

CHAPITRE IV

COMPLÉTUDE, INCOMPLÉTUDE

Aperçu du chapitre. Ce chapitre manie deux notions de *complétude* à bien distinguer : complétude d'une théorie (une forme de maximalité), complétude d'une logique (existence d'un calcul déductif adapté). • La logique élémentaire possède, outre la conséquence sémantique notée $\models$, une relation de *conséquence syntaxique* $\vdash$. Ainsi $A \vdash \varphi$ signifie : « en utilisant l'axiomatique A , on peut démontrer φ ». Cet aspect syntaxique de la conséquence repose sur un *calcul déductif* (§ 17). Les deux notions de conséquence $\models$ et $\vdash$ coïncident en fait : cette adéquation de l'une à l'autre notion est appelée *complétude de la logique élémentaire*, et démontrée deux fois (§ 18, § 19). Chaque méthode a ses avantages ; la seconde est plus abstraite mais limitée aux langages dénombrables. • On passe alors à l'étude de la structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$. Celle-ci interprète la combinatoire finie, et donc la syntaxe (§ 20). Il suit qu'elle formule des paradoxes « type menteur », ce qui mène à l'*incomplétude de l'arithmétique élémentaire* (§ 21). • L'incomplétude de cette théorie élémentaire entraîne que la logique du deuxième ordre « naïve » ne possède pas de calcul déductif adapté ; c'est l'*incomplétude de la logique* (plus précisément, de la *sémantique naïve*) du deuxième ordre. Ainsi, la notion de satisfaction au deuxième ordre naïf est trop extrinsèque aux structures et trop tributaire du cadre ensembliste pour être un outil fiable (§ 22). • Ceci explique le choix méthodologique « logique élémentaire, théorie élémentaire des ensembles » pour formaliser la notion intuitive de partie.

§ 17. Dédutions

Cette section formalise la démontrabilité. Celle-ci est relative à un système d'axiomes ; on parle de *dédution*, notée $\Phi \vdash \chi$. Il n'y a pas de « $A \vdash \chi$ » car la relation est purement syntaxique. Après la notion de *cohérence* (§ 17.1), on présente les *règles pour* $\vdash$ (§ 17.2). La quantification donne lieu à des questions de *substitutions*, dont l'effet sémantique est décrit en § 17.3. Invitation facultative à un peu de théorie de la démonstration, l'exposé reste en déduction

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

naturelle classique.
Prérequis : § 6.

La conséquence sémantique $\models$ (§ 6.4) reflète la *vérité* des mathématiques, pas la pratique de leur rédaction. Celle-ci repose sur la méthode axiomatique et sur l'outil déductif; on formalise ce dernier. L'exposé comporte un choix méthodologique et un choix pédagogique. 5

- Méthodologique : on travaille en *déduction classique*, i.e. avec le tiers-exclu. (La déduction intuitionniste rejette ce principe; compléments § P.)
- Pédagogique : on présente la *déduction naturelle*, qui transcrit directement la pratique usuelle. (Les « calculs à la Hilbert » sont préhistoriques. 10
Le « calcul des séquents », moins naïf et plus symétrique, est mentionné aux compléments § T.)

La présente section décrit une conséquence syntaxique $\vdash$, dont § 18 puis § 19 établiront l'équivalence avec $\models$.

§ 17.1. Notions syntaxiques 15

$\vdash$ **Définition A** (séquent naturel, déduction naturelle).

- Un *séquent naturel* est une expression $\Phi \vdash \chi$, où Φ est un ensemble de formules et χ une formule (on ne note pas les variables libres ici).
- Une *déduction naturelle* est un arbre fini de séquents obéissant aux règles de § 17.2. On parle d'*arbre de déduction*; en logique élémentaire, ces 20
objets sont toujours finis.
- Une formule est *conséquence syntaxique* de Φ , noté $\Phi \vdash \chi$, s'il existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ fini et une déduction dont les feuilles sont des axiomes de Φ_0 et la racine le séquent $\Phi_0 \vdash \chi$.

La notation ne présente aucun risque d'ambiguïté. 25

Remarque. En toute rigueur, la collection des déductions naturelles est la plus petite collection close par les règles. Ceci explique le caractère fini des déductions naturelles en logique élémentaire (par opposition par exemple à $\Lambda_{\omega_1, \omega}$, dont les déductions peuvent être infinies; v. § SÉ4).

Cette nouvelle notion de conséquence appelle un développement parallèle à 30
§ 8.1 et § 8.2.

Th(Φ) Définition B (cohérence, théorie syntaxique, axiomatisation, complétude).

- Un ensemble de formules Φ est *cohérent* si $\Phi \not\vdash \perp$.

- Une *théorie syntaxique* Θ est un ensemble d'énoncés cohérent et clos sous $\vdash$.
- Si A est un ensemble cohérent d'énoncés, soit $\text{Th}(A) = \{\varphi \in \mathcal{L}\text{-}\text{En} : A \vdash \varphi\}$ la *théorie syntaxique engendrée* par A .
- Si $\text{Th}(A) = \Theta$, on dit que A *axiomatise* Θ .
- Une théorie syntaxique Θ est *complète* si pour tout énoncé φ , on a soit $\Theta \vdash \varphi$ soit $\Theta \vdash \neg\varphi$.

5

Remarque. Le dédoublement de la notion de conséquence entraîne d'apparents conflits terminologiques.

Sémantique	Syntaxe
$\Phi \models \chi$	$\Phi \vdash \chi$
satisfaisabilité	cohérence
théorie	théorie syntaxique
$\text{Th}(A)$	$\text{Th}(A)$
axiomatisation	axiomatisation
complétude	complétude

10

L'équivalence des deux colonnes, et notamment des deux notions de complétude, est elle-même appelée *complétude de la logique élémentaire* (§ 18). Le terme est malheureux. Il signifie qu'en logique élémentaire, la conséquence sémantique $\models$ (en théorie des modèles) et la conséquence syntaxique $\vdash$ (en théorie de la démonstration) coïncident.

15

Lemme (cf. lemmes § 8.1 et 8.2). Soient Φ un ensemble de formules, χ une formule, et Θ une théorie syntaxique.

- (i) $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi \cup \{\neg\chi\}$ n'est pas cohérent.
- (ii) Θ est complète ssi elle est maximale dans l'ensemble des théories syntaxiques ordonné par inclusion.

20

Démonstration. La démonstration anticipe et motive les règles de § 17.2.

- (i) On suppose $\Phi \vdash \chi$. Par Aff, $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \chi$. Par Ax et Aff, $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \neg\chi$. Donc par $\perp^+$, on a $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \perp$. On suppose $\Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \perp$. Par $\neg^+$, on a $\Phi \vdash \neg\neg\chi$. Donc par $\perp_c$, $\Phi \vdash \chi$.
- (ii) Supposons Θ complète et $\Theta \subseteq \Theta'$; soit $\varphi \in \Theta'$. Si $\Theta \vdash \neg\varphi$, alors $\Theta' \vdash \neg\varphi$, donc Θ' n'est pas cohérente; absurde. Donc $\Theta \vdash \varphi$ et $\Theta' = \Theta$.
Supposons Θ maximale. Soit φ un énoncé. Si $\Theta \not\vdash \varphi$, alors $\Theta \cup \{\neg\varphi\}$ est cohérente, donc par maximalité $\neg\varphi \in \Theta$ et $\Theta \vdash \neg\varphi$. C'est la complétude.

□

§ 17.2. Règles de déduction

On allège les notations autant que possible : pas d'accolades pour les ensembles, pas de parenthèses inutiles, pas d'indication des variables libres.

Les règles se répartissent en trois groupes : *structurel* (règles indépendantes de la logique), *propositionnel* (pour les connecteurs et $\perp$), *élémentaire* (pour les quantificateurs et $=$). 5

- **Groupe structurel.** Les règles structurelles sont simples. 1. Pour commencer une démonstration, on fait une hypothèse (*axiome*). 2. On peut ajouter des hypothèses inutiles (*affaiblissement*).

Axiome :

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi} \text{Ax} \quad 10$$

Affaiblissement :

$$\frac{\Phi \vdash \chi}{\Phi, \psi \vdash \chi} \text{Aff}$$

- **Groupe propositionnel.** Les symboles peuvent être *introduits* et *éliminés*. Les règles sont intuitives car faites pour modéliser la pratique. L'introduction de la négation $\neg^+$ n'est *pas* la démonstration par l'absurde ; celle-ci demande une règle dédiée $\perp_c$. L'élimination de conjonction $\wedge^-$ vient en deux déclinaisons, 15 selon le côté conservé ; remarque analogue pour $\vee^+$. La ternarité dans $\vee^-$ reflète une démonstration par disjonction de cas.

Absurdité :

$$\frac{\Phi \vdash \chi \quad \Phi \vdash \neg \chi}{\Phi \vdash \perp} \perp^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \perp}{\Phi \vdash \chi} \perp^-$$

Négation :

$$\frac{\Phi, \chi \vdash \perp}{\Phi \vdash \neg \chi} \neg^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \neg \chi}{\Phi, \chi \vdash \perp} \neg^-$$

Démonstration par l'absurde :

$$\frac{\Phi \vdash \neg \neg \chi}{\Phi \vdash \chi} \perp_c \quad 20$$

Conjonction :

$$\frac{\Phi \vdash \chi_1 \quad \Phi \vdash \chi_2}{\Phi \vdash \chi_1 \wedge \chi_2} \wedge^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \chi_1 \wedge \chi_2}{\Phi \vdash \chi_1} \wedge_g^- \quad \frac{\Phi \vdash \chi_1 \wedge \chi_2}{\Phi \vdash \chi_2} \wedge_d^-$$

Disjonction :

$$\frac{\Phi \vdash \chi_1}{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2} \vee_g^+ \quad \frac{\Phi \vdash \chi_2}{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2} \vee_d^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2 \quad \Phi, \chi_1 \vdash \psi \quad \Phi, \chi_2 \vdash \psi}{\Phi \vdash \psi} \vee^-$$

Implication :

$$\frac{\Phi, \chi \vdash \psi}{\Phi \vdash \chi \rightarrow \psi} \rightarrow^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \chi \rightarrow \psi \quad \Phi \vdash \chi}{\Phi \vdash \psi} \rightarrow^- \right.$$

Remarques

- La redondance entre $\perp$ et $\neg$ est claire : $\neg\varphi$ et $\varphi \rightarrow \perp$ se démontrent l'une l'autre, même sans démonstration par l'absurde. La théorie de la démonstration considère donc $\neg\varphi$ comme une abréviation. En mathématiques, la négation est plus naturelle que $\perp$; d'où le choix de la conserver. 5
- La démonstration par l'absurde est une *élimination de la double négation*. La logique intuitionniste garde $\perp^-$ mais perd $\perp_c$. La logique minimale perd les deux. V. compléments § P.

Exemples

- Relire et vérifier la démonstration du lemme § 17.1.
- $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ et $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ se démontrent l'une l'autre. En effet :

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi_1 \vdash \varphi_1} \text{Ax}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \varphi_1} \text{Aff} \quad \frac{\frac{\frac{}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \vdash \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2} \text{Ax}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2} \text{Aff} \quad \frac{}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \neg\varphi_1} \wedge^-}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vdash \perp} \perp^+$$

et de même pour $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_2 \vdash \perp$. Soit $\overline{S_i}$ le séquent $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_i \vdash \perp$. La barre indique qu'il en existe une dérivation dont les feuilles sont des axiomes. Alors : 15

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \text{Ax}}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \text{Aff} \quad \overline{S_1} \quad \overline{S_2}}{\frac{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \perp}{\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \vdash \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)} \neg^+} \vee^-$$

La réciproque est un exercice.

• **Groupe élémentaire.** Il demande une notion de *substitution*.

$\varphi[x := t]$ **Définition** (terme substituable, substitution). Un terme t est *substituable* à une variable x dans une formule φ si $x \notin \text{VarLié } \varphi$ et $\text{Var } t \cap \text{VarLié } \varphi = \emptyset$. Si c'est le cas on note $\varphi[x := t]$ le résultat de la *substitution* de chaque occurrence de x dans φ par t . 20

S'il n'y pas ambiguïté sur x , par exemple si φ possède une seule variable libre, on note $\varphi[t]$. Ne pas confondre avec le *remplacement* $\varphi(t)$ (§ 6.3). 25

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

Remarques

- On peut aussi procéder à des substitutions simultanées $\varphi[\mathbf{x} := \mathbf{t}]$, mais l'esprit de la déduction est plutôt de revenir à des étapes minimales $[x := t]$, sans uplets. Noter leur non-commutativité.
- Avec une notion plus permissive de formule (§ 6.3.B et la remarque la 5 suivant), la définition est plus pénible car elle doit exclure les « captures de variables » ; v. notes conclusives.

Égalité :

$$\frac{}{\vdash t = t} =^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \chi[x := t_1] \quad \Phi \vdash t_1 = t_2}{\Phi \vdash \chi[x := t_2]} =^- \right.$$

pour chaque terme t si t_1 et t_2 sont substituables à x dans χ

Quantificateur universel :

$$\frac{\Phi \vdash \chi}{\Phi \vdash \forall x \chi} \forall^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \forall x \chi}{\Phi \vdash \chi[x := t]} \forall^- \right.$$

si $x \notin \text{VarLib } \Phi$ si t est substituable à x dans χ

Quantificateur existentiel :

$$\frac{\Phi \vdash \chi[x := t]}{\Phi \vdash \exists x \chi} \exists^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \exists x \psi \quad \Phi, \psi \vdash \chi}{\Phi \vdash \chi} \exists^- \right.$$

si t est substituable à x dans χ si $x \notin \text{VarLib}(\Phi \cup \{\chi\})$

Remarques

- Pour plus de symétrie entre $\forall^+$ et $\exists^-$, noter que dans le premier cas, la clause équivaut à : « $x \notin \text{VarLib}(\Phi \cup \{\forall x \chi\})$ ».
- On peut déduire $\vdash \exists x x = x$, d'où le besoin de ne traiter que des structures *non vides* (§ 6.1.B) ; voir V. notes conclusives.

Exemples

- $\neg \exists x \varphi$ et $\forall x \neg \varphi$ se démontrent l'une l'autre.
Par construction de Form (§ 6.3.B), considérer de telles formules présuppose que x n'est pas liée dans φ ; notamment x est substituable à x dans

φ , et $\varphi[x := x]$ reste φ . D'une part :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg \exists x \varphi \vdash \neg \exists x \varphi}}{\neg \exists x \varphi, \varphi \vdash \neg \exists x \varphi} \text{Aff}}{\neg \exists x \varphi, \varphi \vdash \neg \exists x \varphi} \text{Ax} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}}{\neg \exists x \varphi, \varphi \vdash \varphi} \text{Aff}}{\neg \exists x \varphi, \varphi \vdash \exists x \varphi} \exists^+}{\frac{\neg \exists x \varphi, \varphi \vdash \perp}{\neg \exists x \varphi \vdash \neg \varphi} \neg^+} \perp^+ \quad \frac{\neg \exists x \varphi \vdash \neg \varphi}{\neg \exists x \varphi \vdash \forall x \neg \varphi} \forall^+$$

et d'autre :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi, \varphi \vdash \varphi} \text{Aff}}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi, \varphi \vdash \varphi} \text{Ax} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\forall x \neg \varphi \vdash \forall x \neg \varphi}}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi, \varphi \vdash \forall x \neg \varphi} \text{Aff}}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi, \varphi \vdash \neg \varphi} \forall^-}{\frac{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi, \varphi \vdash \perp}{\forall x \neg \varphi, \varphi \vdash \neg \exists x \varphi} \neg^+} \perp^+ \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\exists x \varphi \vdash \exists x \varphi}}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \vdash \exists x \varphi} \text{Aff}}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi, \varphi \vdash \neg \exists x \varphi} \text{Aff}}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \vdash \neg \exists x \varphi} \exists^-$$

Donc en introduisant $\perp$ puis $\neg$, on trouve $\forall x \neg \varphi \vdash \neg \exists x \varphi$. 5

- Grâce à $\perp_c$, $\exists x \varphi$ et $\neg \forall x \neg \varphi$ se démontrent l'une l'autre.
- Toute formule est $\vdash$ -équivalente à une où x n'est pas variable liée (« α -renommage », ex. 19.4).

- **Simplification de la présentation.** On peut heureusement alléger les arbres de déduction. Les hypothèses sont notées en feuilles. Quand une hypothèse est consommée (par $\neg^+$, $\rightarrow^+$, $\forall^-$ ou $\exists^-$), on la barre, comme suit : 10

$$\frac{\frac{\frac{\Phi}{\vdots} \quad \frac{\not\varphi}{\vdots}}{\chi \quad \neg \chi} \perp^+}{\neg \varphi} \neg^+$$

Il faut bien barrer toutes les occurrences pertinentes, i.e. celles qui majorent l'emploi de la règle. Au moment d'introduire $\forall x$, vérifier que x n'est libre dans aucune feuille majorante. Au moment d'éliminer $\exists x$, barrer la formule non quantifiée, et s'assurer qu'aucune autre formule n'a x dans ses variables libres. 15

La lecture d'un arbre aux feuilles barrées étant ardue, on indique l'étape d'élimination comme dans l'exemple suivant.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi^{(1)} \quad \varphi \rightarrow \chi^{(3)}}{\chi} \rightarrow^- \quad \frac{\chi}{\neg \chi^{(2)}} \perp^+ \\
\frac{\perp}{\neg \varphi} \neg^+ (1) \\
\frac{\neg \chi \rightarrow \neg \varphi}{(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\neg \chi \rightarrow \neg \varphi)} \rightarrow^+ (2) \\
\frac{}{(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\neg \chi \rightarrow \neg \varphi)} \rightarrow^+ (3)
\end{array}$$

Exemple. On montre à nouveau que $\neg \exists x \varphi$ et $\forall x \neg \varphi$ se déduisent l'une de l'autre. D'une part :

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi^{(1)} \quad \neg \exists x \varphi \quad \exists x \varphi}{\perp} \exists^+ \\
\frac{\perp}{\neg \varphi} \neg^+ (1) \\
\frac{}{\forall x \neg \varphi} \forall^+
\end{array}$$

et d'autre :

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi^{(2)} \quad \frac{\forall x \neg \varphi}{\neg \varphi} \forall^- \quad \frac{\exists x \varphi}{\neg \exists x \varphi} \exists^-}{\perp} \perp^+ \\
\frac{\perp}{\neg \exists x \varphi} \neg^+ (1) \\
\frac{\neg \exists x \varphi}{\perp} \perp^+ \\
\frac{\perp}{\neg \exists x \varphi} \neg^+ (3)
\end{array}$$

§ 17.3. Effet sémantique des substitutions

Les substitutions ont l'effet attendu sur la satisfaction. Pour une variable x , on note x^c l'ensemble $\text{Var} \setminus \{x\}$. Si des paramètres $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ coïncident sur toutes les variables sauf éventuellement x , on écrit donc $\mathbf{a}|_{x^c} = \mathbf{a}'|_{x^c}$.

Proposition. Soient $\mathbb{A}$ une structure, $\mathbf{a}$ des paramètres, φ une formule, x une variable, et τ un terme substituable à x dans φ . Soient φ^* la formule $\varphi[x := \tau]$ et $\mathbf{a}^*$ les paramètres tels que $\mathbf{a}^*|_{x^c} = \mathbf{a}|_{x^c}$ et $\mathbf{a}^*(x) = \tau(\mathbf{a})$. Alors $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$.

Démonstration. Elle est incluse pour l'exhaustivité; on peut la traiter comme un exercice, ou ne pas la lire. Elle utilise deux lemmes. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la structure en jeu, on écrit $t(\mathbf{a})$ au lieu de $t[\mathbb{A}](\mathbf{a})$.

Lemme A. Soient $\mathbb{A}$ une structure, $\mathbf{a}$ des paramètres, t un terme, x une variable, τ un second terme. Soient t^* le terme $t[x := \tau]$ et $\mathbf{a}^*$ les paramètres

tels que :

$$\mathbf{a}^*_{|x^c} = \mathbf{a}_{|x^c} \text{ et } \mathbf{a}^*(x) = \tau(\mathbf{a}).$$

Alors $t^*(\mathbf{a}) = t(\mathbf{a}^*)$.

Démonstration. Récurrence sur t . Si t est une variable $y \neq x$, alors t^* reste t . Si t est x , alors t^* est τ , d'où $t^*(\mathbf{a}) = \tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^*(x) = t(\mathbf{a}^*)$. Si t est une constante, t^* reste t . Enfin si t est de la forme $f(t_1, \dots, t_n)$, alors t^* est $f(t_1^*, \dots, t_n^*)$ et par récurrence :

$$\begin{aligned} t^*(\mathbf{a}) &= f[\mathbb{A}] (t_1^*(\mathbf{a}), \dots, t_n^*(\mathbf{a})) \\ &= f[\mathbb{A}] (t_1(\mathbf{a}^*), \dots, t_n(\mathbf{a}^*)) \\ &= t(\mathbf{a}^*). \end{aligned}$$

□

Lemme B. Soient $\mathbb{A}$ une structure, τ un terme, x, y deux variables *distinctes* avec $y \notin \text{Var } \tau$, et $b \in \mathbb{A}$. Pour tous les paramètres $\mathbf{a}$ on note :

- $\mathbf{a}^*$ les paramètres tels que $\mathbf{a}^*_{|x^c} = \mathbf{a}_{|x^c}$ et $\mathbf{a}^*(x) = \tau(\mathbf{a})$;
- $\mathbf{a}'$ les paramètres tels que $\mathbf{a}'_{|y^c} = \mathbf{a}_{|y^c}$ et $\mathbf{a}'(y) = b$.

10

Alors pour tous les paramètres $\mathbf{a}$, on a l'égalité $(\mathbf{a}')^* = (\mathbf{a}^*)'$.

Démonstration. Si $z \in \text{Var}$ est distincte de x et y , alors pour chaque $\mathbf{a}$:

$$(\mathbf{a}')^*(z) = \mathbf{a}'(z) = \mathbf{a}(z) = \mathbf{a}^*(z) = (\mathbf{a}^*)'(z).$$

En y , on a :

$$(\mathbf{a}')^*(y) = \mathbf{a}'(y) = b = (\mathbf{a}^*)'(y).$$

15

Enfin en x , puisque $y \notin \text{Var } \tau$, on a :

$$(\mathbf{a}')^*(x) = \tau(\mathbf{a}') = \tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^*(x) = (\mathbf{a}^*)'(x).$$

□

On démontre la proposition par récurrence sur φ .

- Si φ est de la forme $R(\mathbf{t})$ (dont $\perp$ ou l'égalité), soit $\mathbf{t}^*$ le uplet de termes

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

$\mathbf{t}[x := \tau]$. La formule φ^* est alors $R(\mathbf{t}^*)$. Grâce au lemme A :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a}) &\text{ ssi } \mathbf{t}^*(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}] \\ &\text{ ssi } \mathbf{t}(\mathbf{a}^*) \in R[\mathbb{A}] \\ &\text{ ssi } \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*). \end{aligned}$$

- Le cas des connecteurs propositionnels est trivial.
- Supposons φ de la forme $\exists y \chi$. Comme τ est substituable à x dans φ , on a $x \notin \text{VarLié } \varphi$, et donc $y \neq x$. En outre $y \notin \text{Var } \tau$. Il suit que τ est aussi substituable à x dans χ , et φ^* est $\exists y \chi^*$. On montre : $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$ 5
ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$.
 - Supposons $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$. Alors il existe $b \in \mathbb{A}$ tel que pour $\mathbf{a}'$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sauf en $\mathbf{a}'(y) = b$, on ait $\mathbb{A} \models \chi^*(\mathbf{a}')$. Par récurrence, $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}'^*)$. D'après le lemme B, $\mathbf{a}'^* = \mathbf{a}^{*'}$, donc $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^{*'})$ et $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$. 10
 - Supposons $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}^*)$. Alors il existe $b \in \mathbb{A}$ tel que pour $(\mathbf{a}^*)'$ coïncidant avec $\mathbf{a}^*$ sauf en $(\mathbf{a}^*)'(y) = b$, on ait $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^{*'})$. Ici encore on obtient $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^{*'})$, d'où $\mathbb{A} \models \chi^*(\mathbf{a}')$ et $\mathbb{A} \models \varphi^*(\mathbf{a})$.
- $\forall$ est redondant, par équivalence sémantique entre $(\forall y)\chi$ et $\neg(\exists y)(\neg\chi)$. 15

Altérer la définition des formules (§ 6.3.B) pour permettre plus de souplesse dans les variables complique la démonstration pour un gain médiocre.

Exercices

17.1. Établir les propriétés suivantes :

- a. (i) $\varphi_1 \vdash \varphi_2$ ssi $\vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$; (ii) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$; (iii) $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_2 \rightarrow \neg\varphi_1)$; 20
(iv) $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$; (v) $\vdash \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$; (vi) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$;
- b. la règle de Tarski :

$$\frac{\Phi, \varphi_1 \vdash \chi \quad \Phi, \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \vdash \chi}{\Phi \vdash \chi} ;$$

- c. la loi de Peirce :

$$\vdash ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi. \quad \text{25}$$

17.2 (sur les quantificateurs).

- a. Montrer que si $\varphi \vdash \chi$, alors $\exists x \varphi \vdash \exists x \chi$ et $\forall x \varphi \vdash \forall x \chi$.
- b. A-t-on $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \exists x \chi)$? A-t-on $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \chi)$?

17. Dédutions

c. On suppose $\Phi \vdash \exists x R(x)$ et $\Phi \vdash \exists x S(x)$. Trouver l'erreur :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \Phi \vdash \exists x S(x) \\
 \vdots \\
 \Phi \vdash \exists x R(x) \\
 \hline
 \Phi \vdash \exists x R(x) \wedge S(x)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overline{R(x) \vdash R(x)} \quad \overline{S(x) \vdash S(x)} \\
 \hline
 \Phi, R(x), S(x) \vdash R(x) \quad \Phi, R(x), S(x) \vdash S(x) \\
 \hline
 \Phi, R(x), S(x) \vdash R(x) \wedge S(x) \\
 \hline
 \Phi, R(x), S(x) \vdash \exists x R(x) \wedge S(x) \\
 \hline
 \Phi, R(x) \vdash \exists x R(x) \wedge S(x) \\
 \hline
 \Phi \vdash \exists x R(x) \wedge S(x)
 \end{array}$$

17.3 (sur l'égalité).

- Montrer qu'on peut prendre pour $=^+$ le seul axiome $\vdash x_1 = x_1$ (en conservant $=^-$).
- Montrer qu'on peut prendre pour $=^-$ les seuls cas où χ est $R(\mathbf{t})$ (en conservant $=^+$). 5
- Montrer que $\Phi \vdash t_1 = t_2$ est une relation d'équivalence sur les termes.
- Soit t substituable à x dans φ . Montrer que $\varphi[x := t]$ et $(\exists x)(\varphi \wedge x = t)$ se démontrent l'une l'autre.

17.4 (redondance des opérateurs logiques). Suite de l'exercice 6.6, dont on reprend les notations. Soit $\vdash^s$ la notion de déduction employant les seules règles structurelles et relatives 10
à $\perp, \rightarrow, \exists, =$ (dont $\perp_c$). Montrer : $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi^s \vdash^s \chi^s$.

————→ **17.5 (pureté des méthodes).** Soient $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ deux langages, $\Phi \subseteq \mathcal{L}\text{-Form}$, et $\chi \in \mathcal{L}\text{-Form}$. On suppose $\Phi \vdash \chi$ [$\mathcal{L}'$] (déduction dans le langage étendu). Montrer $\Phi \vdash \chi$ [$\mathcal{L}$]. [Neutraliser les symboles en trop.] Suite à l'ex. 18.3.

17.6 (élimination des constantes et des fonctions). Suite de l'exercice 6.7, dont on 15
reprend les notations.

- Montrer : $\alpha_c \wedge \beta_c \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^*$. En déduire que si $\Phi \vdash \chi$, alors $\Phi^*, \alpha_c \vdash \chi^*$.
- La *détraduction* d'une formule χ est χ° obtenue en remplaçant chaque occurrence de $R_c(t)$ par $t = c$. Montrer que si $\Theta^*, \alpha_c \vdash \varphi^*$, alors $\Theta \vdash \varphi$. [Détraduire un arbre.]
- Éliminer un symbole de fonction. [Pénible.] 20

17.7 (formes prénexes : syntaxe). Suite de l'exercice 6.5. Vérifier que si φ est une formule et φ' une forme prénexe judicieusement construite, alors $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$. Même question avec une formule sans quantificateurs et une forme $\bigvee$ -prénexe.

17.8 (lemme de généralisation). On suppose $\Phi \vdash \chi$. Soit c un symbole de constante n'apparaissant pas dans Φ . Montrer qu'il existe une variable $x \notin \text{Var } \chi$ telle que $\Phi \vdash (\forall x)(\chi[c := x])$. (L'abus de notation $\chi[c := x]$ est sans risque.) 25

17.9 (logique multিসorte). Suite de l'exercice 7.1, dont on reprend les notations. On note $\vdash$ la déduction unisorte dans $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Chaque $(\mathcal{L} : \mathcal{T})$ -terme possède un type $t : \tau$. Ceci affecte la notion de substituable. On a maintenant des règles $\forall^+(\tau), \forall^-(\tau), \exists^+(\tau), \exists^-(\tau)$ pour chaque type. Ceci définit la déduction multিসorte $\Vdash$ dans $\mathcal{L} : \mathcal{T}$. 30

- Montrer que si $t : \tau$ dépend des variables libres $x_i : \tau_i$, alors $\Theta_{\mathcal{T}}, R_{\tau_1}(x_1), \dots, R_{\tau_n}(x_n) \vdash R_{\tau}(t)$. En déduire que si $\Phi \Vdash \chi$ et que les variables libres de $\Phi \cup \{\chi\}$ sont les $x_i : \tau_i$, alors $\Phi', \Theta_{\mathcal{T}}, R_{\tau_i}(x_i) \vdash \chi'$.
- On suppose $\Theta_{\mathcal{T}} \vdash \varphi'$. Montrer $\Vdash \varphi$. [Retyper les variables puis trivialisier les R_{τ} .]
- En déduire que pour des $(\mathcal{L} : \mathcal{T})$ -énoncés, on a : $\Phi \Vdash \chi$ ssi $\Phi', \Theta_{\mathcal{T}} \vdash \chi'$. 35

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

Le typage des variables mène naturellement à la notion de contexte : v. notes conclusives.

Notes conclusives

La théorie de la démonstration est un domaine légitime, mais il peut ressortir à l'informatique plus qu'aux mathématiques. Pour s'initier, [David-Nour-Raffalli]. Pour approfondir la déduction naturelle, [Prawitz].

• Repères historiques

In 1926 Prof. J. Łukasiewicz called attention to the fact that mathematicians in their proofs do not appeal to the thesis of the theory of deduction, but make use of other methods of reasoning. The chief means employed in their method is that of an arbitrary supposition. The problem raised by Mr Łukasiewicz was to put these methods under the form of structural rules and to analyze their relation to the theory of deduction. The present paper contains the solution of that problem. [Jaś34]

Préhistoire. • Automatiser la déduction est un vieux rêve : *ars magna* de Lulle, *calculus ratiocinator* de Leibniz... • On trouve des preuves formelles chez Peano, mais ce n'est pas la même chose que *formaliser* les preuves formelles ; Peano et ses émules abrégèrent leurs arguments dans une sténo. C'est la différence entre l'emploi d'un calcul déductif et

l'étude d'un calcul déductif.

Débuts. • Hilbert est une figure tutélaire du domaine, pour avoir non seulement promu le renouveau de la méthode axiomatique (p. ex. [Hilbert]), mais amorcé son étude. [Hil00a, Problem 2] demandait une preuve de la cohérence de l'arithmétique ; ceci requerrait le développement d'une théorie de la démonstration. Un « vingt-quatrième problème », écarté de [Hil00a] mais retrouvé depuis dans les carnets de Hilbert [Thi03], l'appelait explicitement : « *Ueberhaupt eine Theorie der Beweismethoden in der Mathematik entwickeln.* » Hilbert s'éloigna de telles questions quelques années, mais y était revenu dès 1917. [Hil22] proposa une *axiomatique de la déduction* ; le concept de règle n'étant alors pas clarifié, ce calcul reposait sur le seul $\rightarrow^-$ et des axiomes ou tautologies admises gérant notamment les quantificateurs. L'inconvénient de cette approche (encore suivie dans certains traités du XXI^e siècle) est la tentation d'optimiser la liste d'axiomes admis, sans gain de clarté. • Les débuts doivent également beaucoup aux collaborateurs de Hilbert : Bernays, Ackermann, von Neumann, lancés à la quête de preuves de cohérence. V. §§ 20–21. • Paul Hertz (sans lien de parenté avec le découvreur des ondes radio) fut le premier à cher-

[David-Nour-Raffalli] : René DAVID, Karim NOUR et Christophe RAFFALLI. *Introduction à la logique*. 2^e éd. Sciences sup. 2004. 352 p.

[Prawitz] : Dag PRAWITZ. *Natural deduction. A proof-theoretical study*. T. 3. Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy. Stockholm : Almqvist & Wiksell, 1965, p. 113

[Jaś34] : Stanisław JAŚKOWSKI. « On the rules of suppositions in formal logic ». In : *Studia logica* 1 (1934), p. 32

[Hilbert] : David HILBERT. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig : Teubner, 1899. 92 p.

[Hil00a] : David HILBERT. « Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900 ». In : *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1900), p. 253-297

[Thi03] : Rüdiger THIELE. « Hilbert's twenty-fourth problem ». In : *Amer. Math. Monthly* 110.1 (2003), p. 1-24

[Hil22] : David HILBERT. « Die logischen Grundlagen der Mathematik ». In : *Math. Ann.* 88.1-2 (1922), p. 151-165

cher de la structure intrinsèque aux déductions. Il voulait surtout isoler des axiomatisations logiquement indépendantes ; v. compléments § F. [Her22], [Her23], [Her29b], alors novateurs, semblent maintenant super-
 5 ficiels. *Hertz est pourtant un inspireur direct de Gentzen* [Sch02]. • Déjà moderne, Herbrand. Un théorème important porte son nom ; v. compléments § T. On rappelle son intérêt pour la déduction multisorte. Ré-
 10 duction au cas unisorte (ex. 17.9) [Sch51] ; [Sch38] contiendrait une erreur.

Histoire moderne. • La déduction naturelle fut introduite par Gentzen [Gen35a] et [Gen35b] (trad. [Gentzen]). Concomitam-
 15 ment Jaśkowski publiait ses propres travaux [Jaś34] ; sa déduction est linéaire et non arborescente. • Gödel avait également développé, pour s'entraîner en logique, une dé-
 20 duction naturelle inaboutie [Pla18b], encore linéaire. • L'idée de structure arborescente,

en tout cas de non-linéarité de la preuve, est en germe dans les travaux de Hertz.

• Les travaux de Gentzen sont plus profonds
 25 que ceux de Jaśkowski, pour le calcul des séquents et le « Hauptsatz » (compléments § T). Le formalisme de Gentzen s'est imposé ; un seul regard à [Gen35a] convainc de sa pertinence. Par ses articles somptueux de lisibilité et de lucidité, *Gentzen est le fon-*
 30 *dateur de la théorie de la démonstration.* • Le foisonnant [Menzler-Trott] (trad. anglaise [Menzler-Trott2]) dresse de Gentzen le portrait d'un naïf ou d'un conformiste, vic-
 35 time de représailles d'après-guerre ; cette réhabilitation d'un membre du NSDAP ne fait pas l'unanimité.

• **Terminologie, notations.** • Peut-être
 40 faudrait-il traduire l'allemand *Sequenz* (ab-

[Her22] : Paul HERTZ. « Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme I ». In : *Math. Ann.* 87 (1922), p. 246-269

[Her23] : Paul HERTZ. « Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme II ». In : *Math. Ann.* 89 (1923), p. 76-102

[Her29b] : Paul HERTZ. « Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme ». In : *Math. Ann.* 101 (1929), p. 457-514

[Sch02] : Peter SCHROEDER-HEISTER. « Resolution and the origins of structural reasoning : early proof-theoretic ideas of Hertz and Gentzen ». In : *Bull. Symbolic Logic* 8.2 (2002), p. 246-265

[Sch51] : Arnold SCHMIDT. « Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik ». In : *Math. Ann.* 123 (1951), p. 187-200

[Sch38] : Arnold SCHMIDT. « Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen ». In : *Math. Ann.* 115.1 (1938), p. 485-506

[Gen35a] : Gerhard GENTZEN. « Untersuchungen über das logische Schließen I ». In : *Math. Z.* 39.1 (1935), p. 176-210

[Gen35b] : Gerhard GENTZEN. « Untersuchungen über das logische Schließen II ». In : *Math. Z.* 39.1 (1935), p. 405-431

[Gentzen] : Gerhard GENTZEN. *Recherches sur la déduction logique*. T. 5. Philosophie de la matière. Traduction et commentaire par Robert Feys et Jean Ladrière. Paris : Presses Universitaires de France, 1955, p. xi+170

[Pla18b] : Jan von PLATO. « Kurt Gödel's first steps in logic : formal proofs in arithmetic and set theory through a system of natural deduction ». In : *Bull. Symb. Log.* 24.3 (2018), p. 319-335

[Menzler-Trott] : Eckart MENZLER-TROTT. *Gentzens Problem*. Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland. Basel : Birkhäuser Verlag, 2001, p. xviii+411

[Menzler-Trott2] : Eckart MENZLER-TROTT. *Logic's lost genius*. T. 33. History of Mathematics. The life of Gerhard Gentzen, Translated from the 2001 German original by Craig Smoryński and Edward Griffor, With appendices by Smoryński and Jan von Plato. Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, p. xxii+440

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

sont de [Gen32]) par « séquence » au lieu de « séquent » ; la confusion viendrait de la traduction anglaise (l'anglais *sequence* voulant dire *suite*, était pris). • Les règles ont des noms désuets dans la littérature : *modus ponens* pour $\rightarrow^-$, *modus tollens* pour $\rightarrow^+$, *absurdité intuitionniste* pour $\perp^-$, etc. • Le taquet $\vdash$ trouve son origine dans [Frege] (trad. anglaise dans [Heijenoort]). Le formalisme de Frege étant bi-dimensionnel, en tout cas non strictement linéaire, son « *nagerechte Urt(h)eilsstrich* » est un *dessin* introduisant une sorte de tableau déductif. L'entité typographique $\vdash$ vient de [Russell-Whitehead] qui l'a popularisée. Elle inspira plus tard $\models$, dont l'histoire est incertaine ; v. § 6, notes conclusives, *Notations*.

• **Déductions linéaires ou arborescentes.**

La clarté du formalisme de Gentzen vient de l'emploi d'*arbres* de déduction, au lieu de *listes*. On peut convertir un formalisme en l'autre algorithmiquement ; une solution possible dans [Pla17].

• **Substitutions avec des formules plus permissives.**

Discussion très optionnelle car pénible. Si l'on tolère les formules du type $(R(x) \wedge (\forall x)(\exists x)S(x))$, il faut affiner la notion de substituabilité pour éviter les captures.

Définition. Un terme t est *substituable* à une variable x dans une formule φ si aucune variable de $\text{Var } t$ ne devient liée quand on remplace simultanément toutes les occurrences libres de x dans φ par t .

Les résultats de § 17.3 restent corrects.

[Gen32] : Gerhard GENTZEN. « Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen ». In : *Math. Ann.* 107 (1932), p. 329-350

[Frege] : Gottlob FREGE. *Begriffsschrift*. Halle : Louis Nebert, 1879

[Heijenoort] : Jean van HEIJENOORT. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Russell-Whitehead] : Alfred WHITEHEAD et Bertrand RUSSELL. *Principia Mathematica I*. Cambridge, 1910. xv+666

[Pla17] : Jan von PLATO. « From Gentzen to Jaskowski and back : algorithmic translation of derivations between the two main systems of natural deduction ». In : *Bull. Sect. Logic Univ. Łódź* 46.1-2 (2017), p. 65-73

• **Notion de contexte.** • À cause de la facilité à introduire $\exists$, on peut dériver $\vdash \exists x x = x$. La déduction naturelle présentée n'est donc correcte que pour les structures *non vides* : d'où la restriction sémantique dès § 6.1. • On peut y remédier.

Définition. Un *contexte* pour un séquent $\Phi \vdash \chi$ est une partie $C \subseteq \text{Var}$ contenant les variables qui ont au moins une occurrence libre dans $\Phi \cup \{\chi\}$. Un *séquent contextualisé* est un triplet $\Phi \vdash_C \chi$, où C est un contexte.

• On donne alors des règles *pour les séquents contextualisés* ; un axiome ou une $=_i$ à variables libres possède un contexte non vide. Les règles sont comme précédemment, en préservant le contexte (pour lier des arbres, prendre la réunion $C_1 \cup C_2$) ; l'affaiblissement permet aussi d'étendre les contextes. Un $\forall^-$ peut requérir d'étendre le contexte, pour contenir les variables libres du terme substitué. • On ne peut plus montrer $\vdash \exists x x = x$, seulement $\vdash_x \exists x x = x$. La déduction résultante est adéquate à la sémantique permettant l'ensemble vide. • Ces subtilités sont étudiées en *logique inclusive*, l'une des *logiques libres*, i.e. logiques où des termes peuvent rester ininterprétés. C'est légitime en philosophie analytique. Celle-ci cherche notamment à modéliser mathématiquement le langage naturel, où l'on peut parler d'un objet sans qu'il fasse référence à rien. En mathématiques, c'est pousser le scrupule un peu loin ; l'ensemble vide ne mérite pas qu'on s'y attarde.

• **Autres logiques.** (Prérequis : § 7.) La logique élémentaire n'est pas seule à posséder un calcul déductif, ni même seule à posséder

18. Adéquation (1)

un calcul déductif modélisant bien la conséquence $\models$.

Logique multisorte. Esquissé à l'ex. 17.9.

Logique d'ordre supérieur. Donné en § 22.1. Capture très mal $\models$.

Logique infinitaire. • $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ possède un système déductif naturel, qui tolère des arbres de déduction infinitaires. Propriétés correctes; v. § sÉ4, 4^e partie. • Cf. [Hil26, p. 162] (trad. anglaise dans [Heijenoort]) : « *So wenn z. B. im Sinne einer einschränkenden Bedingung die Forderung betont wird, daß in der strengen Mathematik nur eine endliche Anzahl von Schlüssen in einem Beweise zulässig sei — als ob es schon irgend jemandem einmal gelungen wäre, unendlich viele Schlüsse auszuführen.* »

Quantificateurs généralisés. • $\Lambda_{\omega, \omega}(\exists_{\geq \aleph_1})$ possède un système déductif naturel, aux déductions finitaires. Propriétés correctes;

v. § sÉ4, 5^e partie. • Rien de bon pour $\exists_{\geq \aleph_0}$.

Logiques non classiques. Elles sont apparues d'abord comme calculs déductifs; leur sémantique est postérieure, et leur calcul y est adapté. V. compléments § P et § Q.

• « **Speed-up** ». • Soient $\Lambda, \mathbb{A}$ deux logiques et $\vdash, \Vdash$ deux calculs déductifs associés. On suppose $\Lambda\text{-Form} \subseteq \mathbb{A}\text{-Form}$ et $\vdash \subseteq \Vdash$, i.e. tout ce qui est $\vdash$ -dérivable est $\Vdash$ -dérivable. • Il se peut qu'en outre toute Λ -formule $\Vdash$ -dérivable soit déjà $\vdash$ -dérivable; c'est une hypothèse de *conservativité syntaxique*. • Même dans ce cas, il peut exister $\varphi \in \Lambda\text{-Form}$ ayant une $\Vdash$ -déduction raisonnable, mais dont toutes les $\vdash$ -déductions sont impraticables. Cela signifie que le système $\Vdash$ ne permet pas de gain théorique mais des gains pratiques incommensurables. • Ce phénomène est appelé *speed-up*. Suite en § 18, notes conclusives.

§ 18. Adéquation (1)

Les relations $\Phi \vdash \chi$ et $\Phi \models \chi$ sont équivalentes en logique élémentaire. Le sens direct, « *correction* de la logique élémentaire », est trivial; le sens réciproque, « *complétude* de la logique élémentaire », occupe toute la section.

Prérequis : § 6, § 17.

Théorème (« complétude » de la logique élémentaire; Skolem, Gödel). On se place en logique élémentaire. Soient $\mathcal{L}$ un langage relationnel, $\Phi \subseteq \mathcal{L}\text{-Form}$ et $\chi \in \mathcal{L}\text{-Form}$. Alors sont équivalents :

- (i) $\Phi \vdash \chi$;
- (ii) $\Phi \models \chi$;
- (iii) pour toute structure $\mathbb{A}$ de cardinal $\leq \max(\text{card } \mathcal{L}, \aleph_0)$ et tout choix de paramètres $\mathbf{a}$, si $\mathbb{A} \models \Phi(\mathbf{a})$, alors $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a})$.

Remarques

- La logique élémentaire, plus précisément la paire $(\models, \vdash)$, est dite *complète*.
- On appelle *complétude faible* la variante où Φ est vide. Certaines logiques ne possèdent que cette forme.

[Hil26] : David HILBERT. « Über das Unendliche ». In : *Math. Ann.* 95.1 (1926), p. 161-190

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- Le cardinal $\max(\text{card } \mathcal{L}, \aleph_0)$, égal à $\text{card } \mathcal{L} + \aleph_0$, est aussi le cardinal de $\mathcal{L}$ -Form. C'est le plus petit cardinal infini plus grand que $\mathcal{L}$. On appelle (iii) la *complétude à cardinaux contrôlés*.

La section est consacrée à établir ce théorème.

5

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est la *correction de la logique élémentaire*. C'est une récurrence sur la structure de la déduction, laissée en exercice. (La preuve utilise la proposition § 17.3 sur l'effet sémantique des substitutions. On peut limiter le nombre de cas à traiter en montrant la redondance du langage, de la notion de satisfaction et des règles.) (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évident. On va montrer (iii) $\Rightarrow$ (i). 10

§ 18.1. Lemme sémantique et stratégie

Étape 1 (lemme sémantique). Il suffit de montrer que pour tout langage $\mathcal{L}$, tout ensemble cohérent d'énoncés a un modèle de cardinal $\leq \text{card } \mathcal{L}$ -Form.

Vérification. Supposons vraie cette propriété, dite « satisfaisabilité contrôlée ». On veut montrer (iii) $\Rightarrow$ (i). 15

On généralise d'abord la satisfaisabilité contrôlée aux ensembles de *formules*. Soit Θ un tel ensemble. On le transforme en un ensemble d'énoncés en langage étendu. (On ne peut pas « clore universellement » Θ , i.e. quantifier universellement les variables libres, car cela change trop le sens ; par exemple Θ pourrait contenir $\{R(x_1), \neg R(x_2)\}$.) On introduit une nouvelle constante c_x par variable $x \in \text{Var}$. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_x : x \in \text{Var}\}$. Comme $\text{card } \text{Var} = \aleph_0$, on a $\text{card } \mathcal{L}' = \text{card } \mathcal{L} + \aleph_0$. Dans chaque $\mathcal{L}$ -formule φ , on remplace chaque variable libre x par c_x . Le résultat φ' est un $\mathcal{L}'$ -énoncé. En outre $\vdash \varphi$ ssi $\vdash \varphi'$. En particulier, comme Θ est cohérent, Θ' l'est aussi. Par satisfaisabilité contrôlée, il possède un modèle $\mathbb{A}'$ de cardinal $\leq \text{card } \mathcal{L}'$ -Form = $\text{card } \mathcal{L}$ -Form. Soit $\mathbb{A}$ la $\mathcal{L}$ -structure sous-jacente, avec les paramètres $\mathbf{a}(x) = c_x[\mathbb{A}']$. Une récurrence montre que pour toute $\mathcal{L}$ -formule φ , on a : $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A}' \models \varphi'$. En particulier, $\mathbb{A} \models \Theta(\mathbf{a})$. On a étendu la satisfaisabilité contrôlée aux ensembles de $\mathcal{L}$ -formules. 20 25 30

On montre alors (iii) $\Rightarrow$ (i). Soient Φ, χ formés de $\mathcal{L}$ -formules et tels que tout modèle de Φ de cardinal $\leq \text{card } \mathcal{L}$ -Form soit modèle de χ . Alors $\Theta = \Phi \cup \{\neg \chi\}$ n'admet pas de modèle de cardinal $\leq \text{card } \mathcal{L}$ -Form. Par satisfaisabilité contrôlée, Θ n'est pas cohérent. La règle $\neg^+$ donne $\Phi \vdash \neg \neg \chi$, puis $\perp_c$ entraîne $\Phi \vdash \chi$. 35

Remarque. On a utilisé l'élimination de double négation $\perp_c$ du formalisme. La suite de l'argument utilise aussi des raisonnements par l'absurde, mais en-dehors du calcul déductif.

Stratégie. On part d'un ensemble cohérent d'énoncés Θ , dont on cherche un modèle de cardinal contrôlé. La stratégie est la suivante :

- 1^{ère} idée : demander la maximalité.
 Pour ne pas hésiter entre φ et $\neg\varphi$, se ramener à Θ cohérent maximal (i.e. une *théorie syntaxique complète* au sens de § 17.1.B ; on évite le mot « théorie » par risque de confusion avec son acception sémantique). Ce point est sans difficulté, traité à l'étape 4. 5
- 2^e idée : sémantiser la syntaxe.
 On entend mettre une $\mathcal{L}$ -structure sur l'ensemble des $\mathcal{L}$ -termes. Mais si $\Theta \vdash t_1 = t_2$, il faut alors identifier t_1 à t_2 . On prévoit donc une relation d'équivalence et un ensemble quotient. C'est fait à l'étape 5 (Grâce à la 3^e idée, le domaine à quotienter s'avère plus simple que $\mathcal{L}$ -Term.) 10
- 3^e idée (Henkin) : ajouter des témoins existentiels.
 Si $\Theta \vdash \exists x \varphi$, on veut un « témoin » qui vérifie φ . Pour garantir sa présence on ajoute au langage un nouveau symbole de constante $c_{(x,\varphi)}$, et à Θ un axiome dédié $(\exists x \varphi) \rightarrow \varphi[x := c_{(x,\varphi)}]$. Cet ajout est mené à l'étape 3. 15
- La description n'est pas dans l'ordre d'implémentation. Pour avoir les « axiomes dédiés », il faut *d'abord* étendre le langage. Or :
 — les nouveaux témoins créent de nouvelles formules, qui appellent de nouveaux témoins, à l'infini ;
 — a priori, la notion de cohérence change quand on étend le langage. 20

Ces points sont mineurs et facilement résolus. 25

§ 18.2. Méthode de Henkin

Notation (langage henkinisé). Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel.

- Soit $\mathcal{L}\text{-}\dot{\text{En}}_{\exists}$ l'ensemble des paires $(x, \varphi) \in \text{Var} \times \mathcal{L}\text{-Form}$ avec $\text{VarLib } \varphi \subseteq \{x\}$ et $x \notin \text{VarLié } \varphi$. (Noter que $\exists x \varphi$ est alors un énoncé.) 30
- Les *constantes de Henkin* pour $\mathcal{L}$ sont de nouveaux symboles, distincts entre eux et de $\mathcal{L}$, de constantes $c_{(x,\varphi)}$ pour $(x, \varphi) \in \mathcal{L}\text{-}\dot{\text{En}}_{\exists}$.
- Soient $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \sqcup \{c_{(x,\varphi)} : (x, \varphi) \in \mathcal{L}\text{-}\dot{\text{En}}_{\exists}\}$ et $\mathcal{L}^{(n+1)} = (\mathcal{L}^{(n)})'$.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- Le langage henkinisé de $\mathcal{L}$ est $\mathcal{L}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{(n)}$. Soit $\mathcal{C}^*$ l'ensemble des constantes de $\mathcal{L}^*$ (ce qui inclut celles de $\mathcal{L}$).

Remarques

- Un énoncé $(\exists x)(x = c)$ commande l'ajout d'une constante c' . Apparaît alors l'énoncé $(\exists x)(x = c')$, qui commande c'' , etc. Noter qu'on a aussi des constantes associées à $(\exists x)(x = t)$ pour chaque terme t . (Les axiomes de Henkin ci-dessous permettent d'identifier ces constantes démultipliées.)
- On ne peut pas dire que « $\mathcal{L}^*$ est son propre henkinisé », car en toute rigueur les constantes de Henkin d'un langage en sont disjointes. Cette stratification est utile à l'étape 3. En revanche, pour toute paire $(x, \varphi) \in \mathcal{L}^* \text{-Én}_{\exists}$, la constante $c_{(x, \varphi)}$ est déjà dans $\mathcal{L}^*$.
- Si $\mathcal{L}$ est au plus dénombrable, resp. effectif, alors $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}^*$ le sont.

Ajouter des constantes crée de nouvelles instances des règles d'égalité et des substitutions pour les quantificateurs, donc semble affecter la déduction.

Étape 2. Si Θ est un ensemble cohérent de $\mathcal{L}$ -énoncés, il reste $\mathcal{L}^*$ -cohérent.

Vérification. Soit $\vdash [\mathcal{L}^*]$ la notion de déduction dans $\mathcal{L}^*$, qui étend $\vdash [\mathcal{L}]$.

On affirme que si $\Phi \vdash \chi [\mathcal{L}^*]$, où Φ et χ sont dans $\mathcal{L}$, alors $\Phi \vdash \chi [\mathcal{L}]$. On considère en effet une déduction $D: \Phi_0 \vdash \chi [\mathcal{L}^*]$, où $\Phi_0 \subseteq \Phi$ est fini. Soit c une constante de $\mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}$ apparaissant dans D ; on veut l'enlever. Soit x une variable ne figurant pas dans D . On note $[c := x]$ le fait de remplacer les occurrences de c par x (il n'y a aucun risque de confusion). Par inspection des règles, $D[c := x]: \Phi_0[c := x] \vdash \chi[c := x]$ est encore une déduction, cette fois dans $\mathcal{L}^* \setminus \{c\}$. Comme Φ_0 et χ sont dans $\mathcal{L}$, on a même $D[c := x]: \Phi_0 \vdash \chi [\mathcal{L}^* \setminus \{c\}]$. On recommence; D étant finie, on enlève ainsi toutes les nouvelles constantes pour arriver à $\Phi_0 \vdash \chi [\mathcal{L}]$.

En particulier la cohérence est préservée en étendant le langage.

Ceci justifie de dire « cohérent » sans préciser le langage.

Notation. Pour $(x, \varphi) \in \mathcal{L}^* \text{-Én}_{\exists}$, l'axiome de Henkin associé est $\eta_{(x, \varphi)} : (\exists x \varphi) \rightarrow \varphi[x := c_{(x, \varphi)}]$. Soit $H_{\mathcal{L}^*} = \{\eta_{(x, \varphi)} : (x, \varphi) \in \mathcal{L}^* \text{-Én}_{\exists}\}$ leur ensemble.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement $\eta : (\exists x \varphi) \rightarrow \varphi[x := c]$.

Étape 3 (axiomes de Henkin). Si Θ est un ensemble cohérent de $\mathcal{L}$ -énoncés,

alors $\Theta \cup H_{\mathcal{L}^*}$ reste cohérent.

Vérification. $\mathcal{L}^*$ est obtenu comme réunion de langages $\mathcal{L}^{(n)}$, avec $\mathcal{L}^{(n+1)} = \mathcal{L}^{(n)'}.$ Par finitude de $\vdash$, il suffit de montrer que l'ajout des axiomes de niveau n préserve la cohérence ; par récurrence il suffit de le faire une fois. À niveau 5
fixé les $c_{(x,\varphi)}$ n'interagissent pas, donc il suffit de montrer que $\Theta \cup \{\eta\}$ reste cohérent pour un seul axiome $\eta : (\exists x \varphi) \rightarrow \varphi[x := c]$.

Sinon $\Theta \vdash \neg\eta$, et notamment $\Theta \vdash \neg\varphi[x := c]$. Mais c n'apparaît pas dans Θ , donc comme à l'étape 2, il existe $\Theta_0 \subseteq \Theta$ et $D : \Theta_0 \vdash \neg\varphi[x := c]$. Soit y une variable ne figurant pas dans D . Alors $\Theta_0[c := y] \vdash \neg\varphi[x := c][c := y]$, 10
et donc $\Theta_0 \vdash \neg\varphi[x := y]$. On conclut $\Theta_0 \vdash \neg(\exists y)(\varphi[x := y])$, et par jeux de renommage, $\Theta \vdash \neg(\exists x)\varphi$. En particulier $\Theta \vdash \eta$. Mais alors $\Theta \vdash \perp$, contre l'hypothèse. $\diamond$

§ 18.3. Maximisation et construction de modèle

Le principe suivant est général et indépendant de la méthode de Henkin. 15

Étape 4 (maximisation ; « lemme de Lindenbaum »). Tout ensemble cohérent d'énoncés est inclus dans un tel ensemble *maximal*.

Vérification. Un langage est implicitement fixé. Soit Θ un ensemble cohérent d'énoncés. Soit $\mathbb{O}$ la collection des ensembles cohérents contenant Θ , ordonnée par inclusion. Soient $\mathcal{C}$ une chaîne maximale (§ 2.1) de $\mathbb{O}$ et $\hat{\Theta}$ sa réunion. Par finitude de $\vdash$, l'ensemble $\hat{\Theta}$ reste cohérent. Par maximalité de la chaîne $\mathcal{C}$, l'élément $\hat{\Theta} \in \mathbb{O}$ est maximal. $\diamond$ 20

Remarques 25

- Un ensemble cohérent maximal est clos sous $\vdash$.
- Il est préférable d'éviter le raisonnement par maximalité ; v. ex. 18.5 et notes conclusives.

On se place dans le langage henkinisé $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{L}$. Soit Θ^* un ensemble cohérent d'énoncés contenant $H_{\mathcal{L}^*}$ et maximal. Notamment Θ^* est clos par 30
déduction : pour tout énoncé, $\chi \in \Theta^*$ ssi $\Theta^* \vdash \chi$.

Notation ($\mathcal{L}^*$ -structure).

- Sur l'ensemble $\mathcal{C}^*$ des constantes de $\mathcal{L}^*$, soit $\approx$ la relation : $c \approx d$ si $\Theta \vdash c = d$. C'est une relation d'équivalence. On note $[c]$ la classe de c .

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

Par exemple, si d est la constante de Henkin de $(\exists x)(x = c)$, alors $H_{\mathcal{L}^*} \vdash c = d$, donc $[c] = [d]$.

- Soit $\mathbb{A} = \mathcal{C}_H / \approx$.
- Sur $\mathbb{A}$ on définit la $\mathcal{L}^*$ -interprétation suivante :
 - $c[\mathbb{A}] = [c]$; 5
 - $([c_1], \dots, [c_n]) \in R[\mathbb{A}]$ ssi $\Theta^* \vdash R(c_1, \dots, c_n)$;
 - $f[\mathbb{A}]([c_1], \dots, [c_n]) = [d]$, où d est la constante associée à $(\exists x)(x = f(c_1, \dots, c_n))$.

Étape 5. C'est bien défini. 10

Vérification. Θ^* contient les propriétés démontrables de l'égalité, donc $\approx$ est une relation d'équivalence. En outre si $\Theta^* \vdash R(c_1, \dots, c_n)$ et $c_i \approx c'_i$, alors $\Theta^* \vdash c_i = c'_i$ donc $=^-$ donne $\Theta^* \vdash R(c'_1, \dots, c'_n)$. Un argument similaire pour les fonctions montre que l'interprétation est bien définie. 15

Lors de la construction d'un modèle, un « lemme de vérité » décrit précisément quels énoncés sont satisfaits.

Étape 6 (lemme de vérité). Soit φ un $\mathcal{L}^*$ -énoncé. Alors $\mathbb{A} \models \varphi$ ssi $\varphi \in \Theta^*$. 20

Vérification. Récurrence sur φ . L'absence de paramètres dans la satisfaction tient à ce que l'on ne considère que des énoncés ; on peut prendre pour $\mathbf{a}$ n'importe quels paramètres, par exemple la fonction vide.

- Θ^* est cohérent, donc ne contient pas $\perp$.
- Si φ est de la forme $R(c_1, \dots, c_n)$, dont l'égalité, c'est par construction (étape 5). 25
- Si φ est de la forme $\neg\chi$ ou $\chi_1 \wedge \chi_2$, c'est évident (employer la maximalité). Les autres cas propositionnels aussi, mais superflus par redondance du langage.
- Supposons φ de la forme $\exists x \chi$. Comme φ est un énoncé, $\text{VarLib}(\chi) \subseteq \{x\}$; notamment $\chi[x := c]$ est un énoncé. Soit η l'axiome de Henkin associé à (x, φ) , i.e. $(\exists x \chi) \rightarrow \chi[x := c]$. 30
- Supposons $\varphi \in \Theta^*$. Comme Θ^* est clos par déduction, $\chi[x := c] \in \Theta^*$. Soient $\mathbf{a}^*$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sauf en $\mathbf{a}^*(x) = [c]$, et χ^* l'énoncé $\chi[x := c]$. Par récurrence, $\mathbb{A} \models \chi^*$ i.e. $\mathbb{A} \models \chi^*(\mathbf{a})$. Par la théorie des substitutions (§ 17.3), on a $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^*)$. Donc $\mathbb{A} \models \exists x \chi$. 35

18. Adéquation (1)

- Supposons $\mathbb{A} \models \varphi$. Par définition il existe $\mathbf{a}^*$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sauf en x et tel que $\mathbb{A} \models \chi(\mathbf{a}^*)$. Par construction de $\mathbb{A}$, il existe une constante $d \in \mathcal{L}^*$ telle que $\mathbf{a}^*(x) = [d]$. Il n'y a pas de problème de substituabilité donc $\mathbb{A} \models \chi[x := d]$. Par récurrence, $\chi[x := d] \in \Theta^*$; puis par $\exists^+$, on a $(\exists x \chi) \in \Theta^*$. ◇ 5

On démontre (iii) $\Rightarrow$ (i). D'après l'étape 1, il suffit de montrer que pour tout langage $\mathcal{L}$, tout ensemble cohérent d'énoncés possède un modèle de cardinal $\leq \text{card } \mathcal{L}\text{-Form}$. Soit Θ un tel ensemble. Soit $\mathcal{L}^*$ le langage henkinisé de $\mathcal{L}$; on a $\text{card } \mathcal{L}^*\text{-Form} = \text{card } \mathcal{L} + \aleph_0 = \text{card } \mathcal{L}\text{-Form}$. D'après l'étape 3, l'ensemble $\Theta \cup H_{\mathcal{L}^*}$ reste cohérent dans $\mathcal{L}^*$. On l'inclut dans un ensemble 10 de $\mathcal{L}^*$ -énoncés cohérent maximal Θ^* grâce à l'étape 4. Soit $\mathbb{A}^*$ la structure de Henkin résultante. D'après l'étape 6, $\mathbb{A}^* \models \Theta^*$. Comme $\Theta \subseteq \Theta^*$, la $\mathcal{L}$ -structure sous-jacente à $\mathbb{A}^*$ vérifie Θ . Mais $\text{card } \mathbb{A} \leq \text{card } \mathcal{L}^*$, donc le cardinal est contrôlé. Ceci achève la démonstration. □

Remarques (complétude et compacité) 15

- La compacité de la logique élémentaire (§ 11), déjà démontrée « à la Łoś » avec des ultraproducts (§ 11.1), découle de la complétude. En effet $\vdash$ est une notion finitaire; par adéquation, $\models$ aussi.
- (Deuxième lecture : compréhensible en faisant le sujet d'étude § SÉ5.) L'argument à la Henkin se généralise aux logiques infinitaires $\Lambda_{\kappa, \kappa}$ pour 20 κ faiblement compact. Mais l'argument à la Łoś demande κ fortement compact.

Remarque (complétude et paradoxe de Skolem). La complétude à cardinaux contrôlés confirme le *paradoxe de Skolem* déjà mentionné en § 11.3 : si ZF est cohérente, alors elle a un modèle de cardinal $\leq \aleph_0$; ce modèle contient $\mathbb{R}$, 25 pourtant non dénombrable. V. § 25, notes conclusives.

Remarques (complétude et théorie de la démonstration)

- On emploie désormais les expressions « théorie » et « théorie complète » sans risque de conflit entre sémantique et syntaxe.
- L'argument donné contient très peu de théorie de la démonstration : un $\perp_c$, quelques $\rightarrow$ et $\exists$. La preuve montre donc aussi la complétude des « systèmes à la Hilbert ». 30
- En particulier la déduction naturelle est non contradictoire, i.e. $\not\vdash \perp$. La théorie de la démonstration établit ce phénomène sans faire appel à la notion sémantique de modèle, mais par analyse de la structure des 35 déductions. V. compléments § T.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- La complétude était la méthode axiomatique mais ne change pas la pratique des mathématiques. Pour établir que φ est vraie, on en donne une démonstration ; pour établir qu'il n'y a pas de démonstration de φ , on montre qu'elle est fausse. Ces deux méthodes reposent sur la seule correction. Pour établir que φ est démontrable, on cherche rarement à établir qu'elle est vraie dans tout modèle ; on la démontre.

Exercices

18.1. Montrer le théorème de correction.

18.2. Montrer, abstraitement, que la correction d'une paire $(\models, \vdash)$ équivaut au principe : « tout ensemble satisfaisable d'énoncés est cohérent ».

18.3 (pureté des méthodes). Soient $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ deux langages, $\Phi \subseteq \mathcal{L}\text{-Form}$, et $\chi \in \mathcal{L}\text{-Form}$. On suppose $\Phi \vdash \chi [\mathcal{L}']$. Montrer *sémantiquement* $\Phi \vdash \chi [\mathcal{L}]$.

18.4. Soient Θ une $\mathcal{L}$ -théorie élémentaire et φ un $\mathcal{L}$ -énoncé élémentaire. Montrer : $\Theta \vdash \varphi$ ssi pour toute $\mathcal{L}$ -théorie complète $\hat{\Theta}$ contenant Θ , on a $\hat{\Theta} \vdash \varphi$.

18.5 (lemme de Lindenbaum sans maximalité). (Prérequis : § 3.2.) On suppose avoir muni $\mathcal{L}\text{-Én}$ d'un bon ordre. Montrer l'étape 4 sans choix. [Comme pour le théorème de Krull.]

(*) **18.6 (lemmes de Craig et Robinson).**

Lemme (« interpolation » de Craig). Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient φ_1, φ_2 des $\mathcal{L}_i$ -formules élémentaires. On suppose $\varphi_1 \models \varphi_2$. Alors il existe une $\mathcal{L}_\cap$ -formule χ telle que $\varphi_1 \models \chi \models \varphi_2$.

Lemme (« satisfaisabilité disjointe » de Robinson). Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient Θ_1, Θ_2 des $\mathcal{L}_i$ -théories élémentaires. On suppose que $\Theta_1 \cap \Theta_2$ est une $\mathcal{L}_\cap$ -théorie complète. Alors $\Theta_1 \cup \Theta_2$ est satisfaisable.

Deux $\mathcal{L}_i$ -théories Θ_1, Θ_2 sont *séparables* s'il existe $\chi \in \mathcal{L}_\cap\text{-Én}$ tel que $\Theta_1 \vdash \chi$ et $\Theta_2 \vdash \neg\chi$.

- Montrer que l'inséparabilité est préservée par extension des langages *par des constantes*.
- On suppose Θ_1 et Θ_2 inséparables *maximales*, i.e. si $\chi_1 \in \mathcal{L}_1\text{-Én} \setminus \Theta_1$, alors $\Theta_1 \cup \{\chi_1\}$ et Θ_2 sont séparables (et de même en échangeant les indices). Montrer leur complétude.
- On suppose Θ_1 et Θ_2 inséparables maximales. Soit $\mathcal{L}'_i$ étendant $\mathcal{L}_i$ par des constantes de Henkin, et $H_{\mathcal{L}'_i}$ les $\mathcal{L}'_i$ -axiomes de Henkin pour $\mathcal{L}_i$. Montrer que les $\Theta'_i = \Theta_i \cup H_{\mathcal{L}'_i}$ sont inséparables.
- En déduire que si Θ_1 et Θ_2 sont inséparables, alors il existe des langages $\mathcal{L}^*_i$ et des $\mathcal{L}^*_i$ -extensions Θ^*_1 et Θ^*_2 contenant les axiomes de Henkin et inséparables maximales. [Maximiser, henkiniser, recommencer.]
- Établir que la réunion de deux théories inséparables est satisfaisable.
- Démontrer le lemme de satisfaisabilité disjointe de Robinson. Montrer que sans complétude de $\Theta_1 \cap \Theta_2$, il peut être faux.
- Démontrer le lemme d'interpolation de Craig.

18. Adéquation (1)

On rappelle le lemme d'omission de types (§ 15.2.B).

Lemme (« omission de types »). Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, Θ une $\mathcal{L}$ -théorie élémentaire, $\mathbf{x}$ un uplet fini de variables et $p(\mathbf{x})$ un type complet non principal. Alors il existe $\mathbb{A} \models \Theta$ dénombrable ne réalisant pas p .

- (*) **18.7.** Montrer le lemme d'omission de types, et généraliser à un nombre dénombrable de types non principaux. [Ajouter des constantes puis étendre par récurrence Θ en faisant trois choses : forcer la complétude, gérer les témoins existentiels, et empêcher la réalisation de p dans le domaine de Henkin.] Suite à l'ex. 18.8. 5
- (*) **18.8.** Donner une preuve topologique du lemme d'omission de types. [Augmenter le langage, ajouter à Θ les axiomes de Henkin, et songer au théorème de Baire.] 10

Notes conclusives

[Hen96, p. 156]

• Repères historiques

It seems that a distinctive feature of my completeness proof for first-order logic, which distinguishes it from Gödel's, is that when a consistent set of cwffs is given in one language, I proceed to an extended language in which new individual constants are adjoined. But in fact, something like that is implicitly present in Gödel's proof, because he begins by reducing the problem of showing that an arbitrary cwff is either satisfiable or refutable, to the case of an arbitrary cwff that is in Skolem normal form. However, in a first-order language with some fixed finite set of predicate symbols, one cannot reduce every cwff to one in Skolem normal form without adding new predicate symbols. 15 20 25 30

Complétude propositionnelle. Bernays, Hilbert et Post établirent la complétude de la logique propositionnelle. Plus précisément, Post [Pos21] présenta son doctorat sans avoir connaissance de l'*Habilitationsschrift* de Bernays, rédigé alors que ce dernier assistait Hilbert pour un cours sur les fondements des mathématiques, et publié plus tard [Ber26]. Voir [Zac99]. 35 40

Complétude élémentaire. • Le passage de la logique propositionnelle à la logique élémentaire n'est pas une simple adaptation technique. Au Congrès International de Bologne en 1928, Hilbert l'énonçait en problème ouvert [Hil30, Problem iv]. • Première démonstration (dans le cas dénombrable) par Gödel, issue du doctorat [Göd29] sous la direction de Hans Hahn, et publiée en [Göd30a] (trad. anglaise dans [Heije- 45 50

[Hen96] : LEON HENKIN. « The discovery of my completeness proofs ». In : *Bull. Symbolic Logic* 2.2 (1996), p. 127-158

[Pos21] : EMIL POST. « Introduction to a general theory of elementary propositions ». In : *Amer. J. Math.* 43.3 (1921), p. 163-185

[Ber26] : PAUL BERNAYS. « Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der "Principia Mathematica" ». In : *Math. Z.* 25 (1926), p. 305-320

[Zac99] : RICHARD ZACH. « Completeness before Post : Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic ». In : *Bull. Symbolic Logic* 5.3 (1999), p. 331-366

[Hil30] : DAVID HILBERT. « Probleme der Grundlegung der Mathematik ». In : *Mathematische Annalen* 102 (1930). Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Bologna am 3. Sept. 1928, p. 1-9

[Göd29] : KURT GÖDEL. « Über die Vollständigkeit des Logikkalküls ». Thèse de doct. Universität Wien, 1929

[Göd30a] : KURT GÖDEL. « Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionen-

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

noort]). La méthode est étudiée en § SÉ4, 3^e partie. • Mais remarquablement, [Sko23, p. 220 sqq.] (trad. anglaise dans [Heijenoort]) contient déjà la construction de modèle retrouvée par Gödel. En un sens, Skolem aurait pu *démontrer* la complétude dès 1922; mais faute de calcul déductif, il ne pouvait pas l'*énoncer*. De Göttingen où il avait passé un semestre, rentré en Norvège en 1916, Skolem n'eut peut-être pas connaissance des cours de Hilbert de 1917–1918 sur la logique mathématique, très syntaxiques. Réciproquement le très sémantique [Sko23] (trad. anglaise dans [Heijenoort]) passa plutôt inaperçu : *personne de Göttingen n'assistait à la conférence de Helsinki*. V. § SÉ4, notes conclusives pour ces aspects historiques.

Méthode de Henkin. Issue du doctorat [Hen48], sous la direction d'Alonzo Church, et publiée en [Hen49]. [Hen96] relate sa découverte (initialement pour des logiques typées/d'ordre supérieur : voir § 22). • L'étape 4 est en logique propositionnelle attribuée à Lindenbaum par [Tar31b, Theorem 12]. • Influencé par le typage, Henkin ajoutait les témoins par strates successives puis maximisait après chaque ajout, comme à l'ex. 18.6.d. Il comprit bientôt qu'on pouvait incorporer tous les axiomes simultanément, puis maximiser une seule

fois la théorie résultante; procédé indépendamment découvert par Hasenjaeger [Has53, note 3]. • Pour une comparaison des preuves de Skolem-Gödel et Henkin, [Bal18] (qui ne mentionne pas celle de Rasiowa-Sikorski donnée en § 19).

Misc. • Ex. 18.6 : Henkin a noté que sa méthode de construction de modèle permettait de retrouver des variantes fines de l'interpolation; [Hen63] est plus fin que la preuve de l'exercice. • Théorème d'omission (ex. 18.7) : v. § 15, notes conclusives.

• **Terminologie.** Le nom *complétude* est malheureux pour l'*adéquation* entre $\models$ et $\vdash$. L'origine en est que Hilbert puis Gödel ne décrivaient pas le calcul déductif par règles, mais par axiomes. Cette axiomatisation est complète car un ajout mène à l'incohérence. V. § 8, notes conclusives, *Terminologie*. Les travaux de Gentzen ont changé le formalisme mais le nom est resté.

• **Lemme de Lindenbaum (étape 4 et ex. 18.5).** • C'est l'existence d'un filtre maximal. L'ex. 18.5 en propose une preuve sans invoquer de principe de maximalité (théorème de Krull, ni même sa version faible pour les anneaux de Boole abstraits). La récurrence peut en effet être menée *sans choisir*.

kalküls ». In : *Monatsh. Math. Phys.* 37.1 (1930), p. 349-360

[Heijenoort] : Jean van HEIJENOORT. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Sko23] : Thoralf SKOLEM. « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre ». In : 5. Kongress Skandinav. in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Helsinki : Akademiska Bokhandeln, 1923, p. 217-232

[Hen48] : Leon HENKIN. « The completeness of formal systems ». Thèse de doct. Princeton University, 1948

[Hen49] : Leon HENKIN. « The completeness of the first-order functional calculus ». In : *J. Symbolic Logic* 14 (1949), p. 159-166

[Tar31b] : Alfred TARSKI. « Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik ». In : *C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III* 23 (1931), p. 22-29

[Has53] : Gisbert HASENJAEGER. « Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe ». In : *J. Symbolic Logic* 18 (1953), p. 42-48

[Bal18] : John BALDWIN. « The explanatory power of a new proof : Henkin's completeness proof ». In : *Truth, existence and explanation*. T. 334. Boston Stud. Philos. Hist. Sci. Springer, Cham, 2018, p. 147-162

[Hen63] : Leon HENKIN. « An extension of the Craig-Lyndon interpolation theorem ». In : *J. Symbolic Logic* 28 (1963), p. 201-216

En revanche elle *présuppose* d'avoir bien ordonné les énoncés. • Si $\mathcal{L}$ est bien ordonné, alors $\mathcal{L}\text{-}\dot{\text{En}} \subseteq \mathcal{L}^{<\omega}$ aussi, sans choix. Mais si $\mathcal{L}$ n'est pas bien ordonné d'emblée, munir $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}\text{-}\dot{\text{En}}$ d'un bon ordre demande une forme de choix (comptage ordinal de Zermelo, § 3.2). • Ainsi, pour $\mathcal{L}$ et Θ ensemblement effectifs, il existe une complétion $\hat{\Theta}$, et donc un modèle $\mathbb{A} \models \Theta$ sans invoquer l'axiome du choix. • Cependant le procédé dans la récurrence formant $\hat{\Theta}$ n'est pas *décidable* : il est impossible de savoir algorithmiquement si un ensemble est cohérent ou non, car la longueur des déductions n'est pas bornée. La notion intuitive d'effectivité ne se limite donc pas à l'emploi ou non de l'axiome du choix. • Dans le cas de l'axiomatique de Peano PA, l'existence d'une complétion décidable contredirait le premier théorème d'incomplétude de Gödel (§ 21).

- **Niveau de constructivité.** La discussion du lemme de Lindenbaum montre l'ambiguïté des mots « effectif », « constructif », etc. Les *mathématiques à rebours* ont plus de précision. RCA_0 est un fragment de l'arithmétique du deuxième ordre, couramment employé comme socle de raisonnement.

Théorème ([Simpson, Theorem IV.3.3]). Dans RCA_0 , les énoncés suivants sont équivalents :

- le lemme de König faible (§ 1.3) ;
- le lemme de Lindenbaum dénombrable (toute théorie dénombrable a une complétion) ;
- le th. de complétude dénombrable (toute théorie dénombrable a un modèle dénombrable) ;
- le th. de compacité dénombrable (v. § 11).

- **Longueur des preuves (« speed-up »).** Suite de § 17, notes conclusives. L'existence

d'une démonstration $\Phi \vdash \chi$ ne garantit pas sa praticabilité.

Un exemple [Boo87]. Dans $\mathcal{L} = \{0, R, s, f\}$, soit Φ l'axiomatisation :

- $(\forall x)[f(x, 0) = s(0)]$;
- $(\forall y)[f(0, s(y)) = s(s(f(0, y)))]$;
- $(\forall x)(\forall y)[f(s(x), s(y)) = f(x, f(s(x), y))]$;
- $R(0)$;
- $(\forall x)[R(x) \rightarrow R(s(x))]$.

Soit χ l'énoncé $R(f(s^4(0), s^4(0)))$, en abrégé : χ . Soit $\Phi \models \chi$.

Démonstration. Soit $\mathbb{A} \models \Phi$. Soit $A_0 \subseteq \mathbb{A}$ l'orbite de 0 sous s , i.e. l'intersection de tous les ensembles clos sous s et contenant 0. A_0 peut être fini mais $\mathbb{N}$ se surjecte sur A_0 , de sorte qu'on peut lui appliquer la récurrence.

On montre : $(a \in A_0 \wedge b \in A_0) \rightarrow f(a, b) \in A_0$. Si $a = 0$, par récurrence $(\forall b)(b \in A_0 \rightarrow f(a, b) \in A_0)$. Soit a ayant cette propriété. Alors pour $b = 0$ il vient $f(s(a), b) = s(a) \in A_0$, et si b a cette propriété, alors $f(s(a), s(b)) = f(a, f(s(a), b)) \in A_0$.

χ est un cas particulier. $\square$

Cette démonstration s'écrit naturellement en logique *du deuxième ordre* (§ 22.1), et la déduction formelle résultante est courte. • Par complétude, on a en outre $\Phi \vdash \chi$ en logique élémentaire. Boolos montre qu'une telle déduction élémentaire serait de longueur astronomique (il faut des outils de théorie de la démonstration).

Speed-up. • Ceci illustre un phénomène annoncé sans démonstration par Gödel [Göd36] et nommé « speed-up » depuis les années 1960 : augmenter la logique peut raccourcir les preuves formelles, et il n'y a même pas de borne calculable aux facteurs de réduction. • La « longueur » d'une preuve peut être mesurée de deux façons, ce qui donne deux versions du speed-up :

[Simpson] : Stephen SIMPSON. *Subsystems of second order arithmetic*. 2^e éd. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge ; Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, 2009. xvi+444

[Boo87] : George BOOLOS. « A curious inference ». In : *J. Philos. Logic* 16.1 (1987), p. 1-12

[Göd36] : Kurt GÖDEL. « Über die Länge von Beweisen ». In : *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums (Wien)*. Sous la dir. de Karl MENGES. T. 7. 1936, p. 23-24

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- par son nombre de symboles (version démontrée par [Mostowski]);
- par son nombre de règles (version plus difficile, [Bus94]).
- De manière générale, les questions de longueur sont très dépendantes du langage; v. § 21, notes conclusives, *conjecture de Kreisel*. Bonne référence [Cav08].
- Raisonnons-nous en logique élémentaire ?** Retour à l'exemple. $\Phi \models \chi$ est évident intuitivement, donc l'intuition ne reste pas en logique élémentaire. De cela Boolos tire une critique :
 - du rejet de la logique d'ordre supérieur comme non pertinente;
 - de l'équation « logique élémentaire = logique du raisonnement humain ».
- **Complétude en logique catégorique.** Pour l'algébrisation de la logique employant les topous, le théorème de complétude est l'existence d'assez de points dans le topô associé à une théorie cohérente; son nom devient « de Deligne-Gödel ».
- **Autres logiques.** (Prérequis : § 7.) Un théorème de complétude pour une logique Λ est l'existence d'un système déductif naturel $\vdash [\Lambda]$ reflétant exactement $\models [\Lambda]$.
- Logique multisorte.** Adaptation immédiate. On peut aussi invoquer les ex. 7.1 et 17.9 pour se ramener au cas unisorte.
- Logiques d'ordre supérieur.** • Pas de théorème de complétude pour la sémantique naïve où les parties sont exactement les parties ensemblistes; pas même de complétude faible. V. § 22.1. • Mais on a complétude en « sémantique de Henkin », qui est élémentaire; v. § 22.2.
- Logiques infinitaires.** • Pour un système déductif naturel mais tolérant des arbres de déduction infinitaires, $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ est faiblement complète [Keisler]. Elle ne l'est pas fortement. V. § sÉ4, 4^e partie. • À partir de $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}$, on perd même la complétude faible; v. § 21, notes conclusives, *Théorème de Tarski en logique infinitaire*. • Logique élémentaire, langages à relations infinitaires (v. § 7, notes conclusives) : complétude, [Kei63].
- Quantificateurs généralisés.** • Pour un système déductif naturel, $\Lambda_{\omega, \omega}(\exists_{\geq \aleph_1})$ est dénombrablement complète [Kei70]. Elle ne l'est pas fortement. V. § sÉ4, 5^e partie. • Pas de complétude, même faible, pour $\exists_{\geq \aleph_0}$: ex. 22.11.
- Logique continue.** [BP10].
- Logiques non classiques.** V. compléments § P et § Q.

[Mostowski] : Andrzej MOSTOWSKI. *Sentences undecidable in formalized arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1952, p. viii+117

[Bus94] : Samuel BUSS. « On Gödel's theorems on lengths of proofs I ». In : *J. Symbolic Logic* 59.3 (1994), p. 737-756

[Cav08] : Stefano CAVAGNETTO. « The lengths of proofs : Kreisel's conjecture and Gödel's speed-up theorem ». In : *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 358. Issledovaniya po Konstruktivnoi Matematike i Matematicheskoi Logike. XI (2008), p. 153-188, 304

[Keisler] : Jerome KEISLER. *Model theory for infinitary logic*. T. 62. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam-London : North-Holland, 1971. x+208

[Kei63] : Jerome KEISLER. « A complete first-order logic with infinitary predicates ». In : *Fund. Math.* 52 (1963), p. 177-203

[Kei70] : Jerome KEISLER. « Logic with the quantifier "there exist uncountably many" ». In : *Ann. Math. Logic* 1 (1970), p. 1-93

[BP10] : Itai BEN YAACOV et Arthur PEDERSEN. « A proof of completeness for continuous first-order logic ». In : *J. Symbolic Logic* 75.1 (2010), p. 168-190

§ 19. Adéquation (2)

Démonstration alternative de la complétude de la logique élémentaire, reposant sur le *lemme de Rasiowa-Sikorski* (§ 19.1). On l'applique dans l'*anneau de Lindenbaum syntaxique* d'une théorie dénombrable (§ 19.2) pour en déduire la *complétude dénombrable* ainsi que l'*omission de types* (§ 19.3).

Prérequis : §§ 5.1 ; 6 ; 17–18. Les applications de § 19.3 demandent en outre § 11 et § 15.

Cette section propose une relecture de § 18. La complétude de la logique élémentaire se montre en établissant que toute théorie syntaxique cohérente est satisfaisable (§ 18.1, étape 1) ; on peut clairement supposer la maximalité.

Soit donc Θ une $\mathcal{L}$ -théorie syntaxique cohérente maximale. Sur $\mathcal{L}\text{-Term}$, soit $t_1 \approx t_2$ la relation d'équivalence $\Theta \vdash t_1 = t_2$. On peut munir l'ensemble quotient $(\mathcal{L}\text{-Term})/\approx$ d'une $\mathcal{L}$ -structure naturelle. Mais pour établir le lemme de vérité (§ 18.3, étape 6), il faut garantir la présence de témoins existentiels : si $\Theta \vdash \exists x \varphi$, il doit exister un terme $t_{x,\varphi}$ substituable à x dans φ et vérifiant $\Theta \vdash \varphi[x := t_{x,\varphi}]$. La méthode de Henkin résout ce besoin par un ajout massif de constantes au langage ; les vérifications à mener en amont (§ 18.2) sont laborieuses.

La méthode de Rasiowa-Sikorski repose sur un principe simple :

chaque complétion générique de Θ a déjà des variables jouant le rôle de témoins.

La notion de *complétion* est ici en tant qu'ensemble de formules et non d'énoncés ; celle de *généricité* est topologique, i.e. une forme de densité (ex. 19.2).

Par contraste avec la démonstration de Henkin, celle de Rasiowa-Sikorski n'établit la complétude que dans le cas dénombrable. Notamment elle n'a pas la compacité pour corollaire. Elle est pourtant « meilleure » à plusieurs égards :

- niveau d'élégance et d'abstraction ;
- décorrélation complétude dénombrable/compacité ;
- importance méthodologique, le « lemme de Rasiowa-Sikorski » de § 19.1 étant un outil fondamental du forcing.

§ 19.1. Lemme de Rasiowa-Sikorski

Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole (définition § 5.1.A). Les idéaux premiers de $\mathbb{A}$ sont exactement ses idéaux maximaux ; en symboles, $\text{Spec } \mathbb{A} = \text{Spm } \mathbb{A}$. $\bullet \mathbb{A}$ est aussi un treillis de Boole (définition § 5.2.A) ; la relation $x \leq y$ donnée par $xy = x$ définit un ordre partiel aux bonnes propriétés. Notamment toute partie

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

finie possède une borne supérieure (i.e. plus petit majorant), resp. une borne inférieure; ce n'est pas toujours vrai d'une partie infinie. Quand une partie arbitraire $B \subseteq \mathbb{A}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure), celle-ci est notée $\bigvee B$ (resp. $\bigwedge B$). • Si en outre $I \triangleleft \mathbb{A}$ est un idéal, alors dans $\mathbb{A}/I$ on a :

$$B/I \leq (\bigvee B)/I. \quad 5$$

Ceci n'entraîne pas l'existence de $\bigvee(B/I)$. Celle-ci est pourtant avérée si I est un idéal maximal car $\mathbb{A}/I$ est alors isomorphe à $\{0, 1\}$; en outre, $\bigvee(B/I) \leq (\bigvee B)/I$. Cependant l'égalité peut encore faire défaut.

Définition (idéal préservant une borne supérieure). Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole et $B \subseteq \mathbb{A}$ une partie admettant une borne supérieure. Un idéal $I \triangleleft \mathbb{A}$ 10 *préserve la borne supérieure de B* si $\bigvee(B/I)$ existe et vaut $(\bigvee B)/I$.

L'idéal nul convient toujours mais n'a pas d'intérêt; le lemme de Rasiowa-Sikorski se concentre sur les idéaux *maximaux*.

Lemme (Rasiowa-Sikorski). Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Soit, pour chaque entier $n \geq 0$, une partie $B_n \subseteq \mathbb{A}$ ayant une borne supérieure. Alors il existe un 15 idéal maximal $\mathfrak{m}$ préservant la borne supérieure de chaque B_n .

Démonstration. Soit $a_0 = 0 < 1$. Si $a_n \geq \bigvee B_n$, soit $a_{n+1} = a_n < 1$. Sinon, il existe $b_n \in B_n$ tel que $a_n \not\geq b_n$; soit alors $a_{n+1} = 1 + b_n + a_n b_n < 1$. Même dans le second cas, $a_n a_{n+1} = a_n$, donc la suite (a_n) est croissante, et 20 n'atteint pas 1. D'après le théorème de Krull (§ 3.2), elle est incluse dans un idéal maximal $\mathfrak{m} \in \text{Spec } \mathbb{A}$. Par construction, $a \in \mathfrak{m}$. Comme $\mathfrak{m}$ est maximal, $\mathbb{A}/\mathfrak{m} \simeq \{0, 1\}$; notamment chaque $\bigvee(B_n/\mathfrak{m})$ existe. Dans $\mathbb{A}/\mathfrak{m}$, on a pour chaque entier :

$$\bigvee(B_n/\mathfrak{m}) \leq (\bigvee B_n)/\mathfrak{m}.$$

En outre : 25

- si $a_n \geq \bigvee B_n$, alors $\bigvee B_n \in \mathfrak{m}$, donc $(\bigvee B_n)/\mathfrak{m} = 0$ et l'on a égalité;
- sinon, alors $a_{n+1} = 1 + a_n + a_n b_n \in \mathfrak{m}$ impose $b_n \notin \mathfrak{m}$, donc $\bigvee(B_n/\mathfrak{m}) = 1$ et l'on a égalité. □

Remarques

- Si $a < 1$ est donné, il existe un tel idéal contenant a (partir de $a_0 = a$). 30
- Les idéaux maximaux convenant forment même un ouvert dense de $\text{Spec } \mathbb{A}$; v. ex. 19.2. Leur comportement est dit « générique » en théorie des ensembles.

- Si $\mathbb{A}$ est muni d'une bijection avec un ordinal, le théorème de Krull ne demande aucune forme de choix. C'est notamment le cas pour l'anneau de Lindenbaum syntaxique d'un langage et d'une théorie effectifs.

§ 19.2. Anneau de Lindenbaum syntaxique

Définition (anneau de Lindenbaum syntaxique d'une théorie). Soient $\mathcal{L}$ un langage et Θ une $\mathcal{L}$ -théorie élémentaire syntaxique. 5

- Sur $\mathcal{L}\text{-Form}$, soit $\varphi_1 \sim_{\Theta} \varphi_2$ la relation d'équivalence : $\Theta \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.
- On note $\| \cdot \|$ ses classes. Sur $(\mathcal{L}\text{-Form})/\sim_{\Theta}$, on pose :
 - $\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| = \|(\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)\|$;
 - $\|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_2\| = \|\varphi_1 \wedge \varphi_2\|$. 10

Muni de ces opérations, $(\mathcal{L}\text{-Form})/\sim_{\Theta}$ forme un anneau de Boole appelé *anneau de Lindenbaum syntaxique de Θ* et noté $\text{Lin}_{\vdash}(\Theta)$.

Les vérifications sont immédiates. On peut aussi poser $\|\varphi_1\| \vee \|\varphi_2\| = \|\varphi_1 \vee \varphi_2\|$ et $\|\varphi_1\| \wedge \|\varphi_2\| = \|\varphi_1 \wedge \varphi_2\|$, puis voir que cela définit un treillis de Boole.

Remarque. $\text{Lin}_{\vdash}(\Theta)$ porte de la structure supplémentaire liée à la quantification et à l'égalité. Ceci mène directement à la définition d'un *anneau de Lindenbaum* abstrait ; v. compléments § I.1. 15

La quantification existentielle est une borne supérieure. On voudrait l'égalité :

$$\|\exists x \varphi\| = \bigvee_{y \in \text{Var}} \|\varphi[x := y]\|. \quad 20$$

Les défauts du formalisme syntaxique de § 17.2 en ruinent l'élégance. En effet certaines variables peuvent ne pas être substituables à x dans φ ; d'ailleurs si $x \in \text{VarLié}(\varphi)$, alors *aucune* variable n'est substituable à x dans φ . Mais si $x \notin \text{VarLié}(\varphi)$, alors l'ensemble des variables substituables à x dans φ est $\text{Var} \setminus \text{VarLié}(\varphi)$. Ceci justifie la lourdeur de l'énoncé. 25

Lemme (borne supérieure existentielle). Soient $\mathcal{L}$ un langage et Θ une $\mathcal{L}$ -théorie élémentaire syntaxique. On travaille dans $\text{Lin}_{\vdash}(\Theta)$. Soient $\varphi \in \mathcal{L}\text{-Form}$ et $x \in \text{Var} \setminus \text{VarLié}(\varphi)$. Soit $\mathcal{V}_{x,\varphi}$ l'ensemble des variables **substituables à x dans φ** . Alors $\bigvee \{\|\varphi[x := y]\| : y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}\}$ existe et :

$$\bigvee_{y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}} \|\varphi[x := y]\| = \|\exists x \varphi\|. \quad 30$$

Démonstration. Dans le treillis associé à $\text{Lin}_+(\Theta)$, on a : $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi_2\|$ ssi $\|\varphi_1 \wedge \varphi_2\| = \|\varphi_1\|$ ssi $\Theta \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ssi $\Theta \cup \{\varphi_1\} \vdash \varphi_2$.

Soit $B_{x,\varphi} = \{\|\varphi[x := y]\| : y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}\}$. Pour tout $y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}$, on a $\Theta, \varphi[x := y] \vdash \exists x \varphi$, d'où $\|\varphi[x := y]\| \leq \|\exists x \varphi\|$. Ainsi $\|\exists x \varphi\|$ majore $B_{x,\varphi}$. On montre 5 que c'est même le plus petit majorant.

Soit $a \in \text{Lin}_+(\Theta)$ majorant $B_{x,\varphi}$. Soit $\chi \in \mathcal{L}\text{-Form}$ telle que $a = \|\chi\|$. Soit $y \notin \text{Var}(\varphi) \cup \text{Var}(\chi)$; notamment $y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}$. Par hypothèse, $\Theta \vdash \varphi[x := y] \rightarrow \chi$, i.e. $\Theta, \varphi[x := y] \vdash \chi$. Notamment $\Theta \cup \{\exists y \varphi[x := y]\} \vdash \exists y \chi$. Pourtant $\varphi[x := y][y := x]$ est φ , donc $\exists y \varphi[x := y]$ équivaut à $\exists x \varphi$. D'autre part, 10 $y \notin \text{Var}(\chi)$, donc $\exists y \chi$ équivaut à χ . Ainsi $\Theta \cup \{\exists x \varphi\} \vdash \chi$, i.e. $\|\exists x \varphi\| \leq a$. Ceci montre $\|\exists x \varphi\| = \bigvee B_{x,\varphi}$. $\square$

Remarque. L'inélégance des hypothèses du lemme est contournable. Algébriquement, on peut définir les opérateurs de substitution partout; mais ceci éloigne du point de vue syntaxique. V. compléments § I.2. 15

§ 19.3. Complétude dénombrable

Cette sous-section demande en outre § 11 et § 15.

Théorème. Soient $\mathcal{L}$ un langage *dénombrable* et Θ une $\mathcal{L}$ -théorie syntaxique cohérente. Alors Θ possède un modèle au plus dénombrable.

Démonstration. Soit $\mathbb{A} = \text{Lin}_+(\Theta)$ l'anneau de Lindenbaum syntaxique de Θ . Les classes y sont notées $\|\varphi\|$; en particulier si $\theta \in \Theta$, alors $\|\theta\| = 1$. 20

On relira le commentaire précédant le lemme § 19.2. Pour $(x, \varphi) \in \text{Var} \times \mathcal{L}\text{-Form}$ tel que $x \notin \text{VarLié}(\varphi)$, soient $\mathcal{V}_{x,\varphi} = \{y \in \text{Var} : y \text{ est substituable à } x \text{ dans } \varphi\}$ et $B_{x,\varphi} = \{\|\varphi[x := y]\| : y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}\}$. Par hypothèse sur $\mathcal{L}$, ces ensembles sont en quantité dénombrable. D'après le lemme § 19.2, 25 chacun possède une borne supérieure. Grâce au lemme de Rasiowa-Sikorski (§ 19.1), soit $\mathfrak{m} \triangleleft \mathbb{A}$ un idéal maximal préservant chaque $\bigvee B_{x,\varphi}$.

On n'introduit pas de notation pour le passage à l'anneau $\mathbb{A}/\mathfrak{m}$; on écrit simplement $a_1 = a_2 [\mathfrak{m}]$. Soient $\mathcal{U} = \{1 + a : a \in \mathfrak{m}\}$ l'ultrafiltre associé à $\mathfrak{m}$ et $\hat{\Theta} = \{\varphi \in \mathcal{L}\text{-Form} : \|\varphi\| \in \mathcal{U}\}$. Par construction, $\Theta \subseteq \hat{\Theta}$. 30

Étape 1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}\text{-Form}$.

(i) On a : $\|\varphi\| = 1 [\mathfrak{m}]$ ssi $\varphi \in \hat{\Theta}$ ssi $\hat{\Theta} \vdash \varphi$.

(ii) Pour $x \notin \text{VarLié}(\varphi)$, on a : $\exists x \varphi \in \hat{\Theta}$ ss'il existe $y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}$ telle que 35

$$\varphi[x := y] \in \hat{\Theta}.$$

Remarque. Notamment $\hat{\Theta}$ est une théorie syntaxique cohérente maximale, et même plus. En effet si pour chaque $y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}$ on a $\hat{\Theta} \vdash \neg\varphi[x := y]$, alors $\hat{\Theta} \vdash \neg(\exists x)\varphi$. C'est une forme d' ω -cohérence; v. ex. 19.5 et § 21, notes conclusives.

5

Vérification.

- (i) Les deux premières implications sont évidentes. On suppose $\hat{\Theta} \vdash \varphi$. Il existe alors $\theta_1, \dots, \theta_n \in \hat{\Theta}$ telles que $\theta_1, \dots, \theta_n \vdash \varphi$. Notamment $\prod_i \|\theta_i\| \leq \|\varphi\|$. Par construction, $\|\theta_i\| \notin \mathbf{m}$. Par primalité, $\prod_i \|\theta_i\| \notin \mathbf{m}$ donc $\|\varphi\| \notin \mathbf{m}$. Par maximalité, $\|\varphi\| = 1 [\mathbf{m}]$. 10
- (ii) Le sens réciproque est évident. Supposons que pour toute $y \in \mathcal{V}_{x,\varphi}$ on ait $\varphi[x := y] \notin \hat{\Theta}$. D'après le point précédent, $\bigvee \|\varphi[x := y]\| = 0 [\mathbf{m}]$. D'après le lemme de la borne supérieure existentielle (§ 19.2) et par préservation, $\|\exists x \varphi\| = \bigvee \|\varphi[x := y]\| \in \mathbf{m}$. Notamment $\|\exists x \varphi\| \neq 1 [\mathbf{m}]$, et $\exists x \varphi \notin \hat{\Theta}$. 15

◇

Sur $\mathcal{L}$ -Term, soit $t_1 \approx t_2$ la relation $\hat{\Theta} \vdash t_1 = t_2$. C'est une relation d'équivalence. Soit $\mathbb{M} = (\mathcal{L}\text{-Term})/\approx$ muni de la structure naturelle :

$$R[\mathbb{M}] = \{[t] : R(\mathbf{t}) \in \hat{\Theta}\}.$$

(Constantes et fonctions à l'avenant.) C'est bien défini grâce aux propriétés de l'égalité. Soit $\mathbf{a} : \text{Var} \rightarrow \mathbb{M}$ le choix de paramètres qui fait $\mathbf{a}(x) = [x]$. 20

Étape 2 (lemme de vérité). Soit $\varphi \in \mathcal{L}\text{-Form}$. Alors $\mathbb{M} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\varphi \in \hat{\Theta}$.

Vérification. Récurrence sur φ . 25

- Pour tout terme t , on a $t[\mathbb{M}](\mathbf{a}) = [t]$. Ceci couvre le cas où φ est de la forme $R(\mathbf{t})$.
- Les cas propositionnels sont immédiats par maximalité de $\hat{\Theta}$ comme théorie syntaxique (étape 1).
- On suppose φ de la forme $(\exists x)\chi$. Par définition d'une formule, $x \notin \text{VarLié}(\chi)$. 30
 - Si $\mathbb{M} \models (\exists x \chi)(\mathbf{a})$, alors il existe un choix de paramètres $\mathbf{a}^*$ altérant $\mathbf{a}$ en x et tel que $\mathbb{M} \models \chi(\mathbf{a}^*)$. Soit $t \in \mathcal{L}\text{-Term}$ tel que $\mathbf{a}^*(x) = [t]$.

Ici encore le formalisme de la syntaxe crée des chicanes. Le terme 35

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

t peut ne pas être substituable à x dans χ (le problème peut se poser même si t est une variable). Mais par renommage (ex. 19.4), il existe χ' équivalente à χ sous $\vdash$, et où t soit substituable à x . Par correction, $\mathbb{M} \models \chi'(\mathbf{a}^*)$.

Soit χ'^* la formule $\chi'[x := t]$, où la substitution est licite. Noter que $\mathbf{a}^*(x) = t(\mathbf{a})$. Par effet sémantique des substitutions (proposition § 17.3), $\mathbb{M} \models \chi'^*(\mathbf{a})$. Par récurrence, $\chi'^* \in \hat{\Theta}$. En particulier, $\hat{\Theta} \vdash \exists x \chi'$. Comme χ et χ' se démontrent l'une l'autre, on a bien $\exists x \chi \in \hat{\Theta}$, i.e. $\varphi \in \hat{\Theta}$.

- Si $(\exists x \chi) \in \hat{\Theta}$, alors d'après l'étape 1 il existe $y \in \mathcal{V}_{x,\chi}$ telle que $\chi[x := y] \in \hat{\Theta}$. Par récurrence, $\mathbb{M} \models (\chi[x := y])(\mathbf{a})$. Soit $\mathbf{a}^*$ le choix de paramètres altérant $\mathbf{a}$ en $\mathbf{a}^*(x) = [y]$. Par sémantique des substitutions, $\mathbb{M} \models \chi(\mathbf{a}^*)$, donc $\mathbb{M} \models \varphi(\mathbf{a})$. $\diamond$

En particulier, $\mathbb{M} \models \Theta$. $\square$

Remarques

- La preuve est encore plus élégante si l'on a : 1. défini partout les opérateurs de substitution (ce qui évite le pesant recours au renommage) et 2. éliminé constantes et fonctions pour se ramener à $\mathcal{L}$ purement relationnel (le modèle est alors porté par les classes de variables).
- Il faut bien considérer toutes les formules dans l'étape 2 (et non seulement celles ayant une unique variable libre). En effet à la différence de l'analogue « à la Henkin » (§ 18.3, étape 6), on ne ramène pas $\exists x \chi$ à l'énoncé $\chi[x := c]$ mais à la formule $\chi[x := y]$.

Corollaire A. La logique élémentaire est complète.

Démonstration. Il suffit de démontrer que toute théorie élémentaire syntaxique cohérente est satisfaisable. Soit Θ une telle théorie. Soit $\Theta_0 \subseteq \Theta$ une partie finie. Alors Θ_0 n'emploie qu'un langage dénombrable, et reste cohérente. D'après le théorème, elle est satisfaisable. Ainsi Θ est finiment satisfaisable, et l'on conclut par compacité (§ 11.1). $\square$

Remarque (complétude et compacité). La démonstration de § 18 permettait de retrouver la compacité ; celle-ci l'invoque. Par opposition à § 18, cet emploi fait perdre le contrôle cardinal.

Corollaire B (omission de types; lemme § 15.2.B). Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, Θ une $\mathcal{L}$ -théorie élémentaire, $\mathbf{x}$ un uplet fini de variables et $\{p_k(\mathbf{x}) : k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable de types *non principaux*. Alors il existe $\mathbb{A} \models \Theta$ dénombrable ne réalisant aucun p_k .

Démonstration. Comprendre le cas d'un seul type $p(\mathbf{x})$ fournit une généralisation évidente au cas d'une famille dénombrable. On tire les leçons de la preuve du théorème :

- $\vdash$ et $\models$ sont équivalentes ;
- il est plus simple d'éliminer d'emblée constantes et fonctions, pour supposer $\mathcal{L}$ purement relationnel ; les termes sont alors les variables ;
- à renommage près, tout uplet de variables est substituable à tout autre ; on écrit donc $\varphi(\mathbf{y})$ plutôt que $\varphi[\mathbf{x} := \mathbf{y}]$.

Soient $\mathbb{A} = \text{Lin}(\Theta)$ et $\mathcal{E} = \text{Spec } \mathbb{A}$ dans sa topologie usuelle, qui est profinie. Les ensembles $F_a = \{\mathbf{m} \in \mathcal{E} : a \in \mathbf{m}\}$, pour $a \in \mathbb{A}$, sont exactement ses ferverts. On note aussi $O_a = F_a^c$; alors $a \mapsto O_a$ définit un isomorphisme d'anneaux de Boole entre $\mathbb{A}$ et $\text{Ferv } \mathcal{E}$.

Étape 1. Pour $(x, \varphi) \in \text{Var} \times \text{Form}$, la partie

$$U_{x,\varphi} = \{\mathbf{m} \in \mathcal{E} : \mathbf{m} \text{ préserve } \bigvee B_{x,\varphi}\}$$

est un ouvert dense de $\mathcal{E}$.

Vérification. V. ex. 19.2.

Ainsi, pour $\mathbf{m} \in \mathcal{E}$, on a :

$$\mathbf{m} \in \bigcap_{\text{Var} \times \text{Form}} U_{x,\varphi} \text{ ssi } \mathbf{m} \text{ préserve les bornes supérieures existentielles.}$$

Pour $\mathbf{m} \in \mathcal{E}$ préservant les bornes supérieures existentielles, on note $\hat{\Theta}_{\mathbf{m}}$, $\mathbb{M}_{\mathbf{m}}$, et $\mathbf{a}_{\mathbf{m}}$ les objets formés dans la démonstration du théorème. Pour une formule φ (qui peut avoir des variables libres), on a ainsi : $\mathbb{M}_{\mathbf{m}} \not\models \varphi(\mathbf{a}_{\mathbf{m}})$ ssi $\|\varphi\| \in \mathbf{m}$.

Étape 2. Pour $\mathbf{y}$ un uplet de variables de même longueur que $\mathbf{x}$, la partie

$$U_{\mathbf{y}} = \bigcup_{\varphi \in p} F_{\|\varphi(\mathbf{y})\|}$$

est un ouvert dense de $\mathcal{E}$.

Vérification. Le caractère ouvert est évident. Pour la densité, soit $O \subseteq \mathcal{E}$ un ouvert non vide. Alors O contient un fervert non vide $O_{\|\chi\|}$, pour une formule χ , à variables au plus $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. L'hypothèse $O_{\|\chi\|} \neq \emptyset$ signifie $\|\chi\| \neq 0$, i.e. $\Theta \not\models \neg\chi$. Comme p n'est pas isolé, il existe $\varphi(\mathbf{x}) \in p$ telle que $\Theta, \chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \not\models \varphi$. Notamment $\Theta, \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \not\models \varphi(\mathbf{y})$. Ainsi, dans $\mathbb{A}$, on a $\|\chi \wedge \neg\varphi(\mathbf{y})\| \neq 0$. Par dualité, $O_{\|\chi\|} \wedge F_{\|\varphi(\mathbf{y})\|} = O_{\|\chi \wedge \varphi(\mathbf{y})\|} \neq \emptyset$. $\diamond$

Ainsi, pour $\mathbf{m} \in \mathcal{E}$ préservant les bornes supérieures existentielles, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \in U_{\mathbf{y}} & \text{ ss'il existe } \varphi(\mathbf{x}) \in p \text{ telle que } \mathbf{m} \in F_{\|\varphi(\mathbf{y})\|} \\ & \text{ ss'il existe } \varphi(\mathbf{x}) \in p \text{ telle que } \mathbb{M}_{\mathbf{m}} \not\models \varphi(\mathbf{a}_{\mathbf{m}}) \\ & \text{ ssi dans } \mathbb{M}_{\mathbf{m}}, \text{ le uplet } \mathbf{y}(\mathbf{a}_{\mathbf{m}}) \text{ ne réalise pas } p. \end{aligned}$$

Mais $\mathbf{y}(\mathbf{a}_{\mathbf{m}}) = [\mathbf{y}]$, et $\mathbb{M}_{\mathbf{m}}$ a pour base les classes de variables, donc :

$$\mathbf{m} \in \bigcap_{\mathbf{y}} U_{\mathbf{y}} \text{ ssi aucun uplet de } \mathbb{M}_{\mathbf{m}} \text{ ne réalise } p.$$

Les $U_{\mathbf{y}}$ et les $U_{x,\varphi}$ sont en quantité dénombrable. D'après le théorème de Baire, il existe $\mathbf{m}_0 \in \mathcal{E}$ dans $\bigcap U_{x,\varphi} \cap \bigcap U_{\mathbf{y}}$. Donc $\mathbb{M}_{\mathbf{m}_0}$ est un modèle dénombrable de Θ omettant p . Même argument pour une famille dénombrable de types, en introduisant les $U_{p,\mathbf{y}}$. $\square$

Exercices

19.1 (trois reformulations).

- Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}, \{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ deux familles dénombrables de parties telles que pour chaque indice, $\bigwedge X_n$ et $\bigvee Y_n$ existent. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux de Boole $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}_2$ tel que pour chaque indice, $\varphi(\bigwedge X_n) = \bigwedge \varphi(X_n)$ et $\varphi(\bigvee Y_n) = \bigvee \varphi(Y_n)$.
- Énoncer et démontrer directement le lemme de Rasiowa-Sikorski en termes d'ultrafiltres.

19. Adéquation (2)

- c. Soit $(\mathbb{P}; \leq)$ un ordre partiel. Une partie $C \subseteq \mathbb{P}$ est *compatible* si pour toute partie finie $F \subseteq C$, il existe $p \in \mathbb{P}$ minorant F . Une partie $D \subseteq \mathbb{P}$ est *dense* si $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists d \in D)(d \leq p)$. Soit $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable de parties denses. Montrer qu'il existe une partie compatible qui rencontre chaque D_n .

(*) **19.2 (lemme de Rasiowa-Sikorski via la topologie).** (Prérquis : § 5.3.) Un espace topologique est *de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses reste dense. 5

- a. (Question de pure topologie.) Soit $\mathcal{E} = (E; \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Montrer que si O est un ouvert contenant un point x , alors il existe un ouvert O' et un compact K' tels que $x \in O' \subseteq K' \subseteq O$. [Normalité, ex. 4.6.]
- b. En déduire que tout espace compact est de Baire. 10
- c. Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole et $B \subseteq \mathbb{A}$ une partie possédant une borne supérieure. Montrer que $O_B = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A} : \mathfrak{p} \text{ préserve } \bigvee B\}$ est un ouvert dense de $\text{Spec } \mathbb{A}$.
- d. En déduire le lemme de Rasiowa-Sikorski.

(*) **19.3 (limite au lemme de Rasiowa-Sikorski).** Soit $\mathcal{E} = (E; \mathcal{T})$ un espace topologique.

Pour $X \in P(E)$, soit $r(X) = \overline{X}$. Un *ouvert régulier* de $\mathcal{E}$ est un point fixe de r . 15

- a. (Cette question, un peu laborieuse, peut être admise.) Montrer que la collection des ouverts réguliers de $\mathcal{E}$ forme, pour des opérations à préciser, un anneau de Boole complet (toute partie possède une borne supérieure, resp. inférieure).
- b. On suppose $\mathcal{E}$ séparé. Montrer : l'anneau des ouverts réguliers est sans atomes ssi $\mathcal{E}$ est sans points isolés. 20
- c. En déduire que le lemme de Rasiowa-Sikorski ne se généralise pas à une quantité indénombrable de bornes supérieures.

19.4 (lemme de renommage). Démontrer le lemme suivant.

Lemme. Soient φ une formule, t un terme, et x une variable. Alors il existe une formule φ' obtenue de φ en renommant seulement des variables liées, telle que : 25

- φ et φ' se démontrent l'une l'autre ;
- t est substituable à x dans φ' .

On dit que φ et φ' sont α -équivalentes.

19.5. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

Soit $\Theta = \{\neg\varphi[x := y] : y \in \text{Var}\} \cup \{\exists x \varphi\}$. Alors $\mathbb{A} = \text{Lin}_\perp(\Theta)$ n'est pas dégénéré, i.e. $1 \neq 0$. Soit $\mathfrak{m} \in \text{Spm } \mathbb{A}$ un idéal maximal préservant $\bigvee \|\varphi[x := y]\|$. Dans $\mathbb{A}/\mathfrak{m}$, on a $0 = 1$, contradiction. 30

19.6 (modèles booléens). (Prérequis : § 7.4.) Soit $\mathbb{V}$ un anneau de Boole. On considère des $\mathcal{L}$ -structures $\mathbb{V}$ -valuées. Soient $I \triangleleft \mathbb{V}$ un idéal et $\pi_I : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/I$ la projection associée. Soit $X \subseteq \mathbb{V}$ ayant une borne supérieure. L'idéal I *présERVE* $\bigvee$ en X si $\bigvee \{\pi(x) : x \in X\}$ existe et vaut $\pi(\bigvee X)$. Il *présERVE les sup existentiels* si pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{a})$ il préserve $\bigvee$ en $\{\|\varphi(b, \mathbf{a})\| : b \in \mathbb{A}\}$. 35

a. **Généralités**

- (i) Écrire les clauses manquantes dans la définition d'une $\mathbb{V}$ -valuation : trois axiomes pour les fonctions de $\mathcal{L}$; valuation d'une disjonction, d'un quantificateur universel. 40
- (ii) Montrer qu'on peut toujours supposer $\mathbb{V}$ complet, i.e. que toute partie a des bornes inférieure et supérieure. [Dualité de Stone.]

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- b. **Structures pleines.** Une $\mathcal{L}$ -structure $\mathbb{A}$ est *pleine* si toute famille $\{\|\varphi(b, \mathbf{a})\| : b \in \mathbb{A}\}$ possède un maximum.
- (i) Soit $(\mathbb{A}_i : i \in I)$ une famille de $\mathcal{L}$ -structures $\mathbb{F}_2$ -valuées. Montrer que $\prod_I \mathbb{A}_i$ est naturellement une $\mathcal{L}$ -structure $P(I)$ -valuée pleine.
- (ii) Montrer que si $\mathbb{A}$ est pleine, alors tout idéal préserve les sup existentiels. 5
- c. **Preuve de Rasiowa-Sikorski**
- (i) Montrer que si $I \triangleleft \mathbb{V}$ préserve les sup existentiels, alors $\mathbb{A}$ est naturellement $\mathbb{V}/I$ -valuée.
- (ii) En déduire la complétude dénombrable de la logique élémentaire.

Notes conclusives

• Repères historiques

In the opinion of the reviewer, this paper represents a distinct advance over all preceding proofs; for on the one hand, much less formal development from the axioms is required than in the proofs similar to Gödel's, and on the other hand, the doubly infinite passage to S_ω appearing in Henkin's proof is completely avoided here. Moreover, the present derivation, when combined with the suggested change in the proof of (iii), has the special advantage of bringing out the essentially algebraic character of the method first used by Henkin.
[Fef52], sur [RS50]

(iii) est le lemme de Rasiowa-Sikorski, et le « changement suggéré » est la construction itérative (due à Tarski) donnée en § 19.1 de

$(a_n : n \in \mathbb{N})$, moins passage final à un idéal maximal. 30

Lemme de Rasiowa-Sikorski. • On ne saurait exagérer son importance en logique.

• Origine [RS50, § 5], démontré comme à l'ex. 19.2. • Découvert pour la démonstration de la complétude, il fut revendiqué par Sikorski seul [Sikorski, p. 102], et subit une (scandaleuse) tentative de renommage : « *Tarski's lemma was first proved by RASIOWA and SIKORSKI [1951] using topological methods* » [Bell-Slomson, p. 31]. 35

Anneaux de Lindenbaum. V. compléments § I, définition I.1.D et § I, notes conclusives.

Preuve de Rasiowa-Sikorski. • Publiée dans [RS50] (amendé en [RS51] pour prendre en compte une théorie dénombrable et non seulement un énoncé). • Elle est certainement l'aboutissement de la vision topologique de Mostowski [Mos37], qui eut aussi de 45

[Fef52] : Solomon FEFERMAN. « Review : H. Rasiowa, R. Sikorski, A Proof of the Completeness Theorem of Gödel ». In : *Journal of Symbolic Logic* 17.1 (1952), p. 72

[RS50] : Helena RASIOWA et Roman SIKORSKI. « A proof of the completeness theorem of Gödel ». In : *Fund. Math.* 37 (1950), p. 193-200

[Sikorski] : Roman SIKORSKI. *Boolean algebras*. 3^e éd. T. 25. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. New York : Springer-Verlag, 1969. x+237

[Bell-Slomson] : John BELL et Alan SLOMSON. *Models and ultraproducts : An introduction*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1969, p. ix+322

[RS51] : Helena RASIOWA et Roman SIKORSKI. « A proof of the Skolem-Löwenheim theorem ». In : *Fund. Math.* 38 (1951), p. 230-232

[Mos37] : Andrzej MOSTOWSKI. « Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik ». In : *Fundam. Math.* 29 (1937), p. 34-53

[Bet51] : Evert BETH. « A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel ». In : *Indag. Math.* 13 (1951). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 54, p. 436-444

[Has52] : Gisbert HASENJAEGER. « Topologische Untersuchungen zur Semantik und Syntax

l'influence hors de Pologne : [Bet51], [Has52].

- Pour une réécriture purement algébrique, v. ex. 19.6 et compléments § I, théorème § I.4.B ainsi que les remarques le suivant.
- La méthode a même essaimé en théorie de la démonstration ; v. compléments § T, notes conclusives, *Théorème de Herbrand*.

• Autour du lemme de Rasiowa-Sikorski

Rôle du choix. La formation de $(a_n : n \in \mathbb{N})$ demande le seul choix dépendant. En pratique, cette formation suffit. L'emploi final du théorème de Krull booléen demande davantage (mais moins que le choix). V. § 25, notes conclusives, *Choix et variantes, Théorème de Krull et AC*.

Force du lemme. V. [Gol85].

Rasiowa-Sikorski pour treillis de Heyting.

- La première adaptation du lemme de Rasiowa-Sikorski pour les treillis de Heyting (compléments § E, définition E.1.A) semble [Gör71, § 7] (Sabine Görnemann prit le nom de son époux et devint Koppelberg, v. [Koppelberg]). V. aussi [RS75]. • Elle peut servir à démontrer la complétude de la logique intuitionniste à la Rasiowa-Sikorski ; les compléments § P adaptent plutôt la méthode de Henkin. • Quand on remet de la topologie, i.e. de la dualité à la Stone pour treillis de Heyting, le sujet devient peu lisible [Gol12].

Rasiowa-Sikorski en langage non dénombrable ? La restriction aux langages dénombrables vient du lemme de Rasiowa-Sikorski, valable pour des collections dénombrables de

bornes supérieures. • Pour généraliser la méthode à $\text{card } \mathcal{L} = \kappa$, il faudrait préserver κ bornes supérieures à la fois, i.e. trouver un point dans l'intersection de κ ouverts denses. *J'ignore si un tel aménagement est possible.* • En général les propriétés type « κ -Baire » sont fausses ou directement liées à l'axiomatique ensembliste, mais l'espace topologique $\text{Spec Lin}_+(\Theta)$ est assez particulier pour que la question ait un sens.

- **Axiome de Martin.** Cet axiome combinatoire généralise le théorème de Baire. Il est indépendant de ZFC (ni démontrable, ni réfutable ; si du moins ZFC est cohérente).

Origine. Implicite dans [ST71], introduit comme « *Axiom A* » dans [MS70, p. 150] ; attribué à Martin, et indépendamment à Rowbottom (sans référence). « *Martin observed that the construction of $\mathcal{N}$ depended only on very general properties of the Cohen extensions $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^T$. He and, independently, Rowbottom, suggested an "axiom" which asserts that all Cohen extensions having these very general properties can be carried out inside the universe of sets: that the universe of sets is – so to speak – closed under a large class of Cohen extensions. The methods of [22] show this axiom to be consistent, and the consistency proof is given in [22].* » [MS70, pp. 144-145] ; [22] est [ST71].

Énoncé. • Comme à l'ex. 19.1.c, on manie des ordres partiels $\mathbb{P}$. Deux éléments de $\mathbb{P}$ sont *incompatibles* s'il n'ont pas de minorant

eines erweiterten Prädikatenkalküls ». In : *Arch. Math. Logik Grundlag.* 1 (1952), p. 99-129 [Gol85] : Robert GOLDBLATT. « On the role of the Baire category theorem and dependent choice in the foundations of logic ». In : *J. Symbolic Logic* 50.2 (1985), p. 412-422 [Gör71] : Sabine GÖRNEMANN. « A logic stronger than intuitionism ». In : *J. Symbolic Logic* 36 (1971), p. 249-261

[Koppelberg] : Sabine KOPPELBERG. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1.* Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet. Amsterdam : North-Holland, 1989. xx+312

[RS75] : Cecylia RAUSZER et Bogdan SABALSKI. « Notes on the Rasiowa-Sikorski lemma ». In : *Studia Logica* 34.3 (1975), p. 265-268

[Gol12] : Robert GOLDBLATT. « Topological proofs of some Rasiowa-Sikorski lemmas ». In : *Studia Logica* 100.1-2 (2012), p. 175-191

[ST71] : Robert SOLOVAY et Stanley TENNENBAUM. « Iterated Cohen extensions and Souslin's problem ». In : *Ann. of Math. (2)* 94 (1971), p. 201-245

[MS70] : Donald MARTIN et Robert SOLOVAY. « Internal Cohen extensions ». In : *Ann. Math. Logic* 2.2 (1970), p. 143-178

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

commun. Une *antichaine* de $\mathbb{P}$ est une partie formée d'éléments deux à deux incompatibles. • Axiome de Martin (AM). Soit $\mathbb{P}$ un ordre partiel dont toute antichaine est au plus dénombrable. Soient I de cardinal $< 2^{\aleph_0}$ et $\{D_i : i \in I\}$ une famille de parties denses. Alors il existe une partie compatible rencontrant chaque D_i . • Il n'est pas difficile de montrer que les hypothèses sont indispensables.

Conséquences. • Généralisation marquante du théorème de Baire : dans $\text{ZFC} \cup \{\text{AM}\}$, si $\text{card } I < 2^{\aleph_0}$ et $\{O_i : i \in I\}$ est une famille d'ouverts denses de $\mathbb{R}$, alors $\bigcap_I O_i$ reste dense dans $\mathbb{R}$. • Excellente introduction aux conséquences de AM [Sho75] ; référence (difficile) [Fre84].

Indépendance. • L'hypothèse du continu HC

désigne l'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Elle est équivalente à ZFC (§ 29, notes conclusives). • Dans $\text{ZFC} \cup \{\text{HC}\}$, l'axiome de Martin est évident car il revient au lemme de Rasiowa-Sikorski (d'où sa présence dans cette section). Mais d'après [ST71], si ZFC est cohérente, alors $\text{ZFC} \cup \{\text{AM}, \neg\text{HC}\}$ aussi. En pratique, AM est perçu comme une « version faible » (et plus crédible auprès des spécialistes) de HC. • Un modèle où $\aleph_1 < 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ (v. § 26, notes conclusives, *Comportement de l'exponentielle*) vérifie $\neg\text{AM}$, d'où la cohérence de la négation.

Ne pas confondre... AM avec *Martin's Maximum*, introduit dans [FMS88]. Ce dernier principe n'a pas encore d'exposition grand public ; mais l'introduction de [AS21] est très lisible.

§ 20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

L'*arithmétique de Peano* PA est une première description élémentaire de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ (§ 20.1). À cause de la *fonction* β , cette structure a la force de la *combinatoire finie* (§ 20.2). La syntaxe et les traces de l'activité mathématique sont alors codables dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ (§ 20.3).

Prérequis : §§ 6, 14, 17.

On rappelle une définition introduite en § 8.1

PA Définition (arithmétique de Peano). L'*arithmétique de Peano* PA est la $\{0, s, +, \cdot\}$ -théorie élémentaire suivante :

- $(\forall x) \neg[s(x) = 0]$;
- $(\forall y)(\exists x)[y \neq 0 \rightarrow y = s(x)]$;
- $(\forall x_1)(\forall x_2)[s(x_1) = s(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$;
- $(\forall x)(x + 0 = x)$;

[Sho75] : Joseph SHOENFIELD. « Martin's axiom ». In : *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), p. 610-617

[Fre84] : David FREMLIN. *Consequences of Martin's axiom*. T. 84. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1984, p. xii+325

[FMS88] : Matthew FOREMAN, Menachem MAGIDOR et Saharon SHELAH. « Martin's maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters. Part I ». In : *Ann. of Math. (2)* 127.1 (1988), p. 1-47

[AS21] : David ASPERÓ et Ralf SCHINDLER. « Martin's Maximum⁺⁺ implies Woodin's axiom (*) ». In : *Ann. of Math. (2)* 193.3 (2021), p. 793-835

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

- $(\forall x_1)(\forall x_2)[s(x_1 + x_2) = x_1 + s(x_2)]$;
- $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$;
- $(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 \cdot s(x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1]$;
- pour chaque $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -formule $\varphi(x, \mathbf{y})$, l'axiome :

$$(\forall \mathbf{y}) \left[\begin{array}{c} \varphi(0, \mathbf{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \mathbf{y}) \rightarrow \varphi(s(x), \mathbf{y})) \\ \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \mathbf{y}) \end{array} \right]. \quad 5$$

La structure $(\mathbb{N}; 0, s, +, \cdot)$ en est appelée *modèle standard*. Comme $\{0\}$ et s sont définissables dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, on travaille souvent dans cette dernière.

Remarques

- Le poids de la tradition et sans doute un biais épistémologique en faveur des entiers positifs font l'importance de PA. Il serait plus naturel de tenter d'axiomatiser l'anneau ordonné $(\mathbb{Z}; \leq, +, \cdot)$. 10
- Théorie élémentaire ayant un modèle infini, PA tombe sous le coup des phénomènes de Löwenheim-Skolem (§ 13) : elle a des modèles non standard. La théorie naïve du deuxième ordre PA^2 (§ 7.2), qui remplace le schéma de récurrence par l'axiome du deuxième ordre : 15

$$(\forall X) \left[\begin{array}{c} X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \rightarrow X(s(x))) \\ \rightarrow (\forall x)X(x) \end{array} \right].$$

Elle est en effet absolument catégorique *en sémantique pleine* (§ 8.3). Mais l'analyse fine de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ révélera le caractère illusoire, a minima l'impraticabilité, de cette « sémantique pleine » (§ 22.1). Seule est fiable la logique élémentaire. 20

§ 20.1. Modèles et formules de PA

Cette sous-section requiert § 12.2.

- **Plongements finaux entre modèles.** Le modèle standard se plonge comme segment initial de tout modèle de PA.

Notation. 25

- Soit $x \leq y$ la relation $(\exists z)(y = x + z)$.
- ν_n — Pour n entier, soit ν_n le terme $s(s(\dots s(0)\dots))$. 30

Ainsi $\leq[\mathbb{N}]$ est l'ordre usuel, et $\nu_n[\mathbb{N}]$ vaut n . Par récurrence, dans tout modèle, $\leq$ définit un ordre total discret, de plus petit élément 0, de fonction successeur s , et compatible avec $+$ et $\cdot$. 30

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

Définition A (inclusion ou plongement final).

- Une inclusion de modèles $(\mathbb{M}_1 \leq \mathbb{M}_2)$ est *finale* si pour tout $m_1 \in \mathbb{M}_1$ et $m_2 \in \mathbb{M}_2 \setminus \mathbb{M}_1$, on a $\mathbb{M}_2 \models m_1 < m_2$. On dit alors que $\mathbb{M}_2$ est *extension finale* de $\mathbb{M}_1$, et $\mathbb{M}_1$ *sous-structure initiale* de $\mathbb{M}_2$.
- Un plongement $\sigma: \mathbb{M}_1 \hookrightarrow \mathbb{M}_2$ est *final* si l'inclusion $(\sigma(\mathbb{M}_1) \leq \mathbb{M}_2)$ l'est. 5

Lemme A. Soit $\mathbb{M} \models \text{PA}$. Alors il existe un unique plongement $\sigma: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$, et celui-ci est final.

Démonstration.

- Unicité. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{N} \models n = \nu_n$, donc tout plongement $\sigma: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$ 10
envoie n sur $\nu_n[\mathbb{M}]$.
- Existence. Par récurrence, pour tous les entiers k, ℓ , on a $\text{PA} \models \nu_{k+\ell} = \nu_k + \nu_\ell$ et $\text{PA} \models \nu_{k \cdot \ell} = \nu_k \cdot \nu_\ell$. Donc poser $\sigma(n) = \nu_n[\mathbb{M}]$ définit bien un plongement.
- Caractère final. Par récurrence, pour tout entier n ,

$$\text{PA} \models (\forall x) \left(x \leq \nu_n \rightarrow \bigvee_{k \leq n} x = \nu_k \right). \quad 15$$

Notamment l'unique plongement $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$ est final. □

Remarques

- En revanche le plongement naturel n'est pas nécessairement élémentaire. Quand on parle de la catégorie des modèles de PA, on pense plutôt à $\mathbf{Mod}_{\text{fin}}(\text{PA})$, en notation évidente. 20
- On assimile souvent $\mathbb{N}$ à son image via le plongement naturel. Si $\varphi(\mathbf{x})$ est une $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -formule et $\mathbf{n}$ un uplet de paramètres de $\mathbb{N}$, alors : $\mathbb{M} \models \varphi(\mathbf{n})$ ssi $\mathbb{M} \models \varphi[\mathbf{x} := \nu_{\mathbf{n}}]$. Les points de $\mathbb{N}$ étant nommés dans le langage, les paramètres standard sont éliminables.

- **Hierarchie de formules.** La structure d'ordre permet en outre de classer 25
les formules de PA plus finement que par leur alternance de quantificateurs.

Pour deux variables distinctes x et y , l'abréviation $(\forall x \leq y) \cdot$ désigne l'expression $(\forall x)(x \leq y \rightarrow \cdot)$; on l'appelle *quantification universelle bornée*. De même, la *quantification existentielle bornée* $(\exists x \leq y) \cdot$ désigne $(\exists x)(x \leq y \rightarrow \cdot)$.

$\Delta_n, \Pi_n, \Sigma_n$

Définition B (classes $\Delta_n, \Pi_n, \Sigma_n$). Une $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -formule $\varphi(\mathbf{x})$ est :

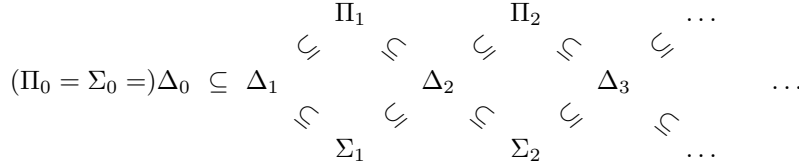
30

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

- littéralement Π_0 et littéralement Σ_0 , si ses seules quantifications sont bornées, i.e. de la forme $(\forall y \leq z)$ ou $(\exists y \leq z)$;
- littéralement Π_{n+1} si de la forme $(\forall \mathbf{y})\sigma_n$, où σ_n est littéralement Σ_n ;
- littéralement Σ_{n+1} si de la forme $(\exists \mathbf{y})\pi_n$, où π_n est littéralement Π_n ;
- Π_n , resp. Σ_n , si équivalente modulo PA à une formule littéralement telle; ⁵
- Δ_n si à la fois Π_n et Σ_n .

Remarques

- Il n'y a pas de « littéralement Δ_n ».
- La définition autorise des quantifications par *uplets* de variables $\mathbf{y}$; on peut sans changer la classe des formules se ramener à des variables seules. ¹⁰
- La théorie PA est assez forte pour que la hiérarchie ait de bonnes propriétés de stabilité. Pour ce point et le précédent, v. ex. 20.7.



La « double hélice » des formules

Lemme B. Soient $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2 \models \text{PA}$ et $\sigma: \mathbb{M}_1 \hookrightarrow \mathbb{M}_2$ un plongement final. Soit $\varphi(\mathbf{m})$ une formule à paramètres dans $\mathbb{M}_1$. ¹⁵

- (i) Si φ est Σ_1 , alors $\mathbb{M}_1 \models \varphi(\mathbf{m})$ entraîne $\mathbb{M}_2 \models \varphi(\sigma(\mathbf{m}))$.
- (ii) Si φ est Δ_1 , la réciproque est également vraie.

Démonstration. On peut supposer que σ est l'inclusion, ce qui allège la notation. Une formule $\varphi(\mathbf{x})$ est *transférable* si pour $\mathbf{m} \in \mathbb{M}_1$, on a : $\mathbb{M}_1 \models \varphi(\mathbf{m})$ ssi $\mathbb{M}_2 \models \varphi(\mathbf{m})$. La classe des formules transférables est close sous négation. On montre qu'elle l'est sous quantification bornée. Soient χ une formule transférable et $y \leq z$ des variables distinctes; on montre que $(\exists y \leq z)\chi$ est transférable. Soit $\mathbf{m}$ un choix de paramètres dans $\mathbb{M}_1$ et défini en z . ²⁰

- La satisfaction dans $\mathbb{M}_1$ entraîne celle dans $\mathbb{M}_2$. ²⁵
- On suppose $\mathbb{M}_2 \models (\exists y \leq z)\chi(\mathbf{m})$. Par hypothèse, il existe $b \in \mathbb{M}_2$ tel que $\mathbb{M}_2 \models (b \leq z \wedge \chi)(\mathbf{m})$. Les paramètres $\mathbf{m}$ assignent à la variable z un élément de $\mathbb{M}_1$, d'où par caractère final, $b \in \mathbb{M}_1$. Mais χ est transférable, donc $\mathbb{M}_1 \models (b \leq z \wedge \chi)(\mathbf{m})$, i.e. $\mathbb{M}_1 \models (\exists y \leq z)\chi(\mathbf{m})$.

Ceci montre la propriété de clôture voulue. Toute formule Δ_0 est donc transférable. On peut toujours ajouter des quantifications existentielles pour passer de $\mathbb{M}_1$ à $\mathbb{M}_2$, d'où le premier point. Pour le second, si φ est Δ_1 , alors φ et $\neg\varphi$ sont Σ_1 . $\square$

V. compléments § N.

5

§ 20.2. Combinatoire finie

La fonction de couplage de Cantor :

$$\alpha(x, y) = \frac{(x + y + 1)(x + y)}{2} + y$$

est certainement familière ; elle réalise une bijection définissable entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$. Composant, on obtient pour chaque k fixé une bijection définissable $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^k$.¹⁰ La fonction β est autrement plus puissante.

β Définition (fonction β). Soit $\beta: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à (a, b, i) associe le reste de la division euclidienne de a par $1 + ib$.

Lemme. Soit $(r_1, \dots, r_k)$ une suite finie d'entiers. Alors il existe a et b entiers tels que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on ait $\beta(a, b, i) = r_i$.¹⁵

Démonstration. Elle exploite un point classique d'algèbre : si m et n sont premiers entre eux, alors $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [**Ann**].

Pour que les r_i soient des restes modulo $1 + ib$, il faut avoir b assez grand, disons $b \geq \max(r_i)$. Pour que les modules $1 + ib$ soient premiers entre eux, il suffit d'avoir b assez arithmétiquement riche, disons divisible par $k!$.²⁰

Soient $N = \max(r_1, \dots, r_k, k)$ et $b = N!$. Les entiers $1 + ib$ pour $1 \leq i \leq k$ sont alors premiers entre eux. En effet si p premier ou égal à 1 divise $1 + ib$ et $1 + jb$ pour $i \neq j$, alors $p|(j - i)b$, donc $p|N!$ et $p \leq N$, d'où $p|ib$. D'autre part $p|1 + ib$ donc $p = 1$, comme voulu.

Par l'isomorphisme d'anneaux quotients

$$\mathbb{Z}/[(1 + b) \cdots (1 + kb)]\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(1 + b)\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/(1 + kb)\mathbb{Z},$$

il existe a (unique modulo $(1 + b)(1 + 2b) \cdots (1 + kb)$) tel que $a \equiv r_i [1 + ib]$ pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$. $\square$

Cette fonction permet de « manier des suites arbitrairement longues ». Ce n'est pas à prendre au sens littéral mais au codage par β près, car $\mathbb{N}^\omega$ n'est une

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

partie définissable d'aucun $\mathbb{N}^k$. En fait, $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ *interprète* (au sens de § 14.2) $\mathbb{N}^\omega$ avec toutes les opérations usuelles sur les suites finies.

Corollaire.

- (i) La fonction $\exp: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calculant x^y est définissable dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$.
- (ii) Soit $b > 1$ un entier. La relation sur $\mathbb{N}^3$: « m est le k^{e} chiffre du développement de n en base b » est définissable.

Démonstration.

- (i) Soit $R(x, y, z)$ la relation définissable :

$$(\exists a)(\exists b)[\beta(a, b, 1) = x \wedge (\forall i < y)(\beta(a, b, i+1) = x \cdot \beta(a, b, i)) \wedge \beta(a, b, y) = z].$$

On a bien : $\mathbb{N} \models R(m, n, k)$ ssi $k = m^n$.

- (ii) C'est la relation définissable :

$$(m < b) \wedge [(\exists \ell_1 < n)(\exists \ell_2 < n)(\ell_1 < b^k) \wedge (n = \ell_1 + mb^k + \ell_2 b^{k+1})]. \quad \square$$

Remarques

- Ces définitions sont même Σ_1 . 15
- L'exponentielle est ainsi redondante. Ceci contraste avec les exercices 20.1–20.3 qui présentent des « strates successives » de structure.
- En fait $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ interprète la combinatoire finie $(V_\omega; \in)$; v. ex. 23.6 et 27.8.

§ 20.3. Codage de la syntaxe 20

Le corollaire § 20.2.(ii) permet de reproduire définissablement le mécanisme de l'écriture, et donc de coder la syntaxe dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$. Le codage proposé est lourd mais très fidèle à la pratique de la lecture alphabétique. La gestion des suites et des arbres requiert toutefois des caractères dédiés.

A. Notation. 25

- L'alphabet $\mathcal{A}_\Lambda$ de la logique élémentaire est formé des caractères suivants :

$$(\) \ , \ \perp \ = \ \neg \ \wedge \ \rightarrow \ x \ _ \ \{ \ } \ \} \ \exists \ \forall \ \vdash$$

- L'alphabet $\mathcal{A}_{PA}$ de l'arithmétique est formé de $\mathcal{A}_\Lambda$ et de :

$$0 \ s \ + \ \cdot$$

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

— L'alphabet $\mathcal{A}_s$ des suites est formé de $\mathcal{A}_{PA}$ et de :

$$[\] ;$$

— L'alphabet $\mathcal{A}_a$ des arbres est formé de $\mathcal{A}_s$ et de :

$$< \ > \ : \ @ \ g \ d$$

Remarques

- Éliminer $\vee$ au profit de $\perp$ et $\rightarrow$ permet de ne manier que des arbres binaires ; la règle $\vee^-$ de § 17.2 est en effet source de ternarité sans élégance. On pourrait même éliminer $\neg, \wedge, \forall$ au profit de $\perp, \rightarrow, \exists$ (ex. 17.4).
- Pour disposer, avec un nombre fini de caractères, d'un nombre infini de variables, on note celles-ci $x_{\{i\}}$.
- Noter l'ajout précoce de $\vdash$.

• **Expressions et leur code.** Une *expression* d'un alphabet $\mathcal{B}$ est une suite finie de caractères. Leur ensemble est noté $\mathcal{B}\text{-Expr}$.

$\text{Expr}, \mathcal{A}\text{-Expr}$

$\#E$ **Définition A** (code). Soit $b \geq \text{card } \mathcal{A}_a$ fixé.

— Le *code* d'un caractère $\sigma \in \mathcal{A}$, noté $\#\sigma$, est donné par la table suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} (&) & , & \dots & g & d \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 27 & 28. \end{array}$$

— Soit $E = \sigma_0 \dots \sigma_k$ une expression de $\mathcal{A}_a$. Son *code* $\#E$ est l'entier $\sum_{i=0}^k \#\sigma_i b^i$.

Lemme A. Pour chacun des alphabets proposés, sont définissables dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$:

- (i) l'ensemble $\#\mathcal{B}\text{-Expr}$ des codes d'expressions de $\mathcal{B}$;
- (ii) la fonction longueur $\ell: \#\mathcal{B}\text{-Expr} \rightarrow \mathbb{N}$;
- (iii) la concaténation $\frown: \#\mathcal{B}\text{-Expr} \times \#\mathcal{B}\text{-Expr} \rightarrow \#\mathcal{B}\text{-Expr}$.

Démonstration.

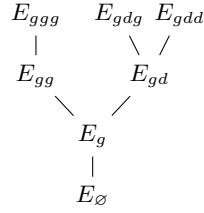
- (i) L'ensemble fini $\#\mathcal{B}$ est définissable. On considère alors : « pour tout $k < n$, le k^{e} chiffre de n en base b est soit dans $\#\mathcal{B}$, soit nul, auquel cas tous les suivants le sont aussi. »
- (ii) « Le ℓ^{e} chiffre de x en base b n'est pas nul mais tous les suivants le sont. » Noter qu'on peut même limiter la vérification à tous les suivants $\leq x$.
- (iii) $(\#E_1, \#E_2) \mapsto \#E_1 + b^{\ell(E_2)} \cdot \#E_2$. □

Les définitions sont même Δ_0 .

• **Suites et arbres.** On transcrit ces objets combinatoires de façon naïve.

Définition B (bonne suite, bon arbre, transcription).

- Une *bonne suite* est une $\mathcal{A}_s$ -expression de la forme $[E_1 ; \dots ; E_m]$, où les E_i sont des $\mathcal{A}_{PA}$ -expressions.
- Un *bon arbre* est une fonction d'un arbre au plus binaire enraciné fini dans $\mathcal{A}_s$ -Expr. 5



Un bon arbre : arbre étiqueté d'un certain type

Les sommets sont ici appelés *clefs* et sont des suites de g et d . À chaque sommet est associé un élément de $\mathcal{A}_s$ -Expr.

- La *transcription* d'un bon arbre est l'expression $< E_{\emptyset} @ : E_g @ g : \dots : E_c @ c >$, où les clefs sont énumérées dans l'ordre lexicographique. 10

Par définition, le code d'un bon arbre est celui de sa transcription.

Lemme B. Sont définissables dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$:

- (i) #Suites, #Arbres (en notation évidente) ;
- (ii) la fonction $n \mapsto \#\nu_n$, l'ensemble $\#\mathcal{L}_{PA}\text{-Term}$; 15
- (iii) $\#\mathcal{L}_{PA}\text{-Form}$, $\#\mathcal{L}_{PA}\text{-Én}$;
- (iv) l'ensemble $\#\mathcal{L}_{PA}\text{-Seq}$ des codes de séquents $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \vdash \chi$.

Démonstration.

- (i) Une bonne suite est une expression commençant par un unique « [», finissant par un unique «] », et dont les sous-expressions maximales délimitées par « [», « ; » et «] » sont dans $\mathcal{A}_{PA}$ -Expr. La transcription d'un bon arbre est une expression vérifiant des propriétés similaires, ainsi que les suivantes : 20
 - deux clefs c_1 et c_2 ne peuvent apparaître que dans l'ordre lexicographique, 25
 - si la clef cd apparaît, alors cg aussi,

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

— si cg apparaît, alors c aussi.

- (ii) Le code $\#\nu_n$ de ν_n est (notant ici les codes $\#\sigma$ en indice par souci de clarté) :

$$\#_s + b \cdot \#_c (b^2 \cdot \#_s + \dots + b^{2n-2} \cdot \#_s + b^{2n-1} \cdot \#_c (b^{2n} \cdot \#_0 + b^{2n+1} \cdot \#_c) + \dots + b^{3n} \cdot \#_c).$$

La fonction correspondante est définissable. Elle entraîne la définissabilité de l'ensemble $\{\#\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$. Raisonnement similaire pour celle de $\{\#x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Une expression t est un terme ss'il existe un bon arbre dont les feuilles soient des ν_n ou des x_n , la racine t , et dont les sommets vérifient les règles attendues.

- (iii) Même raisonnement que pour les termes (noter qu'on n'a pas besoin d'arbres d'arbres). On peut inspecter les arbres pour vérifier si toutes les variables sont quantifiées en amont.

- (iv) Évident. □

Les définitions sont même Σ_1 .

• **Déductions.** La déduction naturelle emploie des substitutions (§ 17.2).

sub **Notation.** Soit $\text{sub} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à un triplet $(\#\varphi, \#x, \#t)$, où φ est une $\mathcal{L}$ -formule et x une variable à laquelle on peut substituer le terme t , associe $\#\varphi[x := t]$.

Les ensembles PA et $\text{Th}(\text{PA})$ sont des parties de $\mathcal{L}_{\text{PA}}\text{-Én}$; les ensembles $\#\text{PA}$ et $\#\text{Th}(\text{PA})$, des parties de $\mathbb{N}$.

Lemme C. Sont définissables dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$:

- (i) sub ;
- (ii) $\#\text{PA}$;
- (iii) $\#\text{Th}(\text{PA})$.

Démonstration.

- (i) On vérifie que la clause « t est substituable à x dans φ » est définissable (au codage près). Puis $\text{sub}(\#\varphi, \#x, \#t) = \#\chi$ ss'il existe deux bons arbres A_1 et A_2 tels que A_1 est un arbre de construction de φ , A_2 un de χ , et que le second se déduit du premier en remplaçant chaque occurrence de x par t .
- (ii) Par définissabilité de $\cap$ et sub , l'ensemble des codes d'instances du

schéma de récurrence est définissable.

- (iii) Soit χ un énoncé. Alors $\text{PA} \vdash \chi$ ss'il existe un bon arbre de séquents, obéissant à des contraintes précises, ayant pour feuilles des égalités ou des règles d'axiomes, et pour racine $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \chi$ avec des φ_i dans PA . $\square$

Les définitions sont même Σ_1 .

Remarques

- Une partie $X \subseteq \mathbb{N}$ est définissable s'il existe une formule $\varphi(x)$ telle que $\varphi[\mathbb{N}] = X$. Cette formule est un foncteur sur les modèles de PA (on néglige ici les flèches) dont X forme les $\mathbb{N}$ -points. On a ainsi produit des formules (toutes de classe Σ_1) $\ulcorner \text{Term} \urcorner$, $\ulcorner \text{Form} \urcorner$, $\ulcorner \text{PA} \urcorner$, $\ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner$ telles que $\ulcorner \text{Term} \urcorner[\mathbb{N}] = \# \text{Term}$, $\ulcorner \text{Form} \urcorner[\mathbb{N}] = \# \text{Form}$, $\ulcorner \text{PA} \urcorner[\mathbb{N}] = \# \text{PA}$, et $\ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner[\mathbb{N}] = \# \text{Th}(\text{PA})$.
- Il faut donc distinguer deux niveaux : la théorie PA, préalable à son codage dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, et le codage de PA dans cette structure. Comme $\mathbb{N}$ est le modèle standard, formé des seuls vrais entiers, $\ulcorner \text{PA} \urcorner[\mathbb{N}]$ correspond exactement à $\# \text{PA}$. En revanche dans un autre modèle $\mathbb{M} \models \text{PA}$, la partie $\ulcorner \text{PA} \urcorner[\mathbb{M}]$ contiendra le code d'instances non standard du schéma de récurrence. Le foncteur $\ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner$ pourrait être fantasque.

Exercices

20.1. (Prérequis : va-et-vient, § 9.) Dans le langage $\mathcal{L} = \{0, s\}$, soit Θ_s la théorie engendrée par les axiomes suivants :

- $(\forall x_1)(\forall x_2)[s(x_1) = s(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$;
- $(\forall x)(s(x) \neq 0)$;
- $(\forall x)[(x \neq 0) \rightarrow (\exists y)(s(y) = x)]$;
- pour chaque entier n , $(\forall x)(s^n(x) \neq x)$ (schéma d'axiomes « pas de cycles »).

- a. Pour quels cardinaux Θ_s est-elle κ -catégorique ?
- b. Montrer que Θ_s est complète et élimine les quantificateurs.
- c. En déduire que $\leq$ n'est pas définissable dans $(\mathbb{N}; s)$.

20.2. (V. aussi ex. 9.6 et 16.3.) Dans le langage $\mathcal{L} = \{0, \leq\}$, soit $\Theta_{\leq}$ la théorie engendrée par les axiomes suivants :

- $\leq$ est un ordre total de plus petit élément 0 ;
- $(\forall x)(\exists y)[(x < y) \wedge (\forall z)(z \leq x \vee z \geq y)]$ (tout élément a un successeur immédiat) ;

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- $(\forall x)\{(x \neq 0) \rightarrow (\exists y)[(y < x) \wedge (\forall z)(z \leq y \vee z \geq x)]\}$ (tout élément non nul a un prédécesseur immédiat).
- a. Pour quels cardinaux $\Theta_{\leq}$ est-elle κ -catégorique ?
- b. Soit $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$, où $d_n(x, y)$ est la relation $(\exists z_1) \cdots (\exists z_n)(x \leq z_1 < \dots < z_n \leq y)$. Montrer que $\Theta_{\leq}$ est complète, et qu'elle élimine les quantificateurs dans $\hat{\mathcal{L}}$. 5
- c. En déduire que $+$ n'est pas définissable dans $(\mathbb{N}; \leq)$.

(*) **20.3 (arithmétique de Presburger).** (Prérequis : ω -saturation, § 16.2.) Dans le langage $\mathcal{L} = \{0, 1, +\}$, soit Θ_+ la théorie engendrée par les axiomes suivants :

- $(\forall x)(x + 1 \neq 0)$;
- $(\forall x)(\forall y)(x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$;
- $(\forall x)(x + 0 = x)$;
- $(\forall x)(\forall y)[x + (y + 1) = (x + y) + 1]$;
- schéma de récurrence : pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{y})$,

$$(\forall \mathbf{y}) [(\varphi(0, \mathbf{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \mathbf{y}) \rightarrow \varphi(x + 1, \mathbf{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \mathbf{y})].$$

Soit $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{\leq\} \cup \{D_k : k \in \mathbb{N}\}$, où $x \leq y$ est la relation binaire $(\exists z)(y = x + z)$, et $D_k(x)$ 15
la relation unaire $(\exists y)(x = \underbrace{y + \dots + y}_k)$.

- a. Montrer que dans tout modèle :
 - $+$ est associative, commutative, et régulière (i.e. $x + z = y + z$ entraîne $x = y$) ;
 - la soustraction (partielle) $x - y = z$ est bien définie ;
 - $x \leq y$ est un ordre total compatible avec l'addition ;
 - pour chaque entier naturel k ,

$$(\forall x) \left[\bigvee_{i=0}^{k-1} D_k(x + i) \right] \wedge \left[\bigwedge_{0 \leq i \neq j \leq k-1} \neg(D_k(x + i) \wedge D_k(x + j)) \right];$$

- pour chaque paire $k|\ell$ d'entiers naturels, $(\forall x)[D_\ell(x) \rightarrow D_k(x)]$.
- b. Montrer que tout modèle est de la forme $\mathbb{M}_I = \mathbb{N} \odot \bigsqcup_I \mathbb{Z}$, où $\{0\} \cup I$ est un semi-groupe abélien divisible ordonné. 20
- c. Montrer que les $\hat{\mathcal{L}}$ -formules de base expriment des inégalités linéaires et des congruences.
- d. Montrer que Θ_+ est complète, et qu'elle élimine les quantificateurs dans le langage $\hat{\mathcal{L}}$. [Va-et-vient entre modèles ω -saturés.] 25
- e. En déduire que $\cdot$ n'est pas définissable dans $(\mathbb{N}; +)$.

20.4. Montrer que PA entraîne les énoncés suivants. a. L'addition est commutative. b. La 30
multiplication est commutative. c. La multiplication est distributive sur l'addition. d. Il existe une infinité de nombres premiers (commencer par l'énoncer dans le langage).

20.5 (ordre sous-jacent à un modèle de PA). Soit $\mathbb{M} \models \text{PA}$ avec $\mathbb{M} \not\cong \mathbb{N}$. Pour alléger les notations, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ désignent les ordres associés, et $\sqcup$ la somme ordonnée.

- a. Montrer $(\mathbb{M}; \leq) \simeq \mathbb{N} \sqcup \bigsqcup_I \mathbb{Z} [\mathbf{Ord}]$, où I est un ordre linéaire dense sans extrémités. 35
[Tout élément est pair ou impair.] En déduire que si $\mathbb{M}$ est dénombrable, alors $(\mathbb{M}; \leq) \simeq \mathbb{N} \sqcup \bigsqcup_{\mathbb{Q}} \mathbb{Z} [\mathbf{Ord}]$.

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

b. Montrer $(\mathbb{M}; \leq) \not\cong \mathbb{N} \sqcup \bigsqcup_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} [\text{Ord}]$.

(*)

20.6 (débordement, « overspill »). Soit $\mathbb{M} \models \text{PA}$ avec $\mathbb{M} \not\cong \mathbb{N}$.

- a. Montrer que l'image de $\mathbb{N}$ n'est pas définissable dans $\mathbb{M}$, même avec paramètres.
 b. Soit $\varphi(x, \mathbf{b})$ une formule telle que pour tout entier intuitif n , on ait $\mathbb{M} \models \varphi(n, \mathbf{b})$. Montrer qu'il existe $\nu \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{M} \models (\forall x < \nu) \varphi(x, \mathbf{b})$.

5

—————→ **20.7 (hiérarchie des formules de PA).**

- a. Soit $\varphi(x, y, \mathbf{z})$ une $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -formule, dont on ne notera pas les paramètres $\mathbf{z}$ par lisibilité. Montrer : $\text{PA} \vdash [(\forall x \leq x_0)(\exists y) \varphi(x, y)] \leftrightarrow [(\exists y_0)(\forall x \leq x_0)(\exists y \leq y_0) \varphi(x, y)]$. [Récurrence sur χ bien choisie.]
 b. En déduire que la classe Π_n (resp. Σ_n) est close sous $\wedge, \vee, (\exists x \leq x_0)$ (resp. $(\forall x \leq x_0)$) et $(\forall x)$ (resp. $(\exists x)$).
 c. En déduire aussi que toute formule Π_n équivaut à une formule $(\forall y_1)(\exists y_2) \dots \varphi_0$, où φ_0 est Δ_0 et $y_1, \dots, y_n$ sont des variables (et non des uplets).

Analogue dans ZF : ex. 23.4.

—————→ **20.8 (Σ_1 -complétude de PA et représentabilité des fonctions Σ_1).** Les deux propositions suivantes sont à retenir. La seconde requiert la première. Les démontrer. [Pour la seconde, considérer $(\exists z)[\varphi_0(x, y, z) \wedge (\forall y')(\forall z')(\varphi_0(x, y', z') \rightarrow (y' = y \vee y + z < y' + z'))]$.]

Proposition A (Σ_1 -complétude de PA). Soit φ un $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -énoncé de classe Σ_1 . Alors : $\mathbb{N} \models \varphi$ ssi $\text{PA} \vdash \varphi$.

Proposition B (représentabilité des fonctions numériques Σ_1). Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction éventuellement partielle. On suppose qu'il existe une formule φ de classe Σ_1 telle que $f = \varphi[\mathbb{N}]$. Alors il existe une formule φ' telle que :

- pour tous entiers a, b , on a : $b = f(a)$ ssi $\text{PA} \vdash \varphi'[\nu_a, \nu_b]$;
- $\text{PA} \vdash (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\varphi'[x, y_1] \wedge \varphi'[x, y_2] \rightarrow y_1 = y_2)$.

20.9 (ω -logique). L' ω -logique conserve les formules de la logique élémentaire, mais altère les notions de modèle et de déduction. Soient $\mathcal{L}$ un langage relationnel et Θ une $\mathcal{L}$ -théorie. On note $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L} \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ pour de nouvelles constantes.

- Un ω -modèle de Θ est une $\mathcal{L}_\omega$ -structure $\mathbb{A}$ de domaine $\mathbb{N}$, telle que pour tout entier l'on ait $c_n[\mathbb{A}] = n$, et $\mathbb{A} \models \Theta$.
- La règle ω permet de généraliser à partir d'une infinité de prémisses :

30

$$\frac{\Phi \vdash \chi[x := c_0] \quad \dots \quad \Phi \vdash \chi[x := c_n] \quad \dots}{\Phi \vdash \forall x \chi} \omega$$

Les *déductions* de $\vdash_\omega$ forment le plus petit ensemble d'arbres clos sous les règles élémentaires et la règle ω . Une déduction peut être infinie, mais reste un « arbre ensembliste » (si $a \in \mathbb{A}$, alors $\mathbb{A}_{\sqsubset a}$ est bien ordonné) enraciné de hauteur $< \omega_1$ et branchement $\leq \omega$.

- a. Montrer que Θ est cohérente dans $\vdash_\omega$ ssi elle a un ω -modèle. [Omettre un type, § 15.2.]
 b. Soit φ un $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -énoncé élémentaire. Montrer : $\text{PA} \vdash_\omega \varphi$ ou $\text{PA} \vdash_\omega \neg \varphi$.
 c. En déduire que pour les énoncés élémentaires, $\text{PA} \models \varphi$ ssi $\text{PA} \vdash_\omega \varphi$.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

Notes conclusives

Définissabilité dans les entiers : [Bès01].
Modèles de l'arithmétique de Peano : [Kaye].
Même sujet, beaucoup plus technique :
[Kossak-Schmerl].

• Repères historiques

*In arithmeticae demonstrationibus usus
sum libro* : H. GRASSMANN, Lehrbuch
der Arithmetik, Berlin 1861.

*Utilius quoque mihi fuit recens scrip-
tum* : R. DEDEKIND, Was sind und was
sollen die Zahlen, Braunschweig, 1888,
in quo quaestiones, quae ad numerorum
fundamenta pertinent, acute examinan-
tur. [Peano2, Praefatio]

Arithmétique du deuxième ordre de Peano.

L'arithmétique « de Peano » doit tout à De-
dekind ; Peirce est parfois mis en avant mais
c'est moins justifiable. • Sans explicitement
parler d'axiomes, [Dedekind2] décrit les en-
tiers via la fonction successeur en § 71, sous
une forme ensembliste ; l'absolue catégoricité
est démontrée au § 132. • Document histo-
rique important sur la première réception et
la gestation de [Dedekind2] : l'échange avec
Keferstein, reproduit et traduit dans [Sin74].

• Peano employait encore la flexion en écri-
vant [Peano2] (trad. anglaise dans [Heije-
noort]). Ce texte est la première tentative ex-
plicitement d'*axiomatiser* la structure des entiers. 30
Il reconnaît clairement l'influence de Dede-
kind. Outre l'évolution du formalisme de-
puis [Peano2], on peut mesurer l'ampleur de
l'élucidation conceptuelle encore à conduire.
Le succès des travaux logiques de Peano n'a
rendu le sujet ni attrayant ni limpide : in-
troduire des formalismes inutiles, c'est s'éloi-
gner de l'intuition mathématique. • Peirce
était allé moins loin : [Pei81] établit par ré-
currence les propriétés de base de l'addition
et la multiplication entières (associativité, 40
commutativité, distributivité), mais ne dé-
gage pas d'axiomatique à proprement parler.
Ce texte est donc une élucidation méthodo-
logique plus que conceptuelle. 45

Arithmétique élémentaire de Peano. Le pas-
sage en logique élémentaire est mal daté.
Weyl [Wey10] avait déjà remplacé un
axiome d'ordre supérieur par un schéma
d'axiomes, mais pour la théorie de Zer-
melo (v. § 14, notes conclusives et § 23,
notes conclusives), pas pour l'arithmétique.
L'axiome 17 de [Hil28, p. 68] (« *Prinzip der*

[Bès01] : Alexis BÈS. « A survey of arithmetical definability ». In : suppl. A tribute to Maurice Boffa. 2001, p. 1-54

[Kaye] : Richard KAYE. *Models of Peano arithmetic*. T. 15. Oxford Logic Guides. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991, p. x+292

[Kossak-Schmerl] : Roman KOSSAK et James SCHMERL. *The structure of models of Peano arithmetic*. T. 50. Oxford Logic Guides. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, p. xiv+311

[Peano2] : Giuseppe PEANO. *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Augusta Taurinorum (Turin) : Fratres Bocca, 1889. xvi+20

[Dedekind2] : Richard DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig : Vieweg und Sohn, 1888. xv+58

[Sin74] : Mohammed-Allal SINACEUR. « L'infini et les nombres. Commentaires de R. Dedekind à « Zahlen ». La correspondance avec Keferstein ». In : *Rev. Hist. Sci.* 27 (1974), p. 251-278

[Heijenoort] : Jean van HEIJENOORT. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Pei81] : Charles PEIRCE. « On the Logic of Number ». In : *Amer. J. Math.* 4.1-4 (1881), p. 85-95

[Wey10] : Hermann WEYL. « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ». In : *Math. naturw. Bl.* 7 (1910), p. 93-95, 109-113

[Hil28] : David HILBERT. « Die Grundlagen der Mathematik ». In : *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 6.1 (1928), p. 65-85

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

vollständigen Induktion ») entretient une certaine ambiguïté : bien que Hilbert ait défini ses expressions comme essentiellement les formules élémentaires, l'énoncé du principe laisse songer à une quantification sur les formules. Dans son doctorat, Herbrand observe que l'« axiome d'induction totale » est en fait une infinité d'axiomes [Her30, p. 81]; l'idée peut venir de Göttingen. Skolem semble avoir schématisé la récurrence plus tardivement [Sko33b, p. 75].

Arithmétique de Presburger (ex. 20.3).

CHANG — *I guess one of the saddest things in logic is that Presburger never got his degree.*

NERODE — *That Presburger never got his degree?*

MOSTOWSKI — *Yes, yes. Tarski refused to give him a degree for his paper.*

NERODE — *Which is now one of the most cited.*

KLEENE — *Why?*

MOSTOWSKI — *Because he considered it too simple.* [Cro75, pp. 22–23]

La théorie de $(\mathbb{N}; +)$ fut étudiée et bien comprise par Mojżesz Presburger [Pre30], alors étudiant de Tarski. On lit avec intérêt [Sta], notamment pour la page d'histoire. L'auteur oublie de mentionner la mort, vers 1943, vraisemblablement dans un camp. Éléments biographiques plus détaillés dans [Zyg91]. (Il existe une autre traduction de [Pre30], par D. Jacquette, bien moins recommandable.)

Modèles de PA. • L'écriture de Gödel étant peu sémantique, la première recherche délimitée de modèle non standard peut être dans les travaux de Skolem [Sko33b]–[Sko34] par ultrapuissances définissables. Celles-ci fournissent des modèles élémentairement équivalents à $\mathbb{N}$ (et donc ne démontrent pas l'incomplétude de PA); v. compléments § N. • Ex. 20.5.a : [Hen50, dernière phrase]; 20.5.b vient du plus précis [Pot69].

Codage de la syntaxe. Leibniz est un notable précurseur : son *calculus ratiocinator* requérant une *characteristica universalis*, un fragment non publié introduit l'idée de codage numérique des énoncés logiques [Leibniz].

[Her30] : Jacques HERBRAND. « Recherches sur la théorie de la démonstration ». Thèse de doct. Faculté des Sciences de Paris, 1930, p. 128

[Sko33b] : Thoralf SKOLEM. « Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems ». German. In : *Norsk Mat. For. Skrift. Series II* 1–12 (1933), p. 73–82

[Cro75] : John CROSSLEY. « Reminiscences of logicians ». In : *Algebra and logic (Fourteenth Summer Res. Inst., Austral. Math. Soc., Monash Univ., Clayton, 1974)*. 1975, 1–62. Lecture Notes in Math., Vol. 450

[Pre30] : Mojżesz PRESBURGER. « Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt ». In : *Comptes-rendus du premier Congrès des Mathématiciens des Pays slaves/Sprawozdanie z I Kongresu matematyków krajów słowiańskich, Varsovie 1929*. 1930, p. 92–101

[Sta] : Ryan STANSIFER. *Presburger's article on integer arithmetic : remarks and translation*. Rapp. tech. TR84-639. Cornell University, Computer Science Department

[Zyg91] : Jan ZYGMUNT. « Mojżesz Presburger : life and work ». In : *Hist. Philos. Logic* 12.2 (1991), p. 211–223

[Sko34] : Thoralf SKOLEM. « Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlichen Zahlenvariablen ». In : *Fundam. Math.* 23 (1934), p. 150–161

[Hen50] : Leon HENKIN. « Completeness in the theory of types ». In : *J. Symbolic Logic* 15 (1950), p. 81–91

[Pot69] : Klaus POTTHOFF. « Über Nichtstandardmodelle der Arithmetik und der rationalen Zahlen ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 15 (1969), p. 223–236

[Leibniz] : « Regulæ ex quibus de bonitate consequentiarum formisque et modis syllogismorum categoricorum judicari potest, per numeros ». In : *Sämtliche Schriften und Briefe*. Sous

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

• Le premier codage a été employé par Gödel dans ses travaux [Göd31] sur l'incomplétude (§ 21, notes conclusives). Il diffère sensiblement de celui de § 20.3 ; on ne saurait dénombrer les codages admissibles. • Sur le complot (mis au jour par Gödel) pour faire disparaître l'œuvre de Leibniz : [Rescher, chapitre 13], spécifiquement pp. 164–168.

ω -logique (ex. 20.9). • La règle ω est antérieure aux travaux de Gödel ; Hilbert et Tarski y avaient songé. Bon historique dans [Sun83, Historical introduction]. • Les aspects sémantiques sont plus tardifs : la complétude de l' ω -logique (question b) est indépendamment de Henkin ([Hen54] puis [Hen57]) et Orey [Ore56].

tion du Hilfsatz 1, [Göd31, p. 192]), sans être nommée. La notation β pourrait provenir du cours donné par Gödel à l'IAS en 1934, reproduit dans [Davis, § 8]. D'après Girard [Girard2, § 2.C.3] l'idée du codage serait venue à Gödel en suivant des cours de théorie des nombres (sans doute de Furtwängler). Rien ne vient étayer cette affirmation. • Les chevrons carrés $\ulcorner \cdot \urcorner$ ont été popularisés par [Quine, § 6], où ils ont un sens différent. • Les ω -modèles de l'ex. 20.9 sont mal nommés ; ils ont en théorie des ensembles des homonymes sans rapports (modèles $\mathbb{V} \models \text{ZF}$ tel que $\omega[\mathbb{V}] = \mathbb{N}$; v. compléments § U.3).

• **Terminologie, notations.** • Il faudrait dire « arithmétique élémentaire », ou « arithmétique de Dedekind du premier ordre », et la noter $\text{Ar}^{\text{élé}}_{\text{m}}$. • La fonction notée β dans [Göd31] (trad. anglaise dans [Heijenoort]) n'est clairement celle de § 20.2 ; cette dernière est pourtant présente (voir démonstra-

• **Couplage de Cantor.** • Cantor savait l'équipotence $\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$ [Ens] dès [Can74] ; son couplage explicite (noté α en § 20.2) est proposé dans [Can78, § 8]. • Ce choix se distingue des autres par une complexité minimale : $\alpha(x, y)$ et $\alpha(y, x)$ sont les seuls

la dir. de Leibniz-Forschungsstelle der UNIV. MÜNSTER. T. VI 4. Akademie Verlag, 1999, p. 242-251

[Göd31] : Kurt GÖDEL. « Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I ». In : *Monatsh. Math. Phys.* 38.1 (1931), p. 173-198

[Rescher] : Nicholas RESCHER. *Philosophical Episodes*.ontos verlag. Berlin, Boston : De Gruyter, 2011, p. viii+214

[Sun83] : Göran SUNDHOLM. « Proof theory : a survey of the omega-rule ». Thèse de doct. University of Oxford, 1983

[Hen54] : Leon HENKIN. « A generalization of the concept of ω -consistency ». In : *J. Symbolic Logic* 19 (1954), p. 183-196

[Hen57] : Leon HENKIN. « A generalization of the concept of ω -completeness ». In : *J. Symbolic Logic* 22 (1957), p. 1-14

[Ore56] : Steven OREY. « On ω -consistency and related properties ». In : *J. Symbolic Logic* 21 (1956), p. 246-252

[Davis] : Kurt GÖDEL. « On undecidable propositions of formal mathematical systems ». In : *The undecidable*. Sous la dir. de Martin DAVIS. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions, Corrected reprint of the 1965 original [Raven Press, Hewlett, NY ; MR0189996]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, p. ii+413

[Girard2] : Jean-Yves GIRARD. *Le Point aveugle I*. Paris : Hermann, 2006. 280 p.

[Quine] : Willard QUINE. *Mathematical Logic*. New York : W. W. Norton & Co., 1940, p. xiii+348

[Can74] : Georg CANTOR. « Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen ». In : *J. Reine Angew. Math.* 77 (1874), p. 258-262

[Can78] : Georg CANTOR. « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre ». In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878), p. 242-258

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

polynômes de degré ≤ 2 convenant [FP23]; Pólya conjectura que l'hypothèse sur le degré est superflue et le problème est encore ouvert. • La théorie de $(\mathbb{N}; \alpha)$ est inoffensive [CGR00]; on en a même une axiomatisation explicite [Bai01], ainsi que pour des classes naturelles de couplages. Mais d'autres choix peuvent être explosifs; [Bai01] donne un couplage α' tel que $+$ et $\cdot$ soient définissables dans $(\mathbb{N}; \alpha')$, ce qui en rend la théorie impraticable. • Couplage en théorie des ensembles : pour la « paire de Kuratowski », v. § 23, notes conclusives, *Repères historiques, Misc.*

• Théories du calcul; thèse de Church.

• L'étude des parties Σ_1 de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, et par extension de la hiérarchie Π_n/Σ_n , est appelée *récurtivité*, d'après l'un des modèles de calculabilité de l'époque. • Elle doit beaucoup à Gödel mais les spécialistes débattent encore de l'apport de Herbrand. Herbrand et Gödel auraient dû correspondre : Herbrand écrivit à Gödel sur l'incomplétude et la récurtivité; la réponse de Gödel n'atteignit sans doute pas Herbrand [Sie05]. Pour leurs extensions des travaux de Gödel, Kleene et Rosser adoptèrent la récurtivité, qui passe erronément pour indispensable à l'étude des phénomènes d'incomplétude. • À la même époque, Turing et Church proposaient chacun leur modèle

de calcul : machines de Turing [Tur36], resp. λ -calcul [Chu32]. L'équivalence expressive des trois modèles, établie par Turing (Church $\leftrightarrow$ Turing) [Tur36, Appendix] et Church, Kleene, Rosser (Church $\leftrightarrow$ Gödel-Herbrand) [Chu36], suggère que ceux-ci formalisent la « bonne » notion. Cette assertion n'est pas un énoncé mathématique mais une thèse épistémologique, dite *thèse de Church*.

The proposal to identify these notions with the intuitive notion of effective calculability is first made in the present paper (but see the first footnote to § 7 below). [...] The fact, however, that two such widely different and (in the opinion of the author) equally natural definitions of effective calculability turn out to be equivalent adds to the strength of the reasons adduced below for believing that they constitute as general a characterization of this notion as is consistent with the usual intuitive understanding of it. [Chu36, note 3]

• Référence en calculabilité : [Monin-Patey]. Vivante page d'histoire sur l'émergence de la récurtivité et la thèse de Church : début de [Cro75]. • La théorie du calcul est « orientée fonction » ; elle ressortit plus à l'informatique qu'aux mathématiques, et l'on laisse le sujet.

[FP23] : Rudolf FUETER et George PÓLYA. « Rationale Abzählung der Gitterpunkte ». In : *Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich* 68 (1923), p. 380-386

[CGR00] : Patrick CÉGIELSKI, Serge GRIGORIEFF et Denis RICHARD. « La théorie élémentaire de la fonction de couplage de Cantor des entiers naturels est décidable ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 331.2 (2000), p. 107-110

[Bai01] : Yerzhan BAISALOV. « Fragments de l'arithmétique et fonctions de couplage ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 333.9 (2001), p. 817-820

[Sie05] : Wilfried SIEG. « Only two letters : the correspondence between Herbrand and Gödel ». In : *Bull. Symbolic Logic* 11.2 (2005), p. 172-184

[Tur36] : Alan TURING. « On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem ». In : *Proc. London Math. Soc. (2)* 42.3 (1936), p. 230-265

[Chu32] : Alonzo CHURCH. « A set of postulates for the foundation of logic ». In : *Ann. of Math. (2)* 33.2 (1932), p. 346-366

[Chu36] : Alonzo CHURCH. « An unsolvable problem of elementary number theory ». In : *Amer. J. Math.* 58.2 (1936), p. 345-363

[Chu36] : Alonzo CHURCH. « An unsolvable problem of elementary number theory ». In : *Amer. J. Math.* 58.2 (1936), p. 345-363

[Monin-Patey] : Benoît MONIN et Ludovic PATEY. *Calculabilité*. T. 107. Tableau Noir. Paris : Calvage et Mounet, 2022. xxii + 828

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

• Arithmétique de Presburger

Axiomatisation alternative. L'axiomatisation d'origine [Pre30] n'a pas de schéma de récurrence mais manie directement les D_k . V. p. ex. [Cég81, § A].

De Presburger à Peano. Le caractère *resplendissant* (équivalent, pour une structure dénombrable, à sa *saturation récursive*, i.e. à la réalisation des types effectivement axiomatisables) est définie à l'ex. 16.11.

Théorème ([LN78]). Soit $\mathbb{M} \neq \mathbb{N}$ un modèle dénombrable de Θ_+ . Alors : $\mathbb{M}$ peut être muni d'une multiplication telle que $\mathbb{M} \models \text{PA}$ ssi $\mathbb{M}$ est resplendissant.

Définissabilité dans Θ_+ . Les parties définissables ont tant de régularités qu'on peut les caractériser *définissablement*.

Théorème ([Muc03, Theorem 2]). Soit n un entier. Il existe une formule $\varphi_n(R)$ du langage $\{0, 1, +, R\}$, où R est un symbole de relation n -aire, telle que pour chaque partie $A \subseteq \mathbb{N}^n$, on ait : $\mathbb{N} \models \varphi_n(A)$ ssi A est définissable dans $\{0, 1, +\}$.

Θ_+ **et o -minimalité.** (V. § L, notes conclusives.) • Une analogie forte est l'existence d'une « décomposition cellulaire » dans Θ_+ [Clu03]. Ceci suggère qu'il faut considérer $\leq$ dans le langage de l'arithmétique de Presburger. • Il n'y a pas de structure intermédiaire entre $(\mathbb{Z}; +)$ et $(\mathbb{Z}; +, \leq)$ [Con18].

• Pour les liens entre PA et géométrie réelle, v. *Parties entières de corps réels clos* infra).

Questions d'effectivité. Θ_+ ayant des liens avec la théorie des automates en informatique, les questions d'effectivité ont toujours connu un certain intérêt ; p. ex. [FR74].

• **Arithmétique de Skolem.** L'expression désigne l'étude axiomatique de $(\mathbb{N}; \cdot)$. • Le nom rend hommage à [Sko31, § 3], premier article sur la multiplication des entiers (en fait des rationnels ; Skolem considère même les corps de nombres). Une impressionnante procédure syntaxique décrite par des exemples convainc de la décidabilité de $\text{Th}(\mathbb{N}; \cdot)$, mais [Sko31] ne contient pas d'axiomatisation. • L'isomorphisme $(\mathbb{N} \setminus \{0\}; \cdot) \simeq \bigoplus_{\omega} (\mathbb{N}; +)$ permet à Mostowski d'appliquer sa méthode des « produits de théories ». Son article [Mos52] est le précurseur direct du théorème de Feferman-Vaught (compléments § G). Parmi de nombreux résultats, Mostowski (qui cite Skolem) retrouve la décidabilité de $\text{Th}(\mathbb{N}; \cdot)$, toujours sans proposer d'axiomatisation. • On ignore ainsi la première occurrence de l'expression « arithmétique de Skolem » et celle de son axiomatisation. Cette dernière est trop lourde pour être reproduite ici. • [Cég81] est très détaillé. [Bès01, § 3] simplifie l'argument de Mostowski grâce au théorème de

[Cég81] : Patrick CÉGIELSKI. « Théorie élémentaire de la multiplication des entiers naturels ». In : *Model theory and arithmetic (Paris, 1979–1980)*. T. 890. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1981, p. 44–89

[LN78] : Leonard LIPSHITZ et Mark NADEL. « The additive structure of models of arithmetic ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 68.3 (1978), p. 331–336

[Muc03] : Andreï MUCHNIK. « The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications ». In : *Theoret. Comput. Sci.* 290.3 (2003), p. 1433–1444

[Clu03] : Raf CLUCKERS. « Presburger sets and p -minimal fields ». In : *J. Symbolic Logic* 68.1 (2003), p. 153–162

[Con18] : Gabriel CONANT. « There are no intermediate structures between the group of integers and Presburger arithmetic ». In : *J. Symb. Log.* 83.1 (2018), p. 187–207

[FR74] : Michael FISCHER et Michael RABIN. « Super-exponential complexity of Presburger arithmetic ». In : *Complexity of computation (Proc. SIAM-AMS Sympos., New York, 1973)*. T. VII. 1974, p. 27–41

[Sko31] : Thoralf SKOLEM. « Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik ». German. In : 7 (1931), p. 1–28

[Mos52] : Andrzej MOSTOWSKI. « On direct products of theories ». In : *J. Symbolic Logic* 17 (1952), p. 1–31

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

Feferman-Vaught. Autres preuves : complétude [Nad81] ; décidabilité [Kam25a].

• **Complexité des modèles non standard ; th. de Tennenbaum.** On fixe l'ensemble de base $\mathbb{N}$. Comme PA n'est pas $\aleph_0$ -catégorique, outre la structure standard $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, il existe d'autres structures sur $\mathbb{N}$ qui en font un modèle de PA. Mais ces autres structures sont-elles compréhensibles depuis la structure standard ? • Il existe sur $\mathbb{N}$ des structures de modèles non standard qui sont définissables dans le modèle standard (par « complétude formalisée ») [Sco61]. Mais ces structures sont de complexité non triviale.

Théorème ([Ten59, Corollary 2]). Le seul modèle *récuratif* de PA, i.e. où les opérations soient Σ_1 vues depuis le modèle standard, est le modèle standard.

Ce théorème améliore des travaux pré-alables de Mostowski [Mos57b]. [Kay11, § 1] donne quelques éléments d'histoire. La première preuve publiée peut être [How72a].

• On peut généraliser avec des notions plus permissives d'effectivité, avec quotients : [GH17]. • On peut aussi généraliser à des

fragments de PA où la récurrence est restreinte à des formules de complexité très basse (pas de $\forall$, et tous les $\exists$ sont bornés) [Wil85] : le seul modèle récuratif reste le modèle standard. • En revanche si la récurrence est restreinte aux formules sans quantificateurs IQF, il existe des modèles non standard récuratifs (v. *Fragments de PA* infra).

• **Analyse de Scott pour PA.** (Prérequis : § sÉ2.) L'ex. 15.3 formait de nombreuses extensions élémentaires dénombrables de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ deux à deux non isomorphes. Ce sont notamment des modèles dénombrables de PA deux à deux non ∞ -isomorphes. • Pour tout $\alpha < \omega_1$, il existe des modèles dénombrables de PA non isomorphes mais α -isomorphes [HV22, Theorem 3]. En particulier les rangs de Scott (§ sÉ2, notes conclusives, *Analyse de Scott*) des modèles dénombrables de PA sont non bornés dans ω_1 . • L'étude fine du « spectre de Scott » des modèles dénombrables de PA est menée dans

[Nad81] : Mark NADEL. « The completeness of Peano multiplication ». In : *Israel J. Math.* 39.3 (1981), p. 225-233

[Kam25a] : Łukasz KAMIŃSKI. « Definable sets in Skolem arithmetic ». arXiv 2510.02062. 2025

[Sco61] : Dana SCOTT. « On constructing models for arithmetic ». In : *Infinitistic Methods (Proc. Sympos. Foundations of Math., Warsaw, 1959)*. Pergamon, Oxford ; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1961, p. 235-255

[Ten59] : Stanley TENNENBAUM. « Notice 556-42. Non-Archimedean models for arithmetic ». In : *Amer. Math. Soc. Notices* 6.3 (1959), p. 270

[Mos57b] : Andrzej MOSTOWSKI. « On recursive models of formalised arithmetic ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.* 5 (1957), p. 705-710, LXII

[Kay11] : Richard KAYE. « Tennenbaum's theorem for models of arithmetic ». In : *Set theory, arithmetic, and foundations of mathematics : theorems, philosophies*. T. 36. Lect. Notes Log. Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2011, p. 66-79

[How72a] : Paul HOWARD. « A proof of a theorem of Tennenbaum ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 18 (1972), p. 111-112

[GH17] : MichałTomasz GODZISZEWSKI et Joel David HAMKINS. « Computable quotient presentations of models of arithmetic and set theory ». In : *Logic, language, information, and computation*. T. 10388. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 2017, p. 140-152

[Wil85] : George WILMERS. « Bounded existential induction ». In : *J. Symbolic Logic* 50.1 (1985), p. 72-90

[HV22] : Tapani HYTTINEN et Jouko VÄÄNÄNEN. « On highly equivalent non-isomorphic countable models of arithmetic and set theory ». 2022

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

[MR24].

- **Non-axiomatisabilité finie de PA.** Avec son schéma de récurrence, l'axiomatisation donnée est infinie. En fait PA n'est pas finiment axiomatisable [Ryl52].

- **Fragments de PA.** On peut modérer le schéma de récurrence en le restreignant à des formules de complexité donnée.

Arithmétique sans récurrence. La suppression du schéma de récurrence compromet des propriétés souhaitables. Pour les conserver, soit PA^- l'axiomatisation « minimale » suivante :

- l'addition est associative et commutative, de neutre 0 ;
- la multiplication est associative et commutative, de neutre 1 mais 0 est absorbant ;
- l'une est distributive sur l'autre ;
- $(\exists z)(y = x + z)$ définit un ordre total et compatible aux opérations, dont 0 est le plus petit élément et 1 le second plus petit élément.

Cette théorie décrit exactement les structures $(\mathbb{A}_{\geq 0} ; 0, 1, +, \cdot)$, où $(\mathbb{A} ; +, \cdot)$ est un anneau ordonné discret.

Récurrence sans quantificateurs IQF. Soit IQF l'axiomatisation formée de PA^- et des instances de la récurrence pour les seules formules sans quantificateurs (en anglais, « *open induction* »).

- IQF a des modèles non standard définissables dans le modèle standard, et même rékursifs [She64]. Ceci contraste avec le théorème de Tennenbaum (v. supra).
- IQF ne démontre pas l'irrationalité de $\sqrt{2}$, i.e. l'énoncé $(\forall x)(\forall y)(x \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 2y^2)$ [She64].
- Plus généralement, les nombres premiers sont très peu contraints par IQF [MM89].

- **Parties entières de corps réels clos.**

(Prérequis : compléments § L.) Une *partie entière* d'un corps réel clos $\mathbb{K}$ est donnée par :

- un sous-anneau $A \leq \mathbb{K}$ sur lequel l'ordre est dense, et dont 1 est le plus petit élément > 0 ,
- une fonction $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{K} \rightarrow A$ vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Tout corps réel clos possède une partie entière [MR93]. • Dans la suite, assimiler un anneau ordonné à sa partie positive (typiquement, $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{N}$) allège un peu la terminologie. • Les modèles de IQF (v. *Fragments de PA* supra) sont exactement les parties entières de corps réels clos [She64]. • On peut caractériser parmi les corps réels clos *dénombrables* ceux admettant une partie entière qui est modèle non standard de PA [DKS10]. Sans l'hypothèse de dénombrabilité, la question est délicate [MSS15]. • On peut aussi chercher quels modèles de l'arithmétique (ou variante) sont partie entière ad hoc d'un corps réel clos avec une *exponentielle* type

[MR24] : Antonio MONTALBÁN et Dino ROSSEGGER. « The structural complexity of models of arithmetic ». In : *J. Symb. Log.* 89.4 (2024), p. 1703-1719

[Ryl52] : Czesław RYLL-NARDZEWSKI. « The role of the axiom of induction in elementary arithmetic ». In : *Fund. Math.* 39 (1952), 239-263 (1953)

[She64] : John SHEPHERDSON. « A non-standard model for a free variable fragment of number theory ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 12 (1964), p. 79-86

[MM89] : Angus MACINTYRE et David MARKER. « Primes and their residue rings in models of open induction ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 43.1 (1989), p. 57-77

[MR93] : Marie-Hélène MOURGUES et Jean-Pierre RESSAYRE. « Every real closed field has an integer part ». In : *J. Symbolic Logic* 58.2 (1993), p. 641-647

[DKS10] : Paola D'AQUINO, Julia KNIGHT et Sergei STARCHENKO. « Real closed fields and models of Peano arithmetic ». In : *J. Symbolic Logic* 75.1 (2010), p. 1-11

[MSS15] : David MARKER, James H. SCHMERL et Charles STEINHORN. « Uncountable real closed fields with PA integer parts ». In : *J. Symb. Log.* 80.2 (2015), p. 490-502

[DAq+12] : Paola D'AQUINO et al. « Real closed exponential fields ». In : *Fund. Math.* 219.2 (2012), p. 163-190

20. La structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

2^x [DAq+12]. Tout modèle de $\text{Th}(\mathbb{N}; +, \cdot)$ l'est [CK21]. Mais comme $\text{PA} \subsetneq \text{Th}(\mathbb{N}; +, \cdot)$ par incomplétude (§ 21), cela ne règle pas la question.

• **Dixième problème de Hilbert.** Il lie logique et théorie des nombres.

Énoncé du problème. • Une *équation diophantienne* est un polynôme à plusieurs variables à coefficients entiers. Hilbert [Hil00a, Problem 10] demanda s'il existait un algorithme général qui, pour chaque équation diophantienne, déterminerait si elle avait des solutions entières ou non (grâce au théorème des 4 carrés, on peut comprendre « entier » dans le sens naturel ou relatif, sans changer la nature du problème de Hilbert). • La réponse est négative. Elle a requis l'émergence de la théorie du calcul, puis son emploi en théorie des nombres.

Parties diophantiennes. Une partie $X \subseteq \mathbb{N}^m$ est *diophantienne* s'il existe un polynôme $P[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ à coefficients entiers tel que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^m$ on ait : $\mathbf{x} \in X \leftrightarrow (\exists \mathbf{y} \in \mathbb{N}^n)(P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0)$. • Trivialement, « diophantien » implique « Σ_1 ». La réciproque est tout sauf évidente, et permet de résoudre

négativement le 10^e problème de Hilbert.

Théorème (« MRDP »). Les ensembles diophantiens sont exactement les parties Σ_1 de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$.

Le nom vient des contributeurs principaux : [DPR61] (unification postérieure d'efforts commencés indépendamment), puis [Mat70]. • Le problème de Hilbert devient alors une instance des phénomènes d'incomplétude en leur forme « informatique » de phénomènes d'indécidabilité.

Références. • [Poo08] offre une excellente première introduction. • Deux exposés brefs donnent une vue complète des aspects arithmétiques : [Dav73] et [JM91]; le second (qui emploie les machines de Turing comme modèle de calcul) est étendu en la monographie [Matiiassevitch]. • Le plus récent [Murty-Fodden] est très pédagogique. • On mentionne enfin l'aboutissement d'une solution négative « de deuxième génération » [KP25] (en cours de vérification), passant par les courbes elliptiques et traitant des extensions du problème à d'autres anneaux. Le sujet est riche mais appartient bien à la théorie des nombres.

[CK21] : Merlin CARL et Lothar KRAPP. « Models of true arithmetic are integer parts of models of real exponentiation ». In : *J. Log. Anal.* 13 (2021), Paper No. 3, 21

[Hil00a] : David HILBERT. « Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900 ». In : *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1900), p. 253-297

[DPR61] : Martin DAVIS, Hilary PUTNAM et Julia ROBINSON. « The decision problem for exponential diophantine equations ». In : *Ann. of Math. (2)* 74 (1961), p. 425-436

[Mat70] : Yuri MATIJASEVIČ. « The Diophantineness of enumerable sets ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 191 (1970), p. 279-282

[Poo08] : Bjorn POONEN. « Undecidability in number theory ». In : *Notices Amer. Math. Soc.* 55.3 (2008), p. 344-350

[Dav73] : Martin DAVIS. « Hilbert's tenth problem is unsolvable ». In : *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), p. 233-269

[JM91] : James JONES et Yuri MATIJASEVIČ. « Proof of recursive unsolvability of Hilbert's tenth problem ». In : *Amer. Math. Monthly* 98.8 (1991), p. 689-709

[Matiiassevitch] : Yuri MATIJASEVICH. *Hilbert's tenth problem*. Foundations of Computing Series. Translated from the 1993 Russian original by the author, With a foreword by Martin Davis. MIT Press, Cambridge, MA, 1993, p. xxiv+264

[Murty-Fodden] : M. Ram MURTY et Brandon FODDEN. *Hilbert's tenth problem*. T. 88. Student Mathematical Library. An introduction to logic, number theory, and computability. American Mathematical Society, Providence, RI, 2019, p. xiii+237

[KP25] : Peter KOYMANS et Carlo PAGANO. « Hilbert's tenth problem via additive combinatorics ». arXiv 2412.01768. 2025

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

• **Σ_1 -complétude, Σ_1 -représentabilité (ex. 20.8).** • Σ_1 -complétude : attention, le nom suggère seulement $\text{Th}_{\Sigma_1}(\text{PA}) = \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{N})$ (en notation évidente). PA ne statue pas sur les énoncés Σ_1 . En revanche, pour tout énoncé Δ_0 , on a bien $(\text{PA} \vdash \varphi \text{ ou } \text{PA} \vdash \neg\varphi)$; cette propriété est également nommée « Δ_0 -complétude », dans un sens différent de la Σ_1 -complétude (la disjonction est fautive en Σ_1 : d'où les phénomènes d'incomplétude). • Représentabilité : c'est une forme interne de définissabilité. La relation φ' est *prouvablement fonctionnelle*. La conclusion du lemme est que *toute fonction numérique Σ_1 forme les $\mathbb{N}$ -points d'un foncteur en fonctions* (mais pas nécessairement d'un foncteur Σ_1 en fonctions). • Il existe des théories $\Theta \subseteq \text{Th}(\mathbb{N})$ bien plus faibles que PA permettant cette représentation. Elles sont une cible de choix pour les phénomènes d'incomplétude de § 21.

• Autour de la règle ω (ex. 20.9)

Complétude au premier ordre. La complétude de PA dans $\vdash_\omega$ est de [Sho59], qui montre bien plus : il suffit d'appliquer la règle ω en contexte récursif (i.e. si les $\Sigma \vdash \varphi[\nu_n]$ sont attestées par une famille récursive de codes) pour obtenir $\vdash_\omega$ -complétude, avec borne ordinaire sur la complexité des réductions.

Au deuxième ordre. En revanche la logique « du deuxième ordre » reste incomplète même avec $\vdash_\omega$ immodérée. D'ailleurs les propriétés du deuxième ordre démontrables dans $\vdash_\omega$ immodérée le sont déjà dans $\vdash_\omega$

récursive [Tak70] (indépendamment [Lop67] en logique faible du deuxième ordre).

Une conjecture de Kreisel en lien avec la règle ω .

Conjecture. Dans PA, s'il existe un entier k tel que pour tout n , $\varphi(n)$ soit prouvable en longueur $\leq k$, alors $(\forall x)\varphi$ est prouvable.

Cette conjecture dépend hautement de la façon dont PA est formulée (langage, axiomes). Consulter [Cav08].

• **Le programme de Hilbert (1).** On conseille [Zac07]. [Smo88] contient des éléments, mais porte aussi beaucoup sur Brouwer et le *Grundlagenstreit* (v. compléments § P, notes conclusives, *Repères historiques*).

Durch diese Bemerkungen wollte ich nur dartun, daß die endgültige Aufklärung über das Wesen des Unendlichen weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur Ehre des menschlichen Verstandes selbst notwendig geworden ist.

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig. [Hil26, p. 163]

• Dès 1900 Hilbert demandait qu'on montrât la cohérence de l'arithmétique [Hil00a, Problem 2], mais le « programme » ne s'arrêtait pas à cette question. On peut s'en

[Sho59] : Joseph SHOENFIELD. « On a restricted ω -rule ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.* 7 (1959), 405-407. (unbound insert)

[Tak70] : Motoo TAKAHASHI. « A theorem on the second-order arithmetic with the ω -rule ». In : *J. Math. Soc. Japan* 22 (1970), p. 15-24

[Lop67] : Edgar LOPEZ-ESCOBAR. « A complete, infinitary axiomatization of weak second-order logic ». In : *Fund. Math.* 61 (1967), p. 93-103

[Cav08] : Stefano CAVAGNETTO. « The lengths of proofs : Kreisel's conjecture and Gödel's speed-up theorem ». In : *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 358. Issledovaniya po Konstruktivnoi Matematike i Matematicheskoi Logike. XI (2008), p. 153-188, 304

[Zac07] : Richard ZACH. « Hilbert's Program Then and Now ». In : *Philosophy of Logic*. Sous la dir. de Dale JACQUETTE. North Holland, 2007, p. 411-447

[Smo88] : Craig SMORYŃSKI. « Hilbert's programme ». In : *CWI Quarterly* 1.4 (1988), p. 3-59

[Hil26] : David HILBERT. « Über das Unendliche ». In : *Math. Ann.* 95.1 (1926), p. 161-190

21. Incomplétude (variations en mode crétois)

faire une idée dans [Hil26] (trad. anglaise dans [Heijenoort]). • L'élimination des infinitésimaux par Weierstraß, commence Hilbert, n'est qu'une étape vers les fondements de l'analyse : celle-ci repose encore sur la notion d'ensemble infini, qui peut sembler suspecte. Soulignant la similitude avec les points virtuels ajoutés par la géométrie projective, Hilbert veut pouvoir envisager les objets infinis comme des « éléments idéaux ». Seuls les objets finis existent vraiment ; il faut montrer que l'infini actuel peut être employé comme une fiction utile dans l'étude des objets finis. C'est une demande de *conservativité*. • Hilbert attendait ainsi de la théorie de la démonstration, i.e. l'étude des preuves comme objets mathématiques, qu'elle assît les mathématiques infinitaires sur les mathématiques finitaires. Et par ailleurs il semblait ne pas douter qu'elle permettait *déjà* une fondation des secondes, i.e. qu'elle montrait la cohérence des mathématiques finitaires. • Le concept de « mathématiques finitaires » n'est jamais vraiment précisé (et la question de cette précision pourrait ne pas être mathématique). Il n'est pas clair qu'il faille assimiler « mathématiques finitaires » à l'étude de l'infini potentiel des entiers dits naturels. Mais comme la combinatoire finie est essentiellement la structure $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, on n'a pas de meilleure proposition. • Suite en § 21, notes conclusives.

§ 21. Incomplétude (variations en mode crétois)

Thème et variations.

Prérequis : §§ 1, 14, 20.

35

Thème (attribué à Euboulide). Un homme affirme qu'il ment. Dit-il la vérité ?

Variation n°1 (Zermelo). La classe des ensembles ne forme pas un ensemble.

Idée : sinon, la sous-classe F des ensembles qui ne s'appartiennent pas forme elle aussi un ensemble. Alors : $F \in F$ ssi $F \notin F$, contradiction. La formalisation est donnée dans ZF, théorie détaillée en § 23 ; seul un raisonnement par *séparation* (proposition § 23.2.C) est nécessaire.

Démonstration. Soit $\mathbb{M} \models \text{ZF}$. On suppose par l'absurde $\mathbb{M} \models (\exists U)(\forall x)(x \in U)$. Soient U un tel objet et $\varphi(x)$ la formule $x \notin x$. Par séparation, $\mathbb{M} \models (\exists F)(\forall x)[x \in F \leftrightarrow (x \in U \wedge \varphi(x))]$; soit un tel F . Comme $\mathbb{M} \models (\forall x)(x \in U)$, on a $\mathbb{M} \models (F \in F \leftrightarrow F \notin F)$; contradiction. $\square$

Variation n°2 (Cantor). Aucun ensemble ne se surjecte sur l'ensemble de ses parties.

Démonstration. Soient $\mathbb{M} \models \text{ZF}$ et a un point du modèle tels qu'existe une surjection $g: a \twoheadrightarrow P(a)$. Par séparation, soit F tel que $\mathbb{M} \models (\forall x)[x \in F \leftrightarrow$

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

$(x \in a \wedge x \notin g(x))$. Alors $\mathbb{M} \models F \subseteq a$, i.e. $\mathbb{M} \models F \in P(a)$. Par surjectivité, soit f tel que $\mathbb{M} \models (f \in a) \wedge (g(f) = F)$. Alors $\mathbb{M} \models (f \in F \leftrightarrow f \notin F)$; contradiction. $\square$

Un codage $\# : \text{Expr} \rightarrow \mathbb{N}$ a été donné en § 20.3. On rappelle que sub est la fonction (partielle) $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ envoyant $(\#\varphi, \#x, \#t)$ sur $\#\varphi[x := t]$. D'après le lemme § 20.3.C, elle est définissable et même Σ_1 .

Variation n°3 (Tarski; « indéfinissabilité de la vérité »). L'ensemble $\# \text{Th}(\mathbb{N})$ des codes d'énoncés vrais dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ n'est pas définissable dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$.

Remarque. Le codage doit vérifier certaines propriétés d'effectivité. Si une bijection ineffective $\natural$ envoyait « abstraitement » les énoncés vrais sur les nombres pairs et les énoncés faux sur les nombres impairs, $\natural \text{Th}(\mathbb{N})$ serait définissable.

Idée : on énumère l'ensemble $\text{Form}(x)$ des formules à une variable libre par $(\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N})$, et l'on forme :

$$F = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \neg \varphi_n(n)\}. \quad 15$$

Par hypothèse absurde et définissabilité de la fonction sub (lemme § 20.3.C), F est définissable. Or toute définition apparaît dans l'énumération ; soit $\varphi_{n_0}(x)$ l'une d'elles. Alors : $\mathbb{N} \models \varphi_{n_0}(n_0)$ ssi $n_0 \in F$ ssi $\mathbb{N} \models \neg \varphi_{n_0}(n_0)$; contradiction. La mise en place exige deux rappels et deux notations.

- ν_n (§ 20.1) est le terme $s(s(\dots s(0)\dots))$. Notamment si $\varphi(x) \in \text{Form}(x)$, alors : $\mathbb{N} \models \varphi[x := \nu_n]$ ssi $\mathbb{N} \models \varphi(n)$.
- On a en § 20.3 opté pour le jeu de variables $x_0, x_1, \dots$ (afin d'avoir un nombre fini de symboles).

Notations

- $\ulcorner E \urcorner$ — Pour E une expression, soit $\ulcorner E \urcorner$ le **terme** $\nu_{\#E}$ (terme usuel valant l'entier $\#E$ dans tout modèle). Notamment si $\varphi(x_1)$ est une formule en la variable libre x_1 , et E est une expression, alors : $\mathbb{N} \models \varphi(\ulcorner E \urcorner)$ ssi $\mathbb{N} \models \varphi[\nu_{\#E}]$ ssi $\mathbb{N} \models \varphi[\ulcorner E \urcorner]$.

On ne confondra pas l'entier $\#E$ avec le **terme** $\ulcorner E \urcorner$. Si l'on identifie $\mathbb{N}$ à son image dans un modèle $\mathbb{M} \models \text{PA}$, on a $\ulcorner E \urcorner[\mathbb{M}] = \#E$.

- d — Soit d la fonction :

$$\begin{aligned} d: \quad \# \text{Form}(x_1) &\rightarrow \# \dot{\text{En}} \\ \# \varphi &\mapsto \# \varphi[\ulcorner \varphi \urcorner], \end{aligned}$$

qui est définissable car $n \mapsto \#\nu_n$ et sub le sont (lemmes § 20.3.B et § 20.3.C). Elle est même Σ_1 au sens de § 20.1.

21. Incomplétude (variations en mode crétois)

Démonstration. Supposons $\# \text{Th}(\mathbb{N})$ définissable. Alors l'ensemble :

$$\begin{aligned} F &= \{n \in \mathbb{N} : n \in \# \text{Form}(x_1) \wedge d(n) \notin \# \text{Th}(\mathbb{N})\} \\ &= \{\# \varphi : \varphi \in \text{Form}(x_1) \wedge \varphi[\ulcorner \varphi \urcorner] \notin \text{Th}(\mathbb{N})\}, \end{aligned}$$

est lui aussi définissable, par une formule $\chi(x_1) \in \text{Form}(x_1)$. Soient $n_0 = \# \chi \in \# \text{Form}(x_1)$ et τ l'énoncé $\chi[\nu_{n_0}]$, i.e. $\chi[\ulcorner \chi \urcorner]$. Alors : $\mathbb{N} \models \tau$ ssi $\mathbb{N} \models \chi[\nu_{n_0}]$ ssi $\mathbb{N} \models \chi(n_0)$ ssi $n_0 \in F$ ssi $\chi[\ulcorner \chi \urcorner] \notin \text{Th}(\mathbb{N})$ ssi $\mathbb{N} \not\models \tau$, contradiction. $\square$ ₅

Remarque. Plus géométriquement, $\# \text{Th}(\mathbb{N})$ n'est l'ensemble des $\mathbb{N}$ -points d'aucun foncteur élémentaire (au sens de § 14.1) ; il n'y a pas de « formule $\ulcorner \text{Th}(\mathbb{N}) \urcorner$ ».

La Variation n°3 affirme ainsi que l'énoncé de la Variation n°3 échappe à la définissabilité dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, et donc au pouvoir d'expression de PA.

Variation n°4 (Gödel; « premier théorème d'incomplétude »). PA ₁₀ n'est pas complète : $\text{Th}(\text{PA}) \neq \text{Th}(\mathbb{N})$.

Démonstration. D'après le lemme § 20.3.C, $\# \text{Th}(\text{PA})$ est définissable. D'après la Variation n°3, $\# \text{Th}(\mathbb{N})$ ne l'est pas. Les ensembles $\text{Th}(\text{PA})$ et $\text{Th}(\mathbb{N})$ sont donc distincts. $\square$ ₁₅

Remarques

- En particulier il existe $\mathbb{M} \models \text{PA}$ tel que $\mathbb{M} \neq \mathbb{N}$: un tel $\mathbb{M}$ est nécessairement non standard.
- La Variation n°4 vaut pour toute théorie Θ telle que $\mathbb{N} \models \Theta$ et que $\# \Theta$ reste définissable. Ajouter un nombre fini ou un schéma explicite ₂₀ d'axiomes à PA donnera toujours une théorie incomplète (la théorie $\text{Th}(\mathbb{N})$ est complète, mais $\# \text{Th}(\mathbb{N})$ n'est pas définissable).
- Par opposition à l'indéfinissabilité de $\# \text{Th}(\mathbb{N})$, l'incomplétude de PA est formalisable dans PA. La preuve ci-dessus est en revanche extérieure à PA, à cause de la référence à $\text{Th}(\mathbb{N})$. La suite vise à « internaliser » ₂₅ l'incomplétude.

On rappelle (§ 20.3) qu'il existe une formule $\ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner \in \text{Form}(x_1)$ dont les $\mathbb{N}$ -points forment l'ensemble des codes d'énoncés démontrables dans PA, i.e. $\ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner[\mathbb{N}] = \# \text{Th}(\text{PA})$. On fixe une telle formule.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

Remarque. Il n'y a pas unicité des formules $\ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner$ définissant $\# \text{Th}(\text{PA})$ puisqu'on capture les $\mathbb{N}$ -points d'un ensemble définissable *dans un modèle d'une théorie incomplète*. En effet par incomplétude (Variation n°4), on peut avoir $\mathbb{N} \models (\forall x)(\varphi_1(x) \leftrightarrow \varphi_2(x))$ sans que cela soit conséquence de PA. Dans ce cas les formules $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ définissent la même partie de $\mathbb{N}$ sans nécessairement coïncider dans les autres modèles ; géométriquement, les foncteurs φ_1 et φ_2 ont les mêmes $\mathbb{N}$ -points sans être égaux. 5

Variation n°5. PA n'est pas complète : il existe un énoncé γ tel que $\text{PA} \not\vdash \gamma$ et $\text{PA} \not\vdash \neg\gamma$.

Démonstration. Au lieu de $\{\#\varphi : \varphi \in \text{Form}(x_1) \wedge \varphi[\ulcorner \varphi \urcorner] \notin \text{Th}(\mathbb{N})\}$, on forme à présent : 10

$$\begin{aligned} G &= \{\#\varphi : \varphi \in \text{Form}(x_1) \wedge \varphi[\ulcorner \varphi \urcorner] \notin \text{Th}(\text{PA})\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : n \in \#\text{Form}(x_1) \wedge d(n) \notin \#\text{Th}(\text{PA})\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \ulcorner \text{Form}(x_1) \urcorner(n) \wedge \ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner(d(n))\}. \end{aligned}$$

Soit $\psi(x_1)$ cette définition, i.e. la formule $\ulcorner \text{Form}(x_1) \urcorner(x_1) \wedge \ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner(d(x_1))$, de sorte que $G = \psi[\mathbb{N}]$. Soit γ l'énoncé $\psi[\ulcorner \psi \urcorner]$. Alors : $\mathbb{N} \models \gamma$ ssi $\mathbb{N} \models \psi(\#\psi)$ ssi $\#\psi \in G$ ssi $\psi[\ulcorner \psi \urcorner] \notin \text{Th}(\text{PA})$ ssi $\gamma \notin \text{Th}(\text{PA})$ ssi $\text{PA} \not\vdash \gamma$. 15

- Si $\text{PA} \vdash \gamma$, alors $\mathbb{N} \models \gamma$, donc par construction $\text{PA} \not\vdash \gamma$: contradiction.
- Si $\text{PA} \vdash \neg\gamma$, alors $\mathbb{N} \models \neg\gamma$, donc par construction $\text{PA} \vdash \gamma$: contre la cohérence de PA. □

Remarques

- On n'a pas écarté le concept de satisfaction : car l'argument invoque la définissabilité dans le modèle standard. Par un tour de force assez vertigineux, Gödel a montré qu'on pouvait éviter pareil recours. 20
- Noter la référence explicite à la cohérence de PA.

$\Box_\varphi$ **Notation.** Pour un énoncé φ , soit $\Box_\varphi$ l'énoncé $\ulcorner \text{Th}(\text{PA}) \urcorner[\ulcorner \varphi \urcorner]$. Son interprétation dans $\mathbb{N}$ est « il existe une démonstration $D : \text{PA} \vdash \varphi$ », de sorte que : $\mathbb{N} \models \Box_\varphi$ ssi $\text{PA} \vdash \varphi$. 25

Variation n°6. PA n'est pas complète : il existe un énoncé γ tel que $\text{PA} \vdash \gamma \leftrightarrow \neg\Box_\gamma$.

Attention : ce n'est pas le même énoncé qu'à la Variation n°5.

21. Incomplétude (variations en mode crétois)

Démonstration.

Lemme (« diagonal »). Soit $\varphi(x_1)$ une formule à seule variable libre x_1 . Alors il existe un énoncé γ_φ tel que $\text{PA} \vdash \gamma_\varphi \leftrightarrow \varphi[\ulcorner \gamma_\varphi \urcorner]$.

Démonstration. La fonction (partielle) $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui envoie $\# \chi(x_1) \in \# \mathcal{L}_{\text{PA-Form}}(x_1)$ sur $\# \chi[\ulcorner \chi \urcorner]$ est Σ_1 . D'après l'exercice 20.8, il existe une formule $\delta(x_1, x_2)$ telle que :

- pour a, b entiers, $b = d(a)$ ssi $\text{PA} \vdash \delta[\nu_a, \nu_b]$;
- $\text{PA} \vdash (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[(\delta \wedge \delta[x_1, x_2 := x_3]) \rightarrow (x_2 = x_3)]$ (« δ est prouvablement fonctionnelle »).

Soit $\chi(x_1)$ la formule : $(\exists x_2)(\delta(x_1, x_2) \wedge \varphi[x_2])$. Soit γ_φ l'énoncé : $\chi[\ulcorner \chi \urcorner]$.

On affirme que γ_φ , noté simplement γ , convient. En effet $\# \gamma = d(\# \chi)$, donc $\text{PA} \vdash \delta[\ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner \gamma \urcorner]$.

- Par $\exists^+$, on a $\text{PA} \cup \{\varphi[\ulcorner \gamma \urcorner]\} \vdash (\exists x_2)(\delta[\ulcorner \chi \urcorner, x_2] \wedge \varphi[x_2])$; la conséquence est $\chi[\ulcorner \chi \urcorner]$, i.e. γ .
- Réciproquement $\text{PA} \vdash \delta[\ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner \gamma \urcorner]$, d'où par le caractère prouvablement fonctionnel $\text{PA} \vdash (\forall x_2)(\delta[\ulcorner \chi \urcorner, x_2] \rightarrow x_2 = \ulcorner \gamma \urcorner)$. Mais γ est $\chi[\ulcorner \chi \urcorner]$, i.e. $(\exists x_2)(\delta[\ulcorner \chi \urcorner, x_2] \wedge \varphi[x_2])$. Par unicité de x_2 , on trouve $\text{PA} \cup \{\gamma\} \vdash \varphi[\ulcorner \gamma \urcorner]$.

Ainsi $\text{PA} \vdash \gamma \leftrightarrow \varphi[\ulcorner \gamma \urcorner]$. □

Soit φ la relation $\neg \Box$. Par le lemme diagonal, il existe un énoncé γ tel que $\text{PA} \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \Box \gamma$.

- Si $\text{PA} \vdash \gamma$, alors $\text{PA} \vdash \neg \Box \gamma$, d'où $\mathbb{N} \models \neg \Box \gamma$. Ainsi $\mathbb{N} \not\models \Box \gamma$, i.e. $\text{PA} \not\vdash \gamma$, contradiction.
- Si $\text{PA} \vdash \neg \gamma$, alors $\text{PA} \vdash \Box \gamma$, d'où $\mathbb{N} \models \Box \gamma$. Ainsi $\text{PA} \vdash \gamma$; mais alors $\text{PA} \vdash \perp$, et PA est incohérente. Donc $\mathbb{N} \models \perp$, contradiction.

Il suit que PA ne démontre ni γ ni $\neg \gamma$. □

Remarques

- La formation de γ tel que $\text{PA} \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \Box \gamma$ a évité la définissabilité (en travaillant avec la plus syntaxique *représentabilité*). En revanche les arguments donnés pour $\text{PA} \not\vdash \gamma$ et $\text{PA} \not\vdash \neg \gamma$ reposent sur la satisfaction dans le modèle standard. Éliminer cette dernière exige d'internaliser davantage de notions.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

— Noter la référence explicite à la cohérence de PA.

$\ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$ **Notation.** Soit $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$ le $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -énoncé $\neg \Box \perp$ (bien que la notation ne reflète pas cette dépendance, $\Box$ est la formalisation de la prouvabilité *dans* PA).

Bien remarquer les chevrons carrés $\ulcorner \cdot \urcorner$; il n'y a pas d'expression « $\text{Coh}(\text{PA})$ ». Une telle notation signifierait simplement $\text{PA} \not\vdash \perp$ (i.e. « PA est cohérente ») ⁵ mais ne formerait pas un $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -énoncé. Le décalage entre l'affirmation informelle $\text{PA} \not\vdash \perp$ et sa formalisation $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$ est incompressible.

Variation n°7 (Gödel; « second théorème d'incomplétude »). Si $\text{PA} \vdash \ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$, alors $\text{PA} \vdash \perp$.

10

Démonstration.

Proposition (« conditions de Bernays-Hilbert-Löb »). Pour des énoncés φ, χ :

(N)/« **certification** » : si $\text{PA} \vdash \varphi$, alors $\text{PA} \vdash \Box \varphi$;

(K)/« **développement** » : $\text{PA} \vdash \Box(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \chi)$;

15

(S₄)/« **certification interne** » : $\text{PA} \vdash \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$.

Les noms viennent de la logique modale (compléments § Q). Démonstration aux compléments § S.

Pour tout énoncé φ , on a $\vdash \neg \varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$. L'énoncé $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$ désigne $\neg \Box \perp$. Enfin, d'après la Variation n°6, il existe un énoncé γ tel que $\text{PA} \vdash \gamma \leftrightarrow$ ²⁰ $\neg \Box \gamma$.

— Par construction, $\text{PA} \vdash \gamma \rightarrow (\Box \gamma \rightarrow \perp)$.

— Certifiant, $\text{PA} \vdash \Box(\gamma \rightarrow (\Box \gamma \rightarrow \perp))$.

— Développant, $\text{PA} \vdash \Box \gamma \rightarrow (\Box \Box \gamma \rightarrow \Box \perp)$.

— D'autre part, par certification interne, $\text{PA} \vdash \Box \gamma \rightarrow \Box \Box \gamma$.

25

— Maniant l'implication, $\text{PA} \vdash \Box \gamma \rightarrow \Box \perp$.

— Contraposant, $\text{PA} \vdash \ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner \rightarrow \neg \Box \gamma$.

— D'où enfin par construction, $\text{PA} \vdash \ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner \rightarrow \gamma$.

Pas de contradiction à ce point. Mais supposons $\text{PA} \vdash \ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$. Alors $\text{PA} \vdash \gamma$. Certifiant, on a $\text{PA} \vdash \Box \gamma$. Par construction, on a aussi $\text{PA} \vdash \neg \Box \gamma$. ³⁰ Ainsi $\text{PA} \vdash \perp$. $\square$

Ici encore, le résultat s'applique à toute extension effective de PA.

21. Incomplétude (variations en mode crétois)

Remarque. Si l'on croit à la cohérence de PA, alors la Variation n°7 impose $PA \not\models \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$. Par complétude (§ 18), il existe donc $M \models PA \cup \{\neg \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner\}$. Un tel objet est modèle de l'axiomatique de Peano, et détient un code de preuve de son incohérence. L'arbre de preuve associé est un objet non standard : il code une déduction de longueur non standard à partir de versions non standard d'axiomes de récurrence. Rien de cela n'est admissible en tant que vraie démonstration. 5

Le non-standard abonde et son comportement déroute. C'est un inévitable effet de bord de la méthode axiomatique. Mais on ne saurait y voir une raison de douter de la pertinence de la méthode axiomatique, ni de l'existence des entiers. Dès 1936, Gentzen publiait une première démonstration de $\ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$. V. notes conclusives. 10

Exercices

21.1. On admet $\mathbb{N} \models PA$. Montrer que chacune des affirmations suivantes est incorrecte :
a. $PA \vdash \neg \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$; b. $PA \vdash \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner \rightarrow \neg \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$; c. $PA \models \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$; d. $PA \vdash \neg \Box \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$. 15

21.2. Existe-t-il une axiomatisation « effective » Θ étendant PA : a. incohérente qui démontre $\ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$? b. incohérente qui démontre $\neg \ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$? c. cohérente qui démontre $\ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$? d. cohérente qui démontre $\neg \ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$?

21.3. Soit $\ulcorner \text{Comp}(PA) \urcorner$ l'énoncé $(\forall x)[\ulcorner \text{Én} \urcorner(x) \rightarrow \ulcorner \text{Th}(PA) \urcorner(x) \vee \ulcorner \text{Th}(PA) \urcorner(\nu_{\#} \neg + \nu_b \cdot x)]$. 20
a. Lui donner un sens.
b. Peut-on internaliser le premier théorème, i.e. a-t-on $PA \vdash \neg \ulcorner \text{Comp}(PA) \urcorner$?
c. Dériver le « premier théorème d'incomplétude » du « second ».

21.4. Radicalisation de l'ex. 15.3. Combien PA possède-t-elle d'extensions (cohérentes et) complètes ? À choisir parmi les réponses : 0, 1, un nombre fini, $\aleph_0$, $\aleph_1$, $2^{\aleph_0}$, indécidable. 25

21.5. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

PA et chacune de ses extensions permettent de formaliser la syntaxe. Soit $\Theta_0 = PA$; pour n entier, soit $\Theta_{n+1} = \Theta_n \cup \{\ulcorner \text{Coh}(\Theta_n) \urcorner\}$. Soit enfin $\Theta_\omega = \bigcup_{\mathbb{N}} \Theta_n$. Alors Θ_ω démontre la cohérence de chaque Θ_n , donc par compacité, démontre sa cohérence. Par incomplétude, Θ_ω est incohérente ; par compacité, une Θ_n l'est. Redescendant, PA est incohérente. 30

21.6. Soient $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$, et $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{T\}$ où T est un symbole de relation unaire.

- Montrer qu'il existe un $\hat{\mathcal{L}}$ -énoncé $\hat{\sigma}$ tel que : $(\mathbb{N}; X) \models \hat{\sigma}$ ssi $X = \{\#\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$.
- En particulier, montrer que $\#\text{Th}(\mathbb{N})$ est définissable dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ dans la sémantique pleine monadique du deuxième ordre $\mathbb{A}_m^{2,p}$. 35
- Grâce au théorème de Beth (ex. 15.6), en déduire que PA possède des modèles non standard.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

21.7. (Prérequis : § 7.2.) Soient $\mathcal{L}^{2,p}$ la sémantique pleine du deuxième ordre, et $\mathcal{L} = \{+; \cdot\}$. Soit E l'ensemble des $\mathcal{L}^2$ -énoncés équivalents à un énoncé élémentaire. Montrer que $\#E$ n'est pas élémentairement définissable. [L'axiome du deuxième ordre PA^2 a pour unique modèle $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{L}^{2,p}$. Montrer : pour tout énoncé élémentaire, $\mathbb{N} \models \varphi$ ssi $(\text{PA}^2 \vee \varphi)$ est équivalent à un énoncé élémentaire.]

(*)

5

Notes conclusives

L'exposé le plus simple reste le perecquien [Boo94]; c'est un bon exercice de le traduire sous contrainte. On signale aussi l'hilarant [Yud08].

cela détruit quelques notions solidement ancrées. [...] Excuse ce long début; mais tout cela me poursuit, et de l'écrire m'en exerce un peu.

Herbrand, à Chevalley, 1930-12-03; 30

10

Nous n'avons pas d'écrits d'Euboulide.

• Repères historiques

Diese Ueberzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es kein Ignorabimus! [Hil00a, p. 262]

Les mathématiciens sont une bien bizarre chose; voici une quinzaine de jours que chaque fois que je vois Neumann nous causons d'un travail d'un certain Gödel, qui a fabriqué de bien curieuses fonctions; et tout

15

Quelques paradoxes célèbres. • **Menteur** : son attribution au crétois Épiménide, figure plus qu'à moitié mythique, vient de Clément d'Alexandrie. L'existence d'Euboulide de Milet est moins sujette à caution. • **Richard** : [Ric] (il donne une forme de solution); popularisé par Poincaré [Poi06]. König avait atteint le même problème [Kön05]. Weyl s'y intéressa de près [Wey10]. • **Berry** : rapporté par Russell [Rus08]. 35

20

Théorème de Tarski. • Parution [Tar33, Twierdzenie I] (trad. allemande [Tar35a, 25

[Boo94] : George BOOLOS. « Gödel's second incompleteness theorem explained in words of one syllable ». In : *Mind* 103.409 (1994), p. 1-3

[Yud08] : Eliezer YUDKOWSKY. *The Cartoon Guide to Löb's Theorem*. <https://www.lesswrong.com/posts/ALCnqX6Xx8bpFMZq3/the-cartoon-guide-to-loeb-s-theorem>. 2008

[Hil00a] : David HILBERT. « Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900 ». In : *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1900), p. 253-297

[Ric] : Jules RICHARD. « Lettre à la rédaction ». In : *Revue générale des Sciences pures et appliquées* 12 ()

[Poi06] : Henri POINCARÉ. « Les mathématiques et la logique ». In : *Rev. de métaphys. et de morale* 14 (1906), p. 294-317

[Kön05] : Julius KÖNIG. « Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem ». In : *Math. Ann.* 61 (1905), p. 156-160

[Wey10] : Hermann WEYL. « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ». In : *Math. naturw. Bl.* 7 (1910), p. 93-95, 109-113

[Rus08] : Bertrand RUSSELL. « Mathematical logic as based on the theory of types ». In : *Am. J. Math.* 30 (1908), p. 222-262

[Tar33] : Alfred TARSKI. « Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych ». In : *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych* 34 (1933)

21. Incomplétude (variations en mode crétois)

Satz 1]). Dans [Tar33, note 97] ([Tar35a, note 88]), Tarski tente de revendiquer avec quelque longueur l'antériorité, du moins l'indépendance de ses travaux par rapport à ceux de Gödel. • Il y a tout lieu de penser que Gödel l'avait atteint dès 1930 ; mais aussi que la notion de vérité étant alors suspecte (c'était avant son élucidation en *satisfaction*, i.e. vérité relative), il ait cherché une démonstration qui n'y fit pas référence. Logicien *par excellence* plus que mathématicien, Gödel n'adopta jamais le point de vue sémantique. Il n'a même guère cité Tarski et cela reste une énigme pour l'histoire de la logique [Kra04]. • Le phénomène ne vaut que par définition de la sémantique tarskienne ; avec la sémantique « cumulative » de Kripke [Kri75] (§ 7, notes conclusives), la vérité *est* définissable.

Lemme diagonal (Var. n° 6). Attribué par Gödel à Carnap [Davis, note 23].

Les théorèmes d'incomplétude. • Le « premier » est [Göd31, Satz VIII] (trad. anglaise dans [Heijenoort]) ; le « second », [Göd31, Satz XI]. Gödel avait conscience de la généralité de ses travaux, d'où le caractère vague du titre ; les *Principia* avaient alors quelque aura (v. avis de Gödel en § 7, notes conclu-

sives, *Logicisme*), et surtout l'époque décorait mal logiques et théories. • Le premier informé du « premier théorème » semble avoir été Carnap, dans un café de Vienne, le 26 août 1930. Gödel mentionna le résultat lors d'une brève allocution à une conférence le 6 septembre 1930, allocution suivie d'une discussion passionnante [Daw84] le 7, où von Neumann était présent. • L'histoire est considérablement ironique : la conférence et la discussion se tenaient lieu à Königsberg, fief de Hilbert, qui prononçait à la radio le 8 septembre son célèbre « *Wir werden wissen, wir müssen wissen* » (v. *Le programme de Hilbert* infra). La seule référence aux résultats de Gödel que fit jamais Hilbert, est brève et dépréciative. • Après septembre 1930, von Neumann et Gödel arrivèrent indépendamment au « second théorème ». Mais Gödel fit en sorte de l'inclure précipitamment dans son article, afin d'avoir la priorité [Pla18a, § 7]. C'est pourquoi [Göd31] ne donne pas les détails de la preuve du second théorème, dont la première démonstration complète est dans [Hilbert-Bernays2]. • Autre moment documenté : l'exposé du 15 janvier 1931 devant le « cercle de Vienne » [Man99]. • Aboutissement na-

[Tar35a] : Alfred TARSKI. « Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen ». In : *Stud. Philos* 1 (1935), p. 261-405

[Kra04] : Stanisław KRAJEWSKI. « Gödel on Tarski ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 127.1-3 (2004), p. 303-323

[Kri75] : Saul KRIPKE. « Outline of a theory of truth ». In : *The Journal of Philosophy* 72.19 (1975), p. 690-716

[Davis] : Kurt GÖDEL. « On undecidable propositions of formal mathematical systems ». In : *The undecidable*. Sous la dir. de Martin DAVIS. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions, Corrected reprint of the 1965 original [Raven Press, Hewlett, NY ; MR0189996]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, p. ii+413

[Göd31] : Kurt GÖDEL. « Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I ». In : *Monatsh. Math. Phys.* 38.1 (1931), p. 173-198

[Heijenoort] : Jean van HEIJENOORT. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Daw84] : John DAWSON. « Discussion on the foundation of mathematics ». In : *History and Philosophy of Logic* 5.1 (1984), p. 111-129

[Pla18a] : Jan von PLATO. « In search of the sources of incompleteness ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. IV. Invited lectures*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, p. 4057-4073

[Hilbert-Bernays2] : David HILBERT et Paul BERNAYS. *Grundlagen der Mathematik II*. T. 50. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin : Julius Springer, 1939. xii+498

[Man99] : Paolo MANCOSU. « Between Vienna and Berlin : the immediate reception of Gödel's

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

turel de l'« âge des antinomies », l'article de Gödel passa lui-même pour une nouvelle antinomie [Per36]. V. [Urq16, p. 515] pour son édifiante réception par Russell. L'incomplétude rencontra aussi en Zermelo (qui avait déjà combattu le « skolémisme » ; v. § 13, notes conclusives) un opposant farouche :

Jetzt will ich es anders machen: die Herren müssen endlich Farbe bekennen, wenn ich öffentlich erkläre, daß der vielbewunderte Gödel'sche „Beweis“ Unsinn ist; denn mit ihm fällt der ganze Skolemismus insbesondere in der Form des Carnap'schen „PM-Systems“.

À Baer, 1931-10-07 ; [Zermelo, p. 490]

Cette incompréhension répétée d'un grand esprit possède une raison simple : Zermelo (comme Cantor) était pur mathématicien, et n'avait pas de liens avec la logique. • Plus sur la réception de l'incomplétude : [Gra11].

Misc. Ex. 21.5 : le sujet remonte à Turing. V. [Fef62] ou, plus accessible, [Fef06a]. Ex. 21.6 : [Boo73].

- **Sur l'expression « sa propre cohérence ».** Une formule du type $\ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$ n'exprime pas la cohérence de Θ mais la *formalise*. Or la logique élémentaire, impuissante à catégoriser absolument les structures infinies (phénomène de Löwenheim-Skolem, § 13), ne peut caractériser le modèle standard ; toute formalisation crée un décalage.

incompleteness theorems ». In : *Hist. Philos. Logic* 20.1 (1999), p. 33-45

[Per36] : Charles PERELMAN. « L'antinomie de M. Gödel ». In : *Bull. Cl. Sci., V. Sér., Acad. R. Belg.* 22 (1936), p. 730-736

[Urq16] : Alasdair URQUHART. « Russell and Gödel ». In : *Bull. Symb. Log.* 22.4 (2016), p. 504-520

[Zermelo] : Ernst ZERMELO. *Ernst Zermelo : collected works I*. Sous la dir. d'Heinz-Dieter EBBINGHAUS, Craig FRASER et Akihiro KANAMORI. T. 21. Schriften der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Set theory, miscellanea/Mengenlehre, Varia. Berlin : Springer-Verlag, 2010, p. xxiv+654

[Gra11] : Ivor GRATTAN-GUINNESS. « The reception of Gödel's 1931 incompleteness theorems by mathematicians, and some logicians, to the early 1960s ». In : *Kurt Gödel and the foundations of mathematics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, p. 57-74

[Fef62] : Solomon FEFERMAN. « Transfinite recursive progressions of axiomatic theories ». In : *J. Symbolic Logic* 27 (1962), p. 259-316

[Fef06a] : Solomon FEFERMAN. « Turing's thesis ». In : *Notices Amer. Math. Soc.* 53.10 (2006), p. 1200-1206

[Boo73] : George BOOLOS. « A note on Beth's theorem ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 21 (1973), p. 1-2

Ainsi l'expression « Θ démontre sa propre cohérence » est impropre. Au prix de la lourdeur, et au coût de la perte des séductions du paradoxe, on pourrait dire « Θ démontre la cohérence de son intraformalisation ». • C'est un poncif que d'y voir un effet Larsen de la mise en abyme.

- **Une analogie.** (Prérequis : § I.) • Le premier théorème d'incomplétude affirme que les Lin-idéaux maximaux d'un anneau quotient réputé naturel ne sont pas effectivement engendrés. Comme en § 19.2, soit $\mathbb{A} = \text{Lin}(\text{PA})$ l'anneau de Lindenbaum de la théorie PA, ou d'une autre théorie à la fois *expressive* et *effective*. Cet anneau de Lindenbaum a des Lin-idéaux maximaux, comme celui associé à $\text{Th}(\mathbb{N})$, mais aucun ne possède de système *effectif* de générateurs. • L'existence de groupes dénombrables sans présentation récursive n'est pas réputée paradoxale.

- **ω -cohérence.** (Prérequis : ex. 20.9.) Contraint techniquement, Gödel [Göd31, au-dessus du Satz VI] faisait l'hypothèse d'« ω -cohérence ». Cette hypothèse n'est pas nécessaire, comme noté par Rosser après les

21. Incomplétude (variations en mode crétois)

cours de Gödel à Princeton [Ros36]. • L' ω -cohérence signifie que la théorie est cohérente sous application unique de la règle ω , i.e. que pour toute formule, si pour chaque entier $\Theta \vdash \varphi[x := c_n]$, alors $\Theta \not\vdash \neg(\forall x)\varphi$. • Clairement, (cohérence dans $\vdash_\omega$) $\Rightarrow$ (ω -cohérence) $\Rightarrow$ cohérence, mais les implications sont strictes. La notion est donc particulièrement mal nommée. • Exemple de théorie cohérente mais non ω -cohérente : $\Theta = \text{PA} \cup \{\neg \ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner\}$. La cohérence est par incomplétude. Soit $\varphi(x)$ une formule Δ_0 formalisant : « x n'est pas le code d'une PA-preuve de $\perp$ ». Pour chaque entier, $\mathbb{N} \models \varphi(n)$, donc $\text{PA} \vdash \varphi[x := c_n]$; à plus forte raison $\Theta \vdash \varphi[x := c_n]$. Mais $(\forall x)\varphi$ est $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$, dont Θ démontre la négation. • Exemple de théorie ω -cohérente mais non cohérente dans $\vdash_\omega$: $\Theta' = \text{PA} \cup \{\neg \ulcorner \omega\text{-Coh}(\text{PA}) \urcorner\}$, en notation évidente. En effet $\mathbb{N} \models \ulcorner \omega\text{-Coh}(\text{PA}) \urcorner$, donc par complétude de l' ω -logique, $\text{PA} \vdash_\omega \ulcorner \omega\text{-Coh}(\text{PA}) \urcorner$. L' ω -cohérence de Θ' est plus délicate. Pour φ un énoncé, soit $\blacksquare\varphi$ l'énoncé $\neg \ulcorner \omega\text{-Coh}(\text{PA} \cup \{\neg\varphi\}) \urcorner$. (On vérifiera que c'est bien une généralisation de la définition de $\Box$.) On peut montrer que $\blacksquare$ vérifie les conditions de Bernays-Hilbert-Löb, donc par une variante immédiate du second théorème d'incomplétude, Θ' est ω -cohérente. • Subtilité finale : pour Θ effective, $\ulcorner \omega\text{-Coh}(\Theta) \urcorner$ est facile à former, mais la complexité accrue des $\vdash_\omega$ -déductions fait qu'il n'existe pas d'énoncé « $\ulcorner \vdash_\omega\text{-Coh}(\Theta) \urcorner$ » formalisant la cohérence dans $\vdash_\omega$.

• Preuves alternatives

Es läßt sich überhaupt jede epistemo-

logische Antinomie zu einem desartigen Unentscheidbarkeitsbeweis verwenden. [Göd31, note 14]

• La preuve de Boolos [Boo89] passe par le paradoxe de Berry; celle de Chaitin [Cha71], par la théorie de l'information. On peut aussi dériver l'incomplétude du « paradoxe de Yablo » (v. § sé4, question 4.1.c) [Pri97]. Plus récemment [KR10], dont on consultera la bibliographie, s'appuie sur le « paradoxe de l'interrogation-surprise ». On peut voir [Che21, § 3]. • Enfin, il n'est pas nécessaire de coder la syntaxe pour démontrer l'incomplétude de PA [How72b]; mais cela ne donne pas le second théorème.

• Le programme de Hilbert (2). Suite de § 20, notes conclusives.

Dieses Problem der Widerspruchsfreiheit ist aber bei der gegenwärtigen Sachlage durchaus der Behandlung zugänglich. Es reduziert sich darauf, wie man sofort erkennt, einzusehen, daß aus unseren Axiomen nach den aufgestellten Regeln „1 $\neq$ 1“ sich nicht als Endformel herausstellen kann, also „1 $\neq$ 1“ nicht eine beweisbare Formel ist. [...] Ein formalisierter Beweis ist aber, ebenso wie ein Zahlzeichen, ein konkreter und überblickbarer Gegenstand. Er ist von Anfang bis Ende mitteilbar. Auch die verlangte Beschaffenheit der Endformel, daß sie „1 $\neq$ 1“ lautet, ist eine konkret feststellbare Eigenschaft des Beweises. Tatsächlich läßt sich dieser Nachweis erbringen, und damit gewinnen wir

- [Ros36] : Barkley ROSSER. « Extensions of some theorems of Gödel and Church ». In : *J. Symb. Log.* 1 (1936), p. 87-91
 [Boo89] : George BOLOS. « A proof of Gödel's incompleteness theorem ». In : *Logic, logic, logic*. T. 36. 1989, 388-390 et 676
 [Cha71] : Gregory CHAITIN. « Computational complexity and Gödel's incompleteness theorem ». In : *ACM SIGACT News* 9 (1971), p. 11-12
 [Pri97] : Graham PRIEST. « Yablo's paradox ». In : *Analysis (Oxford)* 57.4 (1997), p. 236-242
 [KR10] : Shira KRITCHMAN et Ran RAZ. « The surprise examination paradox and the second incompleteness theorem ». In : *Notices Amer. Math. Soc.* 57.11 (2010), p. 1454-1458
 [Che21] : Yong CHENG. « Current research on Gödel's incompleteness theorems ». In : *Bull. Symb. Log.* 27.2 (2021), p. 113-167
 [How72b] : Paul HOWARD. « A proof of a theorem of Tennenbaum ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 18 (1972), p. 111-112

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

*die Berechtigung zur Einführung unse-
rer idealen Aussagen.* [Hil26, p. 179]

On conseille toujours [Zac07]. • Le programme se figure deux étages, représentés par deux théories naturelles $\Theta \subseteq \Theta'$ avec Θ faible et fiable (« finitaire ») et Θ' plus forte (Hilbert appelle « axiomes transfinis » les règles pour quantificateurs de la logique élémentaire). Idéalement Θ démontrerait la cohérence de Θ' . Rien ne s'est passé comme prévu. • Il était remarquable de pouvoir formaliser la cohérence de Θ' en un $\mathcal{L}_{\Theta}$ -énoncé. La question était dès lors d'établir $\Theta \vdash \ulcorner \text{Coh}(\Theta') \urcorner$. Or par incomplétude, pour Θ permettant le développement de l'arithmétique, on n'a ni $\Theta \vdash \ulcorner \text{Coh}(\Theta') \urcorner$ ni même $\Theta \vdash \ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$ (on n'a pas non plus $\Theta' \vdash \ulcorner \text{Coh}(\Theta') \urcorner$ malgré sa puissance, toujours par incomplétude). • Gödel a banni tout espoir d'une preuve « absolue » de cohérence, même au niveau de l'arithmétique. Mais l'intérêt de Hilbert a permis la naissance de la théorie de la démonstration, et, bien plus tard, des « mathématiques à rebours », qui peuvent en être considérées les héritières. • Présenter les questions sur la nature ensembliste comme des énoncés de cohérence relative du type « si ZF est cohérente, alors ZFC aussi », c'est exactement poursuivre dans la voie de Hilbert. • Enfin Gentzen a montré la cohérence de PA (v. *Cohérence de PA* infra) dans une théorie très modeste, et c'est un grand succès de cette ligne de recherche. • *Un programme ne se réfute pas.*

• Effets de l'incomplétude

En logique. Conséquence majeure, notée par Gödel [Göd30b, p. I] : l'absence de théorème de complétude même « faible » pour la sémantique pleine du deuxième ordre $\mathcal{A}^{2,P}$.

[Zac07] : Richard ZACH. « Hilbert's Program Then and Now ». In : *Philosophy of Logic*. Sous la dir. de Dale JACQUETTE. North Holland, 2007, p. 411-447

[Göd30b] : Kurt GÖDEL. « Einige mathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit ». In : *Anzeiger Wien* 67 (1930), p. 214-215

[EM71] : Andrzej EHRENFEUCHT et Jan MYCIELSKI. « Abbreviating proofs by adding new axioms ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 77 (1971), p. 366-367

[KP82] : Laurie KIRBY et Jeff PARIS. « Accessible independence results for Peano arithmetic ». In : *Bull. London Math. Soc.* 14.4 (1982), p. 285-293

[Rat15] : Michael RATHJEN. « Goodstein's theorem revisited ». In : *Gentzen's centenary*. Springer, Cham, 2015, p. 229-242

V. proposition § 22.1.(iii).

En théorie des modèles. L'existence de modèles de PA non élémentairement équivalents à $\mathbb{N}$ renforce considérablement les constructions (alors mal connues) de Skolem, qui fournissaient seulement des modèles non standard de $\text{Th}(\mathbb{N})$; v. § 20, notes conclusives et compléments § N.

En théorie de la démonstration. V. § 18, notes conclusives, *Speed-up*. Pour A une axiomatisation et χ un énoncé, on note $\ell_A(\chi)$ la plus petite longueur d'une démonstration formelle (ou $+\infty$). La *récurtivité* d'une fonction est son caractère Σ_1 , et modélise la calculabilité effective (v. § 20, notes conclusives, *Théories du calcul*; thèse de Church).

Théorème ([EM71]). Soient A une axiomatisation effective, et φ un énoncé tel que $A \cup \{\neg\varphi\}$ soit indécidable. Alors il n'existe pas de fonction récursive telle que $\ell_A \leq f \circ \ell_{A \cup \{\varphi\}}$.

Certaines conséquences de PA sont incalculablement plus rapides à démontrer avec l'hypothèse additionnelle $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$ que sans.

En théorie des nombres. L'énoncé $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$ est Π_1 . L'incomplétude sévit ainsi au plus bas niveau possible de la hiérarchie des formules (le niveau Σ_1 étant sûr, par Σ_1 -complétude de PA; ex. 20.8). En particulier, tout énoncé non trivial de théorie des nombres menace d'être indécidable dans PA. • La convergence des suites de Goodstein (§ 3), aisément démontrable dans ZF, ne l'est pas dans PA [KP82]. Goodstein semble être passé juste à côté [Rat15, p. 230] (on recommande tout l'article). Il

21. Incomplétude (variations en mode crétois)

y a d'autres démonstrations, p. ex. [Cic83].
 • L'exemple-phare d'un énoncé qui pourrait être indécidable dans PA est le théorème de Fermat-Wiles. La preuve actuelle déborde même ZFC en ce qu'elle utilise (de façon inessentielle) des grands cardinaux, sous la forme d'univers de Tarski-Grothendieck; v. § 27, notes conclusives, *Univers*. Macintyre a pourtant esquissé une approche ramenant la preuve de Wiles au cadre arithmétique [Mac11a]; ce programme n'a guère été suivi. Plus généralement, Friedman a conjecturé que tout énoncé « naturel » est prouvable à très bas niveau (plus bas que PA) [Fri99]; v. § 22, notes conclusives, *Retour sur l'incomplétude*.

En épistémologie. Le second théorème d'incomplétude est un obstacle insurmontable à l'obtention de garanties formelles sur les « fondements »; c'est une réfutation cinglante du logicisme, et peut-être plus généralement du *complexe de Descartes* ainsi nommé par Fraïssé (« le désir d'obtenir la vérité par une réflexion simple et claire, sans autre point de départ que l'ignorance ou le doute » [Fraïssé, p. XII]). Pourtant :

1. la logique mathématique est une avancée conceptuelle majeure, qui mérite bien quelque inconfort moral;
2. on n'étudie pas les mathématiques pour acquérir des certitudes épistémologiques (encore moins formelles) : mais pour leur pouvoir prédictif ou leur beauté.

• **Sur la cohérence de PA** [Cho19] (plus accessible que le présent cours) est très recommandable.

Preuves de cohérence. On peut donner de nombreuses preuves de la formalisation de la cohérence de PA; mais (du moins si PA est vraiment cohérente), aucune dans PA même.

• Preuve la plus simple : $PA \cup \{\ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner\} \vdash \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$. La théorie de gauche est cohérente (et même satisfaite dans $\mathbb{N}$), mais il n'existe pas de preuve de ce fait dans $PA \cup \{\ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner\}$. Etc. • ZF interprète PA : dans tout modèle $\mathbb{V} \models ZF$, le premier ordinal infini $\omega[\mathbb{V}]$ porte naturellement une structure de modèle de PA (§ 24.3). Littéralement on ne peut écrire « $ZF \vdash \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$ » car les deux ne sont pas dans le même langage; mais $PA \cup \{\ulcorner \text{Coh}(ZF) \urcorner\} \vdash \ulcorner \text{Coh}(PA) \urcorner$, où les deux énoncés sont codés dans PA. • On peut aussi, comme l'a fait Gentzen [Gen36], utiliser un tout petit peu d'arithmétique et une récurrence ordinale jusqu'à ε_0 , c'est-à-dire fort peu haute.

I cannot say, however, that the consistency of arithmetic is now much more evident to me (at any rate, perhaps, to use the terminology of the differential calculus, more evident than by epsilon) than it was before the proof was given.
 Tarski; [Sch+54, p. 19]

[Cic83] : Eugeniusz-Adam CICHON. « A short proof of two recently discovered independence results using recursion theoretic methods ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 87.4 (1983), p. 704-706

[Mac11a] : Angus MACINTYRE. « The impact of Gödel's incompleteness theorems on mathematics ». In : *Kurt Gödel and the foundations of mathematics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, p. 3-25

[Fri99] : Harvey FRIEDMAN. *Grand conjectures*. Message électronique sur la liste FOM. 1999

[Fraïssé] : Roland FRAÏSSÉ. *Cours de logique mathématique 1 : Relation et formule logique*. T. 23. Collection de Logique Mathématique, Série A. Deuxième édition revue et modifiée. Paris : Gauthier-Villars, 1971, p. xiv+197

[Cho19] : Timothy CHOW. « The consistency of arithmetic ». In : *Math. Intelligencer* 41.1 (2019), p. 22-30

[Gen36] : Gerhard GENTZEN. « Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie ». In : *Math. Ann.* 112.1 (1936), p. 493-565

[Sch+54] : Arnold SCHMIDT et al. « Discussion ». In : *Rev. int. Phil.* 8.27-28 (1954) : *Théorie de la preuve. Colloque international de Logique, Bruxelles 1953*, p. 15-21

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

[Horská] reproduit en langue moderne certains travaux de Gentzen qui a conçu *plusieurs* preuves de son théorème de cohérence; au lieu d'une synthèse épurée par le temps, l'ouvrage en propose une lecture avec leurs traits de génie mais aussi leurs errances.

La cohérence est-elle un problème ouvert? V. rubrique précédente. Trois cas récents ont marqué les esprits.

- Lors d'une conférence à l'IAS en 2010, Vladimir Voïevodski a *mis en doute* la cohérence de PA, suggérant qu'il s'agirait d'un problème ouvert. V. réponse [Fri11]. Le projet n'a pas été poursuivi.
- Un an plus tard, Edward Nelson *annonça l'incohérence* de PA [Nel11a]. Il retira cette affirmation [Nel11b] après une rapide étude de la structure de ses projets par Terence Tao. On peut lire la postface de Tao au projet de Nelson « Elements ».

Le problème est-il bien posé? (Prérequis : Sur l'expression « sa propre cohérence » supra.) Une interprétation du second théorème est que PA ne peut pas exprimer la cohérence de PA. L'énoncé $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$ paraît capturer la cohérence, mais ne le fait que dans le modèle standard, par coïncidence. Exprime-t-il vraiment la cohérence de PA, ou est-ce un renforcement, dénué de pertinence, à tout un foncteur dont $(\#)\text{PA}$ ne forme que les $\aleph$ -points? La logique élémentaire étant incapable de formaliser le concept « standard »,

on peut pencher pour le second point; c'est ce que fait [Art25], article contesté.

- **Théorème de Tarski en logique infinitaire.** (2^e lecture; prérequis : ensembles « héréditairement petits », ex. 27.7.) Soit $H_{<\kappa}$ l'ensemble des ensembles héréditairement de cardinal $< \kappa$; notamment $H_{<\aleph_0}$ est l'ensemble des ensembles héréditairement finis. La structure $(H_{<\aleph_0}; \in)$ est assez riche pour interpréter $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ (ex. 23.6). Le théorème de Tarski prend la forme :

soit $\mathbb{H}_0 = (H_{<\aleph_0}; \in)$. Alors $\text{Th}(\mathbb{H}_0)$ n'est pas définissable dans $\mathbb{H}_0$.

De même que l'on peut coder $\Lambda_{\omega, \omega}$ dans $(H_{<\aleph_0}; \in)$, on peut coder $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}$ dans $(H_{<\aleph_1}; \in)$. Scott a adapté le théorème de Tarski comme suit (l'énoncé se généralise à tout cardinal successeur). Il y a une ressemblance et une différence avec le cas des entiers.

Théorème (Scott 1960, non publié; v. [Karp, chap. 14] ou [Dickmann, app. C.II]). Soit $\mathbb{H}_1 = (H_{<\aleph_1}; \in)$.

- (i) L'ensemble des (codes de) $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}(\in)$ -énoncés vrais dans $\mathbb{H}_1$ n'est pas $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}$ -définissable dans $\mathbb{H}_1$.
- (ii) L'ensemble des $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}(\in)$ -énoncés vrais dans toute structure n'est pas $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}$ -définissable dans $\mathbb{H}_1$.

[Horská] : Anna HORSKÁ. *Where is the Gödel-point hiding : Gentzen's consistency proof of 1936 and his representation of constructive ordinals*. SpringerBriefs in Philosophy. Springer, Cham, 2014, p. x+77

[Fri11] : Harvey FRIEDMAN. *Voievodsky corr051711,11 :12AM-052511,7 :53AM*. <https://cs.nyu.edu/pipermail/fom/2011-May/015506.html>. Message électronique sur la liste FOM. 2011

[Nel11a] : Edward NELSON. *inconsistency of P*. <https://cs.nyu.edu/pipermail/fom/2011-September/015816.html>. Message électronique sur la liste FOM. 2011

[Nel11b] : Edward NELSON. *The Inconsistency of Arithmetic*. https://golem.ph.utexas.edu/category/2011/09/the_inconsistency_of_arithmeti.html. Message sur le forum *n-Category Café*. 2011

[Art25] : Sergei ARTEMOV. « Serial properties, selector proofs and the provability of consistency ». In : *J. Logic Comput.* 35.3 (2025), Paper No. exae034, 18

[Karp] : Carol KARP. *Languages with expressions of infinite length*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964, p. xix+183

[Dickmann] : Maximo DICKMANN. *Large infinitary languages*. T. 83. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Model theory. Amsterdam-Oxford : North-Holland Publishing Co., 1975, p. xv+464

• (i) adapte le théorème de Tarski. Mais à la différence des entiers en logique élémentaire, la structure $\mathbb{H}_1$ est absolument catégorique dans la logique $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}$, disons par φ_1 (point facile de théorie des ensembles). En particulier, toujours dans cette logique, $\mathbb{H}_1 \models \chi$ ssi $\models \varphi_1 \rightarrow \chi$, et (ii) suit. • En revanche, l'ensemble des $\Lambda_{\omega_1, \omega}(\in)$ -énoncés vrais est $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}$ -définissable.

• **Une curiosité : théories démontrant « leur propre cohérence ».** (Prérequis :

Sur l'expression « sa propre cohérence ».) Le second théorème d'incomplétude leur laisse une petite place. Une théorie cohérente Θ peut formaliser assez de syntaxe pour exprimer $\ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$, et la démontrer. Il faut éviter les phénomènes de point fixe, par exemple en empêchant la théorie de capturer $+$ et $\cdot$ en entier. [Wil93], [Wil01] montrent ainsi (en langage ad hoc) l'existence de théories Θ dont $\mathbb{N}$ est modèle, codant de la syntaxe, et telles que $\Theta \vdash \ulcorner \text{Coh}(\Theta) \urcorner$.

§ 22. Logique d'ordre supérieur

La *logique du deuxième ordre*, qui quantifie sur les parties (§ 22.1), est séduisante a priori. Mais sa sémantique naïve n'est pas fiable ; ses propriétés abstraites sont mauvaises, et surtout trop dépendantes du cadre ensembliste. Un remède possible est la *sémantique de Henkin* (§ 22.2), qui se ramène à la logique élémentaire. On peut introduire des ordres encore supérieurs mais l'expressivité maximale est déjà atteinte à l'ordre 2 (§ 22.3).

Prérequis : §§ 6–11 ; 21.

§ 22.1. Langage, déduction, sémantique naïve

Par opposition à la logique élémentaire, où l'on ne quantifie que sur les points de la structure étudiée, la logique du deuxième ordre n'est pas à prédicats fixés : on peut quantifier sur les relations. Le principe intuitif de séparation, i.e. le point de vue par graphes de relations, permet d'identifier les relations n -aires aux collections de n -uplets du domaine. (On parle de *séparation* plutôt que de *compréhension* car on reste au sein du domaine.) La logique du deuxième ordre permet ainsi les quantifications ensemblistes, plus précisément les quantifications sur les parties du domaine et de ses puissances cartésiennes. La logique du troisième ordre quantifie sur les parties de parties, etc. On commence au deuxième ordre, pour ne pas alourdir les notations, et parce qu'il permet d'encoder le cas général (§ 22.3).

On note $\Lambda_{\omega, \omega}$ la logique élémentaire (§ 6.4). La notation $\mathbb{A}^2$ possèdera un

[Wil93] : Dan WILLARD. « Self-verifying axiom systems ». In : *Computational logic and proof theory*. Proceedings of the 3rd Kurt Gödel Colloquium, KGC '93, Brno, Czech Republic, August 24-27, 1993. Berlin : Springer-Verlag, 1993, p. 325-336

[Wil01] : Dan WILLARD. « Self-verifying axiom systems, the incompleteness theorem and related reflection principles ». In : *J. Symb. Log.* 66.2 (2001), p. 536-596

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

sens bien défini en syntaxe, mais pas en sémantique. Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel.

- **Syntaxe.** On étend la syntaxe de $\Lambda_{\omega,\omega}$ comme suit.

Symboles. On ajoute pour chaque entier intuitif n les symboles $\forall_n$ et $\exists_n$, et des variables « ensemblistes/de deuxième ordre » X_n d'arité n . Ces variables représenteront les relations n -aires, i.e. les parties de $\mathbb{A}^n$. (Les variables 0-aires sont les valeurs de vérité, pas les éléments.)

Formules. Aux formules de base $R(\mathbf{t})$ pour les multitermes $\mathbf{t}$ et relations R du langage, on ajoute les $X_n(\mathbf{t})$ pour X_n une variable de relation n -aire. Ce n'est pas une substitution mais une nouvelle règle de formation des formules. On ajoute aussi $(\forall X_n)\varphi$ et $(\exists X_n)\varphi$. Ceci définit $\Lambda^2(\mathcal{L})$ -Form. En pratique on omet de noter les arités et l'on écrit $(\forall X)(X(x_1, x_2))$. Pour signaler une formule du deuxième ordre on peut écrire φ^2 .

Exemples

- L'arithmétique du deuxième ordre PA^2 s'obtient en remplaçant le schéma d'axiomes de PA (§ 8.1) par l'axiome unique :

$$(\forall X) [X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \rightarrow X(s(x)))] \rightarrow [(\forall x)X(x)].$$

- La théorie RCF^2 des corps ordonnés complets au sens de Dedekind-Hölder (compléments § A.1) comporte les axiomes de corps ordonné, et l'axiome unique avec des abréviations évidentes :

$$(\forall X)(\forall Y)[(X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset \wedge X < Y) \rightarrow (\exists z)(X < \{z\} < Y)].$$

(Historiquement, c'est le contraire : PA^2 et RCF^2 *précèdent* les « schématisations élémentaires » PA et RCF ; v. notes conclusives.)

- **Déductions.** On adapte les règles de la déduction naturelle (§ 17.2), de manière à substituer non plus des termes mais des formules (substituables), en conservant les arguments élémentaires. Par exemple $X(\mathbf{t})[X := \varphi^2]$ est $\varphi^2(\mathbf{t})$. Ci-dessous Φ est un ensemble de formules du deuxième ordre et χ, ψ de telles formules.

Quantificateur universel :

$$\frac{\Phi \vdash \chi}{\Phi \vdash \forall X \chi} \quad \forall^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \forall X \chi}{\Phi \vdash \chi[X := \psi]} \quad \forall^- \right.$$

si $X \notin \text{VarLib } \Phi$ si ψ est substituable à X dans χ

Quantificateur existentiel :

$$\frac{\Phi \vdash \chi[X := \psi]}{\Phi \vdash \exists X \chi} \quad \mathfrak{a}^+ \quad \left| \quad \frac{\Phi \vdash \exists X \psi \quad \Phi, \psi \vdash \chi}{\Phi \vdash \chi} \quad \mathfrak{a}^- \right.$$

si ψ est substituable à X dans χ si $X \notin \text{VarLib}(\Phi \cup \{\chi\})$

Comme c'est une extension naturelle de la déduction élémentaire (§ 17.2), on note simplement $\vdash$ au lieu de $\vdash [\mathbb{A}^2]$ (v. ex. 22.3).

Remarques

- On peut *démontrer* le schéma de séparation, où X est d'arité la longueur de $\mathbf{x}$:

$$\frac{\frac{\vdash \varphi^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y})[X := \varphi^2]}{\vdash \forall \mathbf{x} (\varphi^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y})) [X := \varphi^2]} \quad \mathfrak{a}^x \quad \mathfrak{v}^+}{\vdash \exists X \forall \mathbf{x} (\varphi^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}))} \quad \mathfrak{a}^+$$

puis quantifier sur $\mathbf{y}, \mathbf{Y}$. Toute formule en $\mathbf{x}$, même du deuxième ordre, définit donc une partie de la n^{e} puissance cartésienne.

- La déduction n'implémente pas de raisonnement par choix. En outre, les différentes formes de choix perdent les interdépendances qu'elles entretiennent dans ZF. V. exercice 22.6.

Cette déduction (qu'on peut dire « avec extensionnalité et séparation ») reflète la sémantique de Henkin de § 22.2. Car la sémantique naïve a de très mauvaises propriétés.

$\mathbb{A}^{2,p}$ • **Satisfaction.** Naïvement la satisfaction paraît claire : $\mathbb{A} \models (\exists_n X)\varphi(X)$ s'il existe une partie $E \subseteq \mathbb{A}^n$ telle que $\mathbb{A} \models \varphi(E)$, etc. On note $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ la sémantique du deuxième ordre pour cette lecture des quantificateurs, dite « pleine » (ou « naïve »). Cette sémantique peut sembler attirante : elle permet d'écrire les énoncés PA^2 et RCF^2 qui caractérisent $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ à isomorphisme près, donc semble une bonne option pour des « fondements ». Mais sa clarté est illusoire. Il faut en effet s'accorder sur le sens de la quantification ensembliste, i.e. sur la notion de sous-ensemble. La relation $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ est donc entièrement tributaire du comportement de la puissance ensembliste $P(\cdot)$.

Exemple. On peut formuler un énoncé φ affirmant $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Alors $\models \varphi [\mathbb{A}^{2,p}]$ dépend de la réalité ensembliste (si l'expression a un sens), ou du cadre ensembliste ambiant sinon. V. exercice 22.4.

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

Cette dépendance n'est pas nécessairement un inconvénient philosophique, mais elle porte un obstacle méthodologique à la maîtrise de $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$. Celle-ci a aussi des défauts techniques.

Proposition.

- (i) La sémantique $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ n'est pas compacte. 5
- (ii) La paire $(\models [\mathbb{A}^{2,p}], \vdash)$ n'est pas fortement complète : on peut avoir $\Phi \models \chi$ $[\mathbb{A}^{2,p}]$ sans $\Phi \vdash \chi$.
- (iii) La paire $(\models [\mathbb{A}^{2,p}], \vdash)$ n'est même pas *faiblement* complète : on peut avoir $\models \chi$ $[\mathbb{A}^{2,p}]$ sans $\vdash \chi$.

Démonstration.

- (i) Soit φ^2 un $\mathbb{A}^2$ -énoncé ayant pour interprétation dans $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ « le domaine est fini », par exemple « toute injection est surjective ». Avec les énoncés élémentaires « le domaine a au moins n éléments », on forme une 15
théorie dénombrable et finiment satisfaisable, mais non satisfaisable.
- (ii) Une telle complétude entraînerait la compacité car $\vdash$ reste finitaire (v. § 11.1).
- (iii) Soit $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$, que l'on ne note plus ; « définissable » signifie *élémentairement définissable dans* $\mathbb{N}$. Soit $\Theta = \{\varphi \in \Lambda_{\omega, \omega}\text{-Én} : \text{PA}^2 \models \varphi [\mathbb{A}^{2,p}]\}$ l'ensemble des énoncés *élémentaires* qui sont conséquence sémantique (pleine) de PA^2 . Par absolue catégoricité de PA^2 dans cette sémantique, $\Theta = \{\varphi \in \Lambda_{\omega, \omega}\text{-Én} : \mathbb{N} \models \varphi\} = \text{Th}(\mathbb{N})$ (théorie élémentaire). 20
Mais PA^2 est un énoncé, donc par complétude faible, Θ est aussi l'ensemble des énoncés élémentaires qui sont conséquence *syntactique* de PA^2 . Par codage de la syntaxe (§ 20.3), $\#\Theta = \#\text{Th}(\mathbb{N})$ est ainsi définissable. Ceci contredit le théorème d'indéfinissabilité de Tarski (§ 21, variation n°3). 25
30 $\square$

Remarques

- Il n'existe en fait aucune $\vdash$ effective et adéquate. Redéfinir « $\vdash$ » par « $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ », reviendrait à définir le démontrable par le vrai. Ce serait renoncer à la notion même de démonstration mathématique.
- Le dernier point doit mener à l'abandon de $\mathbb{A}^{2,p}$ comme tentative de 35
« fondements des mathématiques ». V. notes conclusives.
- La *sémantique de Henkin* (§ 22.2) corrige ces défauts, en renonçant à l'idée que l'expression « l'ensemble des parties de $\mathbb{A}$ » possède un sens intrinsèque.

- Il est prudent d'éviter l'expression « *logique* du deuxième ordre » et de préférer :
 - dans un cadre syntaxique, « *déduction* du deuxième ordre »,
 - dans un cadre sémantique, « *sémantique* (pleine, de Henkin, autre) du deuxième ordre » en indiquant toujours la forme retenue. 5

En conclusion, l'*outil* $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ a pu sembler naturel pour formaliser certaines structures ; mais les propriétés de l'*objet* $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ sont trop mauvaises. *Les deux sous-sections suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.*

§ 22.2. Sémantique de Henkin

Cette sous-section peut être lue indépendamment de § 22.3. 10

La sémantique pleine est prétendument absolue ; en fait elle est implicitement extrinsèque. Elle prétend reposer sur la « vraie notion » de partie. Mais cette notion n'est pas intrinsèque à la structure car elle dépend du cadre ensembliste. La sémantique pleine n'assume même pas cette dépendance, qui reste implicite dans sa notation. 15

On peut vouloir pallier l'absence d'intuition claire de ce qu'est une partie en contrôlant le comportement des variables de deuxième ordre. Cela revient à prescrire où elles prendront leurs valeurs. La *sémantique de Henkin* implémente ainsi le relativisme de la notion de partie, et l'affiche ouvertement. Par opposition à la sémantique pleine, elle n'est pas tributaire de notions ensemblistes 20 externes et rend donc la logique du deuxième ordre autonome. Elle la réduit en revanche à la logique élémentaire.

Définition A (structure et sémantique points-parties).

- Une *structure points-parties* (ou structure d'ordre 2) est la donnée d'une structure relationnelle $\mathbb{A}$, et pour chaque entier n d'une collection $\mathcal{H}_n$ de 25 parties de $\mathbb{A}^n$, i.e. de familles de n -uplets de $\mathbb{A}$.
- Si $(\mathbb{A} ; \mathcal{H})$ est une structure points-parties et φ une formule du deuxième ordre (avec paramètres), on définit $(\mathbb{A} ; \mathcal{H}) \models \varphi$ par la récurrence attendue, les variables de deuxième ordre d'arité n étant assignées dans $\mathcal{H}_n$.

Remarques 30

- La définition d'une structure points-parties n'emploie pas l'axiome de la puissance. Elle signifie que $X \in \mathcal{H}_n$ entraîne $X \subseteq \mathbb{A}^n$.
- Soit $\mathbb{A}$ une structure relationnelle donnée. Des diverses structures points-parties sur $\mathbb{A}$, une est favorisée par la logique du deuxième ordre naïve : $\mathbb{A}$ avec toutes les vraies parties des $\mathbb{A}^n$. Ce modèle est dit « plein » (ou 35 « standard », déconseillé).

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- Cette notion de « vraie partie » est tributaire de structure ensembliste sur $\mathbb{A}$, typiquement d'un cadre ensembliste autour de $\mathbb{A}$. Malgré le nom « vraie partie », il n'y a rien d'absolu puisque cela dépend du cadre choisi.
- Vue depuis la logique multisorte (§ 7.1), une structure points-parties est une structure relationnelle :
 - à une infinité de sortes, E (« éléments ») et les H_n (« parties de n -uplets ») pour $n > 0$,
 - avec des relations $(n + 1)$ -aires ε_n , de type $E^n \times H_n$,
 - vérifiant une forme d'extensionnalité (v. exercice 22.2).

 $\mathbb{A}^{2,H}$ **Définition B** (structure, sémantique, conséquence de Henkin).

- Une *structure de Henkin* est une structure points-parties vérifiant le schéma de séparation suivant, où X n'apparaît pas libre dans la formule du deuxième ordre $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y})$:

$$(\forall \mathbf{Y})(\forall \mathbf{y})(\exists X)(\forall \mathbf{x}) [\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}) \leftrightarrow X(\mathbf{x})].$$

(On a permis non seulement des paramètres mais aussi des *quantifications* des deux ordres dans φ .)

- L'expression « sémantique de Henkin » est souvent utilisée pour dire : « sémantique points-parties, étant entendu que la structure points-parties est de Henkin ». On note alors $(\mathbb{A} ; \mathcal{H}) \models \varphi [\mathbb{A}^{2,H}]$.
- En dérive la notion de conséquence sémantique $\Phi \models \chi [\mathbb{A}^{2,H}]$: c'est la conséquence *pour les structures de Henkin*.

Remarques

- On permet toutes les formules φ du deuxième ordre. V. notes conclusives, *Prédicativisme*. Le système définissable (avec paramètres) de $\mathbb{A}$, au sens de § 14.1, est une structure points-parties mais pas nécessairement une structure de Henkin. En général $\text{Déf}(\mathbb{A})$ vérifie la seule séparation *pré-dicative* (évident en remplaçant d'éventuels paramètres ensemblistes par leur définition élémentaire). V. ex. 22.9.
- La structure pleine est de Henkin. Si $\mathbb{A}$ est fini c'est même la seule car on a permis les paramètres dans la séparation. Mais si $\mathbb{A}$ est infini, alors par phénomènes de Löwenheim-Skolem (§ 13) il existe d'autres structures de Henkin sur $\mathbb{A}$.
- Deux structures de Henkin sur la même structure relationnelle peuvent ne pas vérifier les mêmes $\mathbb{A}^2$ -énoncés. En fait, même la $\mathbb{A}^2$ -théorie de $(\mathbb{A} ; \mathcal{P})$ où $\mathcal{P}_n = P(\mathbb{A}^n)$ (i.e. la structure pleine) n'est pas déterminée par ZF ; penser par exemple à l'hypothèse du continu.

- On n'exige pas de principe de choix. Diverses formulations de tels principes, connues équivalentes dans ZF, ne le sont pas en logique du deuxième ordre (exercice 22.6).
- La sémantique de Henkin est ainsi « avec extensionnalité et séparation », comme la déduction.

5

Théorème. La sémantique de Henkin est correcte et complète : si $\Phi \cup \{\chi\}$ est un ensemble de formules du deuxième ordre, alors $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi \models \chi$ $[\mathbb{A}^{2,H}]$, i.e. ssi toute structure de Henkin vérifiant Φ vérifie χ .

Remarques

- Il suit que la sémantique de Henkin est compacte.
- On peut même contrôler les cardinaux en jeu (v. § 18.(iii)).

10

Démonstration. La correction est claire, puisque la structure de Henkin a les propriétés de clôture requises pour valider les règles de déduction (v. remarque suivant la preuve). La complétude est celle de la logique élémentaire. Une structure de Henkin est en effet une structure de logique élémentaire « à plusieurs sortes » (§ 7.1), à interpréter comme $\{\text{points}\} \cup \{\text{parties de } \mathbb{A}\} \cup \{\text{parties de } \mathbb{A}^2\} \cup \dots$. Or la logique multisorte se réduit à la logique élémentaire « à une seule sorte » (exercices 7.1 et 17.9). Pour l'autonomie de cette preuve on donne un argument *ad hoc*.

20

Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. On ajoute des relations unaires E et H_n pour $n > 0$. La relation E se lit « être un élément », et pour n non nul, H_n se lit « être une relation n -aire », i.e. une partie de la n^{e} puissance cartésienne. On ajoute aussi des relations $(n+1)$ -aires ε_n entre n -uplets de E et éléments de H_n . Soit $\mathcal{L}'$ le langage relationnel obtenu.

25

On sépare les variables élémentaires x_i en une infinité de sous-ensembles infinis, les x_i^e et x_i^n pour $n > 0$. En effet $\mathbb{N}$ contient une infinité d'ensembles infinis. À une variable élémentaire x_i , on associe $x_i' = x_i^e$; à une variable du deuxième ordre $X_{n,i}$ d'arité $n > 0$, on associe $X_{n,i}' = x_i^n$. Ceci traduit les variables de tout ordre, et les termes.

30

La *traduction* d'une $\mathcal{L}$ -formule φ du 2^e ordre est la $\mathcal{L}'$ -formule élémentaire φ' construite ainsi :

- $[X_{n,i}(\mathbf{t})]'$ est $(\mathbf{t}' \varepsilon_n X_{n,i}')$;
- définition évidente au niveau propositionnel;
- $[(\forall x_i)\varphi]'$ est $(\forall x_i')(E(x_i') \rightarrow \varphi')$;
- $[(\exists x_i)\varphi]'$ est $(\exists x_i')(E(x_i') \wedge \varphi')$;

35

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- $[(\forall_n X_{n,i})\varphi]'$ est $(\forall X'_{n,i})(H_n(X'_{n,i}) \rightarrow \varphi')$;
- $[(\exists_n X_{n,i})\varphi]'$ est $(\exists X'_{n,i})(H_n(X'_{n,i}) \wedge \varphi')$.

À une structure de Henkin $(\mathbb{A}; \mathcal{H})$ on associe la $\mathcal{L}'$ -structure $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \sqcup \bigsqcup_{n>0} H_n$ munie de l'interprétation naturelle. Alors pour toute $\mathcal{L}$ -formule du deuxième ordre φ , on a : $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ $[\Lambda^{2,H}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A}' \models \varphi'(\mathbf{a})$ $[\Lambda(\mathcal{L}')$, où la première satisfaction est en sémantique de Henkin et la seconde en logique élémentaire. Le théorème suit donc rapidement de la complétude de cette dernière (§ 18). $\square$

Remarque. Le résultat tient à un équilibre subtil entre ce qu'on permet en syntaxe et ce qu'on exige des structures de Henkin.

- En syntaxe, on n'a pas mis de symbole « d'égalité du deuxième ordre », i.e. de relation entre variables du deuxième ordre. Si l'on en ajoute un (en toute rigueur, un par arité), alors les structures étant de fait extensionnelles vérifient toutes le principe d'extensionnalité :

$$\models (\forall X)(\forall Y)[X = Y \leftrightarrow (\forall \mathbf{z})(X(\mathbf{z}) \leftrightarrow Y(\mathbf{z}))],$$

qu'il faut intégrer au calcul déductif. V. exercice 22.2.

- La règle $\mathbb{I}^-$ reflète le schéma de séparation : si l'on veut des structures « non séparatives » il faut modérer la règle (ex. 22.2).
- De même, si l'on veut incorporer un principe de choix, il faut se restreindre aux structures de Henkin ayant les propriétés attendues.

La logique du deuxième ordre oscille ainsi entre la réduction à la logique élémentaire (sémantique de Henkin) et l'ontologie ensembliste (sémantique pleine) : soit elle n'apporte rien de nouveau, soit elle n'apporte rien de sûr.

§ 22.3. Ordre encore supérieur

Cette sous-section peut être lue indépendamment de § 22.2.

L'énoncé « il existe sur $(G; \cdot)$ une topologie le rendant compact » n'est pas du deuxième mais du troisième ordre car une topologie est la donnée d'une famille de parties. On note $\mathbb{A}^n$ la logique du n^{e} ordre et $\mathbb{A}^\omega$ leur réunion. Les collections de formules et les relations de satisfaction s'étendent successivement, sans conflit. Mais ces ordres supérieurs sont redondants : tout énoncé du n^{e} ordre équivaut naturellement à un énoncé du 2^e ordre, dans le sens suivant. $\Lambda = \Lambda^1$ désigne la logique élémentaire.

Théorème. Pour tout langage $\mathcal{L}$, il existe un langage $\mathcal{L}^*$, et une traduction naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^\omega(\mathcal{L})\text{-Form} & \rightarrow & \Lambda(\mathcal{L}^*)\text{-Form} \\ \varphi & \mapsto & \varphi^* \end{array}$$

telle que pour tout $\mathbb{A}^\omega(\mathcal{L})$ -énoncé φ , il existe un énoncé $\theta_\varphi \in \mathbb{A}^2(\mathcal{L}^*)$ ne dépendant que du langage de φ et vérifiant : $\models \varphi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\models \theta_\varphi \rightarrow \varphi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. 5

Remarques

- Soit φ' l'énoncé $\theta_\varphi \rightarrow \varphi^*$. Étant du deuxième ordre en un langage étendu, il n'est pas littéralement équivalent à φ . Mais $\models \varphi [\mathbb{A}^{\omega,p}]$ équivaut à $\models \varphi' [\mathbb{A}^{2,p}]$.
- L'énoncé traduit φ^* est élémentaire, mais θ_φ est bien d'ordre supérieur. 10
Sinon, on aurait ramené la sémantique pleine à la sémantique de la logique élémentaire ; elle hériterait alors de bonnes propriétés (compacité, complétude) qu'elle n'a pas (§ 22.1).

Remarque (variante henkinienne). On peut également introduire la sémantique de Henkin d'ordre supérieur $\mathbb{A}^{\omega,H}$. La démonstration donne même $\models \varphi [\mathbb{A}^{\omega,H}(\mathcal{L})]$ ssi $\models \theta_\varphi \rightarrow \varphi^* [\mathbb{A}^{2,H}(\mathcal{L}^*)]$. L'intérêt est très relatif, puisque la relation $\models [\mathbb{A}^{\omega,H}]$ est déjà naturellement de la logique élémentaire. V. ex. 22.8. 15

Démonstration. Elle se conduit naturellement en logique multisorte, mais pour ne pas dépendre de § 7.1 on donne un argument *ad hoc*. 20

Types. Ce sont les objets de la collection $\mathcal{T}$ définie par :

- 0 est un type ;
- si $n > 1$ et $\tau_1, \dots, \tau_n$ sont des types, alors $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ est un type.

Par construction, tout type non nul est de la forme $(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Structure supérieure pleine. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$ -structure. Notant $P(\cdot)$ l'ensemble des parties, on définit récursivement les $\mathcal{P}_\tau$ par : 25

$$\begin{cases} \mathcal{P}_0 &= \mathbb{A} \\ \mathcal{P}_{(\tau_1, \dots, \tau_n)} &= P(\mathcal{P}_{\tau_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{\tau_n}). \end{cases}$$

Langage typant. Pour chaque type τ , soit R_τ une relation unaire. Pour chaque type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \neq 0$, soit ε_τ une relation $(n+1)$ -aire, avec n arguments à gauche et un seul à droite. Soit enfin :

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{R_\tau : \tau \in \mathcal{T}\} \cup \{\varepsilon_\tau : \tau \in \mathcal{T} \setminus \{0\}\}.$$

Foncteur d'aplatissement vers structure typante. À toute $\mathcal{L}$ -structure $\mathbb{A}$ on associe la $\mathcal{L}^*$ -structure $\mathbb{A}^*$:

- de domaine $\bigsqcup_{\tau} \mathcal{P}_{\tau}$;
- où $R_{\tau}[\mathbb{A}^*] = \mathcal{P}_{\tau}$;
- où $\varepsilon_{\tau}[\mathbb{A}^*] = \{(\mathbf{y}, X) : \mathbf{y} \in X \wedge X \in \mathcal{P}_{\tau}\}$, i.e. le graphe de l'appar- 5
tenance typée ;
- où $\mathcal{L}$ est interprété naturellement dans $R_0[\mathbb{A}^*] = \mathbb{A}$.

Foncteur de restriction à la sous-structure pertinente. À toute $\mathcal{L}^*$ -structure $\mathbb{B}$, on associe la $\mathcal{L}^*$ -structure $\mathbb{B}$:

- de domaine $\bigsqcup_{\tau} R_{\tau}[\mathbb{B}]$, 10
- pour la sous- $\mathcal{L}^*$ -structure naturellement induite.

Traduction des formules. En ordre supérieur, il y a autant de collections de variables que de types. La différence minuscule/majuscule est dorénavant contextuelle, par commodité ; on renonce à distinguer $\forall$ et $\forall$. On traduit les variables de tout type X en variables *élémentaires* X^* ; 15
c'est possible car $\mathbb{N}$ contient une infinité d'ensembles infinis disjoints. Pour un uplet $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ (leur type peut ne pas être le même), on note $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$. La traduction $\mathbb{A}^{\omega}(\mathcal{L}) \rightarrow \Lambda(\mathcal{L}^*)$ est définie comme suit :

- si $R \in \mathcal{L}$, alors $(R(\mathbf{x}))^*$ est $R(\mathbf{x}^*)$; 20
- si X est une variable de type τ , alors $(X(\mathbf{y}))^*$ est $\mathbf{y}^* \varepsilon_{\tau} X^*$;
- $(\neg \varphi)^*$ est $\neg \varphi^*$, et $(\varphi_1 \sqcap \varphi_2)^*$ est $\varphi_1^* \sqcap \varphi_2^*$;
- $(\forall X \varphi)^*$ est $(\forall X^*)(R_{\tau}(X^*) \rightarrow \varphi^*)$, et $(\exists X \varphi)^*$ est $(\exists X^*)(R_{\tau}(X^*) \wedge \varphi^*)$.

Noter que φ^* est *élémentaire*. 25

Théorie typante. Soit Θ la $\mathbb{A}^2(\mathcal{L}^*)$ -théorie formée des axiomes suivants :

- le domaine de base n'est pas vide : $(\exists x)R_0(x)$;
- les types sont disjoints : pour $\tau_1 \neq \tau_2$, l'axiome $\neg(\exists x)(R_{\tau_1}(x) \wedge R_{\tau_2}(x))$;
- chaque relation du langage ne porte que sur les objets de base : 30
pour chaque relation R du langage $\mathcal{L}$, disons n -aire, l'axiome $(\forall \mathbf{x})(R(\mathbf{x}) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^n R_0(x_i))$;
- l'appartenance est typée : pour chaque type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \neq 0$,

l'axiome de typage :

$$(\forall x)(\forall \mathbf{y}) \left(\mathbf{y} \varepsilon_\tau x \rightarrow R_\tau(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^n R_{\tau_i}(y_i) \right);$$

- l'appartenance est extensionnelle : pour chaque type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \neq 0$, l'axiome d'extensionnalité :

$$(\forall x)(\forall y)[(\neg R_0(x) \wedge \neg R_0(y) \wedge (\forall \mathbf{z})(\mathbf{z} \varepsilon_\tau x \leftrightarrow \mathbf{z} \varepsilon_\tau y)) \rightarrow (x = y)];$$

- pour chaque type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \neq 0$, l'axiome *de deuxième ordre* de séparation/réduction, qui emploie l'abréviation évidente $X \subseteq R_{\tau_1} \times \dots \times R_{\tau_n}$:

$$(\forall X) \left\{ \begin{array}{l} (X \subseteq R_{\tau_1} \times \dots \times R_{\tau_n}) \\ \rightarrow (\exists x) [R_\tau(x) \wedge (\forall \mathbf{y})(X(\mathbf{y}) \leftrightarrow \mathbf{y} \varepsilon_\tau x)] \end{array} \right\}.$$

(Vu dans $\mathbb{A}^*$, c'est une instance de la séparation. Mais vu depuis $\mathbb{A}$, l'axiome procure une forme de réduction.)

Étape 1. Dans ces notations :

- (i) si $\mathbb{A} \in \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str}$, alors $\mathbb{A}^* \models \Theta [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$; 10
- (ii) si $\mathbb{B} \models \Theta [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, alors il existe $\mathbb{A}$ tel que $\check{\mathbb{B}} \simeq \mathbb{A}^* [\mathcal{L}^*\text{-}\mathbf{Str}]$; 15
- (iii) pour chaque $\varphi \in \mathbb{A}^\omega(\mathcal{L})\text{-}\acute{\text{En}}$, on a : $\mathbb{A} \models \varphi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A}^* \models \varphi^* [\Lambda(\mathcal{L}^*)]$; 15
- (iv) si $\mathbb{B} \models \Theta [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, alors :
 - $\check{\mathbb{B}} \models \Theta [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$;
 - pour $\varphi \in \mathbb{A}^\omega(\mathcal{L})\text{-}\acute{\text{En}}$, on a : $\mathbb{B} \models \varphi^* [\Lambda(\mathcal{L}^*)]$ ssi $\check{\mathbb{B}} \models \varphi^* [\Lambda(\mathcal{L}^*)]$. 20

Vérification.

- (i) Tous les axiomes élémentaires sont évidents. On considère une instance de type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ de la séparation. Soit B une partie n -aire de type $\tau_1 \times \dots \times \tau_n$; elle a pour éléments des uplets de points de R_{τ_i} . Ceci définit, au sens ensembliste, une partie de $\mathcal{P}_{\tau_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{\tau_n}$, i.e. un point $b \in \mathcal{P}_\tau$. Il est clair que ce point convient. 25
- (ii) Soit $\mathbb{A} = R_0[\mathbb{B}]$. On définit par récurrence un $\mathcal{L}^*$ -isomorphisme en mettant en correspondance naturelle chaque P_τ avec $R_\tau[\mathbb{A}]$. La lecture unique des types en garantit le bien fondé. 30
- (iii) Si $\mathbf{a}$ est un choix de paramètres « supérieur » (les variables de type

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

τ prennent des valeurs dans $\mathcal{P}_\tau$), on définit un choix de paramètres élémentaires par $\mathbf{a}^*(X^*) = \mathbf{a}(X)$. On montre alors par récurrence immédiate sur les formules à paramètres : $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a}) [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A}^* \models \varphi^*(\mathbf{a}^*) [\mathbb{A}(\mathcal{L}^*)]$.

- (iv) Plus généralement, si χ^2 est une $\mathbb{A}^2(\mathcal{L}^*)$ -formule « à quantification typée », i.e. où les variables élémentaires appartiennent à des R_τ et les variables d'ordre 2 sont incluses dans des R_τ , avec des paramètres $\mathbf{a}$ bien typés, alors : $\mathbb{B} \models \chi^2(\mathbf{a}) [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$ ssi $\check{\mathbb{B}} \models \chi^2(\mathbf{a}) [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. C'est une récurrence immédiate. Les deux points en dérivent. $\diamond$ ¹⁰

Étape 2. $\Phi \models \chi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\Theta \cup \Phi^* \models \chi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$.

Vérification. Les références renvoient à l'étape 1.

- Supposons $\Phi \models \chi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. Soit $\mathbb{B} \models \Theta \cup \Phi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. D'après (ii), ¹⁵ il existe une $\mathcal{L}$ -structure $\mathbb{A}$ telle que $\mathbb{A}^* \simeq \check{\mathbb{B}} [\mathcal{L}^*\text{-Str}]$. Comme $\mathbb{B} \models \Phi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, grâce à (iv) on a $\mathbb{A}^* \models \Phi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, d'où par (iii) $\mathbb{A} \models \Phi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. Donc par hypothèse $\mathbb{A} \models \chi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$, puis à nouveau par (iii) $\mathbb{A}^* \models \chi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. Ainsi $\check{\mathbb{B}} \models \chi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$ puis d'après (iv) $\mathbb{B} \models \chi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, comme voulu. ²⁰
- Supposons $\Theta \cup \Phi^* \models \chi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. Soit $\mathbb{A} \models \Phi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. Alors $\mathbb{A}^* \models \Phi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, mais aussi $\mathbb{A}^* \models \Theta [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. Par hypothèse, $\mathbb{A}^* \models \chi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$, d'où $\mathbb{A} \models \chi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$. $\diamond$

Étape 3. Si Φ est fini, alors une partie finie de Θ suffit.

(On n'affirme aucune forme de compacité.) ²⁵

Vérification. Soit φ un $\mathbb{A}^\omega(\mathcal{L})$ -énoncé. Il n'emploie qu'un nombre fini de symboles de $\mathcal{L}$ et de types. On peut même supposer l'ensemble $\mathcal{T}_\varphi$ des types mentionnés dans φ clos héréditairement, i.e. si $(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathcal{T}_\varphi$ alors les τ_i sont dans $\mathcal{T}_\varphi$; il reste fini. Soit $\mathcal{L}_\varphi^* \subseteq \mathcal{L}^*$ qui emploie ces symboles et ces ³⁰ types. Soit $\Theta_\varphi = \Theta \cap \mathbb{A}^2(\mathcal{L}_\varphi^*)$ -Én, qui est une axiomatisation *finie*. Elle se ramène donc à un $\mathbb{A}^2(\mathcal{L}_\varphi^*)$ -énoncé θ_φ .

On allège les foncteurs précédents en notant $\mathbb{A}_\varphi^*$ et $\check{\mathbb{B}}_\varphi$ la réunion des seuls types mentionnés. Les propriétés de l'Étape 1 restent valables, mutatis mutandis; par exemple (iii) et (iv) ne valent que pour des $\mathcal{L}_\varphi^*$ -énoncés. ³⁵ Comme à l'Étape 2, on conclut : $\models \varphi [\mathbb{A}^{\omega,p}(\mathcal{L})]$ ssi $\theta_\varphi \models \varphi^* [\mathbb{A}^{2,p}(\mathcal{L}^*)]$. $\diamond$

Ceci termine la démonstration. □

On rappelle l'importance de ne pas confondre *logique d'ordre supérieur*, où les types sont entièrement fixés à l'avance, et *théorie des types*, qui vise à décrire leur comportement.

Exercices

5

On note $\Lambda_{\omega,\omega}$ la logique élémentaire, $\mathbb{A}^2$ la syntaxe du deuxième ordre, $\mathbb{A}^{2,p}$ sa sémantique naïve, et $\mathbb{A}^{2,H}$ sa sémantique de Henkin.

22.1 (des redondances inattendues). On sait qu'avec $\perp_c$, les symboles de $\Lambda_{\omega,\omega}$ sont redondants (ex. 17.4). Or même sans $\perp_c$, les symboles $=, \wedge, \vee, \exists$ sont redondants pour $\vdash [\mathbb{A}^2]$.

- Vérifier que la relation $(\forall X)(X(x) \rightarrow X(y))$ est une relation d'équivalence, et que les règles de $=$ sont dérivables. 10
- On définit $(\exists x \varphi)$ par $(\forall Y)[(\forall x)(\varphi \rightarrow Y) \rightarrow Y]$, où Y n'apparaît pas libre dans φ (ni dans les éventuelles hypothèses en cours). De même on définit $(\exists X \varphi)$ par $(\forall Y)[(\forall X)(\varphi \rightarrow Y) \rightarrow Y]$ (idem). Montrer qu'on émule $\exists^+, \exists^-, \exists^+, \exists^-$ à partir des autres règles.
- Montrer $\vdash X \leftrightarrow (\forall Y)((X \rightarrow Y) \rightarrow Y)$. En déduire une définition de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ et une de $\varphi_1 \vee \varphi_2$ qui permettent de récupérer $\wedge^+, \wedge^-, \vee^+, \vee^-$. 15

22.2. Les deux parties sont indépendantes.

- Structures non extensionnelles.** On ajoute au langage des relations d'égalité d'ordre 2 (une par arité). Une *structure points-relations* est la donnée d'une structure relationnelle, et pour chaque entier n d'une collection de relations n -aires sur $\mathbb{A}$. Une telle structure est dite *extensionnelle* si elle vérifie $(\forall X)(\forall Y)[X = Y \leftrightarrow (\forall \mathbf{x})(X(\mathbf{x}) \leftrightarrow Y(\mathbf{x}))]$. 20
 - À toute structure points-parties associer une structure extensionnelle.
 - Énoncer et démontrer un théorème de complétude à la Henkin avec les égalités d'ordre 2 (sans supposer l'extensionnalité).
- Structures non séparatives.** Pour la lisibilité on élimine $\exists$ au profit de $\forall$. Soit $\check{\mathbb{A}}^2$ le calcul déductif où $\forall^-$ est affaibli en : 25

$$\frac{\Gamma \vdash \forall X \varphi^2}{\Gamma \vdash \varphi^2[X := Y]} \forall^{-'}$$

- Montrer que dans $\check{\mathbb{A}}^2$, le schéma de séparation équivaut aux règles $\forall^-$.
- Montrer la complétude de $\check{\mathbb{A}}^2$ pour la classe de toutes les structures points-parties.

La séparation est une propriété ensembliste plutôt que logique. L'exercice distingue les deux plans : la règle $\forall^{-'}$ qui permet seulement de changer de variable est logique, mais la règle $\forall^-$ est son extension par le schéma de séparation ensembliste. 30

→ **22.3.** Soit Λ la logique élémentaire. Montrer que si Φ, χ sont élémentaires et $\Phi \vdash \chi [\mathbb{A}^2]$, alors $\Phi \vdash \chi [\Lambda]$. (V. § 18, notes conclusives, *Speed-up*.)

22.4. On se place dans le langage $=$, en sémantique pleine du deuxième ordre $\models [\mathbb{A}^{2,p}(=)]$. 35

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

- a. Formuler : (i) X est infini ; (ii) X est dénombrable ; (iii) $\text{card } X = \text{card } Y$; (iv) $\text{card } X \leq \text{card } Y$; (v) X est de cardinal continu ; (vi) $\text{card } Y = 2^X$.
- b. Énoncer : (i) l'hypothèse du continu ; (ii) l'hypothèse généralisée du continu (pour tout ensemble infini, pas de cardinal intermédiaire entre $\text{card } X$ et $\text{card } P(X)$).
- c. Énoncer *et démontrer* : (i) le « théorème du saut » de Cantor (§ 1.1) ; (ii) le théorème 5 de Cantor-Bernstein (§ 1.2).

22.5 (réduction aux relations binaires). Soit AC^2 l'énoncé : « il existe deux fonctions unaires π_1 et π_2 codant pour les projections d'un appariement $\mathbb{A}^2 \simeq \mathbb{A}$ ». Construire une traduction $\varphi \mapsto \varphi^*$ entre $\mathcal{L}$ -énoncés du deuxième ordre, telle que :

- les variables de relations de φ^* sont *au plus binaires* ; 10
- $\text{AC}^2 \models \varphi \leftrightarrow \varphi^* [\mathbb{A}^{2,H}]$.

L'étude des structures infinies peut donc être menée pour les seules relations binaires, modulo la forme de choix « carré de Tarski » ; v. ex. 25.2.

22.6 (formes du choix en logique supérieure). Cet exercice montre que diverses formes de choix connues équivalentes dans ZF (v. § 25.2) ne le sont pas dans $\mathbb{A}^2$. On ne fait pas d'hypothèses ensemblistes et l'on travaille en sémantique de Henkin $\mathbb{A}^{2,H}$. Soit $A = \mathbb{N}$. Le groupe $G = \text{Sym}(A)$ agit sur $P(A^n)$ par $g \cdot B = \{g \cdot \mathbf{a} : \mathbf{a} \in B\}$. Pour éviter les confusions, on distingue deux notations :

- $\text{Stab}(\{B\})$ le stabilisateur de $B \in P(A^n)$ dans son ensemble ;
- $\text{Stab}(B) = \bigcap_{a \in B} \text{Stab}(a)$ le stabilisateur de $B \subseteq A^n$ point par point. 20

Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{P}^n = \{B \subseteq A^n : \text{il existe } F \subseteq A \text{ fini tel que } \text{Stab}(\{F\}) \leq \text{Stab}(B)\}$.

- a. Montrer que $\mathbb{A} = (A ; (\mathcal{P}^n))$ est une structure de Henkin.
- b. Montrer $\mathbb{A} \not\models$ « toute partie est bien ordonnable ».
- (*) c. Montrer $\mathbb{A} \models$ « toute relation binaire possède une fonction de choix », i.e. $f : \text{dom } R \rightarrow \text{im } R$ de graphe inclus dans R . [Prendre F fini tel que $\text{Stab}(\{F\}) \leq \text{Stab}(R)$, et effectuer 25 des découpages pour se ramener à $\text{dom } R \cap F = \emptyset$ puis $R \cap \{(a, a) : a \in A\} = \emptyset$.]
- d. Conclure.

22.7 (néologisme). Soit $\#$ un symbole de fonction du 3^e ordre, qui prend en argument une relation unaire et renvoie un objet ; son type est $(0) \rightarrow 0$, ou encore $((0), 0)$. Soit $X \sim Y$ la relation d'équipotence $(\mathbb{A}f)(f : X \simeq Y)$. Soit φ_{∞}^2 un énoncé du deuxième ordre exprimant 30 « le domaine est infini ». Soit l'énoncé :

$$\varphi_{\text{Hume}}^2 : (\forall X)(\forall Y)(\#X = \#Y \leftrightarrow X \sim Y).$$

Soit $0 = \# \perp$, où $\perp$ est vu comme relation unaire. Soit $s(x, y)$ la relation :

$$(\mathbb{A}X)(\mathbb{A}Y)(\exists z) \left[(\#X = x) \wedge (\#Y = y) \wedge Y(z) \wedge \neg X(z) \right] \wedge (\forall t)(Y(t) \leftrightarrow X(t) \vee t = z).$$

Soit $\mathbb{A} \models \varphi_{\infty}^2 \wedge \varphi_{\text{Hume}}^2 [\mathbb{A}^{2,H}]$. On montre que $\mathbb{A}$ « construit » les entiers. 35

- a. Montrer que s est fonctionnelle, puis justifier la définition : « soit $\mathbb{N}$ la s -orbite de 0, i.e. l'intersection de toutes les parties closes sous s et contenant 0 ». Vérifier que $\mathbb{N}$ hérite d'une structure de Henkin.
- b. Montrer que s est totale sur $\mathbb{N}$.
- c. Montrer $(\mathbb{N} ; 0, s) \models \text{PA}^2 [\mathbb{A}^{2,H}]$. 40

22. Logique d'ordre supérieur

22.8. Esquisser les aménagements nécessaires pour obtenir l'analogue du théorème § 22.3 en sémantique de Henkin, i.e. $\models \varphi [\mathbb{A}^{\omega, H}(\mathcal{L})]$ ssi $\models \theta_\varphi \rightarrow \varphi^* [\mathbb{A}^{2, H}(\mathcal{L}^*)]$.

22.9 (structures de Henkin et définissabilité). (Prérequis : § 14.) Si $\mathbb{A}$ est une $\mathcal{L}$ -structure, $\text{Déf}(\mathbb{A})$ désigne la collection des parties élémentairement définissables (avec paramètres) des $\mathbb{A}^n$. 5

- Vérifier que $\text{Déf}(\mathbb{A})$ est incluse dans chaque structure de Henkin sur $\mathbb{A}$.
- Montrer que la réciproque est fautive : il peut exister une partie présente dans toute structure de Henkin mais non élémentairement définissable. [$\text{Déf}(\mathbb{N}; \leq)$.]
- Soit $\mathbb{A}$ dénombrable et $\aleph_0$ -catégorique. Montrer que $\text{Déf}(\mathbb{A})$ est une structure de Henkin. [Admettre qu'une partie est $\emptyset$ -définissable ssi $\text{Aut}(\mathbb{A})$ -invariante ; compléments § M.3.] 10
- En déduire qu'en général, $\nVdash (\forall x)(\exists y)[\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, f(x))]$. Cette non-démontrabilité de l'existence de fonctions de Skolem peut aussi s'interpréter comme un trop grand laxisme des structures de Henkin, dont la définition ne demande pas de choix.

D'après b, $\text{Déf}(\mathbb{A})$ n'est pas nécessairement une structure de Henkin sur $\mathbb{A}$.

22.10 (catégoricité interne). On laisse de côté l'existence de modèles ; la catégoricité 15 signifie ici « au plus un modèle ».

Définition (catégoricité interne). Soient $\mathcal{L}$ un langage fini et Θ une $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$ -théorie.

- Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux copies disjointes de $\mathcal{L}$, M_1, M_2 deux relations unaires, et $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \{M_1, M_2\}$.
- Pour $\varphi \in \Theta$, soit φ_i l'énoncé obtenu en relativisant les quantifications à M_i et en remplaçant chaque symbole de $\mathcal{L}$ par le symbole de $\mathcal{L}_i$ associé. Soit $\Theta_i = \{\varphi_i : \varphi \in \Theta\}$.
- Soit ι le $\mathbb{A}^2(\hat{\mathcal{L}})$ -énoncé : « il existe un isomorphisme $(M_1 ; \mathcal{L}_1) \simeq (M_2 ; \mathcal{L}_2)$ ».
- Θ est *internement catégorique* si $\Theta_1 \cup \Theta_2 \models \iota [\mathbb{A}^{2, H}(\hat{\mathcal{L}})]$.
- a. Montrer qu'une théorie internement catégorique est absolument catégorique.
- b. Donner une théorie absolument catégorique mais non internement catégorique [Ex. 22.9.c.] 25
- c. Soient $\mathcal{L} = \{R_1, \dots, R_n\}$ et θ un $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$ -énoncé internement catégorique. Montrer que pour tout $\mathbb{A}^2(\mathcal{L})$ -énoncé φ , on a $\models [(\forall \mathbf{R})(\theta \rightarrow \varphi)] \vee [(\forall \mathbf{R})(\theta \rightarrow \neg \varphi)] [\mathbb{A}^{2, H}]$.
- d. Montrer que PA^2 est internement catégorique.
- (*) e. Montrer que RCF^2 est internement catégorique. [Bâtir des isomorphismes $i_{\mathbb{N}}, i_{\mathbb{Z}}, i_{\mathbb{Q}}, i_{\mathbb{R}}$.]

22.11 (logiques incomplètes). Montrer l'incomplétude faible de la sémantique *faible/finie* 30 du deuxième ordre $\mathbb{A}^{2, f}$ (v. notes conclusives), et de l'extension de la logique élémentaire par le quantificateur « il existe une infinité » $\Lambda_{\omega, \omega}(\exists_{\geq \aleph_0})$.

Notes conclusives

- Tout du long, $\Lambda_{\omega, \omega}$ désigne la logique élémentaire, $\mathbb{A}^2$ la syntaxe du deuxième 35

ordre, $\mathbb{A}^{2, p}$ sa sémantique naïve et $\mathbb{A}^{2, H}$ sa sémantique de Henkin. Le choix de $\mathbb{A}^{2, p}$ revient à faire l'étude du cadre ensembliste ambiant. • [Shapiro] célèbre $\mathbb{A}^2$ pour rai-

[Shapiro] : Stewart SHAPIRO. *Foundations without foundationalism*. T. 17. Oxford Logic Guides. A case for second-order logic. New York : The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991, p. xx+277

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

sons épistémologiques discutables. Ses parties mathématiques [Shapiro, chapitres 5 et 6] sont instructives.

• **Repères historiques**

*Diese nenne ich Functionen erster, jene Functionen zweiter Stufe. Ebenso unterscheide ich Begriffe erster und zweiter Stufe*¹). *Functionen zweiter Stufe hat man eigentlich in der Analysis längst gehabt, z. B. in den bestimmten Integralen, sofern man die zu integrierende Function als Argument betrachtet.*

Avec sa note :

1) Vergl. meine Grundlagen der Arithmetik (Breslau 1884) § 53 am Ende, wo ich statt „zweiter Stufe“, „zweiter Ordnung“ gesagt habe. Der ontologische Beweis für das Dasein Gottes leidet an dem Fehler, dass er die Existenz wie einen Begriff erster Stufe behandelt.

[Frege3, p. 27]

Frege fait référence à : « So kann man einen Begriff unter einen höhern, so zu sagen einen Begriff zweiter Ordnung fallen lassen. » [Frege2, § 53]

Logique du deuxième ordre. • L'opposition entre « premier » et « deuxième ordre » est souvent attribuée à Frege. Peirce [Pei85] a « first/second intentional ». • Hilbert attendait beaucoup de la logique du deuxième ordre, son fragment élémentaire n'étant pour lui qu'un terrain d'essai. • Quine a nié son

statut de logique : $\Lambda^{2,p}$ est une théorie des ensembles (v. § 7, notes conclusives). De fait, la relation $\models [\Lambda^{2,p}]$ dépend lourdement du cadre ensembliste retenu (v. § 28, notes conclusives et § 29, notes conclusives).

5 **Incomplétude de la sémantique naïve.** Notée par Gödel dans son annonce des théorèmes d'incomplétude [Göd30b, p. I]. Ex. 22.11 : [Mos57a] pour $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geq \aleph_0})$.

10 **Sémantique de Henkin.** Origine [Hen50]. En fait Henkin inventa la méthode suivie en § 18 pour établir la complétude de $\Lambda^{2,H}$: « The very first question I asked myself was whether I could use the method that gave me completeness for type theory, to get a new proof of Gödel's completeness for first-order logic. » [Hen96, p. 152]

15 **Réduction au deuxième ordre (théorème § 22.3).** [Hin55, p. 99], généralisé à des ordres transfinis dans [Mon65, § 2].

20 **Terminologie.** • L'expression « logique du deuxième ordre » est ambiguë. Elle peut désigner une déduction, ainsi qu'une variété de sémantiques concurrentes, plus ou moins dépendantes du cadre ensembliste.

25 **Retour sur l'incomplétude.** Par incomplétude de $\Lambda^{2,p}$, il existe un Λ^2 -énoncé cohérent mais non satisfaisable en sémantique pleine. Contrairement à une idée hâtive, $\text{PA}^2 \wedge \neg \ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner$ ne convient pas. Soit

[Frege3] : Gottlob Frege. « Function und Begriff ». In: Jena: Hermann Pohle, 1891

[Frege2] : Gottlob FREGE. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau : Wilhelm Koebner, 1884. 119 p.

[Pei85] : Charles PEIRCE. « On the Algebra of Logic : A Contribution to the Philosophy of Notation ». In : *Amer. J. Math.* 7.2 (1885), p. 180-202

[Göd30b] : Kurt GÖDEL. « Einige mathematische Resultate über Entscheidungsdefintheit und Widerspruchsfreiheit ». In : *Anzeiger Wien* 67 (1930), p. 214-215

[Mos57a] : Andrzej MOSTOWSKI. « On a generalization of quantifiers ». In : *Fund. Math.* 44 (1957), p. 12-36

[Hen50] : Leon HENKIN. « Completeness in the theory of types ». In : *J. Symbolic Logic* 15 (1950), p. 81-91

[Hen96] : Leon HENKIN. « The discovery of my completeness proofs ». In : *Bull. Symbolic Logic* 2.2 (1996), p. 127-158

[Hin55] : Jaakko HINTIKKA. « Reductions in the theory of types ». In : *Acta Philos. Fenn.* 8 (1955), p. 57-115

[Mon65] : Richard MONTAGUE. « Reductions of higher-order logic ». In : *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley)*. North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 251-264

22. Logique d'ordre supérieur

φ cet énoncé; il n'est certes pas satisfaisable en sémantique pleine, mais il n'est pas cohérent non plus. En effet PA^2 en sémantique de Henkin est la théorie Z^2 , qui entraîne $\ulcorner Coh(PA) \urcorner$ (ex. ??). Soit plutôt χ l'énoncé $PA^2 \wedge \neg \ulcorner Coh(PA^2) \urcorner$, aussi peu satisfaisable. S'il était incohérent, alors $PA^2 \vdash \ulcorner Coh(PA^2) \urcorner$ entraînerait, par incomplétude, l'incohérence de PA^2 . En revanche, χ n'est pas « naturel ». Friedman a conjecturé [Fri99] qu'il n'existait pas d'exemple naturel (en un sens culturel : la publication à *Annals of Mathematics*) de cette incomplétude. • Même en pardonnant son absence de complétude faible (et de compacité), on peut continuer à médire de $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ (§ 28, notes conclusives et § 29, notes conclusives).

axiomatisations finies absolument catégoriques de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ et de $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, $\mathbb{A}^{2,p}$ paraît formaliser des structures incontournables. Elle est à la base d'un « premier structuralisme », celui de Dedekind et Hilbert. Le consensus actuel « premier ordre + ZF » est plus récent : il date des années 1920. V. § 23, notes conclusives. • [Vää12b] compare $\mathbb{A}^{2,p}$ à une forme implicite et locale de théorie des ensembles. [Vää12b, §§ 1-3 et 5] sont accessibles en première lecture; § 4 est plus technique mais tout l'article est recommandé.

• **Complexité de la satisfaction $\mathbb{A}^{2,p}$.** Discutée en § 28, notes conclusives.

• **$\mathbb{A}^2$ comme fondements ?** • On peut tenir que la question des « fondements des mathématiques » n'est pas mathématique, et encore moins de logique mathématique. Cette discipline représente les théories mathématiques les unes dans les autres, avec pour conséquence que les mathématiques n'ont pas d'ordre. Toute tentative de fonder les mathématiques, et surtout le déni des phénomènes d'incomplétude, tient ainsi du *complexe de Descartes* brillamment nommé par Fraïssé. Le plaidoyer [Shapiro] ne fait donc pas l'unanimité. La quête de fondements unifiés est d'ailleurs très récente. • Plus mathématique est la question de *comparer* des fondements. On fait momentanément abstraction du mauvais comportement de $\models [\mathbb{A}^{2,p}]$ (v. supra). • Par sa capacité à donner des

• **Logicisme (ex. 22.7).** Suite de § 7, notes conclusives. • L'énoncé φ_{Hume}^2 est appelé « principe de Hume » [Hume, Book I, Part III, Section I] par les spécialistes de Frege, ce dernier ayant dans [Frege2, § 63] exhumé la référence. • À la suite du renouveau de l'intérêt pour Frege [Wright], il fut observé que l'argument de [Frege4, § 34 sqq] pour « construire les nombres » n'employait pas la loi v dont Russell établit l'inanité; p. ex. [Boo95a, p. 443]. • En termes techniques de § 14, « le théorème de Frege » est que $\{\varphi_\infty, \varphi_{\text{Hume}}^2\}$ interprète l'arithmétique. Plus de détails dans [Boo95b, Appendix]. • On appelle « néologicisme » l'appareil de commentaires autour de ce mince énoncé. Première introduction [LZ06]; réf-

[Fri99] : Harvey FRIEDMAN. *Grand conjectures*. Message électronique sur la liste FOM. 1999
[Vää12b] : Jouko VÄÄNÄNEN. « Second order logic or set theory ? » In : *Bull. Symbolic Logic* 18.1 (2012), p. 91-121

[Hume] : David HUME. *A Treatise of Human Nature*. London : John Noon, 1739. 274 p.

[Wright] : Crispin WRIGHT. *Frege's conception of numbers as objects*. T. 2. Scots Philosophical Monograph Series. Aberdeen University Press, Aberdeen, 1983, p. xxi+193

[Frege4] : Gottlob FREGE. *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band*. Jena : Hermann Pohle, 1893. xxxii + 245

[Boo95a] : George BOOLOS. « Saving Frege from contradiction ». In : *Frege's philosophy of mathematics*. Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 438-452

[Boo95b] : George BOOLOS. « The standard of equality of numbers ». In : *Frege's philosophy of mathematics*. Cambridge, MA : Harvard Univ. Press, 1995, p. 234-254

[LZ06] : Bernard LINSKY et Edward ZALTA. « What is neologicism ? » In : *Bull. Symbolic Logic* 12.1 (2006), p. 60-99

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

rence [Burgess] ; on sort de la logique mathématique.

- **Prédicativisme.** Le terme serait de Russell [Rus07]. • Par définition, une structure de Henkin vérifie la φ -séparation pour toutes les formules du deuxième ordre. On parle de séparation *imprédictive*. • Une version plus modérée se limite aux formules à quantification élémentaire ; on parle alors de *séparation prédictive*. Les structures points-parties vérifiant la seule séparation prédictive n'ont pas de nom. On propose *structures de Henkin prédictives*. • Poincaré [Poi06, IX] puis Weyl [Weyl] virent en toute forme d'imprédictivité un « cercle vicieux ». La définition de la borne supérieure fut notamment mise en cause par Weyl [Pól72], car elle compare les majorants entre eux. Si le rôle de la logique est de *décrire* des structures mathématiques, l'accusation étonne. P. ex. l'existence du plus grand élément d'un ordre est : $(\exists x)(\forall y)(x \geq y)$. Elle fait référence à d'autres éléments (dont x lui-même) ; mais qui la dirait circulaire ? • Thématiser le caractère prédicatif ou imprédicatif, c'est accorder beaucoup d'importance au langage naturel, prétendre ordonnancer les structures par ce langage, et refuser leur description algébrique. • On recommande [Cro17].

- **Expressivité des relations binaires.**
 - Ex. 22.5 : attribué à David Kaplan dans [Mon65, Lemma 2]. Mais clair dans [Tar54a], et précurseur [Löw15, Satz 6] (trad. anglaise dans [Heijenoort]).
 - Le maximum de complexité des mathématiques est déjà atteint avec les relations binaires ; d'ailleurs ZF formalise toute la pratique usuelle dans $\{\in\}$. Pas plus suprenant que : tout groupe dénombrable se plonge dans un groupe à deux générateurs.
 - V. *Logique monadique* infra.

- **Formes du choix (ex. 22.6).** • [Gaß94] étudie avec soin les (in)dépendances des formulations possibles par les méthodes de permutation « à la Fraenkel-Mostowski » ; v. ex. 23.5 et 28.7. ([Shapiro, Theorem 5.4 p. 107] a un argument ensembliste bien plus complexe.) • Toute forme du choix est en fait un schéma paramétré par les arités. [Gaß94] distingue neuf tels schémas. • Gaßner construit des modèles de Henkin, ce qui permet de statuer sur l'absence de *déduction* au deuxième ordre. Une étude dans $\Lambda^{2,p}$ serait tributaire de la réalité ensembliste sous-jacente.

[Burgess] : John BURGESS. *Fixing Frege*. Princeton Monographs in Philosophy. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2005, p. x+257

[Rus07] : Bertrand RUSSELL. « On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types ». In : *Proc. London Math. Soc.* (2) 4 (1907), p. 29-53

[Poi06] : Henri POINCARÉ. « Les mathématiques et la logique ». In : *Rev. de métaphys. et de morale* 14 (1906), p. 294-317

[Weyl] : Hermann WEYL. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. German. Leipzig : Veit u. Co., 1918. 83 p.

[Pól72] : George PÓLYA. « Eine Erinnerung an Hermann Weyl ». In : *Math. Z.* 126 (1972), p. 296-298

[Cro17] : Laura CROSILLA. « Predicativity and Feferman ». In : *Feferman on foundations*. T. 13. Outst. Contrib. Log. Springer, Cham, 2017, p. 423-447

[Tar54a] : Alfred TARSKI. « A general theorem concerning the reduction of primitive notions ». In : *J. Symbolic Logic* 159 (1954), p. 158

[Löw15] : Leopold LÖWENHEIM. « Über Möglichkeiten im Relativkalkül ». In : *Math. Ann.* 76.4 (1915), p. 447-470

[Heijenoort] : Jean van HEIJENOORT. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Gaß94] : Christine GASSNER. « The axiom of choice in second-order predicate logic ». In : *Math. Logic Quart.* 40.4 (1994), p. 533-546

• **Catégoricité interne (ex. 22.10).**
 « *The point of internal categoricity is that it establishes categoricity without requiring a set-theoretic background (meta-)theory.* »
 [Vää21b, § 3] (recommandé).

Terminologie. Récemment mais peu judicieusement nommée par [Wal02] (article de philosophie); un meilleur nom serait *catégoricité henkinienne*, ou *locale*. • La propriété de l'ex. 22.10.c a été (mal) appelée *intolérance* dans [Button-Walsh, § 10.4]; il faudrait dire *complétude interne*.

Exemples au deuxième ordre. • La catégoricité interne de PA^2 peut être montrée à bas niveau [SY13]. • RCF^2 : folklore. • ZFC^2 (définie en § 23, notes conclusives) est intérieurement catégorique à *ordinaux fixés* (v. § 27, notes conclusives, *Formes de catégoricité*).

Difficultés en logique élémentaire. (Notations de l'ex. 22.10.) • Les exemples précédents concernent des théories points-parties. On aimerait étudier la catégoricité interne de théories élémentaires usuelles, qui intuitivement ne décrivent que les points du modèle, sans intervention de structures de Henkin. • La difficulté est double. 1. Par relativisme, une théorie élémentaire à modèles infinis ne peut avoir la catégoricité interne. Il faut donc forcer $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ à « communiquer » (d'où le passage de PA_i , resp. ZF_i à PA_i^+ , resp. ZF_i^+ ci-dessous). 2. En outre l'énoncé ι affirmant l'existence d'un isomorphisme est du deuxième ordre. Mais pour $\varphi(x, y)$ élémentaire donnée, l'énoncé « $\varphi : (M_1; \mathcal{L}_1) \simeq (M_2; \mathcal{L}_2)$ » est lui-même élémentaire. Il faut donc avoir identifié une formule élémentaire donnant isomorphisme. • En conséquence, il n'y a pas de notion générale de catégoricité interne pour des théories élémentaires et les résultats ci-dessous sont *ad hoc*. Ils expriment que deux struc-

tures *compatibles* de modèle sur le même ensemble, sont isomorphes par un isomorphisme concret.

Arithmétique élémentaire PA. • Soit PA_i^+ la $\hat{\mathcal{L}}$ -théorie élémentaire où PA est relativisée à M_i , mais où le schéma de récurrence prend en compte toutes les $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ -formules. • Il existe une formule élémentaire $\varphi(x, y)$ telle que $PA_1^+ \cup PA_2^+ \cup \{M_1 = M_2\} \models$ « $\varphi : (M_1; \mathcal{L}_1) \simeq (M_2; \mathcal{L}_2)$ » [Vää21b, Theorem 14] (substantiellement plus difficile que l'ex. 22.10.d).

Théorie des ensembles élémentaire ZF. (Pré-requis : § 23.) • Soit ZF_i^+ la $\hat{\mathcal{L}}$ -théorie élémentaire où ZF est relativisée à M_i , mais où le schéma de remplacement prend en compte toutes les $\{\in_1, \in_2\}$ -formules. • Il existe une formule élémentaire $\varphi(x, y)$ telle que $ZF_1^+ \cup ZF_2^+ \cup \{M_1 = M_2\} \models$ « $\varphi : (M_1; \in_1) \simeq (M_2; \in_2)$ ». V. ex. 27.9.

• **Du deuxième au premier ordre (1) : schématisation.** • Les axiomatisations naïves (des entiers, des réels, des ensembles) sont souvent du deuxième ordre. La présence de quantifications d'ordre supérieur exclut l'emploi d'outils logiques. Pour y remédier on peut *schématiser* ces axiomatisations en variantes élémentaires. • Soit A^2 une axiomatisation du deuxième ordre où les seules quantifications d'ordre supérieur sont universelles. Soit A^1 l'axiomatisation obtenue en remplaçant chaque axiome d'ordre supérieur $(\forall X)\varphi^2$ par le schéma $(\forall \mathbf{z})\varphi^2[X := \chi^1]$, où χ^1 parcourt toutes les formules *élémentaires* au bon nombre de variables libres; on permet des paramètres. • Typiquement, schématiser PA^2 donne PA; schématiser RCF^2 donne RCF. La première schématisation de l'histoire semble être [Wey10,

[Vää21b] : Jouko VÄÄNÄNEN. « Tracing internal categoricity ». In : *Theoria* 87.4 (2021), p. 986-1000

[Wal02] : James WALMSLEY. « Categoricity and Indefinite Extensibility ». In : *Proceedings of the Aristotelian Society (Hardback)* 102.1 (2002), p. 239-257

[Button-Walsh] : Tim BUTTON et Sean WALSH. *Philosophy and model theory*. With a historical appendix by Wilfrid Hodges. Oxford University Press, Oxford, 2018, p. xvi+517

[SY13] : Stephen SIMPSON et Keita YOKOYAMA. « Reverse mathematics and Peano categoricity ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 164.3 (2013), p. 284-293

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

p.304], où Weyl transcrit au premier ordre l'*Aussonderungsaxiom* de Zermelo (v. § 23, notes conclusives). Elle s'impose avec Skolem dans [Sko23, § 4] (trad. anglaise dans [Heijenoort]), qui énonce et transcrit même le remplacement. • Attention : la schématisation dépend de l'axiomatisation (et non de la théorie engendrée). Deux axiomatisations distinctes A^2 et B^2 peuvent donner des théories élémentaires $\langle A^1 \rangle$ et $\langle B^1 \rangle$ très distinctes. Ainsi $A^2 = \text{PA}^2$ et $B^2 = \text{PA}^2 \cup \{\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner\}$ engendrent la même théorie du deuxième ordre, mais $\ulcorner \text{Coh}(\text{PA}) \urcorner \in B_1 \setminus A_1$ par incomplétude (§ 21). • La schématisation est un affaiblissement considérable. Notamment la complétude ou la catégoricité de A^2 n'entraîne rien sur A^1 (songer à PA^2 , RCF^2 , ZFC^2).

- **Du deuxième au premier ordre (2) : passage à $\mathbb{A}^{2,H}$.** • L'autre option face à une théorie naïve Θ^2 du deuxième ordre, est de l'interpréter dans $\mathbb{A}^{2,H}$. Ceci revient à lire Θ^2 comme théorie points-parties, à laquelle on ajoute un schéma de séparation. • Ce schéma a deux versions. On peut admettre toutes les formules du deuxième ordre (comme pour une structure de Henkin), ou le brider en se restreignant aux formules à quantification élémentaire. V. *Prédicativisme*. • PA^2 imprédicative est Z^2 (ici Z est pour *Zahlen*, non pour Zermelo), mais PA^2 prédicative est ACA_0 . ZFC^2 imprédicative est KM alors que ZFC^2 prédicative est BGN (v. compléments § V).
- **Complétude et catégoricité au deuxième ordre (1).** Suite de § 8, notes conclusives. • $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}; +, \cdot, <)$ sont absolument catégoriques dans $\mathbb{A}^{2,p}$, et même finiment. • On peut demander si toutes les

« structures usuelles » le sont ; mais l'expression « structure usuelle » n'a pas de sens précis. Au passage, on ne connaît pas d'axiomatisation *naturelle* de $(\mathbb{C}; +, \cdot, \exp)$. La question dans $\Lambda_{\omega_1, \omega}(\exists_{\geq \aleph_1})$ est classique [Zil05]. • Soit Θ une théorie du deuxième ordre. Son absolue catégoricité dans $\mathbb{A}^{2,p}$ entraîne sa complétude dans $\mathbb{A}^{2,p}$. Faute de complétude pour la paire $(\models [\mathbb{A}^{2,p}], \vdash)$, ceci n'a pas de valeur pratique. • Il reste à comprendre si la complétude dans $\mathbb{A}^{2,p}$ entraîne une forme de catégoricité. Cela ne peut être général (ex. 8.8) ; a minima il faut supposer la finitude du langage et l'équipotence des structures. Or même avec la finitude du langage et la dénombrabilité, la question est indécidable dans ZFC. Suite et fin en § 29, notes conclusives.

- **Modérer $\mathbb{A}^2$ (0).** $\mathbb{A}^{2,p}$ est trop expressive. On peut modérer son expressivité ou nos exigences sémantiques.
- **Modérer $\mathbb{A}^2$ (1) : logique monadique.**
 - La complexité est liée aux relations binaires ; v. *Expressivité des relations binaires*. La logique *monadique* du deuxième ordre quantifie sur les seules parties/rerelations unaires. On la note $\mathbb{A}_m^2$. Cette logique a des liens avec l'algorithmique mais aussi des développements abstraits difficiles. • $\mathbb{A}_m^3$ recapture $\mathbb{A}^2$ [Tha73, Theorem 4]. En effet une relation n -aire est une famille de n -uplets. On reste donc dans $\mathbb{A}_m^2$. • $\mathbb{A}_m^2$ contient toujours l'égalité par le « principe de Leibniz » $(x = y) \leftrightarrow (\forall X)(X(x) \leftrightarrow X(y))$; l'attribution est discutable. En interprétant les éléments $a \in \mathbb{A}$ comme les singletons $\{a\} \in P(\mathbb{A})$, $\mathbb{A}_m^2(=)$ se ramène à l'étude de $(P(\mathbb{A}); \triangle, \cap)$, autrefois appelée *Klassenkalkül*. Skolem a par élimination des

[Wey10] : Hermann WEYL. « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ». In : *Math. naturw. Bl.* 7 (1910), p. 93-95, 109-113

[Sko23] : Thoralf SKOLEM. « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre ». In : 5. Kongress Skandinav. in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Helsinki : Akademiska Bokhandeln, 1923, p. 217-232

[Zil05] : Boris ZILBER. « Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 132.1 (2005), p. 67-95

[Tha73] : Leslie THARP. « The characterization of monadic logic ». In : *J. Symbolic Logic* 38 (1973), p. 481-488

22. Logique d'ordre supérieur

quantificateurs effective montré l'inocuité de $\mathbb{A}_m^2(=)$; v. § 16.3. On va donc ajouter du langage. • L'ajout de relations unaires au langage reste au niveau monadique pur. On met donc (au moins) une relation binaire et l'on travaille dans $\mathbb{A}_m^2(R)$. Il n'y a pas de borne sur la complexité d'une relation binaire (penser à ZF). Sont donc étudiées *certaines* théories monadiques dans $\mathbb{A}_m^2(R)$. • Tour d'horizon de référence [Gur85]. La théorie monadique de l'arbre $\mathcal{A}$ muni des deux fonctions « successeur-gauche » et « successeur-droit » est décidable [Rab69]. La théorie monadique de $(\mathbb{R}; \leq)$ est indécidable [GS82]. Cela suggère une grande complexité pour la théorie monadique d'un ordre. En effet la logique du deuxième ordre est interprétable dans la théorie monadique d'un ordre total [She75b], amélioré en [She90a]. Inversement, la théorie monadique des ordinaux dénombrables est décidable [Büc73]. • Après [Gur85], la décidabilité *effective* de théories monadiques a connu un regain d'intérêt [Cou90]. On quitte la logique mathématique pour l'algorithmique.

• **Modérer $\mathbb{A}^2$ (2) : sémantique faible.**

• $\mathbb{A}^{2,H}$ ramène $\mathbb{A}^2$ à $\Lambda_{\omega,\omega}$. On peut vouloir *moins* modérer, par une autre sémantique. • La *sémantique faible* $\mathbb{A}^{2,f}$ interprète les variables de deuxième ordre par les par-

ties finies. • $\mathbb{A}^{2,f}$ étend $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geq \aleph_0})$. Notamment $(\mathbb{N}; s, <)$ reste absolument catégorique dans $\mathbb{A}^{2,f}$. Mais l'inclusion $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geq \aleph_0}) \hookrightarrow \mathbb{A}^{2,f}$ est stricte [Cow79, Corollary p. 138] (l'étude de Cowles est beaucoup plus générale). • Pour un calcul déductif naturel (avec un analogue de la « règle ω »; v. ex. 20.9), $\mathbb{A}^{2,f}$ est complète [Lop67, Theorem 4.7].

10 • **Modérer $\mathbb{A}^2$ (3) : le théorème des quatre quantificateurs.** On peut s'interroger sur le spectre d'expressivité des diverses quantifications supérieures. Une formalisation du problème (mais pas la seule) est comme suit.

Définition (quantificateur définissable). 45 Soit $\chi(X)$ une $\Lambda_{\omega,\omega}(X)$ -formule, où X est un symbole de relation n -aire variable. Soit $\mathbb{A}_\chi$ le quantificateur d'interprétation $\mathbb{A} \models (\mathbb{A}_\chi X) \varphi^2(X)$ ss'il existe $R \subseteq \mathbb{A}^n$ tel que $(\mathbb{A}; R) \models \chi$ et $\mathbb{A} \models \varphi^2(R)$. 50

• Ainsi $\mathbb{A}_\chi$ quantifie sur les relations pour lesquelles l'axiome élémentaire χ est satisfait. On parle de *quantificateur supérieur définissable*. • La formule élémentaire χ doit rester dans le langage $\{X\}$ (pas d'autres symboles d'un langage relationnel $\mathcal{L}$) et φ^2 est dans $\Lambda_{\omega,\omega}(\mathbb{A}_\chi)$. • Pour $\chi = \top$ on retrouve la quantification du deuxième ordre;

[Gur85] : Yuri GUREVICH. « Monadic second-order theories ». In : *Model-theoretic logics*. Perspect. Math. Logic. Springer, New York, 1985, p. 479-506

[Rab69] : Michael RABIN. « Decidability of second-order theories and automata on infinite trees ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 141 (1969), p. 1-35

[GS82] : Yuri GUREVICH et Saharon SHELAH. « Monadic theory of order and topology in ZFC ». In : *Ann. Math. Logic* 23.2-3 (1982), 179-198 (1983)

[She75b] : Saharon SHELAH. « The monadic theory of order ». In : *Ann. of Math. (2)* 102.3 (1975), p. 379-419

[She90a] : Saharon SHELAH. « Notes on monadic logic B. Complexity of linear orders in ZFC ». In : *Israel J. Math.* 69.1 (1990), p. 94-116

[Büc73] : Richard BÜCHI. « The monadic second order theory of ω_i ». In : *The monadic second order theory of all countable ordinals (Decidable theories, II)*. 1973, 1-127. Lecture Notes in Math., Vol. 328

[Cou90] : Bruno COURCELLE. « The monadic second-order logic of graphs I. Recognizable sets of finite graphs ». In : *Inform. and Comput.* 85.1 (1990), p. 12-75

[Cow79] : John COWLES. « The relative expressive power of some logics extending first-order logic ». In : *J. Symbolic Logic* 44.2 (1979), p. 129-146

[Lop67] : Edgar LOPEZ-ESCOBAR. « A complete, infinitary axiomatization of weak second-order logic ». In : *Fund. Math.* 61 (1967), p. 93-103

Chapitre IV. Complétude, incomplétude

pour $\chi = \perp$, on l'interdit (donc on reste en logique élémentaire). Pour χ employant X comme relation unaire, on trouve la logique *monadique* du deuxième ordre. Enfin, pour χ employant X binaire et affirmant que c'est (le graphe d')une bijection partielle, on trouve une logique « à permutation près ».

• Théorème difficile : Dans un sens technique, ce sont les seuls quantificateurs supérieurs définissables sur les structures infinies [She73]. • La *sémantique faible* $\mathbb{A}^{2,f}$

(v. supra) n'est pas prise en compte dans le théorème de Shelah. La notion de *quantificateur définissable* n'est donc qu'une façon de modéliser le problème « qu'y a-t-il entre le premier et le deuxième ordre? ».

• Logique du deuxième ordre booléenne.

Un cadre ensembliste étant fixé, on peut considérer la sémantique pleine $\mathbb{A}^{2,p}$ *booléenne*, i.e. à valeurs dans des anneaux de Boole non limités à $\{0, 1\}$. Le comportement est plutôt meilleur [IV15].

[She73] : Saharon SHELAH. « There are just four second-order quantifiers ». In : *Israel J. Math.* 15 (1973), p. 282-300

[IV15] : Daisuke IKEGAMI et Jouko VÄÄNÄNEN. « Boolean-valued second-order logic ». In : *Notre Dame J. Form. Log.* 56.1 (2015), p. 167-190