeq_n (\mathbf{b}, \beta)$. Par récurrence $\mathrm{tp}_n(\mathbf{a}, \alpha) = \mathrm{tp}_n(\mathbf{b}, \beta)$, donc comme χ est de rang au plus n, on a $\mathbb{B} \models \chi(\mathbf{b}, \beta)$. Ainsi $\mathbb{B} \models \varphi(\mathbf{b})$, comme voulu.

L'hypothèse $\mathbb{A} \simeq_\omega \mathbb{B}$ signifie que $\varnothing_\mathbb{A} \simeq_\omega \varnothing_\mathbb{B}$; dans ce cas pour chaque entier n, on a $\mathrm{tp}_n(\varnothing_\mathbb{A}) = \mathrm{tp}_n(\varnothing_\mathbb{B})$. Mais $\mathrm{Th}(\mathbb{A}/\varnothing) = \bigcup_\mathbb{N} \mathrm{tp}_n(\varnothing_\mathbb{A})$, d'où la seconde conclusion. □

Remarques

- La réciproque est fausse en général. On a l'équivalence logique $(\mathbb{Z}, s) \equiv (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}, s)$ (claire grâce aux modèles saturés, § 18.3), mais pourtant même pas 2-isomorphisme. Notamment $\varnothing_\mathbb{A}$ et $\varnothing_\mathbb{B}$ ont même ω-type, mais ne sont pas ω-isomorphes. En fait $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $b_1 \in \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}$ ont toujours même type et ne sont jamais 1-isomorphes.
- La réciproque est vraie *en langage relationnel fini* (exercice 18.5).
- En revanche l'écart entre $\simeq_\infty$ et $\simeq_\omega$ reste immense (exercice 18.11).

Proposition (critère de complétude)**.** Soit T une théorie. Si deux modèles sont toujours ω-isomorphes, alors T est complète.

Démonstration. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$. Par hypothèse $\mathbb{A} \simeq_\omega \mathbb{B}$. D'après le lemme, $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$. C'est la complétude. □

Exemples

- La théorie d'un ensemble infini sans structure, DLO sont complètes (ce qu'on savait par $\aleph_0$-catégoricité, § 15.3).
- La technique ne s'applique pas à ACF_q, à cause de la transcendance.

Proposition (critère d'élimination des quantificateurs)**.** Soit T une théorie. Si les 0-isomorphismes de domaine fini entre modèles sont des ω-isomorphismes, alors T élimine les quantificateurs.

Démonstration. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux modèles et $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des uplets finis ayant même type sans quantificateurs. Alors $\mathbf{a} \simeq_0 \mathbf{b}$, donc par hypothèse pour chaque n on a $\mathbf{a} \simeq_n \mathbf{b}$. D'après le lemme, $\mathrm{tp}_n(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}_n(\mathbf{b})$ pour chaque entier, d'où $\mathrm{tp}(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}(\mathbf{b})$. On applique alors le théorème d'élimination 17.2. □

Remarque. Bien noter la différence avec l'hypothèse du critère de complétude. Pour l'élimination il ne suffit pas qu'il existe un ω-isomorphisme. (C'était suffisant pour la complétude, puisque seul comptait le type du uplet vide.) On se rappellera que ACF élimine sans être complète (§ K) ; que $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$ est complète sans éliminer.

Exemples

— La théorie d'un ensemble infini sans structure, DLO éliminent les quantificateurs.

— La technique ne s'applique pas à ACF, à cause de la transcendance.

Lemme (lemme d'$\aleph_0$-catégoricité)**.** Si $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$ sont dénombrables, alors $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.

Démonstration. C'est exactement la démonstration de § 2.2. Soit Σ une famille d'∞-isomorphismes. Énumérons $\mathbb{A} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{B} = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, et construisons par récurrence des 0-isomorphismes de Σ comme suit :

— $\sigma_0 = \varnothing \colon \varnothing_{\mathbb{A}} \mapsto \varnothing_{\mathbb{B}}$;

— si n est pair, on prend le premier $a_i \notin \operatorname{dom} \sigma_n$, un b_j tel que $(\operatorname{dom} \sigma_n, a_i) \simeq (\operatorname{im} \sigma_n, b_j)$ soit encore dans Σ, et l'on appelle σ_{n+1} cet ∞-isomorphisme ;

— si n est impair, on prend le premier $b_j \notin \operatorname{im} \sigma_n$, et un a_i reflétant la configuration par un élément de Σ.

Enfin $\sigma = \bigcup_{\mathbb{N}} \sigma_n$ est un isomorphisme global car c'est une bijection préservant l'interprétation. $\square$

Proposition (critère d'$\aleph_0$-catégoricité)**.** Soit T une théorie. On suppose que deux modèles sont toujours 0-isomorphes, et que tout 0-isomorphisme de domaine fini est un ∞-isomorphisme. Alors T est $\aleph_0$-catégorique.

Démonstration. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ dénombrables. Par hypothèse l'ensemble Σ des 0-isomorphismes de domaine fini entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est une famille de va-et-vient sans restrictions. D'après le lemme d'$\aleph_0$-catégoricité, $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$. C'est l'$\aleph_0$-catégoricité. $\square$

On retrouve que DLO est $\aleph_0$-catégorique (Théorème 2.2). Noter que la technique ne s'applique pas à ACF_q, à cause de la transcendance.

Remarque. Le lemme ne s'applique pas aux structures non dénombrables. Notamment DLO n'est pas $\aleph_1$-catégorique ; il faut quelques manipulations ensemblistes pour construire des modèles distincts (exercice 24.9).

§ 18.3. Va-et-vient entre modèles saturés

Un éventuel va-et-vient fonctionnera mieux entre modèles ω-saturés (§ 17.3) ; il suffit dans les applications pratiques.

Proposition (critères ω-saturés)**.** Soit T une théorie.

- Si deux modèles ω-saturés sont toujours ω-isomorphes, alors T est complète.
- Si les 0-isomorphismes de domaine fini entre modèles ω-saturés sont des ω-isomorphismes, alors T élimine les quantificateurs.

Remarque. Pas de « troisième propriété », caractérisant l'$\aleph_0$-catégoricité au niveau des modèles ω-saturés. En effet ACF_q serait un contre-exemple à l'énoncé naïf.

Démonstration.

- Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$. Soient $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{A}^*$ et $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{B}^*$ des extensions élémentaires ω-saturées ; il en existe. On a encore $\mathbb{A}^*, \mathbb{B}^* \models T$. Par hypothèse $\mathbb{A}^* \simeq_\omega \mathbb{B}^*$; par le lemme de préservation des types, $\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}^* \equiv \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{B}$.
- Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux modèles et $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ deux uplets finis ayant même type sans quantificateurs. Soient $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{A}^*$ et $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{B}^*$ des extensions élémentaires ω-saturées. En tant que uplets de $\mathbb{A}^*$, $\mathbb{B}^*$, on a toujours $\mathbf{a} \simeq_0 \mathbf{b}$, donc par hypothèse $\mathbf{a} \simeq_\omega \mathbf{b}$. Par le lemme de préservation des types, $\mathrm{tp}^{\mathbb{A}^*}(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}^{\mathbb{B}^*}(\mathbf{b})$. Les extensions étant élémentaires on a bien $\mathrm{tp}^{\mathbb{A}}(\mathbf{a}) = \mathrm{tp}^{\mathbb{B}}(\mathbf{b})$. Le théorème d'élimination 17.2 permet de conclure. □

Remarque. En pratique il n'est pas nécessaire de caractériser exactement les modèles ω-saturés pour ces arguments ; on pourra procéder comme suit.

0. Se faire une intuition des types, des modèles ω-saturés, et d'une condition suffisante pour que $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ soit prolongeable par va-et-vient.
1. Introduire une classe de modèles agréables, disons *riches*, qui facilitent le va-et-vient. Montrer que tout modèle admet une extension élémentaire riche (par exemple en montrant que ω-saturé implique riche).
2. Introduire un langage $\hat{\mathcal{L}}$ étendant $\mathcal{L}$ mais dont chaque symbole est définissable depuis $\mathcal{L}$, qui permette d'exprimer la « condition suffisante » supra. Montrer que les 0-isomorphismes *au sens de* $\hat{\mathcal{L}}$ entre modèles *riches* sont des ω-isomorphismes.
3. Appliquer la proposition : deux uplets 0-isomorphes dans $\hat{\mathcal{L}}$ le sont encore dans des extensions élémentaires riches ; ils ont alors même type dans les

extensions, donc même type ; la théorie élimine les quantificateurs dans $\hat{\mathcal{L}}$.

Ceci démontrera que T élimine les quantificateurs dans le langage $\hat{\mathcal{L}}$.

Tout est en place pour étudier les corps algébriquement clos.

Exercices

18.1. Soit $\mathbb{A} = (A, R)$ une relation d'équivalence. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $a_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le nombre de classes d'équivalences à exactement a_k élements. Déterminer la hauteur d'isomorphisme de deux relations d'équivalence $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ en fonction des suites (a_k) et (b_k).

18.2 (groupes abéliens divisibles sans torsion, groupes abéliens divisibles ordonnés).

a. Écrire, dans le langage des groupes, la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux. Montrer qu'elle élimine les quantificateurs.

(*) b. Même question dans dans $\{0, +, -, \leqslant\}$ pour les groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux. [Va-et-vient : considérer la « coupure » induite par α sur $\mathrm{Vect}(\mathbf{a})$.]

18.3 (anneaux de Boole).

a. Axiomatiser les anneaux de Boole sans atomes. Montrer que la théorie est $\aleph_0$-catégorique, complète et élimine les quantificateurs.

b. Axiomatiser les anneaux de Boole atomiques infinis. Montrer que la théorie est complète et élimine les quantificateurs dans le langage augmenté des relations unaires $R_n(x)$: « x majore au moins n atomes ».

c. Application. Relire le théorème de Feferman-Vaught (exercice 6.10). Soit $\mathcal{C}$ une famille de structures dont tout produit fini vérifie φ. Montrer que les produits arbitraires de $\mathcal{C}$ aussi.

d. Deuxième application. Montrer que la logique *monadique* du deuxième ordre (en langage vide) est décidable.

(*) **18.4.** Soit $(\mathcal{A}, \sqsubseteq)$ l'arbre binaire infini de Cantor (suites finies de 0 et 1, ordre d'extension). Faire son étude modèle-théorique : donner une axiomatisation complète, trouver un langage naturel où les quantficateurs sont éliminés, décrire les modèles ω-saturés, statuer sur la catégoricité.

18.5. Dans tout l'exercice on suppose le langage $\mathcal{L}$ purement relationnel et fini.

$\longrightarrow$ **Lemme** (Fraïssé)**.** On suppose $\mathcal{L}$ purement relationnel et fini. Alors il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence de n-isomorphisme entre $\mathcal{L}$-structures, et chacune est décrite par un énoncé élémentaire de rang de quantification $\leqslant n$. En particulier, $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ssi $\mathbb{A} \simeq_\omega \mathbb{B}$.

a. Montrer que pour chaque k et n, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence de k-uplets modulo n-isomorphisme, et que chacune est définie par une formule de rang de quantification n.

b. En déduire qu'en langage relationnel fini, $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ssi $\mathbb{A} \simeq_\omega \mathbb{B}$.

c. Donner un contre-exemple au point précédent si le langage n'est pas relationnel ; un contre-exemple s'il est relationnel infini.

d. Toujours en langage relationnel fini, montrer qu'une propriété φ est élémentaire ss'il existe n tel que φ est préservée par $\simeq_n$.

e. Soit $\mathcal{C}$ une collection de $\mathcal{L}$-structures telle que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^c$ soient toutes deux closes sous $\simeq_\infty$ et sous ultraproduits dénombrables. Montrer qu'il existe un $\mathcal{L}$-énoncé élémentaire φ tel que $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}(\varphi)$.

18.6. Vérifier qu'on a compris toutes les implications suivantes, et montrer (4).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \simeq \mathbb{B} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B} \arrow[l, bend left, Rightarrow, "(1)"] \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{A} \simeq_\alpha \mathbb{B} \arrow[l, bend left, Rightarrow, "(2)"] \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{A} \simeq_\omega \mathbb{B} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{A} \equiv \mathbb{B} \arrow[l, bend left, Rightarrow, "(3)"] \arrow[lll, bend right, Rightarrow, "(4)"']
\end{tikzcd}$$

(1) pour $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ dénombrables (2) pour α assez grand (3) en langage relationnel fini (4) pour des structures ω-saturées

18.7 (ordinaux à élémentaire équivalence près). Il faut connaître la forme normale de Cantor (ex. 3.3). Les ordinaux sont toujours considérés comme ordres.

Théorème (Mostowksi, Tarski)**.** $(\alpha_1 \equiv \alpha_2)$ ssi $[\alpha_1 = \alpha_2 < \omega^\omega$ ou $(\exists \gamma_1, \gamma_2 > 0)(\exists \delta < \omega^\omega)(\alpha_1 = \omega^\omega \cdot \gamma_1 + \delta \wedge \alpha_2 = \omega^\omega \cdot \gamma_2 + \delta)]$.

a. Pour α un ordinal, soit $L(\alpha) = \{x \in \alpha : x \text{ est limite}\}$. Montrer que si $\alpha = \omega \cdot \beta + c$ où $c \in \omega$, alors $L(\alpha) \simeq \beta$.

b. Déduire que si $\alpha_i = \omega^\omega \cdot \gamma_i + \delta_i$ avec $\gamma_i > 0$ et $\delta_i < \omega^\omega$, alors $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ entraîne $\delta_1 = \delta_2$.

c. Montrer que si $\gamma > 0$, alors $\omega^\omega \equiv \omega^\omega \cdot \gamma$.

d. Conclure.

e. En déduire que la collection des théories $\mathrm{Th}(\alpha)$ est l'ensemble $\{\mathrm{Th}(\alpha) : \alpha < \omega^\omega \cdot 2\}$.

f. (Deuxième lecture.) Montrer que $(\mathrm{Ord}; <) \equiv (\omega^\omega; <)$.

Le site https://trkern.github.io/rosenstein.html permet de jouer au va-et-vient entre ordres.

18.8 (ultraproduits d'ordres finis). Il faut avoir fait l'exercice 17.1.

a. Montrer qu'un ultraproduit non principal, indexé par $\mathbb{N}$, d'ordres linéaires *finis* est de la forme $\mathbb{N} + (I \times \mathbb{Z}) + \mathbb{N}^{\mathrm{op}}$, où $I \models \mathrm{DLO}$ est $\aleph_1$-saturé et le produit est lexicographique.

b. Conclure que deux tels objets sont élémentairement équivalents.

c. Déduire que si $\varphi \in \Lambda_{\omega,\omega}(<)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que soit tout ordre linéaire *fini* de cardinal $\geqslant n$ vérifie φ, soit tout ordre linéaire *fini* de cardinal $\geqslant n$ vérifie $\neg\varphi$.

18.9 (loi du 0-1 pour les structures finies). Un langage fini $\mathcal{L}$ est fixé. On réalise chaque structure à n éléments dans $\{1, \ldots, n\}$. Soit donc $\mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str}_n$ l'ensemble, fini, des structures de domaine $\{1, \ldots, n\}$. Pour φ un énoncé, soit :

$$\mu_n(\varphi) = \frac{\operatorname{card}\{\mathbb{A} \in \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str}_n : \mathbb{A} \models \varphi\}}{\operatorname{card} \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str}_n}.$$

Théorème (loi du 0-1 en logique élémentaire)**.** Si $\mathcal{L}$ est purement relationnel, alors $\lim_{n \to +\infty} \mu_n(\varphi)$ existe et vaut 0 ou 1.

Pour $\mathbf{x}$ un k-uplet de variables, soit $A_k = \mathrm{At}_{y/\mathbf{x}}$ l'ensemble des formules de base (i.e. de la forme $R(\mathbf{z})$) en $\mathbf{x}, y$ et qui mentionnent y. Pour $p \subseteq A_k$, soit φ_p l'énoncé :

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)\left\{\left[\bigwedge_{i\neq j}(x_i \neq x_j)\right] \rightarrow (\exists y)\left[\bigwedge_i (y \neq x_i) \wedge \bigwedge_{R(\mathbf{x},y)\in p} R(\mathbf{x},y) \wedge \bigwedge_{R(\mathbf{x},y)\in A_k\setminus p} \neg R(\mathbf{x},y)\right]\right\}.$$

Il signifie que tout k-uplet s'étend en un $(k+1)$-uplet de type sans quantificateurs donné par p.

a. Soit T la théorie engendrée par les φ_p pour $p \subseteq A_k$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que T est satisfaisable. (Indication : énumérer les paires $(\mathbf{a}, \varphi)$ où $\mathbf{a}$ est un uplet d'entiers et φ un énoncé φ_p pour $p \subseteq A_k$ et k la longueur de $\mathbf{a}$.)

b. Montrer que T est complète (indication : va-et-vient).

(*) c. Montrer que $\mu_n(\neg\varphi_p) \leqslant n^k(1-\varepsilon)^{n-k}$ où $\varepsilon = 1/2^{\operatorname{card} A_k}$.

d. En déduire que $\lim \mu_n(\varphi_p)$ existe et vaut 1, et démontrer le théorème.

e. Application : montrer que la quantification majoritaire (« la plupart des x vérifie φ ») n'est pas possible en logique du premier ordre pour les structures finies.

f. Montrer que le théorème est faux si le langage n'est pas purement relationnel (v. notes finales).

18.10.

a. Montrer que si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont ω-saturées, alors $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$ ssi $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

b. On suppose HC, i.e. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Soient $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ deux structures dénombrables, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. Montrer que les ultrapuissances $\mathbb{A}^* = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{A}/\mathcal{U}$ et $\mathbb{B}^*$ sont isomorphes. (C'est, sous une hypothèse forte, un cas extrême du théorème de Keisler-Shelah.)

18.11 (va-et-vient et logique $\Lambda_{\omega_1,\omega}$). Dans les premières questions $\mathcal{L}$ est un langage dénombrable et $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure dénombrable.

a. Montrer qu'il existe, pour $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$ et $\alpha < \omega_1$, une formule $\varphi^\alpha_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ capturant l'α-isomorphisme, i.e. telle que si $\mathbb{B}$ est une $\mathcal{L}$-structure et $\mathbf{b} \in \mathbb{B}$, alors $\mathbb{B} \models \varphi^\alpha_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ ssi $\mathbf{a} \simeq_\alpha \mathbf{b}$.

b. Montrer qu'il existe $\alpha < \omega_1$ tel que pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$, on ait $\mathbb{A} \models (\forall \mathbf{x})[\varphi^\alpha_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi^{\alpha+1}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})]$.

c. En déduire le *théorème d'isomorphisme de Scott* :

> Soit $\mathbb{A}$ une structure dénombrable en langage dénombrable. Alors il existe un $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\mathcal{L})$-énoncé $\varphi_{\mathbb{A}}$ dont $\mathbb{A}$ soit le seul modèle dénombrable.

d. Montrer aussi le *théorème de définissabilité de Scott* :

> Soit $\mathbb{A}$ une structure dénombrable en langage dénombrable. Soit $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Alors X est $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\mathcal{L})$-définissable ss'il est invariant sous $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{A})$.

e. Dans $\Lambda_{\infty,\omega}$ il n'y a pas de limitation de taille sur les conjonctions. Montrer le *théorème de Scott absolu* :

> Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures relationnelles, sans hypothèse de cardinal. $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$ ssi $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ $[\Lambda_{\infty,\omega}]$.

(*) f. On passe en logique $\Lambda_{\kappa^+,\kappa}$ pour généraliser aux structures de cardinal κ. Quelle hypothèse sur κ est requise ?

Notes conclusives

- **Repères historiques**

In [1952] and [1956] (and perhaps earlier), Roland Fraïssé had introduced a certain important group of definitions and theorems in general model theory (discussed in §2(a) below). With their help, he was able to give a new proof of (1) and (2) above, not involving any elimination of quantifiers, and quite short. Ehrenfeucht [1961] introduced a new general method (much like Fraïssé's and also very different) and using it, proved Tarski's conjectures (3). Both Fraïssé's work and that of Ehrenfeucht seemed to come out of the blue. Speaking of which, Fraïssé was working in Algiers and Ehrenfeucht in Warsaw — the latter then behind the deepest Iron Curtain. I remember very well, as a student of Tarski, his great interest in Fraïssé's new method and its proof of (1) and (2); then in 1956 or 1957, Mostowski wrote Tarski of Ehrenfeucht's proof of Tarski's conjecture (3) and Tarski was very excited about this.

Aside: In the summer of 1957, the National Science Foundation (at its richest ever) convened a six-week Summer Institute in Logic at Cornell. Many people had heard of Ehrenfeucht's work, so Sol Feferman, who had corresponded with Ehrenfeucht about it, agreed to give a summary of Ehrenfeucht's work (see Feferman [1961]). [Vau97, § 2]

(Vaught fait référence à des questions sur les théories d'ordinaux, v. infra.)

Qui a inventé le va-et-vient ? On penche pour Hausdorff ; § 2, notes conclusives.

Qui a introduit le va-et-vient en logique ? • Roland Fraïssé, venant de la théorie des relations, a étudié la hauteur d'isomorphisme de deux relations et quantifié leur équivalence logique. Le doctorat [Fra53c] (sous la direction de René de Possel) introduit, dans un formalisme assez lourd et des termes originaux, le va-et-vient de hauteur $\leqslant \omega$. (Le va-et-vient de hauteur ordinale est en germe dès 1949 [Fra49], mais en logique du deuxième ordre.) Notamment [Fra53c, § 43] contient les critères non ω-saturés, ainsi que le lemme de l'exercice 18.5. L'écriture mathématique de Fraïssé n'est pas la plus agréable. • Dans la littérature américaine on parle beaucoup d'Andrzej Ehrenfeucht, d'ailleurs gendre de Tarski. Ehrenfeucht, alors théoricien des modèles, a présenté l'analyse de Fraïssé en termes de jeux [Ehr57a], [Ehr], avec référence explicite : « *The last one is only a new formulation of the condition given by Fraïssé* ». • Jaakko Hintikka, logicien, avait indépendamment senti l'importance des formules qui devaient par la suite classifier le n-isomorphisme (exercice 18.5) et réapparaître en logique infinitaire (exercice 18.11). Ces *formes normales disjonctives*, issues du doctorat publié dans [Hin53], ont des ancêtres en logique propositionnelle. On peut qualifier les premiers travaux de Hintikka de

[Vau97] : Robert Vaught. « On the work of Andrzej Ehrenfeucht in model theory ». In : *Structures in logic and computer science.* T. 1261. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 1997, p. 1-13

[Fra53c] : Roland Fraïssé. « Sur quelques classifications des systèmes de relations ». Thèse de doct. Université de Paris, 1953. iii+viii+152

[Fra49] : Roland Fraïssé. « Sur une classification des systèmes de relations faisant intervenir les ordinaux transfinis ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 228 (1949), p. 1682-1684

[Ehr57a] : Andrzej Ehrenfeucht. « Application of games to some problems of mathematical logic ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.* 5 (1957), p. 35-37, IV

[Ehr] : Andrzej Ehrenfeucht. « An application of games to the completeness problem for formalized theories ». In : *Fund. Math.* 49.2 (), p. 129-141

[Hin53] : Jaakko Hintikka. « Distributive normal forms in the calculus of predicates ». In : *Acta Philos. Fenn.* 6 (1953), p. 71

plutôt syntaxiques, disons à la Gentzen-Herbrand. Sur Hintikka lire [Vää15].

Théories d'ordinaux (ex. 18.7). L'énoncé est [DMT78, Corollary 44], publication tardive de travaux très syntaxiques. Le plus récent [Son79] est plus sémantique, plus élégant, et aussi plus général que l'exercice ; on le recommande. [Vau97, § 2] est aussi intéressant, ou [Rosenstein, pp. 105 sqq].

Logique infinitaire ; l'école de Berkeley. Par la suite Scott et Karp ont popularisé le va-et-vient infinitaire. On trouve des ∞-isomorphismes dans [Kar65], notamment l'équivalence $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$ ssi $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ $[\Lambda_{\infty,\omega}]$ (exercice 18.11 e.). • Les théorèmes de Scott (exercice 18.11) sont donnés sans preuve dans [Sco65, p. 338] ; j'ignore où fut publiée la première démonstration mais on en trouve une dans [Cha68], qui dépasse le cas ω_1. Pour approfondir sur $\Lambda_{\omega_1,\omega}$, [Keisler]. • L'isomorphisme entre structures dénombrables $\Lambda_{\omega_1,\omega}$-équivalentes est remarquable. Cf. cas de la sémantique pleine du deuxième ordre $\mathbb{A}^{2,p}$: la même propriété est alors indécidable dans ZF (v. « complétude et catégoricité » en § 12, notes conclusives et § 27, notes conclusives).

• **Groupes abéliens ordonnés (ex. 18.2.)** Il y a d'autres résultats d'élimination plus fins car ne supposant pas la divisibilité [CH11].

• **Théories d'ordinaux (ex. 18.7).** On peut ajouter de la structure.

Théorème ([Ehr57a], [Ehr, Theorem 18] ; conjecturé par Tarski. V. [Vau97, § 2].). $(\mathrm{Ord}\ ; +) \equiv (\omega^{\omega^\omega}\ ; +)$ et $(\mathrm{Ord}\ ; +,\cdot) \equiv (\omega^{\omega^{\omega^\omega}}\ ; +,\cdot)$.

Le cas $(+,\cdot)$ est beaucoup plus difficile.

• **Lois du 0-1 en logique (exercice 18.9).** Obtenues dans [Gle+69] et retrouvées dans [Fag76]. En tolérant constantes et fonctions, il existe encore une limite à $\mu_n(\varphi)$, et c'est un nombre dyadique [Gle+69, theorem 7]. • Le sujet touche à la théorie des modèles finis ou à l'algorithmique ; certains développements sont très combinatoires. Pour s'initier à la première, [Ebbinghaus-Flum] ou [Lib-

[Vää15] : Jouko Väänänen. « Jaakko Hintikka 1929–2015 ». In : *Bull. Symb. Log.* 21.4 (2015), p. 431-436
[DMT78] : John Doner, Andrzej Mostowski et Alfred Tarski. « The elementary theory of well-ordering—a metamathematical study ». In : *Logic Colloquium '77 (Proc. Conf., Wroclaw, 1977)*. T. 96. Stud. Logic Foundations Math. North-Holland, Amsterdam-New York, 1978, p. 1-54
[Son79] : Elizabeth Sonenberg. « On the elementary theory of inductive order ». In : *Arch. Math. Logik Grundlag.* 19.1-2 (1978/79), p. 13-22
[Rosenstein] : Joseph Rosenstein. *Linear orderings*. T. 98. Pure and Applied Mathematics. New York-London : Academic Press, 1982, p. xvii+487
[Kar65] : Carol Karp. « Finite-quantifier equivalence ». In : *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley)*. North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 407-412
[Cha68] : Chen-Chung Chang. « Some remarks on the model theory of infinitary languages ». In : *The syntax and semantics of infinitary languages*. Sous la dir. de Jon Barwise. Lecture Notes in Mathematics 72. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968, p. iii+268
[CH11] : Raf Cluckers et Immanuel Halupczok. « Quantifier elimination in ordered abelian groups ». In : *Confluentes Math.* 3.4 (2011), p. 587-615
[Gle+69] : Ju. V. Glebskiĭ et al. « Volume and fraction of satisfiability of formulas of the lower predicate calculus ». In : *Kibernetika (Kiev)* 2 (1969), p. 17-27
[Fag76] : Ronald Fagin. « Probabilities on finite models ». In : *J. Symbolic Logic* 41.1 (1976), p. 50-58
[Ebbinghaus-Flum] : Heinz-Dieter Ebbinghaus et Jörg Flum. *Finite model theory*. Second. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1999, p. xiv+360

kin]. • Il y a des extensions en logique infinitaire [KV92]. • En revanche ces lois survivent mal en sémantique pleine du deuxième ordre.

- **Logique $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ et complexité borélienne.** On peut pour chaque structure dénombrable regarder la complexité minimale d'un énoncé de $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ le caractérisant, dit « énoncé de Scott ».

Exemple. $(\mathbb{Z};+)$ possède un énoncé de Scott qui est conjonction d'un énoncé Σ_2 et d'un énoncé Π_2.

C'est mieux qu'attendu (l'énoncé naïf est Σ_3). Mais on peut dire : groupe abélien sans torsion (Π_2) ; $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x, y \in \langle z\rangle)$ (Π_2) ; il existe x indivisible (Σ_2).

Théorème ([Mon15, Theorem 1.1])**.** Soit $\mathbb{A}$ une structure dénombrable. Alors $\mathbb{A}$ possède un énoncé de Scott $\leqslant \Pi_{\alpha+1}$ ssi toutes ses orbites de uplets sont de complexité $\leqslant \Sigma_\alpha$.

- **Équivalence en logique $\Lambda_{\infty,\omega}$.** Le théorème suivant peut justifier l'impression que $\Lambda_{\infty,\omega}$ est une logique « ultime ».

Théorème (Barwise [Bar73], Nadel [Nad85, p. 274])**.** On travaille dans un modèle $\mathbb{U}$ de ZFC, où l'on formalise les notions en jeu. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Alors $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ $[\Lambda_{\infty,\omega}]$ ss'il existe une « extension générique » $\mathbb{U}[G]$ dans laquelle $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.

En effet la cardinalité est une donnée très relative, et le forcing peut rendre dénombrables les structures : dans une extension générique, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deviennent dénombrables. En revanche la relation $\equiv$ $[\Lambda_{\infty,\omega}]$ est invariante par forcing (car elle équivaut à $\simeq_\infty$, exercice 18.11 e.). Donc passant dans une extension générique, on est ramené à l'énoncé pour des structures dénombrables, qui suit de l'isomorphisme.

§ SÉ3. Sujet d'étude 3 : pas encore de titre

1. Suites indiscernables

Cette partie demande soit le théorème de Ramsey (ex. 11.4), soit une bonne maîtrise de $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ (SÉ2, partie 6).

Définition. Soient $(I,<)$ un ordre total et $\mathbb{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une I-suite $\mathbf{a} = (a_i : i \in I) \in \mathbb{M}^I$ est *indiscernable* si les a_i sont distincts mais que pour tout n et tous n-uplets strictement croissants $\mathbf{i} = (i_1 < \ldots < i_n), \mathbf{j} = (j_1 < \ldots < j_n) \in I^n$, les uplets $a_\mathbf{i} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ et $a_\mathbf{j} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ ont même type.

On note alors $\operatorname{tp}\mathbf{a}$ la réunion des $\operatorname{tp} a_\mathbf{i}$ pour les diverses longeurs de uplets strictement croissants.

Lemme (existence de suites indiscernables)**.** Soient $\mathbb{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie et $(I;<)$ un ordre total. Alors il existe une extension élémentaire $\mathbb{M}^* \succcurlyeq \mathbb{M}$ contenant une I-suite indiscernable.

[Libkin] : Leonid Libkin. *Elements of finite model theory.* Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer-Verlag, Berlin, 2004, p. xiv+315
[KV92] : Phokion Kolaitis et Moshe. Vardi. « Infinitary logics and 0-1 laws ». In : t. 98. 2. Selections from the 1990 IEEE Symposium on Logic in Computer Science. 1992, p. 258-294
[Mon15] : Antonio Montalbán. « A robuster Scott rank ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 143.12 (2015), p. 5427-5436
[Bar73] : Jon Barwise. « Back and forth through infinitary logic ». In : *Studies in model theory.* 1973, 5-34. MAA Studies in Math., Vol. 8

1.1. **Preuve 1 du lemme d'existence.** Soit $\{c_i : i \in I\}$ un ensemble de nouvelles constantes. Montrer que la théorie formée des axiomes suivants est satisfaisable : — $\mathrm{Th}(\mathbb{M}/\mathbb{M})$; — les $c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$; — les $\varphi(c_{\mathbf{i}}) \leftrightarrow \varphi(c_{\mathbf{j}})$ pour tout entier n, tous n-uplets strictement croissants $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^n$, et toute n-formule $\varphi(\mathbf{x})$.

On pourra munir $\mathbb{M}$ d'un ordre total quelconque et invoquer le théorème de Ramsey (ex. 11.4).

1.2. **Une forme de réciproque.** (Question optionnelle.) Montrer que si $\mathbb{M}$ est κ-saturé, alors $\mathbb{M}$ a une suite indiscernable indexée par l'ordinal $(\kappa, \leqslant)$.

(*) 1.3. **Preuve 2 du lemme d'existence.** Cette question optionnelle est plus difficile. Il faut connaître la logique à quantificateur généralisé $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ (SÉ2, partie 6) et notamment la notion de modèle de Henkin.

On note Λ_1 la logique $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$, avec les notions de satisfaction $\models_1$ et de déduction $\vdash_1$.

(a) Soit T élémentaire ayant un modèle infini. Soit T_1 la Λ_1-théorie formée des axiomes suivants :

— axiomes de T ;

— $[(Qx)(\varphi_1 \wedge \varphi_2)] \leftrightarrow [(Qx)\varphi_1 \wedge (Qx)\varphi_2)]$;

— $[(Qx)(\neg\varphi)] \leftrightarrow [\neg(Qx)\varphi]$.

Montrer que T_1 est cohérente (dans $\vdash_1$).

(b) Soit T_1' une Λ_1-théorie maximale cohérente étendant T_1. Soit $\mathcal{C} = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de nouvelles constantes. Soit :

$$\Gamma = \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) : (Qx_1) \ldots (Qx_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in T_1'\}.$$

Montrer que Γ est une $\Lambda_1(\mathcal{L} \cup \mathcal{C})$-théorie cohérente maximale.

(c) En déduire le lemme d'existence.

1.4. **Lemme d'extension.** Soient $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures et $(I; <), (J; <)$ deux ordres totaux. On suppose qu'il y a des suites indiscernables $\mathbf{a} \in \mathbb{M}^I, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^J$ de même type. Soit $f\colon (I; <) \hookrightarrow (J; <)$ un plongement d'ordres. Montrer que la I-suite $\mathbf{b}' = (b_{f(i)} : i \in I)$ est indiscernable, et que f induit naturellement un isomorphisme $\hat{f}\colon \langle \mathbf{a} \rangle \simeq \langle \mathbf{b}' \rangle$.

2. Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski et applications

Cette partie fait suite à la précédente. L'exercice 15.4 est prérequis.

On rappelle qu'une théorie *nomme des témoins existentiels* (NTE) si pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{y})$, il existe un terme $t_\varphi(\mathbf{y})$ tel que :

$$T \models (\forall \mathbf{y})[(\exists x)\varphi(x, \mathbf{y}) \leftrightarrow \varphi(t_\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y})].$$

Toute théorie possède une extension (en langage étendu) NTE.

Définition. Un *modèle d'Ehrenfeucht-Mostowski* de colonne I et de type p est un modèle $\mathbb{M} \models T$ possédant une I-suite indiscernable $\mathbf{a}$ avec $\operatorname{tp} \mathbf{a} = p$ et $\mathbb{M} = \langle \mathbf{a} \rangle$.

2.1. Montrer que si T est une théorie NTE ayant un modèle infini, alors elle a des modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski de toute colonne.
Montrer que c'est faux sans l'hypothèse NTE.

2.2. Application 0. Déduire que si T (non supposée NTE) a des modèles infinis, alors elle a un modèle $\mathbb{M} \models T$ et un plongement élémentaire $\mathbb{M} \rightarrowtail \mathbb{M}$ d'image propre.

2.3. Application 1. En déduire que si T (non supposée NTE) a des modèles infinis, alors pour tout $\kappa \geqslant \operatorname{card} T$ elle a un modèle de cardinal κ avec 2^κ automorphismes. [On peut admettre qu'il existe des ordres $(I; <)$ de cardinal κ avec cette propriété.]

2.4. Soient $\mathbb{M}$ d'Ehrenfeucht-Mostowski ayant pour colonne un bon ordre et $A \subseteq \mathbb{M}$ une partie dénombrable (non supposée définissable). Montrer que $\mathbb{M}$ réalise un nombre dénombrable de 1-types à paramètres dans A.

(**) 2.5. Application 2. Soit T une théorie dénombrable κ-catégorique en tout $\kappa > \aleph_0$. Montrer que T est *stable*, i.e. qu'il n'existe pas de modèle $\mathbb{M} \models T$, de partie infinie $A \subseteq \mathbb{M}$ (non supposée définissable), et de formule $\varphi(x, y)$ telle que la relation binaire $\varphi(x, y)$ établisse un ordre total sur A. On pourra penser à $(\mathbb{Q}; <)$.

18.12 (cardinalité des parties définissables et paires de Vaught). Soit T une théorie complète en langage dénombrable. On s'intéresse à ses parties définissables.

2.1. Il n'y a pas en général priori de meilleure information que $0 \leqslant \operatorname{card} \varphi[\mathbb{M}] \leqslant \operatorname{card} \mathbb{M}$.

(a) Le vérifier : donner une théorie complète T telle pour chaque $\lambda \leqslant \kappa$, il existe $\mathbb{M} \models T$ de cardinal κ avec une partie définissable de cardinal λ.

(b) Montrer qu'il existe un modèle de cardinal κ où toute partie définissable infinie est de cardinal κ.

(c) Déduire que dans une *structure* catégorique $\mathbb{A}$, toute partie définissable de cardinal $< \operatorname{card} \mathbb{A}$ est finie.

2.2. Par construction, les foncteurs définissables sont croissants, i.e. si $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{B}$ alors $\varphi[\mathbb{A}] \subseteq \varphi[\mathbb{B}]$. Mais la croissance n'est pas nécessairement stricte.

Définition (paire de Vaught)**.** Une *paire de Vaught* est la donnée d'une partie définissable φ et de deux modèles distincts $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$ avec pourtant $\varphi[\mathbb{A}] = \varphi[\mathbb{B}]$ infini.

(a) Donner un exemple.

(b) Montrer que s'il existe un modèle de cardinal κ avec une partie définissable infinie de cardinal $< \kappa$, alors il existe une paire de Vaught.

(c) Montrer que s'il existe une paire de Vaught, il en existe une où la partie définissable est dénombrable. On pourra introduire une relation unaire pour $\mathbb{A}$.

(d) Montrer que s'il existe une paire de Vaught, il en existe une où $\mathbb{B}$ est de cardinal κ, et la partie définissable est de cardinal $\aleph_0$.

(e) Montrer qu'une théorie κ-catégorique n'a pas de paire de Vaught.

Théorème et problème des deux cardinaux. • Origine [MV62, Theorem 6.2] ; j'ignore d'où sort la preuve dans $\Lambda(Q)$. • Une (κ, λ)-paire pour φ est un modèle $\mathbb{M}$ de cardinal κ où $\varphi[\mathbb{M}]$ est de cardinal λ. Si l'on a une (κ_1, λ_1)-paire, a-t-on une $(\kappa_2, \lambda_2$-paire ? La question fut systématisée par Chang [Cha65]. Forte dépendance ensembliste.

Notes conclusives

• **Repères historiques** L'exposition contemporaine des suites indiscernables et des modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski doit beaucoup à [Mor68].

Suites indiscernables. • Elles apparaissent dans [EM56], par théorème de partition à la Ramsey comme la question 1.1.1. • La preuve 2 du lemme d'existence (question 1.1.3) est de Keisler, [Kei70, § 3.15, p. 54 sqq]. • Troisième technique pour l'existence d'indiscernables : par ultraproduits itérés comme Gaifman Uniform extension operators.

Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski. Eux aussi viennent de [EM56], avec l'application 2.2.3. • On trouve un précurseur dans la démonstration par Fraenkel, revisitée par Mostowski, de l'indépendance de AC de ZF$\setminus$\{AF\} ; § 23, notes conclusives et ex. 25.8. • Hodges aussi mentionne Fraïssé comme source

• **Stabilité.** Le théorème « $\aleph_1$-catégorique exclut les ordres infinis » (question 2.2.5) vient de [Ehr57b, Corollary], fortement généralisé par Shelah comme suit.

Théorème ([She71b]). Soient T une théorie instable et $\kappa > \operatorname{card} T + \aleph_0$. Alors T possède 2^κ modèles de cardinal κ deux-à-deux non isomorphes.

[MV62] : Michael Morley et Robert Vaught. « Homogeneous universal models ». In : *Math. Scand.* 11 (1962), p. 37-57

[Cha65] : Chen-Chung Chang. « A note on the two cardinal problem ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1965), p. 1148-1155

[Mor68] : Michael Morley. « Partitions and models ». In : *Proceedings of the Summer School in Logic (Leeds, 1967).* Springer, Berlin, 1968, p. 109-158

[EM56] : Andrzej Ehrenfeucht et Andrzej Mostowski. « Models of axiomatic theories admitting automorphisms ». In : *Fund. Math.* 43 (1956), p. 50-68

[Kei70] : Jerome Keisler. « Logic with the quantifier "there exist uncountably many" ». In : *Ann. Math. Logic* 1 (1970), p. 1-93

[Ehr57b] : Andrzej Ehrenfeucht. « On theories categorical in power ». In : *Fund. Math.* 44 (1957), p. 241-248

[She71b] : Saharon Shelah. « The number of non-isomorphic models of an unstable first-order theory ». In : *Israel J. Math.* 9 (1971), p. 473-487