Chapitre V
Une axiomatique pour l'appartenance

Aperçu du chapitre. Ce dernier chapitre présente des éléments de culture ensembliste ; on essaie de souligner les liens avec la logique.

Les axiomes de Zermelo revus par Fraenkel sont attribuables à Skolem. Ils modélisent le comportement apparent des ensembles tenus pour usuels. L'époque ignorait certains phénomènes, si bien que la liste ne reflète plus ni les exigences, ni les espérances de la communauté mathématique actuelle. La théorie résultante permet de coder à peu près tout, mais souvent sans élégance (§ 21). Son grand mérite est l'uniformisation des *ordinaux* (§ 22). *Axiomes de l'infini* et *du choix* sont brièvement discutés à part (§ 23) et font de ZF une théorie de l'infini actuel. Modulo l'axiome du choix, l'*arithmétique cardinale* s'y formalise bien, sans toutefois statuer sur l'*hypothèse du continu* (§ 24). On finit par trois constructions de *modèles intérieurs*. La *hiérarchie cumulative* (§ 25) donne corps à la vision itérative des ensembles. Les *ensembles héréditairement définissables à paramètres ordinaux* (§ 26) font revenir les techniques modèle-théoriques. Enfin la *hiérarchie constructible* de Gödel (§ 27) combine les deux : elle reprend l'engendrement cumulatif, mais en contraignant modèle-théoriquement la fonction puissance. Et tout le reste est combinatoire.

La position finale du chapitre n'est pas nécessairement une incitation à approfondir. Il fallait clarifier les concepts de la logique *avant* d'aborder une théorie élémentaire particulière, pour éviter certains écueils mathématiques et épistémologiques courants.

L'étude positive de l'infini actuel fut amorcée par Georg Cantor à la fin du XIX^{e} siècle pour :

— formaliser la récurrence longue (appelée « transfinie » par son inventeur) ;

— statuer sur l'hypothèse du continu (classes d'équipotence des parties de la droite).

Le premier point est un succès indéniable grâce aux ordinaux ; et par la suite une théorie comme ZF a rassuré les réfractaires. Mais l'hypothèse du continu, honorée par Hilbert de présider à sa liste de problèmes, s'est avérée plus qu'ardue. Cantor a révolutionné la notion de nombre pour formaliser l'arithmétique infinie ; l'exponentiation cardinale est d'une difficulté inattendue. Il n'y a pas à l'heure actuelle consensus sur la valeur cardinale du continu, envisagé comme réalité platonicienne ; il n'y a même pas consensus sur la valeur épistémologique de cette question. Il semblerait que la découverte de comportements fantasques pour les multiples modèles de ZF ait mis à mal l'idée même de *réalité ensembliste*.

Il est étonnant a priori que les mathématiques soient codables dans un langage aussi réduit que $\{\in\}$. Mais un langage n'a pas de pouvoir descriptif intrinsèque ; ce qui compte est la complexité de la théorie. Il reste étonnant que la combinatoire de l'appartenance infinitaire esquissée au début du XXe siècle paraisse pouvoir formaliser toute pensée mathématique ; on n'assimilera pourtant pas les objets mathématiques à leur transcription ensembliste. Il demeure étonnant a posteriori que soit si fréquente la confusion entre mathématiques et étude de ZF ; à vrai dire elle est surtout fréquente chez les mathématiciens incapables de citer de mémoire les axiomes de ZF.

Reste à expliquer les liens entre la logique mathématique et la théorie des ensembles. Ces branches des mathématiques sont bien distinctes, mais exercent des influences réciproques.

1. La théorie des ensembles influe sur la logique. En effet les propriétés de certaines logiques (infinitaires, « d'ordre supérieur », etc.) dépendent fortement du cadre ensembliste retenu.
2. La logique est inévitable en théorie des ensembles. Nos descriptions de $\in$ souffrent en effet du phénomène d'incomplétude dans une forme critique : de nombreux problèmes naturels de combinatoire infinie sont non décidés par (disons) ZFC. Une part de la théorie des ensembles repose donc sur la construction de modèles plus ou moins pathologiques.

Mais il ne s'agit toujours pas de « fondements des mathématiques », dont l'étude ne forme pas une branche des mathématiques.

§ 21. Axiomes, expressivité

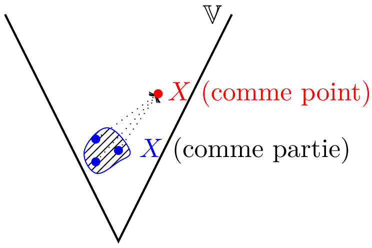
Les axiomes de ZF furent dégagés progressivement, et ne représentent que notre compréhension de la nature ensembliste dans les années 1920–1930. Leur liste est en § 21.1 ; certaines de leurs conséquences, en § 21.2. Le pouvoir expressif (§ 21.3) de la théorie est considérable : on peut coder toute la pratique mathématique, au prix de lourdeurs avérées. Mais en un siècle notre connaissance a progressé : on peut envisager des extensions à ZF. On retiendra que ZF n'est qu'un jalon dans l'histoire des mathématiques ; ce n'est pas un sommet indépassable, ni même une direction certaine.

Prérequis : théorie naïve des ensembles ; § 6.

On n'axiomatise pas plus les ensembles qu'on n'axiomatise les éléments d'un groupe ; on en axiomatise *la loi*. Ici la structure est la relation $\in$. La théorie ZF en est la description la plus consensuelle, en l'état actuel de nos connaissances.

Les spécialistes de combinatoire infinie manifestent leur indifférence à la logique mathématique par un langage propre. Pour *axiomatique ZF*, ils disent *théorie des ensembles* ; pour *modèle*, ils disent *univers* ; pour *partie du modèle*, ils disent *classe* ; pour *point*, ils disent *ensemble*.

On lit parfois que « la notion de classe généralise celle d'ensemble ». C'est plutôt l'inverse : la notion d'ensemble formalise dans une théorie (ou une autre, ZF n'étant qu'une première approximation) l'intuition ensembliste. L'inspiration est que les ensembles mathématiques sont les « petites » parties définissables de la réalité.



À la « petite partie » X correspond le point du modèle X.

Des théories alternatives gèrent à la fois des ensembles et des classes ; certaines ne diffèrent guère de ZF mais d'autres l'étendent considérablement.

§ 21.1. Axiomes faisant désormais consensus

Peignant d'après nature, l'observation des ensembles « visibles » (ensembles finis, entiers intuitifs, droite réelle) peut suggérer les axiomes suivants :

• extensionnalité ; • somme ; • puissance ; • schéma de remplacement ; • infini ; • fondation.

L'infini ne sera donné qu'en § 23.1, et la fondation en § 25. Ces axiomes forment le bloc ZF ; la fondation avait été oubliée à l'origine si bien que certaines sources l'omettent encore. Dans cet ouvrage, AF *fait partie de* ZF. En cas d'ambiguïté nous le soulignerons.

ZF

On ajoute souvent un axiome étudié en § 23.2 :

- choix,

ZFC auquel cas on parle de ZFC.

- **Axiome d'extensionnalité.** Un point du modèle est entièrement caractérisé par ses points-éléments :

$$(\forall x)(\forall y)\{[(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)] \to [x = y]\}.$$

La réciproque est triviale. La « théorie des ensembles » tire son nom de cet axiome : il n'y a d'autre structure que l'appartenance.

Remarque. Si $(\mathbb{V}, \in)$ vérifie l'extensionnalité et a est un point de $\mathbb{V}$, alors a en forme une partie définissable à paramètres, de définition $x \in a$. La réciproque est fausse : il existe des parties définissables qui ne correspondent à aucun point du modèle (typiquement la partie universelle $x = x$ n'est codée par aucun point dès que vaut le principe de séparation de § 21.2 ; cette remarque est attribuable à Russell et Zermelo, voir § 20).

La question de quelles parties, ou même quels ensembles, sont définissables sans paramètres n'est pas sans intérêt.

- **Axiome de la somme/de la réunion.** Un ensemble x étant donné, la collection (définissable) de la réunion de ses membres forme un ensemble :

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow (\exists t)(z \in t \wedge t \in x)].$$

$\dot{\bigcup}(x)$ **Notation.** Cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\dot{\bigcup}(x)$.

Remarques

— On ne confondra pas avec la forme naïve et plus faible : « une réunion d'ensembles indexée par un ensemble est un ensemble ». La notion de famille d'ensembles n'apparaît qu'en § 21.3. J'ai donc préféré introduire une notation non conventionnelle pour l'union d'un objet.

— Le début du chapitre ne considère qu'un modèle à la fois, mais en toute rigueur il faudrait noter $\dot{\bigcup}[\mathbb{V}](x)$ pour indiquer le modèle ambiant ; de même pour les autres constructions.

L'axiome suivant appelle une définition.

$\subseteq$ **Définition** (sous-ensemble)**.** Un ensemble x est un *sous-ensemble* d'un ensemble y, noté $x \subseteq y$ s'il vérifie la relation définissable appelée « inclusion » : $(\forall z)(z \in x \to z \in y)$.

- **Axiome de la puissance/des parties.** Un ensemble x étant donné, la collection définissable des ensembles inclus dans x forme un ensemble :

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

$P(x)$ **Notation.** Cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $P(x)$.

Remarques

— L'axiome de la puissance est une généralisation audacieuse du cas fini, et à l'origine de toutes les difficultés d'arithmétique cardinale. Nous n'avons aucune indication de sa pertinence en mathématiques « usuelles » (théorie des nombres, géométrie algébrique, systèmes dynamiques, physique mathématique, statistique. . .)

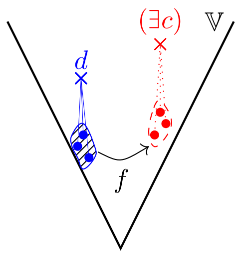
— Si l'idéologie dominante de ZF est que les « petites » classes sont des ensembles (traduction : chaque « petite » partie définissable à paramètres voit sa combinatoire d'appartenance intuitive reflétée par un point du modèle), l'axiome de la puissance est hardi : car par le théorème de Cantor, $P(X)$ est toujours strictement plus grand que X.

— Le nom peut sembler malheureux : car « partie » est avant tout une notion intuitive, extérieure au modèle. L'axiome parle des sous-ensembles d'un ensemble donné, pas de ses « parties » au sens extérieur.

— À cause du nom privilégié par les spécialistes, on évitera dorénavant de parler de « partie définissable » pour une partie ne correspondant à aucun ensemble, et l'on emploiera plutôt « collection définissable ».

- **Schéma de remplacement.** Pour chaque formule $\varphi(x, y, \mathbf{z})$:

$$(\forall \mathbf{z}) \left\{ \begin{array}{l} \text{« } \varphi(x, y, \mathbf{z}) \text{ définit une relation fonctionnelle } y = f(x) \text{ »} \\ \rightarrow \quad (\forall d)(\exists c)(\forall y)[y \in c \leftrightarrow (\exists x)(x \in d \wedge \varphi(x, y, \mathbf{z}))] \end{array} \right\}.$$



Remarques

— Cet axiome exprime que l'image par une correspondance fonctionnelle d'un ensemble (le domaine d), reste un ensemble (le codomaine c). Ce schéma découvert par Skolem et Fraenkel est indispensable pour développer la théorie des ordinaux formels (§ 22.1). Zermelo n'en avait qu'une forme « statique » trop faible, le *schéma de séparation* (§ 21.2).

— Si l'on étend le langage à $\{\in\} \subseteq \mathcal{L}$, il faut parfois prendre en compte toutes les $\mathcal{L}$-formules dans le remplacement.

$\{f(x) : x \in c\}$ **Notation.** À $\mathbf{z}$ et d fixés et posant $y = f(x)$ pour $\varphi(x, y, \mathbf{z})$, cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\{f(x) : x \in d\}$ (la notation $f(d)$ serait ambiguë car d pourrait être un point de $\operatorname{dom} f$ sans que f ne soit un $\in$-morphisme).

- **Axiome de l'infini (AI).** Il existe un ordinal limite (§ 23.1). Après explication de la collection définissable $\mathrm{Ord}(\cdot)$, son énoncé formel sera :

$$(\exists x)[\mathrm{Ord}(x) \wedge x \neq \varnothing \wedge (\forall y)(x \neq y \cup \{y\})].$$

Cet axiome fait de ZF une théorie de l'infini actuel.

- **Axiome de (bonne) fondation/régularité (AF).** Il exprime que la structure $\mathbb{V}$ est bien fondée, i.e. que toute « partie » non vide du domaine possède un point $\in$-minimal. La notion de partie ne peut désigner que les *collections définissables*, donc a priori c'est un schéma d'axiomes. Mais déléguant la capacité à paramétriser par les formules au schéma de remplacement, la fondation devient l'axiome unique suivant.

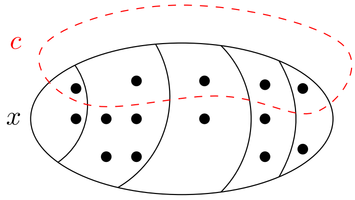
En restriction à chaque ensemble x, la relation $\in_{|x}$ est bien fondée (toute partie non vide contient un élément $\in$-minimal) ; en symboles :

$$(\forall x)\,\{[(\exists y)(y \in x)] \rightarrow [(\exists y)(y \in x \wedge (\forall z)(z \notin y \vee z \notin x))]\}\,.$$

Cet axiome, ici simplement énoncé mais discuté en § 25, permet d'interdire les pathologies type $a_1 \ni a_2 \ni \ldots$, dont on n'a pas d'exemple dans le monde visible.

- **Axiome du choix (AC).** Si x est une partition (de $\bigcup(x)$), il existe un ensemble c qui intersecte chaque membre une fois et une seule ; en symboles :

$$\begin{aligned}(\forall x)\quad & [(\forall y)(y \in x \rightarrow (\exists z)(z \in y)) \\ & \wedge (\forall y_1)(\forall y_2)(y_1 \in x \wedge y_2 \in x \wedge (\exists z)(z \in y_1 \wedge z \in y_2)) \rightarrow (y_1 = y_2)] \\ & \rightarrow (\exists c)[(\forall y)(y \in x \rightarrow (\exists z)(z \in y \wedge z \in c \wedge (\forall z')(z' \in y \wedge z' \in c) \rightarrow (z' = z))]\end{aligned}$$



Il n'y a pas d'unicité de c. Cet axiome est discuté en § 23.2.

Remarques

— (Si ZF $\not\models \bot$,) AC est indépendant de ZF, i.e. ZF $\not\models$ AC et ZF $\not\models \neg$AC ; quand on l'ajoute, on obtient l'axiomatique ZFC.

— Cet axiome anodin cristallise les malentendus. Il a pu inquiéter les espoirs de mesurabilité ; il peut choquer par l'absence de canonicité de c (par opposition à $\bigcup(x)$ et $P(x)$, qui sont fonctionnels en x). Le cœur des problèmes et la raison d'être de la théorie des ensembles est pourtant l'axiome de la puissance.

On trouvera en notes conclusives des extensions possibles à ce jeu d'axiomes.

§ 21.2. Axiomes superflus (théorèmes de ZF)

Les énoncés suivants sont conséquence des axiomes de ZF. Ils subsistent dans certaines expositions vieillies.

- **« Axiome » de l'ensemble vide**

Proposition. Tout modèle possède un ensemble vide : ZF $\models (\exists x)(\forall y)(y \notin x)$.

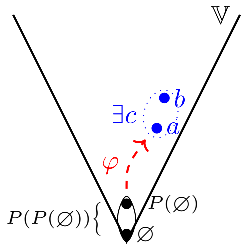
Démonstration. Soit $\mathbb{V} \models$ ZF ; $\mathbb{V}$ n'est pas vide par définition de la sémantique tarskienne. Soit $\varphi(x, y)$ la formule $x \neq x$. Elle définit une fonctionnelle puisque $\mathbb{V} \models (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \to y_1 = y_2)$. Soit d quelconque dans $\mathbb{V}$; appliquant le remplacement, on trouve c tel que $\mathbb{V} \models (\forall y)[y \in c \leftrightarrow (\exists x)(x \in d \wedge x \neq x)]$, i.e. $\mathbb{V} \models (\forall y)(y \notin c)$. □

$\varnothing$ **Notation.** Cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\varnothing$.

- **« Axiome » de la paire**

Proposition. ZF permet la formation des paires : ZF $\models (\forall a)(\forall b)(\exists p)[(\forall x)(x \in p \leftrightarrow (x = a \vee x = b))]$.

Démonstration. On commence par observer que $P(\varnothing) \neq \varnothing$; en outre $\varnothing \in P(\varnothing)$ et $P(\varnothing) \in P(P(\varnothing))$. Soit alors $\varphi(x, y, a, b)$ la relation : $(x = \varnothing \wedge y = a) \vee (x = P(\varnothing) \wedge y = b)$. Cette relation est fonctionnelle. Appliquant le remplacement à $P(P(\varnothing))$, on obtient c qui convient.



Déplacer la paire par excellence vers la paire voulue.

Ceci montre l'« axiome » de la paire (qui est effectivement nécessaire sans recours au remplacement). $\square$

$\{a, b\}$ **Notation.** Cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\{a, b\}$.

On peut généraliser à n éléments (pour n un entier intuitif).

- **Schéma « d'axiomes » de séparation**

Proposition. Pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{z})$: ZF $\models (\forall \mathbf{z})(\forall d)(\exists d')(\forall x)[x \in d' \leftrightarrow (x \in d \wedge \varphi(x, \mathbf{z}))]$.

Démonstration. Appliquer le remplacement à la relation fonctionnelle $(y = x) \wedge \varphi(x, \mathbf{z})$, avec domaine d. $\square$

$\{x \in d : \varphi(x)\}$ **Notation.** À $\mathbf{z}$ fixé cet ensemble, unique par extensionnalité, est noté $\{x \in d : \varphi(x, \mathbf{z})\}$.

Remarques

— Un principe de compréhension non restreint en théorie des ensembles aboutit naturellement aux paradoxes type menteur : la formule $x \notin x$ ne définit pas d'ensemble. Un remède possible est le typage : la collection des entités ayant une propriété de type n, forme une entité de type $n+1$, etc. Cela dissipe le paradoxe. Une autre option est de modérer la compréhension, et de ne pouvoir l'appliquer que pour former des sous-collections d'ensembles : on parle alors de *séparation*.

Le schéma de séparation a ainsi été introduit, assez informellement, par Zermelo pour circonscrire les paradoxes *sans recours au typage*.

— Le schéma de séparation est strictement moins fort que celui de remplacement, et ne permet pas de développer la théorie des ordinaux (§ 25.3).

§ 21.3. Pouvoir expressif

ZF est suffisante pour formaliser toutes les constructions mathématiques, souvent au prix de contorsions techniques ahurissantes.

$\cup$ • **Union de deux ensembles.** On pose $a \cup b = \bigcup(\{a, b\})$.

$\cap$ • **Intersection de deux ensembles.** On pose $a \cap b = \{x \in a : x \in b\}$.

(a, b) • **Paire ordonnée.** On prend souvent pour (a, b) l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Ce choix est fréquent mais non universel ; il n'a pas que des avantages. Avec $b = a = \{a\}$, on trouve $(a, b) = \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\} = \{a, \{a\}\} = \{a\} = a$, ce qui semble inadmissible en vue de formaliser le concept de formule à paramètres.

$\times$ • **Produit cartésien de deux ensembles.** Soit $a \times b = \{p \in P : (\exists x)(\exists y)(x \in a \wedge y \in b \wedge p = (x, y))\}$, où P est assez gros, typiquement $P(P(a \cup b))$ dans le codage le plus commun de la paire ordonnée.

$:\ ,\ f\colon a \to b$ • **Notion de fonction.** On note $f\colon a \to b$ la relation :

$$(f \subseteq a \times b) \wedge (\forall x)(x \in a \to (\exists_{=1} y)((x, y) \in f)).$$

On note alors $y = f(x)$ et l'on peut définir $\operatorname{im} f$. On peut aussi introduire des fonctions partielles et $\operatorname{dom} f$.

a^b • **Ensemble des fonctions entre deux ensembles.** Soit $b^a = \{f \in P(a \times b) : (f\colon a \to b)\}$.

$\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$, $\simeq$

- **Injections, surjections, bijections.** Notions familières. Les cardinaux naïfs, qui sont des classes d'équivalence intuitives mais pas des ensembles, se manipulent mal. (V. § 24 pour les cardinaux formels.)

$\{a_i : i \in I\}$

- **Notion de famille d'ensembles indexée par un ensemble.** Une famille $\{a_i : i \in I\}$ est la donnée d'une fonction de domaine I.

$\bigcup_{i \in I} a_i$ $\bigcap_{i \in I} a_i$ $\prod_{i \in I} a_i$

- **Union, intersection, produit cartésien d'une famille d'ensembles.** Soit $\bigcup_I a_i = \bigcup(A)$ où $A = \{a_i : i \in I\}$. Cette notation usuelle est malheureuse car on risque de confondre avec l'opération plus primitive $\bigcup(a_i)$. Pour l'intersection $\bigcap_I a_i$, l'ensemble I doit être non vide ; procéder par séparation. Le produit cartésien $\Pi_I a_i$ est $\{f \in (\bigcup_I a_i)^I : (\forall i)(i \in I \to f(i) \in a_i)\}$.

- **Réécriture de l'axiome du choix.** Un produit cartésien d'ensembles non vides est non vide.

- **Théorème de Bernstein-Cantor-Schröder.** Il n'utilise pas l'axiome du choix (v. 1).

- **Formalisation des structures classiques.** $\mathbb{N}$ s'obtient via les ordinaux limites (§ 23.1) ; diverses formalisations de $\mathbb{R}$ suivent (v. compléments § B).

  Tout paraît donc formalisable dans ZF. En revanche le degré d'inélégance des codages est souvent rédhibitoire.

Exercices

21.1. Prendre une définition mathématique au hasard et la transcrire dans ZF ; recommencer jusqu'à se convaincre du pouvoir d'expression.

21.2. Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ et R une relation binaire à fibres-à-droite ensemblistes, i.e. pour chaque a dans $\operatorname{dom} R$, la collection définie par $R(a, y)$ est un ensemble. Montrer que si $\operatorname{dom} R$ est un ensemble alors $\operatorname{im} R$ aussi.

Définition (collection transitive)**.** Une sous-collection définissable $\mathcal{C}$ d'un modèle $\mathbb{V}$ est *transitive* si elle est close $\in$-inférieurement, i.e. $\mathbb{V} \models (\forall x)(\forall y)(x \in y \wedge \mathcal{C}(y) \to \mathcal{C}(x))$.

21.3. Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ et $\mathcal{C}$ une collection non vide *transitive*. Pour la lisibilité, on note $x \varepsilon \mathcal{C}$ au lieu de $\mathcal{C}(x)$. • Soit $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \in_{|\mathcal{C}})$. Par abus de notation, si a est un point de $\mathbb{V}$, on note $a \cap \mathcal{C} = \{b \in a : b \varepsilon \mathcal{C}\}$, qui est bien un ensemble. Montrer les points suivants :

(i) $\mathbb{C}$ vérifie l'extensionnalité ;

(ii) $\mathbb{C}$ vérifie la réunion ssi $\mathcal{C}$ est close sous $\bigcup$, i.e. $\mathbb{V} \models (\forall x)(x \varepsilon \mathcal{C} \to \bigcup(x) \varepsilon \mathcal{C})$;

(iii) $\mathbb{C}$ vérifie la puissance ssi $\mathbb{V} \models (\forall x)[x \varepsilon \mathcal{C} \to (P(x) \cap \mathcal{C}) \varepsilon \mathcal{C}]$;

(iv) pour chaque formule $\varphi(x, y, \mathbf{z})$, $\mathbb{C}$ vérifie le φ-remplacement ssi $\mathbb{V} \models (\forall \mathbf{z})(\forall d)[(\mathbf{z} \varepsilon \mathcal{C} \wedge$ « $\varphi_{|\mathcal{C}}(x, y, \mathbf{z})$ est fonctionnelle » $\wedge d \varepsilon \mathcal{C}) \to (\varphi_{|\mathcal{C}}(d) \cap \mathcal{C}) \varepsilon \mathcal{C}]$, où $\varphi_{|\mathcal{C}}(x, y, \mathbf{z})$ désigne la *relativisation* de la formule (obtenue en bornant toutes les quantifications à $\mathcal{C}$) et $\varphi_{|\mathcal{C}}(d)$ désigne l'ensemble-image de la fonctionnelle ;

(v) $\mathbb{C}$ vérifie la fondation.

21.4. Montrer que l'axiome de fondation (en son énoncé technique) équivaut à : toute sous-collection définissable non vide de $\mathbb{V}$ contient un point $\in$-minimal.

21.5 (complexité de quelques opérations). On rappelle qu'une formule (modulo équivalence) est Δ_0 si tous ses quantificateurs sont bornés, i.e. $(\forall x \in y)$ ou $(\exists x \in y)$. Une formule est Σ_1 si $(\exists x)\Delta_0$, et Π_1 si $(\forall x)\Delta_0$, puis Π_2 si $(\forall x)\Sigma_1$, etc. en « double hélice ». On travaille dans $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$.

a. Montrer que « $x \subseteq y$ », « $z = \{x, y\}$ », et « x est transitif » sont Δ_0.

b. Montrer que « $y = P(x)$ et « x est clos sous $P(\cdot)$ » sont Π_1. Même question avec la réunion $\bigcup$.

c. Montrer que $f : x \to y$ est Δ_0, mais que « f est le graphe d'une fonction » est Π_1.

21.6 (modèles de permutation). Montrer le lemme suivant.

Lemme. Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AF}\}$, et $R(x, y)$ une relation définissant dans $\mathbb{V}$ une fonctionnelle bijective globale σ. Soient $a \mathrel{\varepsilon} b$ la relation $a \in \sigma(b)$ et $\mathbb{V}^\sigma = (\mathbb{V}, \varepsilon)$. Alors $\mathbb{V}^\sigma \models \mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AF}\}$.

Application : former un modèle $\mathbb{V}^\sigma$ ayant un élément a tel que $a = \{a\}$. Suite à l'exercice 25.8.

21.7 (« modèle d'Ackermann »). Soit dans $\mathbb{N}$ la relation $m \mathrel{\varepsilon} n$:si le m^{e} chiffre du développement en base 2 de n est 1. Montrer que $(\mathbb{N}, \varepsilon) \models \mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AI}\}$. (Bien qu'on n'ait pas encore énoncé AI, cela entraîne évidemment $\mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AI}\} \not\models \mathrm{AI}$.)

21.8 (« pocket set theory » de Holmes). Cet exercice fait manipuler une alternative minimaliste et remettre en cause certains réflexes acquis dans ZF. • La théorie PST en langage $\{\in\}$ possède un seul type d'objets, appelés *classes*, qui se diviseront en *ensembles* et *classes propres*. Ses trois axiomes et son schéma d'axiomes demandent une suite d'abréviations.

– $\mathrm{Ens}(x)$ est « $(\exists y)(x \in y)$ » ; en conséquence on parle d'*ensembles* et de *classes propres* ;

– $\{x, y\}$ désigne la classe des ensembles égaux à x ou à y (v. axiomes) ; (x, y) est la classe $\{x, \{x, y\}\}$; $x \times y$ est la classe des ensembles de la forme attendue ;

– $f : x \to y$ est « $f \subseteq x \times y$ code une relation fonctionnelle totale » ;

– $f : x \simeq y$ est « $f : x \to y$ est bijective » ; $x \simeq y$ est pour « $(\exists f)(f : x \simeq y)$ » ;

– $\mathrm{Inf}(x)$ est « $(\exists y)(\exists f)[(y \subsetneq x) \wedge (f : x \simeq y)]$ ».

Les axiomes sont les suivants.

Extensionnalité : $(\forall x)(\forall y)[(x = y) \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$

Schéma de collection d'ensembles : pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{z})$, l'axiome $(\forall \mathbf{z})(\exists c)(\forall x)[x \in c \leftrightarrow (\mathrm{Ens}(x) \wedge \varphi(x, \mathbf{z}))]$; par extensionnalité on note $c = \{x : \mathrm{Ens}(x) \wedge \varphi(x, \mathbf{z})\}$; attention, il n'y a pas d'hypothèses sur $\mathbf{z}$ (qui peut donc nommer des classes propres) ;

Infini des ensembles : $(\exists x)\{\mathrm{Ens}(x) \wedge \mathrm{Inf}(x) \wedge (\forall y)[(\mathrm{Ens}(y) \wedge \mathrm{Inf}(y)) \to (x \simeq y)]\}$

Équipotence des classes propres : $(\forall x)\{[\neg\mathrm{Ens}(x)] \to [(\forall y)(\neg\mathrm{Ens}(y) \leftrightarrow x \simeq y)]\}$

On note $V = \{x : \mathrm{Ens}(x)\}$ et $Z = \{x : \mathrm{Ens}(x) \wedge x \notin x\}$; soit $\varnothing = \{x : \mathrm{Ens}(x) \wedge \bot\}$; pour a un ensemble, $\{a\} = \{x : \mathrm{Ens}(x) \wedge x = a\}$ (se méfier de la notation si $\neg\mathrm{Ens}(a)$) ; soit enfin d vérifiant « infini des ensembles ».

a. Montrer $\neg\mathrm{Ens}(Z)$, puis $\mathrm{Ens}(\varnothing)$ et $\varnothing \in Z$. [Si $\neg\mathrm{Ens}(\varnothing)$, alors par équipotence $Z = \varnothing$; jouer avec d et $\{d\}$.]

b. Montrer que si $\mathrm{Ens}(a)$, alors $\mathrm{Ens}(\{a\})$ [former $\{\varnothing, d\}$] ; que si $\mathrm{Ens}(a) \wedge \mathrm{Ens}(b)$, alors $\mathrm{Ens}(\{a, b\})$. En déduire que si $\varphi(x, y_x)$ définit une relation fonctionnelle (éventuellement partielle) de Ens vers Ens, alors il existe une classe f codant cette fonctionnelle.

c. Montrer que si C et D sont deux classes vérifiant $C \hookrightarrow D$ et $D \hookrightarrow C$, alors $C \simeq D$.

d. En déduire que tout classe propre est équipotente à V, que toute sous-classe d'un ensemble est un ensemble, et que deux ensembles équipotents le sont par une bijection ensembliste.

Suite à l'exercice 22.10.

Notes conclusives

Il y a d'excellents traités de théorie des ensembles. En langue française, le récent [Dehornoy]. En langue anglaise, deux références fréquentes sont [Jech] et [Kunen]. • À leur différence, la présente introduction insiste moins sur la combinatoire que sur la logique mathématique.

• **Repères historiques**

Die Mengenlehre ist derjenige Zweig der Mathematik, dem die Aufgabe zufällt, die Grundbegriffe der Zahl, der Anordnung und der Funktion in ihrer ursprünglichen Einfachheit mathematisch zu untersuchen und damit die logischen Grundlagen der gesamten Arithmetik und Analysis zu entwickeln; sie bildet somit einen unentbehrlichen Bestandteil der mathematischen Wissenschaft. [**Zer08**, première phrase]

Émergence de ZF : [Kan04] est très complet. Pour le rôle de Hilbert, soutien solide mais parfois à l'arrière-plan malgré son célèbre (et tardif) « *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können* » [**Hil26**, p. 170], v. [Moo02a].

Cantor. • Pionnier de l'infini actuel et de l'analyse fine de la droite, Cantor n'a guère de responsabilité dans ZF et dans ce que la seconde moitié du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle a appelé « la théorie des ensembles », au sens axiomatique. Les travaux de Cantor s'étendent de 1870 à 1900. Ceux de Zermelo commencent après 1900 ; ceux de Fraenkel, presque en 1920.

Zermelo. • Zermelo vint à la théorie des ensembles par sa volonté d'établir le principe de bon ordre ; [**Zer04**] est son deuxième ar-

---

[Dehornoy] : Patrick Dehornoy. *La théorie des ensembles.* T. 106. Tableau Noir. Paris : Calvage et Mounet, 2017, p. xx + 649

[Jech] : Thomas Jech. *Set theory.* Second. Perspectives in Mathematical Logic. Berlin : Springer-Verlag, 1997, p. xiv + 634

[Kunen] : Kenneth Kunen. *Set theory.* T. 34. Studies in Logic. London : College Publications, 2011, p. viii + 401

[**Zer08**] : Ernst Zermelo. « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I ». In : *Math. Ann.* 65.2 (1908), p. 261-281

[Kan04] : Akihiro Kanamori. « Zermelo and set theory ». In : *Bull. Symbolic Logic* 10.4 (2004), p. 487-553

[**Hil26**] : David Hilbert. « Über das Unendliche ». In : *Math. Ann.* 95.1 (1926), p. 161-190

[Moo02a] : Gregory Moore. « Hilbert on the infinite : the role of set theory in the evolution of Hilbert's thought ». In : *Historia Math.* 29.1 (2002), p. 40-64

[**Zer04**] : Ernst Zermelo. « Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann ». In : *Math. Ann.* 59.4 (1904), p. 514-516

ticle dans le domaine, après une courte note d'arithmétique cardinale. Au début de sa carrière ensembliste, Zermelo ne cherchait ni à axiomatiser la théorie de Cantor, ni à en éliminer les paradoxes, ni à « fonder les mathématiques ». La réception de [**Zer04**] est discutée en § 23, notes conclusives. • Incidemment, le paradoxe « de Russell » fut dégagé par Zermelo dans le cadre ensembliste ; [Zer07, p. 118] emploie l'expression « *Russellsche Antinomie* » et note en bas de page : « *Indessen hatte ich selbst diese Antinomie unabhängig von Russell gefunden und sie schon vor 1903 u. a. Herrn Prof. Hilbert mitgeteilt.* » Confirmation dans [RT81]. La version de Russell concerne d'ailleurs le projet logique typé de Frege, pas la nature ensembliste. Zermelo vint donc à la *séparation* par ses moyens propres et sans influence logiciste. • La limitation du principe naïf de *compréhension* (collecter des ensembles en un ensemble) en principe de *séparation* (collecter les ensembles d'un ensemble donné en sous-ensemble) est due à Zermelo. Elle induit un effort d'abstraction algébrique : ce qui compte n'est déjà plus l'objet ensemble, mais la relation d'appartenance. La préhistoire, laborieuse, de la théorie des ensembles, est l'histoire de cette abstraction. • Suite à l'accueil chahuté de [**Zer04**], Zermelo tenta d'axiomatiser le comportement ensembliste [**Zer08**]. Il avait déjà compris la possibilité d'y formaliser les notions-clefs des mathématiques de son époque. • La logique élémentaire n'étant pas alors éclaircie, chez Zermelo l'*Aussonderungsaxiom* (axiome de séparation) repose sur un concept de « propriété bien définie » bien vague. Contestable, il fut contesté. Zermelo devait y revenir plus tard, sans jamais opter pour la logique élémentaire. V. Skolem ci-dessous. • [**Zer08**] reste un coup de génie et moment majeur de l'histoire de la méthode axiomatique. *La première axiomatisation des ensembles est l'œuvre, imparfaite, de Zermelo.*

Fraenkel. Pour des raisons évidentes, il changea son prénom dans les années 1930. • Conscient de l'imprécision de la séparation chez Zermelo, Fraenkel tenta de l'élucider, notamment dans sa cohérence de la négation de l'axiome du choix [**Fra22a**] (sans fondation). Cet effort précède la communication de Skolem, mais n'aboutit que très partiellement selon les critères contemporains : la notion de « bien défini » coïncide peu ou prou avec « obtenu par itération des autres opérations ensemblistes ». • Observant d'autre part que la théorie de Zermelo ne permettait pas de formaliser $\bigcup_n P^n(\omega)$, Fraenkel énonça un *Ersetzungsaxiom* (axiome de remplacement) dans [Fra22b]. Le cadre formel restait imprécis. • Il affina *ad hoc* dès [Fra25]. Ce dernier travail est postérieur à Skolem, le mentionne, mais persiste à ne pas distinguer logique ambiante et théorie axiomatique. • Fraenkel eut plus de visibilité que Skolem ; je ne comprends pas pourquoi. La confusion entre la logique et la théorie reste assez prononcée chez Fraenkel, dont on peut déplorer l'influence.

Skolem. Semble ne pas avoir eu connaissance des travaux de Fraenkel : il ne les cite pas dans [**Sko23**]. • Dès [**Sko23**, § 2], Skolem

[Zer07] : Ernst Zermelo. « Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung ». In : *Math. Ann.* 65.1 (1907), p. 107-128

[RT81] : Bernhard Rang et Wolfgang Thomas. « Zermelo's discovery of the “Russell paradox” ». In : *Historia Math.* 8.1 (1981), p. 15-22

[**Fra22a**] : Adolf Fraenkel. « Der Begriff „definit“ und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms ». In : *Berl. Ber.* 1922 (1922), p. 253-257

[Fra22b] : Adolf Fraenkel. « Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre ». In : *Math. Ann.* 86.3-4 (1922), p. 230-237

[Fra25] : Adolf Fraenkel. « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre ». In : *Math. Z.* 22.1 (1925), p. 250-273

[**Sko23**] : Thoralf Skolem. « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre ». In : 5. Kongreß Skandinav. in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Helsinki : Akademiska Bokhandeln, 1923, p. 217-232

concevait et promouvait très lucidement la logique élémentaire. Celle-ci révoque pour imprécision la notion zermelienne de « *definit* », et renonce à la catégoricité. Une demi-génération séparait les deux hommes ; Skolem avait souvent raison, et Zermelo avait parfois tort (v. théorèmes de Löwenheim-Skolem et d'incomplétude). La polémique fut âpre [Zer29], [Sko30]. Ces articles *précèdent* la reprise de la définissabilité par Tarski dans [Tar31a]. • Skolem était également arrivé à l'idée du remplacement, énoncé dans nos termes [**Sko23**, § 4]. Il est donc le premier à avoir formulé ce qu'on appelle l'axiomatique Zermelo-Fraenkel [**Sko23**] ; il le fit non sans scepticisme (§ 15, notes conclusives). • *La solution technique de Skolem combinant logique élémentaire et schéma d'axiomes s'est imposée* ; noter qu'elle induit relativisme et abandon de la logique du deuxième ordre.

von Neumann, puis Bernays. V. § Q, notes conclusives.

Paire (ordonnée ou pas). • L'« axiome » de la paire est conséquence de ZF. Mais si l'on dégrade le remplacement en séparation, il faut bien mettre comme Zermelo un tel axiome. De même si l'on perd la puissance. • La paire ordonnée $\{\{a\},\{a,b\}\}$ est due à Kuratowski [Kur21, Définition V]. Wiener, Hausdorff avaient auparavant proposé des définitions différentes. La solution de Kuratowski n'a rien de nécessaire ni même d'optimal car elle augmente le rang de fondation ($\mathrm{rg}_{\mathbb{V}}$, v. § 25.1) des objets. Consensuelle, mais pas canonique, elle fut adoptée par von Neumann puis Bernays. Pour l'histoire, [Kan03, § 5]. Pour les alternatives et les autres contextes, [SM08]. • Pour les uplets ordonnés, [Sko57].

Axiome de fondation. V. § 25, notes conclusives.

Axiome du choix. V. § 23, notes conclusives.

Axiomes postérieurs. L'axiome de détermination apparaît dans [MS62].

Modèle d'Ackermann (exercice 21.7) pour la théorie de Zermelo avec choix sans infini : [**Ack37**]. Son cadre théorique étant la récursivité, l'exposition d'Ackermann est orientée fonctions. • En termes techniques, les structures $(V_\omega;\ \in)$ et $(\omega\ ;\ +,\cdot)$ sont bi-interprétables. Attention, les *théories* PA et $\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AI}\} \cup \{\neg\mathrm{AI}\}$ ne le sont pas [ESV11, Theorem 5.1].

• **Terminologie, notations.** • On devrait parler de théorie de Fraenkel-Skolem-Zermelo ; on pourrait même se restreindre

[Zer29] : Ernst Zermelo. « Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik ». In : *Fundam. Math.* 14 (1929), p. 339-344
[Sko30] : Thoralf Skolem. « Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo : » Über die Definitheit in der Axiomatik« ». In : *Fundam. Math.* 15 (1930), p. 337-341
[Tar31a] : Alfred Tarski. « Sur les ensembles définissables de nombres réels I ». In : *Fundam. Math.* 17 (1931), p. 210-239
[Kur21] : Casimir Kuratowski. « Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles ». In : *Fundam. Math.* 2 (1921), p. 161-171
[Kan03] : Akihiro Kanamori. « The empty set, the singleton, and the ordered pair ». In : *Bull. Symbolic Logic* 9.3 (2003), p. 273-298
[SM08] : Dana Scott et Dominic McCarty. « Reconsidering ordered pairs ». In : *Bull. Symbolic Logic* 14.3 (2008), p. 379-397
[Sko57] : Thoralf Skolem. « Two remarks on set theory ». In : *Math. Scand.* 5 (1957), p. 40-46
[MS62] : Jan Mycielski et Hugo Steinhaus. « A mathematical axiom contradicting the axiom of choice ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 10 (1962), p. 1-3
[**Ack37**] : Wilhelm Ackermann. « Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre ». In : *Math. Ann.* 114.1 (1937), p. 305-315
[ESV11] : Ali Enayat, James Schmerl et Albert Visser. « ω-models of finite set theory ». In : *Set theory, arithmetic, and foundations of mathematics : theorems, philosophies.* T. 36. Lect. Notes Log. La Jolla, CA : Assoc. Symbol. Logic, 2011, p. 43-65

à Skolem-Zermelo. Et l'on devrait certainement la noter $\mathrm{Ens}_{\text{élém}}$. • J'ignore de quand date l'appellation « Zermelo-Fraenkel » mais Skolem lui-même l'adopta [Skolem2]. (En 1950 [Sko52], il disait « Zermelo Set Theory ».) • La tradition fait remonter la notation $\mathbb{V}$ à [Peano, p. XI] : « *Signo V, quod classem ex omnibus individuis constitutam, de quibus quaestio est, indicat, non utimur.* »

- **Questions de cohérence.** • Les phénomènes d'incomplétude de § 20 touchent ZF. On peut clairement formaliser la syntaxe et coder $\ulcorner\mathrm{Coh(ZF)}\urcorner$, d'où : si $\mathrm{ZF} \vdash \ulcorner\mathrm{Coh(ZF)}\urcorner$, alors $\mathrm{ZF} \vdash \perp$. Plus en § P. • À la différence de l'arithmétique pour laquelle le modèle standard est tenu pour familier (sauf des ultrafinitistes), la notion de modèle ensembliste standard est plus incertaine. La théorie PA est née de l'examen de $(\mathbb{N};+,\cdot)$; par contraste il n'y a pas consensus plein sur le fait que ZF soit la description axiomatique d'une réalité univoque. • En revanche un consensus actuel est que tout argument mathématique doit être menable dans ZF ; ceci n'est pas un énoncé ni une définition mais une thèse épistémologique. Personne n'affirme donc pouvoir démontrer la cohérence de ZF. C'est pourquoi les énoncés ensemblistes sont des résultats de cohérence *relative*, de la forme « si ZF est cohérente, alors $\mathrm{ZF} \cup \{\varphi\}$ aussi ». (Étonnamment, pour étudier les *paires* de modèles, on n'a pas besoin de travailler dans $\mathrm{ZF} \cup \{\ulcorner\mathrm{Coh(ZF)}\urcorner\}$: v. ex. 26.9.) • Rétrospectivement, cela indique-t-il que même la notion de modèle standard de PA est illusoire ? Cette vue a ses tenants.

- ZF **est-elle un fondement des mathématiques ?** • Cette thèse a pour elle Zermelo et contre elle Skolem :

> *Daß ich nicht früher etwas darüber publiziert habe, hat zwei Gründe: Erstens bin ich inzwischen mit anderen Problemen beschäftigt gewesen; zweitens glaubte ich, daß es so klar sei, daß diese Mengenaxiomatik keine befriedigende letzte Grundlage der Mathematik wäre, daß die Mathematiker größenteils sich nicht so sehr darum kümmern würden. In der letzten Zeit habe ich aber zu meinem Erstaunen gesehen, daß sehr viele Mathematiker diese Axiome der Mengenlehre als die ideale Begründung der Mathematik betrachten; deshalb schien mir die Zeit gekommen, eine Kritik zu publizieren.* [**Sko23**, derniers mots]

• L'avis de Cantor sur le caractère central de la théorie des ensembles semble avoir fluctué. Celui de Poincaré en revanche était clair : « *Encore une fois les* vraies *mathématiques, celles où l'on ne patauge pas dans l'infini actuel, ne sont pas en cause.* » n'est que l'une des amabilités de l'incendiaire [Poi06]. • On attend encore une critique en règle de l'expression « crise des fondements », qui entretient les malentendus. ZF est d'abord un fondement de la théorie transfinie ; il se trouve qu'on peut y développer toutes les mathématiques mais c'est un sous-produit inattendu. • Plus étonnant : le pouvoir prédictif de ZF ou ZFC en mathématiques usuelles est immense car on peut y formaliser et démontrer le théorème de Riemann-Roch ; son pouvoir prédictif en combinatoire infinie est très faible car elle ne statue pas sur HC. • On relativisera cependant le pouvoir prédictif de ZFC : un énoncé purement algébrique comme le problème de Whitehead en

[Skolem2] : Thoralf Skolem. *Abstract set theory.* Notre Dame Mathematical Lectures, no. 8. University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind., 1962, p. v+70

[Sko52] : Thoralf Skolem. « Some remarks on the foundation of set theory ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952, p. 695-704

[Peano] : Giuseppe Peano. *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Augusta Taurinorum (Turin) : Fratres Bocca, 1889. xvi+20

[Poi06] : Henri Poincaré. « Les mathématiques et la logique ». In : *Rev. de métaphys. et de morale* 14 (1906), p. 294-317

est indépendant [She74b] (bonne exposition dans [Ekl76]).

• **Les objets mathématiques sont-ils des ensembles ?** • Qu'un cours de logique fasse entièrement l'économie de questions épistémologiques serait choquant ; ceci m'incite à donner une opinion. Par la provocation qui suit j'espère forcer à la réflexion. • Du point de vue de l'histoire des idées, les mathématiques sont devenues une science « à système », procédant par exposés totalisants, environ à l'époque où la philosophie en est sortie. Il est vrai que le début du xx$^{\text{e}}$ siècle était propice aux totalitarismes, et l'on jouera à voir en ZF leur avatar mathématique. • Sans doute fallait-il que le xix$^{\text{e}}$ siècle, en son positivisme naïf, débouchât sur une ontologie aussi pauvre que la position formaliste « en mathématiques, tout est ensemble ». Cette dernière, sous couvert de neutralité idéologique, est une prise de position bien plus radicale que tout ce que je saurais me permettre : 1. elle impose un point de vue, et 2. elle retire la possibilité de le contester à la communauté mathématique, pourtant première concernée. • On peut encoder la diversité de la pratique mathématique à l'intérieur du cadre ensembliste, qui en fournit une *théorique* unification. Cantor ne cherchait en rien cette formalisation qui lui est postérieure, et dont la possibilité est l'une des catastrophes épistémologiques et pédagogiques du xx$^{\text{e}}$ siècle. • Analogie : les endomorphismes linéaires des espaces vectoriels de dimension finie se représentent en base par des matrices. Mais réduire l'algèbre linéaire à l'algèbre matricielle est une aberration intellectuelle. • L'enthousiasme des professeurs de secondaire à présenter les entiers comme des ordinaux de Mirimanoff (§ 22.1) est consternant. Le plus coupable est bien sûr de tenir pour l'axiomatique sans mentionner le concept de modèle ; et la chose n'est pas si rare dans le sillage logiciste.

• **Choix des axiomes ; aspects épistémologiques.** • L'« axiome de l'ensemble vide » est inutile si l'on considère des modèles non vides ; la combinatoire infinie du vide est de peu d'intérêt. • L'intérêt du remplacement n'est pas d'alléger les autres axiomes : sans lui, la théorie ordinale est insuffisante (exercice 25.2). Curiosité : en bridant trop le remplacement, on ne peut même pas démontrer l'existence du cardinal de Hanf (ex. 15.9) de la sémantique pleine du second ordre [Bar72]. V. [Kan12]. • Pour les axiomes hors-canon, [Mad88a] (axiomes « usuels », HC, grands cardinaux) et [Mad88b] (très grands cardinaux, détermination). Version longue dans la somme [Maddy].

• **Extensions possibles** Les axiomes suivants ne font pas partie du canon des années 1920. Ils sont indépendants de ZFC mais entretiennent divers liens. On verra donc ZF comme un moins-disant (qui n'a d'ailleurs pas fait l'unanimité immédiatement), en lui-même assez peu éclairant sur la nature ensembliste. Aucun consensus ne paraît s'être

[She74b] : Saharon Shelah. « Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions ». In : *Israel J. Math.* 18 (1974), p. 243-256

[Ekl76] : Paul Eklof. « Whitehead's problem is undecidable ». In : *Amer. Math. Monthly* 83.10 (1976), p. 775-788

[Bar72] : Jon Barwise. « The Hanf number of second order logic ». In : *J. Symbolic Logic* 37 (1972), p. 588-594

[Kan12] : Akihiro Kanamori. « In praise of replacement ». In : *Bull. Symbolic Logic* 18.1 (2012), p. 46-90

[Mad88a] : Penelope Maddy. « Believing the axioms I ». In : *J. Symbolic Logic* 53.2 (1988), p. 481-511

[Mad88b] : Penelope Maddy. « Believing the axioms II ». In : *J. Symbolic Logic* 53.3 (1988), p. 736-764

[Maddy] : Penelope Maddy. *Defending the axioms : on the philosophical foundations of set theory.* Oxford University Press, Oxford, 2011, p. x+150 imposé depuis.

HC *Hypothèse du continu* HC. « $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ». Discussion en § 24.3.

$\mathbb{V} = \mathbb{L}$ *Axiome de constructibilité de Gödel* $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. « Tout ensemble est constructible ». • Cet axiome entraîne AC et HC. Discussion en § 27.

Axiome de Grothendieck-Tarski. « Tout ensemble est membre d'un univers de Grothendieck. » • Cet axiome équivaut à l'existence d'un grand nombre de (petits) grands cardinaux ; techniquement, d'une classe cofinale de cardinaux inaccessibles. Discussion à l'ex. 25.5.

Divers axiomes de grands cardinaux. • Ces axiomes semblent s'ordonner linéairement, sans qu'on comprenne actuellement pourquoi. C'est un indice fort que la recherche ensembliste ne résulte pas d'une prolifération combinatoire anarchique, mais pourrait parler d'une réalité sous-jacente. • Quelques grands cardinaux sont envisagés en § SÉ5. • Bonne première exposition dans [Dehornoy, § XIII-XIV]. La référence est [Kanamori].

Axiomes de détermination. • Soit X une classe de sous-ensembles du continu (ex. projectifs, analytiques, tous les sous-ensembles). « Tout jeu sur un sous-ensemble de classe X est déterminé. » • Ces axiomes jettent une lumière croissante sur la structure du continu, mais la forme la plus forte contredit AC. • Bonne première exposition dans [Dehornoy, § XV]. La référence est [Woodin].

Principe de Vopěnka. En fait un schéma d'axiomes très forts. « Si $\mathcal{C}$ est une classe propre de $\mathcal{L}$-structures (ensemblistes), alors il y en a deux dont l'une se plonge élémentairement dans l'autre. » (On peut en faire un axiome dans BGN.) • Ce schéma équivaut à : « pour toute logique Λ il existe κ tel que Λ soit κ-fortement compacte » (v. SÉ5). [Mak85, Theorem 2].

• **Au deuxième ordre : ZFC^2.** • La théorie élémentaire ZFC est la « schématisation » (§ 11, notes conclusives) d'une théorie naïve du deuxième ordre ZFC^2. Le schéma élémentaire de remplacement provient d'un unique axiome d'ordre supérieur quantifiant sur les fonctions du domaine. Jamais rallié à la logique élémentaire, Zermelo raisonnait au deuxième ordre. • La théorie du deuxième ordre ZFC^2 en sémantique pleine n'est pas absolument catégorique, mais ses modèles pleins sont connus : les V_κ pour κ inaccessible (ex. 25.4). • C'est un raisonnement circulaire : la sémantique pleine présuppose de maîtriser la notion de partie, par exemple en travaillant dans un modèle de ZFC. Le résultat indique ainsi un phénomène plus qu'il ne le démontre ; une théorie naïve n'est pas un outil fiable, mais une source d'inspiration. • Pour donner un sens non naïf à ZFC^2, on adopte une théorie élémentaire à deux sortes, ensembles/classes, et un schéma de remplacement rassemblant les ensembles en classes. On obtient la théorie KM de Kelley-Morse, beaucoup plus forte que ZF. • On retrouve alors la vision de Zermelo : les V_κ pour κ inaccessible jouent un rôle important. V. § Q. • On ne confondra pas KM avec la beaucoup plus faible BGN (la « forme prédicative » de KM).

• **Théories alternatives.** Qu'est-ce qu'une alternative à ZF ? Cela dépend du but suivi. On peut vouloir :

1. « fonder les mathématiques » (l'auteur n'a jamais bien compris le sens de cette expression) ;
2. axiomatiser, pour étudier, la combinatoire ensembliste ;

[Kanamori] : Akihiro Kanamori. *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings.* Second. Springer Monographs in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2003, p. xxii + 536

[Woodin] : Hugh Woodin. *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal.* revised. T. 1. De Gruyter Series in Logic and its Applications. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2010, p. vi+852

[Mak85] : Johann-Andreas Makowsky. « Vopěnka's principle and compact logics ». In : *J. Symb. Log.* 50 (1985), p. 42-48

KM

3. asseoir une formalisation des entiers et des réels.

• Dans le premier cas une théorie élémentaire monotype est peu maniable ; mais des alternatives catégoriques existent. ETCS [Law64] équivaut à une forme faible de ZFC ; pour une liste de correspondances entre formulations classiques et formulations catégoriques, [Shu19]. La récente HOTT, en lien avec la topologie algébrique et la théorie de la démonstration, a bénéficié d'une bonne communication. • Dans le deuxième cas, préférer une théorie peu typée, avec des seuls ensembles, ou des ensembles et classes. Pour cela il y a notamment les théories d'Ackermann Ack, de Bernays-Gödel-von Neumann BGN, de Morse-Kelley KM. Les deux premières reviennent essentiellement à ZF(C) ; pas la dernière. V. § Q. • Dans le troisième cas on ne fait pas mieux que *Pocket Set Theory*, qui a le mérite de vexer tout le monde, ou *Alternative Set Theory* [Vopěnka]. V. [HFL12]. • Reste le cas de NF de Quine, qui sort de mode (v. infra).

BGN

Théorie de Bernays-Gödel-von Neumann (BGN). Aussi notée NBG, dans l'ordre chronologique. Cette théorie formalise directement la combinatoire des classes, i.e. le comportement attendu des *collections d'ensembles*. Pour cette raison, elle est finiment axiomatisable. Un énoncé *restreint aux ensembles* est conséquence de BGN ss'il l'est de ZF : le gain est donc strictement cosmétique. V. § Q.

Théorie de Kelley-Morse (KM). Mal nommée, cette théorie des ensembles et classes formalise rigoureusement au premier ordre la théorie informelle ZFC[2]. Elle renforce considérablement BGN ou ZF : ainsi KM entraîne Coh(ZFC). V. § Q.

Théorie d'Ackermann (Ack). Autre théorie des ensembles et classes, n'ayant pas eu la fortune de BGN. V. § Q, notes conclusives.

Théories sans axiome de la puissance. Curiosités parfois étudiées par les spécialistes [GHJ16]. Le sel de la combinatoire infinie est précisément cet axiome à l'origine de toutes les difficultés. La théorie des modèles estime que la « bonne notion » est celle de puissance définissable ; v. § 27.

Pocket Set Theory de Holmes. • Les ex 21.8 et 22.10 viennent de sa page. • La théorie est plus puissante qu'il n'y paraît, car le principe de collection d'ensembles est très peu restreint (par opposition à BGN ; les philosophes disent que PST est « imprédicative »). • Dans PST la catégorie **Ens** n'est pas cartésienne fermée (pas d'« ensemble des fonctions $A \to B$ ») ; mais les prétentions de PST sont plus modestes que celles de NF, qui tombe sous le même coup.

New Foundations de Quine (NF) [Qui37]. • À la différence de ZF, la compréhension dans NF n'est pas modérée en séparation, mais sujette à une clause de typabilité des formules en jeu. Pour un éloge, [Hol94]. N'ayant pas trouvé de critique en règle, je m'y risque. • La lecture de Quine étonne au XXIe siècle.

[Law64] : William Lawvere. « An elementary theory of the category of sets ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 52 (1964), p. 1506-1511

[Shu19] : Michael Shulman. « Comparing material and structural set theories ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 170.4 (2019), p. 465-504

[Vopěnka] : Petr Vopěnka. *Mathematics in the alternative set theory.* Teubner-Texte zur Mathematik. Leipzig : BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1979, p. 120

[HFL12] : Randall Holmes, Thomas Forster et Thierry Libert. « Alternative set theories ». In : *Sets and extensions in the twentieth century.* T. 6. Handb. Hist. Log. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2012, p. 559-632

[GHJ16] : Victoria Gitman, Joel Hamkins et Thomas Johnstone. « What is the theory ZFC without power set ? » In : *MLQ Math. Log. Q.* 62.4-5 (2016), p. 391-406

[Qui37] : Willard Quine. « New Foundations for Mathematical Logic ». In : *Amer. Math. Monthly* 44.2 (1937), p. 70-80

[Hol94] : Randall Holmes. « The set-theoretical program of Quine succeeded, but nobody noticed ». In : *Modern Logic* 4.1 (1994), p. 1-47

Le but avoué est de poursuivre la simplification des *Principia* (et NF finit par les englober) ; cet objectif n'a rien de naturel pour un mathématicien. Le ton est résolument logiciste ; la logique est perçue comme fondement des mathématiques : « *All logic in the sense of the Principia, and hence all mathematics as well, can be translated...* ». En conséquence, Quine met sur le même plan propriétés de sa logique-cadre et de la théorie qu'il forme, restant au niveau du langage ; sa vision est syntaxique ; il ignore le concept de modèle. • Ainsi NF ne décrit pas une structure mathématique mais les possibilités théoriques de la syntaxe ; c'est théoriser le primat du langage sur l'objet. En prêtant lige hommage aux mathématiques, la logique moderne a choisi une tout autre voie et Quine fait figure de proto-logicien. • L'interprétabilité de NF dans ZF (par raccourci, on parle de « cohérence de NF ») est un problème ouvert, équivalent à la cohérence de la théorie simple des types avec un automorphisme incrémentant les types. En revanche une variante de NF, avec atomes, est connue interprétable et même étonnamment faible [Jen68]. • Le nombre de mathématiciens intéressés par NF décroît. Une raison possible est que NF prouve la négation de AC [Spe53]. Une autre est que si ZF ne permet qu'un développement laborieux de l'algèbre homologique, NF y échoue. En effet pour toute définition raisonnable de la paire ordonnée, la catégorie **Ens** formalisée dans NF n'est pas cartésienne fermée : elle perd l'opération $A \times B$ ou l'opération B^A [McL92].

Théories des ensembles non standard. L'analyse non standard (v. § 11, notes conclusives) requiert de saturer des structures. Si l'on veut des réels infinitésimaux, il faut saturer $\mathbb{R}$. Mais l'analyse n'est pas la simple étude des réels en tant que structure algébrique. Si l'on veut aussi des entiers infiniment grands (p.ex. pour faire des suites non standard), il faut *aussi* saturer $\mathbb{N}$. Si l'on veut des fonctions non standard, des mesures non standard, etc. On a ainsi trois options a priori.

1. Pour chaque problème donné, saturer seulement les structures nécessaires pour conduire l'argument non standard. Cette approche *ad hoc* peut déplaire.
2. Former la « super-structure » comportant $\mathbb{R}$, ses parties, ses parties de parties, etc. ; saturer le tout. Cette approche « à la Robinson » est bien décrite en [Chang-Keisler, § 4.4]. Noter qu'elle n'itère la fonction puissance que par les entiers intuitifs : elle n'a pas toute l'ampleur ensembliste.
3. Proposer une *théorie des ensembles non standard* qui permettrait à la fois de formaliser toutes les mathématiques (dont l'analyse) et de raisonner par saturation, de manière intégrée.

Une théorie des ensembles non standard décrit donc « de l'intérieur » une extension élémentaire $\mathbb{V} \preccurlyeq \mathbb{V}^*$ entre modèles disons de ZF, le second étant très saturé. • La plus célèbre est *Internal Set Theory* [Nel77], trad. [Nel89]. Son traitement très

[Jen68] : Ronald Jensen. « On the consistency of a slight (?) modification of Quine's New Foundations ». In : *Synthese* 19.1-2 (1968), p. 250-264

[Spe53] : Ernst Specker. « The axiom of choice in Quine's New Foundations for Mathematical Logic ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 39 (1953), p. 972-975

[McL92] : Colin McLarty. « Failure of Cartesian closedness in NF ». In : *J. Symbolic Logic* 57.2 (1992), p. 555-556

[Chang-Keisler] : Chen-Chung Chang et Jerome Keisler. *Model theory.* Third. T. 73. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, p. xvi+650

[Nel77] : Edward Nelson. « Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 83.6 (1977), p. 1165-1198

[Nel89] : Edward Nelson. « Théorie des ensembles internes : une nouvelle approche de l'analyse non standard ». In : *La mathématique non standard.* Fondem. Sci. CNRS, Paris, 1989, p. 355-399 syntaxique, typique du style de Nelson, n'a pas fait l'unanimité. En outre cette théorie n'est pas la plus puissante à ce jour. La somme [Kanovei-Reeken] en décrit une autre ainsi que ses concurrentes. • Les théories des ensembles non standard sont des tentatives, encore non consensuelles, de combiner la théorie des ensembles à la logique mathématique pour de meilleurs « fondements des mathématiques ». J'évite donc le sujet.

En conclusion. Un dogme est fait pour être contesté, et la situation de monopole ZF tient beaucoup à l'indifférence, même non assumée, de la communauté. De manière générale :

– ne pas prendre au sérieux les plaidoyers pro-ensembles d'interlocuteurs incapables de citer le schéma de remplacement ;
– chercher des contre-poisons au fondamentalisme chez Arnold ou Poincaré ;
– retenir que la combinatoire infinie est un sujet sérieux, mais spécifique.

§ 22. Ordinaux

Dans la théorie ZF on peut uniformiser les ordinaux naïfs (bons ordres) par une construction formelle (§ 22.1) ; la récurrence ordinale s'exprime alors élégamment (§ 22.2), et permet à son tour d'asseoir techniquement l'arithmétique ordinale (§ 22.3).

Rien dans cette section ne requiert l'axiome du choix AC. On n'invoquera pas non plus AI ni AF.

Prérequis : §§ 3, 21.

On relira § 3, se rappelant notamment :

— la définition d'un bon ordre : toute partie non vide possède un minimum ;

— l'identité entre parties closes inférieurement propres et segments initiaux stricts ;

— tout bon ordre est rigide, i.e. isomorphe à aucun de ses segments initiaux stricts ;

— deux bons ordres sont toujours comparables : l'un des deux doit être segment initial de l'autre.

Grâce à l'ensemble des parties, la quantification ensembliste « toute partie non vide » peut être transcrite au premier ordre par $(\forall x)(x \in P(a) \wedge x \neq \varnothing \to \dots)$. (En tablant sur le modèle ambiant pour fournir P, on peut même écrire seulement $(\forall x)(\varnothing \neq x \subseteq a \to \dots)$.) *On peut donc parler des bons ordres de* ZF *en logique élémentaire.*

[Kanovei-Reeken] : Vladimir Kanovei et Michael Reeken. *Nonstandard analysis, axiomatically.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004, p. xvi+408

§ 22.1. Ordinaux formels

Grâce au schéma de remplacement on va donner un représentant canonique de chaque ordinal de Cantor. Le choix n'intervient pas, mais le schéma de séparation ne suffirait pas.

Définition (collection ou ensemble transitif)**.** Une collection $\mathcal{C}$ est *transitive* si $(\forall x)(\forall y)(y \in x \wedge \mathcal{C}(x)) \to \mathcal{C}(y)$.

Dans le cas particulier d'un ensemble, la transitivité prend la forme $(\forall x)(\forall y)(y \in x \wedge x \in X) \to (y \in X)$. C'est mal nommer car mal reconnaître une propriété plus générale : être clos inférieurement sous la relation $\in$. Les mêmes collections jouent le même rôle central dans l'étude des modèles de PA, où l'ordre est $<$.

Définition (ordinal formel)**.** Un *ordinal formel* est un ensemble X :

— transitif,

— et tel que $(X, \in)$ soit un bon ordre : $(\forall Y)(\varnothing \neq Y \subseteq X \to$« Y a un $\in$-minimum »).

Remarque. On voit ici l'intérêt de travailler avec des ordres stricts : $a \in a$ n'est pas une propriété attendue d'ensembles « naturels » (rappelons que ce comportement est éliminé par l'axiome de fondation, mais licite autrement).

Exemple. $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots$ sont des ordinaux formels. L'axiome de l'infini, discuté en § 23.1, est que ce ne sont pas les seuls. La formalisation sera un peu inattendue, pour des raisons profondes (la suite donnée dans notre exemple n'est pas seulement indexée par les vrais entiers, mais par les entiers du modèle).

α, β On notera $\alpha, \beta, \ldots$ des ordinaux.

Ord **Notation.** Soit Ord la collection définissable des ordinaux formels.

Lemme (d'hérédité)**.** Soit α un ordinal formel. Alors $\alpha \notin \alpha$; les éléments de α sont exactement ses segments initiaux propres, et sont des ordinaux formels.

Démonstration. Si $\alpha \in \alpha$, alors comme $(\alpha, \in)$ est un ordre strict, on a $\alpha = \alpha$ et $\alpha < \alpha$: contradiction. Si $\beta \in \alpha$, on a $\beta = I_\alpha(\beta)$. En effet si $\gamma \in \beta$, par transitivité $\gamma \in \alpha$ et $\gamma < \beta$, donc $\gamma \in I_\alpha(\beta)$. Si réciproquement $\gamma < \beta$ dans α, alors $\gamma \in \beta$. Tout segment initial propre est de cette forme. Reste à montrer qu'un tel β est bien un ordinal formel. Il est clairement transitif, et c'est encore un bon ordre comme toute partie d'un bon ordre. □

Théorème (d'ubiquité ; ZF)**.** Tout bon ordre est uniquement isomorphe à un unique ordinal formel.

Démonstration. Unicité. Soient α, β deux ordinaux formels. On suppose $\alpha \simeq \beta$. Soit $\gamma = \alpha \cap \beta$, encore un ordinal formel par définition. Si $\gamma = \alpha$, alors $\alpha \subseteq \beta$, mais par rigidité de bons ordres isomorphes, $\alpha = \beta$. Si $\gamma = \beta$ on conclut de même. Si enfin γ est propre dans α et dans β, alors $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, contre le fait que γ est un ordinal formel.

Existence. Soit $\mathbb{A} = (A, <)$ un bon ordre fixé. Soit $\varphi(x, y)$ la relation : $x \in A \wedge \mathrm{Ord}(y) \wedge (\exists f)(f\colon (I_A(x), <) \simeq (y, \in))$ (on utilise A et $<$ comme paramètres). La relation est définissable et fonctionnelle en $y = f(x)$. Par remplacement, il existe un ensemble image c. Soit alors l'ensemble $F = \{(a, \alpha) \in A \times c : (I_A(a), <) \simeq (\alpha, \in)\}$. Comme dans le théorème de comparaison de § 3.1, on montre que F est le graphe d'un isomorphisme entre $\mathbb{A}$ et $(c, \in)$, qui est un ordinal formel. Enfin $\mathbb{A}$ lui est isomorphe. □

Remarques

— Ce théorème n'utilise pas l'axiome du choix, mais il demande le schéma de remplacement (exercice 25.2).

ord X

— On note $\mathrm{ord}\, A$ l'ordinal formel d'un bon ordre A. Dorénavant, on dira simplement « ordinal » pour « ordinal formel ».

Proposition.

(i) La collection $(\mathrm{Ord}, \in)$ est classe-bien ordonnée (toute sous-collection non vide possède un minimum), et ses segments initiaux propres sont ensemblistes (une sous-collection propre close $<$-inférieurement est un ensemble) ; ce sont d'ailleurs les ordinaux.

(ii) Ord n'est pas un ensemble. Si X est un ensemble d'ordinaux, alors $\bigcup(X)$ est un ordinal, et coïncide avec $\sup X$ (calculé dans Ord).

(iii) Si $(\Omega, <)$ est une collection définissable classe-bien ordonnée qui n'est pas un ensemble mais reste à segments initiaux propres ensemblistes, alors Ω et Ord sont uniquement classe-isomorphes (il existe une formule ayant mêmes paramètres que ceux pour $(\Omega, <)$, et qui code un isomorphisme, au sens intuitif).

Par opposition au cas ensembliste, le caractère classe-bien ordonné ne peut s'écrire comme un axiome unique ; ceci demanderait de former « $P(\mathrm{Ord})$ », qui n'a pas de sens.

Démonstration.

(i) Soit $C(x)$ une sous-collection définissable non vide ; soit α dans C. Si

α est minimum dans C, on a fini. Sinon on peut rechercher le minimum dans la sous-sous-collection $C(x) \wedge x < \alpha$, qui par séparation est l'ensemble $\{x \in \alpha : C(x)\}$. Comme α n'est pas minimum dans C, cet ensemble est non vide ; comme α est bien ordonné, il existe un minimum.

Soit $C(x)$ un segment initial propre (au sens intuitif) de Ord ; il est de la forme $C(x) \leftrightarrow \mathrm{Ord}(x) \wedge x < \alpha$ pour un certain ordinal α. Alors $C(x)$ est l'ensemble $\{x \in \alpha : \mathrm{Ord}(x)\} = \alpha$.

(ii) Si Ord est un ensemble, alors $\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$ et donc est un ordinal ; mais aucun ordinal ne vérifie $\alpha \in \alpha$.

Par l'axiome de la réunion, $\bigcup(X)$ est un ensemble ; par transitivité de chaque ordinal, c'est un segment initial de Ord, et puisque c'est un ensemble, il est propre. C'est donc un ordinal α, et clairement $\alpha = \sup X$.

(iii) On reprend la démonstration du théorème d'ubiquité, et l'on définit la relation $F(x, \alpha)$:

$$\Omega(x) \wedge \mathrm{Ord}(\alpha) \wedge (\exists f)(f \colon I_\Omega(x) \simeq \alpha).$$

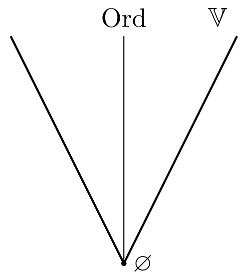
Elle utilise les paramètres de $(\Omega, <)$ (ainsi que l'hypothèse que les segments initiaux propres de cette dernière sont ensemblistes) ; elle est fonctionnelle ; elle établit un isomorphisme au sens intuitif entre son domaine, qui est la collection définissable Ω, et son image, qui est la collection définissable Ord. □

Notamment la collection des suites (formellement) finies d'ordinaux obtenue par les codages usuels vérifie (iii).

Remarques

— (ii) est attribué à Burali-Forti. Pour (iii) on n'oubliera pas l'hypothèse sur les segments initiaux, sans laquelle $\mathrm{Ord} \cup \{\infty\}$ est un contre-exemple.

— Un indicateur important de la « taille » d'un modèle est la collection Ord, qui fournit son squelette. Mais pour formaliser une comparaison entre les ordinaux $\mathrm{Ord}(\mathbb{V}_1)$ et $\mathrm{Ord}(\mathbb{V}_2)$ de deux modèles, il faut au moins une inclusion dans un modèle commun.



Ord est un squelette « plus ou moins long ». La notion même de comparaison demande que $\mathbb{V}$ soit englobé dans un $\hat{\mathbb{V}}$ permettant de le manipuler. Un tel $\hat{\mathbb{V}}$ reste trop souvent implicite dans la littérature.

§ 22.2. Récurrence et récursion ordinales

Le phénomène fondamental est la récurrence sur la collection Ord. Nous aurions pu l'exposer avec les ordinaux naïfs (bons ordres), mais au prix d'un énoncé sensiblement plus lourd.

Théorème (récurrence ordinale)**.** Soit $\varphi(x, \mathbf{z})$ une formule. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{ZF} \models (\forall \mathbf{z}) \quad & [(\forall x)(\mathrm{Ord}(x) \wedge (\forall y)(y \in x \to \varphi(y, \mathbf{z})) \to \varphi(x, \mathbf{z}))] \\ & \to [(\forall x)(\mathrm{Ord}(x) \to \varphi(x, \mathbf{z}))] \end{aligned}$$

Démonstration. On fixe $\mathbf{z}$ et l'on fait l'hypothèse ; noter qu'elle entraîne $\varphi(\varnothing, \mathbf{z})$. Soit X la collection d'ordinaux définie par $\mathrm{Ord}(x) \wedge \neg\varphi(x, \mathbf{z})$. Si X est non vide, son plus petit élément n'est pas $\varnothing$, ni aucun autre ordinal : contradiction. $\square$

Théorème (construction par récurrence ordinale)**.** Soient $S(f)$ la collection définissable : $(\exists \alpha)(\exists c)[\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge (f \colon \alpha \to c)]$ des fonctions de domaine un ordinal, et $y = \Phi(x)$ une relation fonctionnelle (éventuellement à paramètres) définie sur S.

Alors il existe une unique relation fonctionnelle $y = F(x)$ de domaine Ord telle que : $(\forall \alpha)[\mathrm{Ord}(\alpha) \to F(\alpha) = \Phi(F_{|\alpha})]$.

La conclusion s'interprète de la façon suivante : si l'on connaît les termes de la Ord-suite $(F(\beta))_{\beta < \alpha}$ jusqu'à α exclu, alors on connaît aussi la valeur en α.

Démonstration. L'unicité est claire : si F et G conviennent, on prend par l'absurde α minimal où elles diffèrent, d'où $F(\alpha) = \Phi(F_{|\alpha}) = \Phi(G_{|\alpha}) = G(\alpha)$, contradiction. Montrons l'existence.

Soit $S_\Phi(f)$ la collection définissable : $S(f) \wedge (\forall \beta)[\beta \in \operatorname{dom} f \to f(\beta) = \Phi(f_{|\beta})]$ des fonctions (i.e. des suites) dites Φ-*inductives de domaine ordinal*.

Pour α fixé, il existe au plus une fonction Φ-inductive de domaine α ; s'il en existe une, alors $f_{|\beta}$ est Φ-inductive de domaine β. Les fonctions de S_Φ s'étendent donc les unes les autres, et la formule $\varphi(\alpha) : \mathrm{Ord}(\alpha) \wedge [(\exists f)(S_\Phi(f) \wedge \operatorname{dom} f = \alpha)]$ définit un segment initial I de Ord. S'il est propre, c'est un ordinal α ; soit f la fonction Φ-inductive de domaine α. Alors $f \cup \{(\alpha, \Phi(f))\}$ est une fonction Φ-inductive de domaine contenant α : contradiction. Il suit que I est Ord entière.

Soit enfin $y = F(\alpha)$ la relation : $(\exists f)[S_\Phi(f) \wedge (\alpha \in \operatorname{dom}(f) \wedge y = f(\alpha))]$; elle convient. Noter qu'elle n'utilise pas d'autres paramètres que ceux de Φ. □

Remarque. L'énoncé se paraphrase ainsi :

> On se donne un moyen (uniforme) de construire, pour tout ordinal α, un objet $F(\alpha)$ en fonction des $F(\beta)$ pour $\beta < \alpha$. Alors $F(\alpha)$ est bien défini pour tout ordinal α.

Naturellement, cela ne fait *pas* intervenir de choix.

§ 22.3. Arithmétique ordinale

Définissons par récursion ordinale des opérations algébriques sur Ord qui y reproduiront l'addition, la multiplication, l'exponentiation d'ordres (§ 3.2).

$s(\alpha)$ **Définition** (succession ordinale)**.** Soit α un ordinal formel. On note $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$; c'est un ordinal formel, et le plus petit strictement supérieur à α.

On vérifie sans peine que la fonctionnelle ainsi définie est injective.

$\alpha + \beta$ **Définition** (addition ordinale)**.** Soit α un ordinal fixé. Soit Φ_α la relation fonctionnelle qui à une fonction f de domaine un ordinal β associe

$$\Phi_\alpha(f) = \sup\left(\{s(y) : (y \in \operatorname{im} f) \wedge \mathrm{Ord}(y)\} \cup \{\alpha\}\right) = \alpha \cup \bigcup_{\substack{y \in \operatorname{im} f : \\ \mathrm{Ord}(y)}} s(y).$$

(La clause $\mathrm{Ord}(y)$ sert seulement à ce que Φ_α soit définie sur toutes les fonctions à domaine ordinal ; on ne peut parler de $s(y)$ pour autre chose qu'un ordinal.)

Soit F_α la fonctionnelle obtenue par récurrence. On pose $\alpha + \beta = F_\alpha(\beta)$.

On vérifie sans peine que l'addition ordinale est associative, de neutre $\varnothing$. Elle n'est pas commutative ni régulière : avançant un peu sur l'ordinal des entiers ω (v. § 23.1), on a $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$ (où $1 = s(\varnothing)$).

Noter que la définition est uniforme en α.

$\alpha \cdot \beta$ **Définition** (multiplication ordinale)**.** Soit α un ordinal fixé. Soit X_α la relation fonctionnelle qui à une fonction g de domaine un ordinal β associe

$$X_\alpha(g) = \bigcup_{\substack{y \in \operatorname{im} g: \\ \operatorname{Ord}(y)}} (y + \alpha).$$

Soit G_α la fonctionnelle obtenue par récurrence. On pose $\alpha \cdot \beta = G_\alpha(\beta)$.

La multiplication ordinale est associative, de neutre 1, et distributive à droite (seulement) sur l'addition. Elle n'est pas commutative ni régulière (même hors de $\varnothing$) : car $\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq 2 \cdot \omega = \omega$.

α^β **Définition** (exponentiation ordinale)**.** Soit α un ordinal fixé. Soit Ψ_α la relation fonctionnelle qui à une fonction h de domaine un ordinal β associe

$$\Psi_\alpha(h) = \bigcup_{\substack{y \in \operatorname{im} h: \\ \operatorname{Ord}(y)}} (y \cdot \alpha).$$

Soit H_α la fonctionnelle obtenue par récurrence. On pose $\alpha^\beta = H_\alpha(\beta)$.

Remarque. Ce n'est *pas* l'exponentiation cardinale, détaillée en § 24.3.

L'arithmétique ordinale a les propriétés voulues ; v. ex. 22.6.

Exercices

Notre exposition des ordinaux a contourné l'axiome de fondation (discuté davantage en § 25), qui fait bien partie de ZF. Si un exercice requiert la fondation, on le signale.

22.1. Montrer que les ordinaux sont exactement :

a. les ensembles transitifs d'ordinaux ;

b. les ensembles transitifs dont tous les éléments sont transitifs. [Considérer le premier ordinal $\alpha \notin x$ et appliquer l'axiome de fondation à $x \setminus \alpha$.]

22.2 (deux définitions des ordinaux). *Cet exercice emploie la fondation.* Soit $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$. Soit $\mathcal{C}$ une sous-collection transitive de $\mathbb{V}$; on note $\mathbb{C}$ la structure $(\mathcal{C}, \in_{|\mathcal{C}})$.

On note $\operatorname{Ord}_1(x)$ la formule : « x est transitif, et tout $y \subseteq x$ non vide possède un $\in$-plus petit élément » (c'est la formule Ord de § 22.1), et $\operatorname{Ord}_2(x)$ la formule : « x est transitif, et totalement ordonné par $\in$ ».

a. Montrer que $\mathrm{Ord}_1[\mathbb{V}] = \mathrm{Ord}_2[\mathbb{V}]$.

b. Pour a de $\mathcal{C}$, montrer : $\mathbb{V} \models \mathrm{Ord}_2(a)$ ssi $\mathbb{C} \models \mathrm{Ord}_2(a)$.

c. On suppose que $\mathbb{C}$ vérifie l'« axiome » de la paire. Pour a de $\mathcal{C}$, montrer : $\mathbb{V} \models \mathrm{Ord}_1(a)$ ssi $\mathbb{C} \models \mathrm{Ord}_1(a)$.

(*) d. Montrer que c'est faux si $\mathbb{C}$ ne vérifie pas la paire.

e. Soient M un *ensemble* transitif et $\mathbb{M} = (M, \in_{|M})$. On suppose que $\mathbb{M}$ vérifie paire et réunion. Montrer que $\mathrm{Ord}_1[\mathbb{M}] = \mathrm{Ord}_2[\mathbb{M}] = \mathrm{Ord}[\mathbb{V}] \cap \mathbb{M} = \min(\mathrm{Ord}[\mathbb{V}] \backslash \mathbb{M})$ est, dans $\mathbb{V}$, un ordinal limite.

Préférer Ord_1 à Ord_2 permet de différer la présentation de l'axiome de fondation. Mais Ord_2 a ses mérites : l'absence de référence même indirecte à la notion de partie, et la possibilité de travailler sans fondation.

22.3. Soit $\mathbb{A} = (A, R)$ une relation binaire. Cette relation est *bien fondée* si :

$$(\forall X)[(\varnothing \neq X \subseteq A) \to (\exists x)(x \in X \wedge (\forall y)(y \in X \to \neg yRx))].$$

Un *bon rang* sur $\mathbb{A}$ est la donnée d'un bon ordre $\mathbb{O} = (O, \leqslant)$ et d'une fonction $\mathrm{rg}\colon A \to O)$ telle que $\mathbb{A}$ vérifie $(\forall x)(\forall y)(xRy \to \mathrm{rg}\, x < \mathrm{rg}\, y)$. Montrer le lemme suivant.

Lemme. Une relation binaire est bien fondée ssi elle est munissable d'un bon rang.

[Poser $A_{\alpha+1} = \{y \in A : (\forall x)(xRy \to x \in A_\alpha)\}$.]

22.4. Montrer le résultat suivant. (L'ensemble des points fixes forme même un *club* au sens de l'exercice 24.8.)

Lemme. Soit $F\colon \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ une fonctionnelle définissable à la fois :

- *strictement croissante*, i.e. $\beta < \alpha \to F(\beta) < F(\alpha)$,
- et *continue*, i.e. $F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$ pour α limite.

Alors F possède des points fixes arbitrairement grands.

22.5. On travaille dans ZF. Soit $f\colon P(X) \to X$. On considère la fonctionnelle Φ qui à une fonction g de domaine ordinal α associe :

$$\Phi(g) = f(X \cap \mathrm{im}\, g).$$

Soit G la fonctionnelle obtenue par récursion ordinale.

a. Écrire $G(\varnothing)$, $G(1)$, $G(2)$.

b. Montrer qu'il existe une partie $Y \subseteq X$ et un bon ordre $<$ sur Y tels que :
   - $f(Y) \in Y$;
   - $(\forall y)[y \in Y \to y = f(\{z \in Y : z < y\})]$.

c. En déduire une forme du théorème du saut de Cantor : $P(X)$ ne s'injecte pas dans X.

d. Généralisation : soient X un ensemble non vide et $\infty \notin X$. Montrer que $P(X)$ ne s'injecte pas dans $X \cup \{\infty\}$.

22.6. On travaille dans ZF.

a. Vérifier les isomorphismes d'ordres $\alpha + \beta \simeq \alpha \sqcup_< \beta$, $\alpha \cdot \beta \simeq (\alpha \times \beta, \mathrm{lex})$, et $\alpha^\beta \simeq (\alpha^{(\beta)}, \text{anti-lex})$ (v. § 3.2).

b. Vérifier les propriétés suivantes.

- $+$ est associative et régulière à gauche, i.e. $(\alpha+\beta=\alpha+\gamma)\to(\beta=\gamma)$; elle n'est pas régulière à droite ;
- $+$ est strictement croissante à droite, i.e. $(\beta<\gamma)\to(\alpha+\beta<\alpha+\gamma)$ mais seulement croissante à gauche (donner un contre-exemple) ;
- $\cdot$ est associative et régulière à gauche hors $\varnothing$, i.e. pour $\alpha>0$ on a $(\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma)\to(\beta=\gamma)$; elle n'est pas régulière à droite ;
- $\cdot$ est distributive à gauche sur $+$, i.e. $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$; elle n'est pas distributive à droite ;
- l'exponentiation vérifie $\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$ et $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

On peut en profiter pour réviser la forme normale de Cantor, ex. 3.3.

22.7.

a. Soit α un ordinal. Il existe un $\Lambda_{\infty,\omega}(<)$-énoncé caractérisant $(\alpha,<)$ à isomorphisme près.

b. Soit κ un cardinal. Il existe $\beta<\alpha<(2^\kappa)^+$ vérifiant $(\alpha,<)\equiv(\beta,<)$ $[\Lambda_{\kappa,\omega}(<)]$.

22.8 (tassement/contraction de Mostowski). Une relation binaire (X,ε) est *extensionnelle* si elle vérifie l'axiome d'extensionnalité, et *bien fondée* si elle vérifie l'axiome de fondation (toute sous-collection non vide de X possède un élément ε-minimal). [Noter qu'un cadre ensembliste extérieur, ici $\mathbb{V}$, est requis pour cette notion de sous-collection.]

a. Soit X un ensemble muni d'une relation telle que (X,ε) soit extensionnel et bien fondé. Montrer qu'il existe un unique ensemble clos $\in$-inférieurement [« transitif »] Y et un unique isomorphisme $\pi\colon(X,\varepsilon)\simeq(Y,\in)$.

   Pour formaliser proprement la construction, on pourra songer à l'exercice 22.3.

b. Application. On suppose $(\mathbb{V},\in)$ bien fondé (axiome de fondation AF). Montrer que si x et y sont transitifs et que $(x,\in)\simeq(y,\in)$, alors $x=y$.

22.9 (ordinal de Hartogs). Avec l'axiome du choix, qui équivaut dans ZF au principe de Cantor-Zermelo (tout ensemble est bien ordonnable ; v. § 23.2), il existe des ordinaux de cardinalité (intuitive) arbitrairement grande.

On travaille ici dans ZF *sans choix* ; le but est de montrer qu'il existe néanmoins des ordinaux « arbitrairement grands ». Un ordinal α est *minimal* si aucun ordinal moindre ne lui est équipotent. On note $E\hookrightarrow F$ l'énoncé « il existe une injection de E dans F ».

a. Montrer que tout ordinal fini est minimal. Montrer que si α est un ordinal minimal infini, alors α est un ordinal limite.

b. Soit X un ensemble. Montrer qu'il existe un ordinal qui ne s'injecte pas dans X.

c. On appelle *ordinal de Hartogs* et l'on note $\operatorname{Hart}X$ le plus petit tel ordinal. Montrer que $\operatorname{Hart}(X)$ s'injecte dans $P(P(X^2))$, puis que $P(\operatorname{Hart}(X))$ s'injecte dans $P(P(X^2))$.

d. Montrer que si α est un ordinal minimal infini et que E et F sont des ensembles tels que α s'injecte dans $E\times F$, alors α s'injecte dans E ou dans F.

e. En déduire que si X n'est pas équipotent à un entier, alors $\operatorname{Hart}(X)=\operatorname{Hart}(X^2)$; puis que si $X\simeq Y^2$ pour un Y, alors $\operatorname{Hart}(X)$ s'injecte dans $P(P(X))$.

f. Montrer qu'en général $\operatorname{Hart}(X)$ s'injecte dans $P(P(P(X)))$.

22.10 (ordinaux de PST). Cet exercice fait suite à l'exercice 21.8.

a. Développer la théorie ordinale dans PST. En particulier montrer que $\mathrm{Ord}=\omega_1$ et que tout ensemble s'injecte dans ω.

b. Déduire que PST démontre les axiomes de ZFC *sauf la puissance*. (Note : AF pour les ensembles est indécidable dans PST.) Formaliser le corps réel et vérifier l'hypothèse du continu dans sa forme idoine.

c. Expliquer l'assertion : « PST permet l'arithmétique du troisième ordre ».

Suite et fin à l'exercice 27.8.

(*) **22.11 (arithmétique « naturelle »).** Refaire l'exercice 3.3 sur la forme normale de Cantor. En particulier tout ordinal s'écrit de manière unique

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot k_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot k_n,$$

où $n \in \omega$, les α_i sont des ordinaux vérifiant $\alpha_0 > \ldots > \alpha_n$, et les k_i sont des ordinaux finis non nuls.

a. Soient α, β deux ordinaux. On les écrit $\alpha = \sum_{i=0}^n \omega^{\gamma_i} \cdot a_i$ et $\beta = \sum_{i=0}^n \omega^{\gamma_i} \cdot b_i$, où les ordinaux finis a_i et b_i peuvent être nuls. On pose alors :

$$\alpha \oplus \beta = \sum_{i=0}^{n} \omega^{\gamma_i} \cdot (a_i + b_i).$$

Montrer que $\oplus$ est associative et commutative. Que vaut $1 \oplus \omega$?

b. Dans la notation précédente, on pose :

$$\alpha \otimes \beta = \bigoplus_{i,j} \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j} \cdot (a_i b_j).$$

Montrer que $\otimes$ est associative, commutative, et distributive sur $\oplus$. Interpréter en termes de séries formelles.

c. Montrer que $\alpha + \beta \leqslant \alpha \oplus \beta$ et $\alpha\beta \leqslant \alpha \otimes \beta$.

d. $\otimes$ est-elle obtenue en itérant $\oplus$?

(**) e. Si X est un ensemble d'ordinaux, on note $\sup'(X)$ le plus petit ordinal $> X$ (si $\max X$ existe, $\sup'(X) = \max(X) + 1$; sinon, $\sup'(X) = \sup(X)$). Montrer que

$$\alpha \oplus \beta = \sup{}'(\{\alpha \oplus \beta_- : \beta_- < \beta\} \cup \{\alpha_- \oplus \beta : \alpha_- < \alpha\}),$$

puis que :

$$\alpha \otimes \beta = \min\{x : (\forall \alpha_- < \alpha)(\forall \beta_- < \beta)(x \oplus (\alpha_- \otimes \beta_-) > (\alpha \otimes \beta_-) \oplus (\alpha_- \otimes \beta))\}.$$

À bien des égards, cette arithmétique est plus naturelle que l'arithmétique de structures ordonnées.

Notes conclusives

• **Repères historiques**

Je ferai remarquer encore qu'on peut définir les ensembles S sans passer par l'intermédiaire des ensembles bien ordonnés. Soit E un ensemble S. Nous avons vu que :

1. L'ensemble E est un ensemble ordinaire à un noyau (le noyau e).

2. Si x et y sont deux éléments quelconques de E, l'un d'eux est un élément de l'autre.

En outre :

3. Si x est un élément de E, tout élément de x est un élément de E.

> *Ces propriétés sont caractéristiques des ensembles S, et peuvent servir à les définir.* [**Mir17**, p. 47]

Ordinaux formels. • Présents chez Mirimanoff [**Mir17**, § 5 et 6, p. 45], qui procède à l'uniformisation des ordinaux naïfs, axiomatise les ordinaux formels, et démontre leurs propriétés de base : tout § 22.1 est dans [**Mir17**]. • Indépendamment von Neumann redécouvrit les ordinaux formels dans [Neu23], invoquant la théorie de Zermelo revue par Fraenkel ; à l'époque il ne citait ni Mirimanoff ni Skolem [**Sko23**]. Ces premiers travaux de von Neumann ne concernaient que les bons ordres et leurs propriétés comme rigidité, comparaison, ubiquité, mais ne traitent pas la collection Ord ; Burali-Forti n'était pas cité ce qui semble étonnant. (L'axiomatisation de von Neumann discutée en § Q, postérieure, cite bien Burali-Forti, Mirimanoff et Skolem.) • Selon von Neumann citant une communication orale, Zermelo était proche de la construction dès 1916 [Neu28b, note 2 p. 374], sans pouvoir montrer l'ubiquité des ordinaux formels faute de remplacement. • Je n'ai pas cherché de traces de l'uniformisation chez Cantor.

Récursion ordinale. Elle semble bien de von Neumann : [**Neu28a**, IX.1.Satz 90] ; plus reconnaissable en [Neu28b, p. 387].

Paradoxe de Burali-Forti. • Cantor avait déjà identifié que la classe des cardinaux ne possédait pas de cardinalité. • Le style de Burali-Forti [**Bur97**] est très peanien. (Ceci repose la question : *qu'attend-on d'un formalisme ?* la rigueur, la clarté d'exposition, l'inspiration qabalistique, la construction d'un entresoi ?) Sa conclusion n'est pas celle que nous en tirons : il questionne le domaine d'application du théorème de comparaison. • Voir le passionnant [MG81].

Ordinal de Hartogs (exercice 22.9) d'un ensemble. Présent dans [Har15]. Théorisé par l'école polonaise, p.ex. [Tar24b]. On trouve aussi la notation $\aleph(X)$; elle crée des confusions.

Collapse de Mostowski (exercice 22.8). Présent dans [Mos49, Theorem 3] ; pourrait être plus ancien.

Arithmétique naturelle (ex. 22.11). La somme est bien de Hessenberg, mais le produit serait dû à Hausdorff ; v. [Ehr06, pp. 24-25]. Les égalités de la question e. sont dues à Conway ; elles découlent trivialement du plongement des ordinaux dans les surréels (§ T).

[**Mir17**] : Dimitri Mirimanoff. « Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles ». In : *Enseign. Math.* 19 (1917), p. 37-52
[Neu23] : János von Neumann. « Zur Einführung der transfiniten Zahlen ». In : *Acta Litt. Sci. Szeged* 1 (1923), p. 199-208
[Neu28b] : János von Neumann. « Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre ». In : *Math. Ann.* 99 (1928), p. 373-391
[**Neu28a**] : János von Neumann. « Die Axiomatisierung der Mengenlehre ». In : *Math. Z.* 27.1 (1928), p. 669-752
[**Bur97**] : Cesare Burali-Forti. « Una questione sui numeri transfiniti ». In : *Rend. Circ. Mat. Palermo* 11 (1897), p. 154-164
[MG81] : Gregory Moore et Alejandro Garciadiego. « Burali-Forti's paradox : a reappraisal of its origins ». In : *Historia Math.* 8.3 (1981), p. 319-350
[Har15] : Friedrich Hartogs. « Über das Problem der Wohlordnung ». In : *Math. Ann.* 76.4 (1915), p. 438-443
[Tar24b] : Alfred Tarski (signé Tajtelbaum-Tarski). « Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix ». In : *Fund. Math.* 5 (1924), p. 147-154
[Mos49] : Andrzej Mostowski. « An undecidable arithmetical statement ». In : *Fund. Math.* 36 (1949), p. 143-164
[Ehr06] : Philip Ehrlich. « The rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I. The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes ». In : *Arch. Hist. Exact Sci.* 60.1 (2006), p. 1-121

• **Ordinaux et** ZF. À l'origine, ZF sert à donner un cadre aux idées de Cantor, notamment à sa théorie des ordinaux. La définition d'un bon ordre est un *énoncé monadique du deuxième ordre*, par sa quantification universelle sur les parties de l'ordre. Mais vu depuis un modèle de ZF (la théorie de Zermelo suffit d'ailleurs), cet axiome s'écrit en logique élémentaire : on a ainsi formalisé la théorie ordinale intuitive au sein de ZF, éliminant l'ambiguïté du deuxième ordre. Mais n'est-ce pas tailler large ? Dans quelle mesure le développement des ordinaux demandait-il une théorie aussi expressive que ZF ?

Takeuti a étudié le problème dans une série d'articles s'affinant progressivement. On peut axiomatiser en logique élémentaire Ord *avec une grande quantité de structure arithmétique* (internalisation de la vérité pour les formules atomiques, fonction d'appairement, schéma de minimisation — ces choses sont naturelles depuis l'étude de PA), de sorte à récupérer le pouvoir d'expression de ZF.

Théorème ([Tak65])**.** Dans un langage idoine, il existe une $\mathcal{L}$-théorie T_{Ord} des ordinaux et une traduction $\varphi \rightsquigarrow \varphi^*$ de $\mathcal{L}$-formules vers $\{\in\}$-formules telle que : pour tout énoncé, $T_{\mathrm{Ord}} \models \varphi$ ssi $\mathrm{ZF} \models \varphi^*$.

C'est évidemment impossible sans structure arithmétique sur Ord, i.e. si l'on considère simplement la théorie élémentaire des ordinaux (ordres définissablement bons). Voir aussi § 27, notes conclusives.

• **Ordinaux et modèles de** ZF. La « longueur » (au sens le plus informel du mot) de la droite ordinale Ord est un paramètre essentiel d'un modèle de ZF mais ne le caractérise pas, un autre important facteur étant le « degré d'ouverture » de la fonction puissance.

Donner un sens à ces mots suppose de pouvoir comparer des modèles, comme suit. Si ZF est satisfaisable, alors il existe un modèle $(\mathbb{V}, \in)$ et deux collections définissables $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2$ qui équipées de la relation induite :

- sont encore modèles de ZF, i.e. $(\mathbb{M}_i, \in_{|\mathbb{M}_i}) \models \mathrm{ZF}$;
- ont mêmes ordinaux, i.e. $\mathrm{Ord}[\mathbb{M}_1] = \mathrm{Ord}[\mathbb{M}_2]$;
- et pourtant sont non élémentairement équivalentes — à plus forte raison, non $\mathbb{V}$-isomorphes.

Les « modèles intérieurs » de § 26 et § 27 offrent de tels exemples.(Un *modèle intérieur* est une sous-collection transitive $\mathcal{C}$, contenant $\mathrm{Ord}[\mathbb{V}]$, et telle que $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \in_{|\mathcal{C}}) \models \mathrm{ZF(C)}$. Rien ne dit que la fonction puissance calcule la même chose dans $\mathbb{V}$ et dans $\mathbb{C}$.)

La connaissance des ordinaux ne permet donc pas celle du modèle ; c'est d'ailleurs évident sitôt qu'on a compris que la complexité de la combinatoire ensembliste provient de la fonction puissance. En revanche, la connaissance des *ensembles* d'ordinaux est suffisante dans les cas non pathologiques (il faut AC). Vopěnka et Balcar ont montré que deux modèles intérieurs ayant mêmes ensembles d'ordinaux *et dont l'un satisfait* AC sont égaux [VB67]. Koepke et Koerwien ont même donné une théorie « à deux sortes » SO axiomatisant le comportement conjoint des ordinaux et des ensembles d'ordinaux ; SO est bi-interprétable avec ZFC [KK06].

• **Ordinaux de Hartogs (exercice 22.9).** Les majorations $\mathrm{Hart}(X) \hookrightarrow P(P(X^2))$ et $\mathrm{Hart}(X) \hookrightarrow P(P(P(X)))$ peuvent sembler grossières mais sont optimales.

Théorème ([Hic80, Theorem 11])**.** Il est cohérent à ZF qu'existe X tel que $\mathrm{Hart}(X) \not\hookrightarrow$

[Tak65] : Gaisi Takeuti. « A formalization of the theory of ordinal numbers ». In : *J. Symbolic Logic* 30 (1965), p. 295-317

[VB67] : Petr Vopěnka et Bohuslav Balcar. « On complete models of the set theory ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 15 (1967), p. 839-841

[KK06] : Peter Koepke et Martin Koerwien. « Ordinal computations ». In : *Math. Structures Comput. Sci.* 16.5 (2006), p. 867-884

[Hic80] : John Hickman. « Lambda-minimal lattices ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 26 (1980), p. 181-191

$P(P(X))$.

(Hickman fait noter le lien avec l'ordinal de Hartogs après sa démonstration.) • On peut aussi étudier le plus petit ordinal α tel que $X \not\twoheadrightarrow \alpha$, appelé *ordinal de Lindenbaum* ; ce n'est pas nécessairement $\mathrm{Hart}(X)$. Il est brièvement mentionné à l'ex. R.2. • Rappelons que remplacer les injections par des surjections a des effets inattendus ; v. Cantor-Bernstein en § 23, notes conclusives.

• **Arithmétique de Jacobsthal.** L'exercice 22.11 montre que l'arithmétique d'ordres n'est pas la plus naturelle sur les ordinaux. On peut également itérer la somme naturelle pour obtenir encore une autre multiplication ; [Alt17] est très bien fait pour s'initier aux liens entre les trois arithmétiques ordinales.

§ 23. Axiomes de l'infini et du choix

Les ordinaux dits « limites » font de ZF une théorie de l'infini actuel ; l'*axiome de l'infini* affirme qu'il existe de tels ordinaux. Le plus petit d'entre eux permet notamment de formaliser l'arithmétique en théorie des ensembles (§ 23.1). L'*axiome du choix* (§ 23.2) possède de nombreux équivalents.

Prérequis : §§ 19, 21–22.

§ 23.1. Axiome de l'infini

• Successeur et ordinaux limites

Définition (ordinal successeur, ordinal limite)**.** Soit α un ordinal.

— α est *successeur* s'il est de la forme $s(\beta)$.

— α est *limite* s'il n'est ni $\varnothing$, ni limite.

Remarque. Paraphrasons à nouveau le théorème de construction par récurrence ordinale :

> On se donne $F(\varnothing)$, ainsi que des moyens uniformes :
>
> — pour α donné, de construire $F(s(\alpha))$ en fonction des précédents ;
>
> — pour α donné limite, de construire $F(\alpha)$ en fonction des précédents.
>
> Alors $F(\alpha)$ est bien défini pour tout ordinal α.

[Alt17] : Harry Altman. « Intermediate arithmetic operations on ordinal numbers ». In : *MLQ Math. Log. Q.* 63.3-4 (2017), p. 228-242

- **Axiome de l'infini**

AI AI : il existe un ordinal limite.

Cet axiome fait de ZF une théorie de l'infini actuel. Puisque la propriété « être un ordinal limite » est définissable, par séparation la notation suivante a un sens.

Définition (ω, entiers)**.**

ω — Soit ω le plus petit ordinal limite.

— Les *entiers*, ou *ordinaux finis*, sont les éléments de ω.

Remarque. L'énumération des premiers ordinaux : $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ... peut être comprise en deux sens :

— sens intuitif (énumération par les vrais entiers),

— sens formel (énumération par ω au sein du modèle ; facile à formaliser).

On sait refléter les vrais entiers au sein du modèle, mais l'adéquation entre vrais entiers et entiers du modèle est incertaine. En fait cette question n'a pas de sens formel car on ne manipule pas mathématiquement des objets intuitifs, seulement leur contrepartie technique. Aucune comparaison n'est possible entre un objet intuitif et un objet formel ; et toute démarche axiomatique crée du non-standard.

L'axiome de l'infini est qu'il y a encore des ordinaux après l'énumération *formelle*. Rien n'empêche que dans un modèle la suite formelle soit « plus longue » (intuitivement) que sa part standard, auquel cas cette dernière ne constitue pas un ensemble : elle ne forme pas une sous-collection définissable de ω puisque le concept intuitif « standard » échappe au pouvoir d'expression du langage, si bien qu'on ne peut lui appliquer la séparation.

En conclusion, le plus décevant épistémologiquement, mais aussi le plus sûr méthodologiquement, est d'appeler « entiers » les membres de ω.

- **Entiers du modèle**

Proposition. Si $\mathbb{V} \models$ ZF, alors $(\omega_{\mathbb{V}} ; \varnothing, s_{|\omega}, +_{|\omega}, \cdot_{|\omega}) \models$ PA.

Démonstration. Les propriétés arithmétiques sont toutes claires, sauf la surjectivité de s hors de $\varnothing$, qui résulte de ce que si $\alpha \in \omega$ alors α n'est pas limite. Reste le schéma de récurrence de Peano. Soit $\varphi(x)$ une $(+, \cdot)$-formule donnée (éventuellement à paramètres) vérifiant les hypothèses de ce schéma. On considère $\chi(x)$: $\mathrm{Ord}(x) \wedge (\varphi(x) \vee x \notin \omega)$. Par récurrence ordinale, χ est vraie sur Ord, donc φ l'est sur ω. $\square$

Remarques

— Les entiers portent plus de structure que $+$ et $\cdot$: le principe de récurrence vaut maintenant pour des formules empruntant des notions ensemblistes. De fait il existe des sous-collections $\in$-définissables de ω qui ne sont pas $(+,\cdot)$-définissables (l'ensemble des codes d'énoncés vrais, pour un codage comme au chapitre IV, par le théorème de Tarski de § 20).

— Il existe donc des énoncés sur $(\omega\,;+,\cdot)$ démontrables dans ZF mais pas dans PA. C'est le cas de ⌜Coh(PA)⌝ (ou encore de la convergence des suites de Goodstein).

— Évidemment $\mathbb{V}$ possède d'autres modèles de PA. Mais $\omega_{\mathbb{V}}$ est minimal, dans le sens où si $(\mathbb{M}\,;0,s,+,\cdot)$ est dans $\mathbb{V}$ et vérifie le principe de récurrence *pour toutes les collections $\in$-définissables*, alors $\mathbb{M}$ est uniquement isomorphe à ω. C'est en effet un bon ordre infini, qui contient une copie de ω : et le principe de récurrence appliqué à l'image $\in$-définissable de ω donne isomorphisme.

On vient donc, via la théorie ZF (théorie élémentaire), d'émuler l'absolue catégoricité de PA^2 (théorie du deuxième ordre). Ceci illustre bien le choix méthodologique de l'entre-deux-guerres de formaliser les mathématiques dans le couplage de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles. Les difficultés épistémologiques sont réduites ; la logique est maîtrisée ; seules demeurent les difficultés combinatoires, reléguées à l'infinie complexité ensembliste.

§ 23.2. Axiome du choix

Théorème. Dans ZF, les énoncés suivants sont équivalents.

(i) AC : une partition étant donnée, il existe un ensemble intersectant chaque terme en un singleton.

(ii) Fonctions de choix : pour tout ensemble, il existe une fonction qui choisit un point dans chaque partie non vide, i.e. :

$$(\forall A)(\exists h)[(h\colon P(A)\backslash\{\varnothing\} \to A) \wedge (\forall x)(x \in P(A)\backslash\{\varnothing\} \to h(x) \in x)].$$

(iii) Produits non vides : si $\{A_i : i \in I\}$ est un ensemble d'ensembles non vides, alors $\prod_I A_i$ est non vide.

(iv) « Principe du maximum » de Zorn : tout $(X,<)$ ensemble partiellement ordonné inductif (toute partie totalement ordonnée est majorée) possède un élément maximal.

(v) Comparaison abstraite : si A et B sont deux ensembles, alors $A \hookrightarrow B$ ou $B \hookrightarrow A$.

(vi) Principe de Cantor-Zermelo : tout ensemble est bien ordonnable.

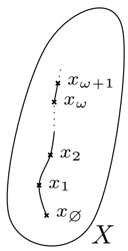
Remarque. Le dernier point se reformule en : tout ensemble est équipotent à un ordinal ; cette formulation simplifie drastiquement la théorie des « cardinalités » intuitives.

Démonstration.

(i)⇒(ii). Soit A donné. On considère les $x \times \{x\}$ pour $x \in P(A)\backslash\{\varnothing\}$: ces ensembles disjoints partitionnent leur réunion U. Soit, par choix, c intersectant chaque terme $x \times \{x\}$ en un singleton. Envoyer x sur l'unique $a \in A$ tel que $(a, x) \in c \cap x \times \{x\}$ définit une fonction de choix.

(ii)⇒(iii). Soit $\prod_I A_i$ un produit d'ensembles non vides. Quitte à remplacer A_i par $A_i \times \{i\}$, on peut supposer les A_i disjoints. Soient $A = \bigsqcup_I A_i$ et $h\colon P(A)\backslash\{\varnothing\} \to A$ une fonction de choix. Alors $h(A_i) \in A_i$, donc la fonction $i \mapsto h(i)$ est un élément du produit cartésien.

(iii)⇒(iv). L'idée est claire : construire une suite strictement croissante aussi longtemps que possible ; elle devra s'arrêter.



Formaliser ce dessin demande une forme de choix.

Soit $(X, <)$ vérifiant les hypothèses ; noter qu'il n'est pas vide puisque $\varnothing$ est une partie totalement ordonnée, donc majorée. Soit $\mathcal{C} \subseteq P(X)$ l'ensemble des parties totalement ordonnées de X, appelées *chaînes*. Par hypothèse, chacune est majorée au sens large ; un majorant $m \in X$ de $C \in \mathcal{C}$ est *strict* si $(\forall c)(c \in C \to c < m)$. Supposons que l'une des chaînes $C \in \mathcal{C}$ soit sans majorant strict. Un majorant de C est alors sans majorant strict, donc maximal dans X ; on a fini. On peut donc supposer que toute chaîne possède un majorant strict. Considérons le produit cartésien, indexé par les chaînes, des ensembles de majorants stricts : il est non vide. Un élément associe à chaque chaîne C un majorant strict

m_C.

Soit S la collection définissable des fonctions de domaine un ordinal, à valeur dans X, et strictement croissantes. Si $S(f)$, alors $\operatorname{im} f \in \mathcal{C}$; notamment la relation fonctionnelle $\Phi(f) = m_{\operatorname{im} f}$ si $S(f)$, et $\varnothing$ sinon, est bien définie. Par récursion ordinale, soit F l'unique fonctionnelle telle que partout $F(\alpha) = \Phi(F_{|\alpha}) = m_{\{F(\beta):\beta<\alpha\}}$. Par récurrence, pour tout ordinal on a $S(F_{|\alpha})$; donc F est définie sur Ord, et elle est strictement croissante.

On a donc injecté Ord dans X ; cela force la « taille » de X à excéder celle de Ord, mais nous n'avons pas encore formalisé la notion de cardinal.

Soit donc $T(x)$ la collection définissable $(\exists\alpha)[\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x = F(\alpha)]$, qui par séparation est un sous-ensemble de X. On considère alors la relation réciproque F^{-1}, fonctionnelle de T vers Ord ; par remplacement son image est un ensemble. Mais cette image est la collection définissable $\operatorname{dom} F$, i.e. Ord, qui n'est pourtant pas un ensemble : contradiction.

(iv)⇒(v). Soit X l'ensemble des bijections entre une partie de A et une partie de B, ordonné par l'inclusion (i.e. l'ordre de prolongement). On voit que X est inductif, car si $Y \subseteq X$ est totalement ordonné, alors $\biguplus(Y)$ est encore une fonction bijective, i.e. $\biguplus(Y) \in X$.

D'après le principe de Zorn, il existe un élément maximal $f \in X$. Si $\operatorname{dom} f = A$ on a fini. Si $\operatorname{im} f = B$ on considère la relation réciproque f^{-1}, qui injecte B dans une partie de A : on a fini. Sinon, il existe a et b vérifiant $a \in A \wedge a \notin \operatorname{dom} f$ et $b \in B \wedge b \notin \operatorname{im} f$. Alors $f \cup \{(a, b)\} \in X$ contredit la maximalité de f.

(v)⇒(vi). Soit X un ensemble abstrait. Soit $\Omega(\alpha)$ la collection définissable : $\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge (\exists f)(f : \alpha \hookrightarrow X)$ des ordinaux s'injectant dans X. Elle forme un segment initial de Ord.

S'il n'est pas propre, tout ordinal s'injecte dans X : ici encore, cela contredit l'idée intuitive de cardinalité, et nous procédons comme suit. Soit la collection définissable des bons ordres sur les parties de X, donnée par :

$$(\exists Y)(\exists R)(Y \in P(X) \wedge R \subseteq Y^2 \wedge \text{« } R \text{ est un bon ordre sur } Y \text{ »} \wedge x = (Y, R)).$$

Par séparation, c'est un ensemble O. Sous notre hypothèse, tout ordinal est isomorphe à un élément de O ; deux ordinaux distincts ne sont pas isomorphes à un même élément. On applique le remplacement à la relation fonctionnelle $\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \simeq \alpha$ et au domaine O, pour trouver que Ord est un ensemble, contradiction.

Donc Ω est un segment initial propre de Ord : il existe un ordinal α ne s'injectant pas dans X. Par hypothèse, X s'injecte dans α, et en tant que sous-ensemble de α hérite d'un bon ordre.

(vi)⇒(i). Soit x une partition de $\dot{\bigcup}(x)$. On met un bon ordre sur ce dernier. À $y \in x$ on associe $\min y$; c'est bien défini. Alors $\{\min y : y \in x\}$ convient. □

Remarques

— Avec la formulation plus intuitive de la construction par récurrence ordinale, on peut présenter (ii)⇒(iv) comme suit.

> Construisons une suite de *points* de X indexée par les ordinaux. On prend $G(\varnothing) = x_0 \in X$ (quelconque) ; pour tout α, $G(\alpha+1) = m_{\{G(\alpha)\}}$, et pour α limite, $G(\alpha) = m_{\{G(\beta):\beta\in\alpha\}}$. Ceci définit une suite ordinale croissante. Si elle stationne, le point atteint est maximal. Sinon, on vient d'injecter Ord dans X : on conclut comme plus haut.

Noter que pour franchir les limites on a bien besoin de l'inductivité de X.

— Les équivalences sont même dans ZF$\setminus\{$AF$\}$.

— Il existe de nombreux énoncés équivalents, par exemple le principe de maximalité de Hausdorff (§ 2.1), le théorème de Tychonoff (un produit d'espaces topologiques ayant la propriété de Borel-Lebesgue, garde la propriété), le théorème de Krull (tout anneau au sens usuel possède un idéal maximal), le théorème d'existence des bases dans les espaces vectoriels.

— Il existe aussi des énoncés un peu plus faibles : par exemple le théorème de Tychonoff *pour les espaces séparés*, l'axiome de l'ultrafiltre, le théorème de Krull *pour les anneaux de Boole*.

— Il existe aussi diverses conséquences réputées sulfureuses comme le théorème de Banach-Tarski, pourtant un énoncé de théorie des groupes ; v. § S.

— L'axiome du choix est indépendant de ZF, dans le sens où si ZF est cohérente alors ZF ∪ {AC} (§ 27) et ZF ∪ {¬AC} le sont (le second demande du forcing ; v. notes conclusives).

— Enfin le choix global est discuté en § 26.

Exercices

23.1. Montrer que dans ZF\{AI}, l'axiome de l'infini équivaut à :

$$(\exists x)[\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)].$$

On appelle parfois « axiome de l'infini » cet énoncé. L'intuition reste que « la collection des entiers est un ensemble », ou encore « $\omega <$ Ord » (guillemets de rigueur).

23.2. On suppose que tout ensemble non équipotent à un entier formel, est équipotent à son carré. Montrer AC. [Partir de X et former $Y = X \sqcup \mathrm{Hart}(X)$, où $\mathrm{Hart}(X)$ est comme à l'exercice 22.9 le plus petit ordinal ne s'injectant pas dans X.]

23.3 (notions de finitude). On travaille sans AC. Soit E un ensemble.

a. Montrer, sans choix, les équivalences :
  - il existe une injection $\omega \hookrightarrow E$;
  - il existe une bijection $E \simeq E \cup \{\infty\}$ (où $\infty \notin E$) ;
  - il existe $A \subsetneq E$ et une bijection $E \simeq A$.

  Un tel ensemble est dit « infini au sens de Dedekind », la négation étant « fini au sens de Dedekind ».

b. Un ensemble est *formellement fini* s'il est en bijection avec un élément de ω.
  Montrer que si E est formellement fini, alors il est fini au sens de Dedekind.

c. Montrer que E est formellement fini ss'il existe $k < \omega$ ne s'injectant pas dans E. En déduire que E est formellement fini ssi $P(P(E))$ est Dedekind-fini.

d. Montrer que tout ensemble bien ordonnable et fini au sens de Dedekind est formellement fini.

e. Montrer que la collection des ensembles finis au sens de Dedekind est close sous réunion et produit binaires. (Attention, en général elle ne l'est pas sous puissance : v. exercice 23.4).

f. Montrer que si E est fini au sens de Dedekind, alors l'ensemble des uplets injectifs finis (union sur ω des fonctions injectives $n \to E$) est fini au sens de Dedekind.

g. On suppose le *principe de Cantor-Bernstein dual* (v. § 1), i.e. l'énoncé : « si $E \twoheadrightarrow F$ et $F \twoheadrightarrow E$, alors $E \simeq F$ ».
  Déduire de ce qui précède que si E est fini au sens de Dedekind, alors il est formellement fini.

Sans choix, il peut exister des ensembles finis au sens de Dedekind non formellement finis : v. notes conclusives.

23.4. On travaille dans un modèle de ZF sans choix.

a. Soit A un ensemble. Montrer que $A \twoheadrightarrow \omega$ ssi $\omega \hookrightarrow P(A)$.
  [Pour la réciproque, partir d'une ω-suite $\mathcal{F}_0$ dans $P(A)$ et trouver une intersection finie K_0 telle que chaque membre la contient ou l'évite. Mettre alors de côté K_0, construire une nouvelle ω-suite $\mathcal{F}_1$, et réitérer.]

b. On note Δ la collection des ensembles finis au sens de Dedekind, i.e. ne contenant pas de copie de ω. Montrer l'équivalence des points suivants :
  (i) Δ est close sous Δ-réunion, i.e. si $\Delta(D)$ et $(\forall x)(x \in D \to \Delta(x))$, alors $\Delta(\dot{\bigcup}(D))$;
  (ii) Δ est close sous image directe ;
  (iii) Δ est close sous puissance ;

(iv) Δ est la collection des ensembles formellement finis.

23.5 (ensembles amorphes). On travaille sans choix ; *fini* signifie « en bijection avec un entier ». Un ensemble A est *amorphe* s'il est infini mais que tout sous-ensemble est fini ou cofini. On suppose A amorphe.

a. Montrer que A et $P(A)$ sont finis au sens de Dedekind. [Ex. 23.3 et 23.4.]

b. (i) Soit Π une partition de A en une infinité d'ensembles. Montrer que Π est formée d'ensembles finis, et qu'il existe un unique n tel que cofiniment souvent, les membres de Π sont de cardinal n.

(*) (ii) Montrer que $\mathrm{Sym}(A)$ est Dedekind-fini. [Sinon prendre un sous-groupe dénombrable $H \leqslant \mathrm{Sym}(A)$. Étonnamment ses orbites sont finies et ont presque toutes la même structure.]

c. (i) Sur $P(A)$ soit $\mathcal{U}_1$ le filtre cofini. Sur $P(A^2)$ soit $\mathcal{U}_2 = \{C \subseteq A^2 : \{a \in A : \{b \in A : (a,b) \in C\} \in \mathcal{U}_1\} \in \mathcal{U}_1\}$. Montrer que les $\mathcal{U}_n$ sont des ultrafiltres non principaux.

(ii) Soient $C \in \mathcal{U}_2$ et $C' = \{(a_2, a_1) : (a_1, a_2) \in C\}$. Montrer $C' \in \mathcal{U}_2$. [Les phénomènes finis le sont uniformément.] En déduire qu'il n'y a pas de fonction de choix sur les parties à 2 éléments de A.

(*) (iii) Généraliser : donner un ultrafiltre de $P(A^n)$ compatible avec l'action naturelle de $\mathrm{Sym}(n)$, et montrer qu'il n'y a pas de fonction de choix sur $A^{[n]}$.

23.6 (AC équivaut à (Krull booléen et Łoś)). Parler d'ultraproduits sans axiome du choix demande un aménagement : $\prod_I \mathbb{A}_i/\mathcal{U}$ est à comprendre comme l'ensemble des classes de I-suites *génériquement définies*, i.e. fonctions *partielles* de domaine $\operatorname{dom} f \in \mathcal{U}$.

Théorème. $\mathrm{ZF} \models \mathrm{AC} \leftrightarrow$ [(tout filtre d'un anneau de Boole est inclus dans un ultrafiltre) $\wedge$ (théorème de Łoś)].

a. Rappeler le sens facile.

b. Un ensemble I est *électif* si tout produit indexé par I d'ensembles non vides, est non vide. Montrer que l'ensembles des parties électives d'un ensemble I forme un idéal (éventuellement, 1) de l'anneau $P(I)$.

c. Montrer le sens réciproque. [Soit I non électif, comme attesté par $\prod_I X_i = \varnothing$. Sur $A = I \sqcup \bigsqcup_I X_i$, mettre la relation aEb :si $(b \in I \wedge a \in X_b) \vee (b \notin I \wedge a = b)$, et penser à $\delta = [(i)] \in \mathbb{A}^*$.]

23.7 (choix dépendant et sous-structures élémentaires). Un *arbre ensembliste* est un ordre partiel $\mathbb{A} = (A, <)$ ayant un plus petit élément (enraciné) et tel que chaque $\mathbb{A}_{<a}$ est un bon ordre. La *hauteur* de $a \in \mathbb{A}$ est alors $h(a) = \operatorname{ord} \mathbb{A}_{<a}$; celle de $\mathbb{A}$ est $\sup\{h(a) : a \in \mathbb{A}\}$.

a. Montrer (sans choix) que tout arbre ensembliste *dénombrable* de hauteur ω sans élément maximal possède une branche infinie.

b. L'*axiome du choix dépendant* (ACD) est l'énoncé :

> tout arbre ensembliste de hauteur ω sans élément maximal possède une branche infinie.

Montrer que $\mathrm{ZF} \cup \{\mathrm{ACD}\} \models \mathrm{AC}_\omega$ (toute famille *dénombrable* d'ensembles non vides possède une fonction de choix).

(*) c. Déduire que sur ZF, ACD équivaut à : toute structure infinie en langage dénombrable possède une sous-structure élémentaire dénombrable. [Mener pas-à-pas une construction à la Skolem. AC_ω ne suffit pas.]

23.8 (théorème de Tychonoff et choix). Soit $\mathbb{V} \models$ ZF.

a. On suppose que dans $\mathbb{V}$, tout produit d'espaces de Borel-Lebesgue est encore de Borel-Lebesgue. Montrer $\mathbb{V} \models$ AC. [Partir d'une famille $(X_i : i \in I)$. Sur X_i mettre la topologie cofinie puis ajouter un singleton ouvert $\{*_i\}$.]

b. On suppose que dans $\mathbb{V}$, tout produit d'espaces compacts est encore compact. Montrer $\mathbb{V} \models$« Krull booléen » (tout anneau de Boole possède un idéal maximal). [Les morphismes $\mathbb{A} \to 2$ forment un fermé de $2^{\mathbb{A}}$.]

23.9 (théorème de Diaconescu). Il faut connaître les multivers de Kripke pour la logique intuitionniste (§ G). Soit $\mathbb{M}$ un modèle intuitionniste de la théorie de Zermelo Z vérifiant le principe de choix « toute relation totale a une fonction de choix ». Montrer que pour chaque énoncé φ et tout monde $\mathfrak{p}$, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi \vee \neg\varphi$ (satisfaction intuitionniste).

Remarque. Par persistance, $\mathbb{M}$ est une catégorie de structures à théorie élémentaire constante le long de $\leqslant$. Notamment si $\leqslant$ est dirigé, cette théorie est constante ; l'information ne s'affine pas. Ainsi :

> en logique intuitionniste, la théorie de Zermelo avec une forme de choix entraîne le tiers-exclu.

Notes conclusives

Pourquoi l'axiome du choix donne-t-il des frayeurs aux apprentis mathématiciens ? Tout le monde sait que c'est l'axiome de la puissance qui f... le bor...

• **Repères historiques**

Ein System S heißt unendlich, wenn es einem echten Theile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt S ein endliches System.

Avec sa note contenant une reformulation et :

In dieser Form habe ich die Definition des Unendlichen, welche den Kern meiner ganzen Untersuchung bildet, im September 1882 Herrn G. Cantor, und schon mehrere Jahre früher auch den Herren Schwarz und Weber mitgetheilt. Alle anderen mir bekannten Versuche, das Unendliche vom Endlichen zu unterscheiden, scheinen mir so wenig gelungen zu sein, daß ich auf eine Kritik derselben verzichten zu dürfen glaube. [**Dedekind2**, § 5, par. 64 p. 17]

Axiome du choix. • Zermelo a démontré son théorème dans [**Zer04**], les axiomes employés restant pour le moins implicites sauf le choix dont le rôle est pointé, puis redémontré dans [Zer07] avec un véritable travail de clarification des axiomes débouchant sur [**Zer08**]. C'est à cet effort que l'on doit l'émergence de ZF, et non à une volonté de « résoudre la crise des fondements ». • [**Zer04**] ne fut pas unanimement accepté [Moo78]. Texte historique majeur sur sa réception en France : [Had05]. • Hausdorff chercha un moyen général d'éviter le recours à la récurrence transfinie pour certaines constructions (v. § 2). De même [Kur22b] contient une forme du lemme de Zorn. Ce dernier est énoncé sans démonstra-

---

[Moo78] : Gregory Moore. « The origins of Zermelo's axiomatization of set theory ». In : *J. Philos. Logic* 7.3 (1978), p. 307-329

[Had05] : Jacques Hadamard. « Cinq lettres sur la théorie des ensembles ». In : *Bull. Soc. Math. France* 33 (1905), p. 261-273

[Kur22b] : Casimir Kuratowski. « Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques ». In : *Fundam. Math.* 3 (1922), p. 76-108 tion dans le remarquable [Zor35], et appliqué à la théorie des corps algébriquement clos de Steinitz [Ste10]. Cette forme eut grand succès ; v. [Cam78]. • En 1939 Teichmüller [Tei39] faisait le point, peut-être indépendamment ; je n'ai pas localisé l'article. On ne peut exclure qu'un texte paru dans *Deutsche Mathematik* ait délibérément falsifié l'histoire.

Sources des exercices. • Notions de finitude (ex. 23.4) : v. citation supra. La question a. est de Kuratowski, mais paraît dans [Tar24a, Annexe] ; pas trace de publication directe par Kuratowski. Autre argument dans [HS01, Fact 8.1]. • Exercice 23.6 : [How75]. • Ex. 23.7 : attribué à Boolos par [AK21, p. 230]. • Théorème de Diaconescu (exercice 23.9). [Dia75] en langage très topos-théorique, ramené dans [GM78] à une demi-page élémentaire. On rappelle (§ 1) qu'en théorie *intuitionniste* des ensembles, le théorème de Cantor-Bernstein aussi entraîne le tiers-exclu [BP19]. • Ensembles amorphes (ex. 23.5) : introduits sans nom dans [Tru74] où ils forment la classe Δ_1. Analyse poussée de la notion, inspirée par la géométrie fortement minimale, dans [Tru95]. • Théorème du carré de Tarski (exercice 23.2) : [Tar24b, Théorème 2], parmi d'autres énoncés similaires d'arithmétique cardinale.

> *Tarski told me the following story. He tried to publish his theorem (stated above) in the* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *but Fréchet and Lebesgue refused to present it. Fréchet wrote that an implication between two well known propositions is not a new result. Lebesgue wrote that an implication between two false propositions is of no interest. And Tarski said that after this misadventure he never tried to publish in the* Comptes Rendus. [Myc06]

• **Aspects des entiers.**

Confusion à éviter. On ne confondra surtout pas ordinaux $> \omega$ et entiers non standard au

[Zor35] : Max Zorn. « A remark on method in transfinite algebra ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 41.10 (1935), p. 667-670
[Ste10] : Ernst Steinitz. « Algebraische Theorie der Körper ». In : *J. Reine Angew. Math.* 137 (1910), p. 167-309
[Cam78] : Paul Campbell. « The origin of "Zorn's lemma" ». In : *Historia Math.* 5.1 (1978), p. 77-89
[Tei39] : Oswald Teichmüller. « Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom ? » In : *Deutsche Math.* 4 (1939), p. 567-577
[Tar24a] : Alfred Tarski. « Sur les ensembles finis ». In : *Fund. math.* (1924), p. 45-95
[HS01] : Lorenz Halbeisen et Saharon Shelah. « Relations between some cardinals in the absence of the axiom of choice ». In : *Bull. Symbolic Logic* 7.2 (2001), p. 237-261
[How75] : Paul Howard. « Łoś' theorem and the Boolean prime ideal theorem imply the axiom of choice ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 49 (1975), p. 426-428
[AK21] : David Asperó et Asaf Karagila. « Dependent choice, properness, and generic absoluteness ». In : *Rev. Symb. Log.* 14.1 (2021), p. 225-249
[Dia75] : Radu Diaconescu. « Axiom of choice and complementation ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 51 (1975), p. 176-178
[GM78] : Nicolas Goodman et John Myhill. « Choice implies excluded middle ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 24.5 (1978), p. 461
[BP19] : Chad Brown et Pierre Pradic. « Cantor-Bernstein implies Excluded Middle ». Prépublication hal-02103517. 2019
[Tru74] : John Truss. « Classes of Dedekind finite cardinals ». In : *Fundam. Math.* 84 (1974), p. 187-208
[Tru95] : John Truss. « The structure of amorphous sets ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 73.2 (1995), p. 191-233
[Myc06] : Jan Mycielski. « A system of axioms of set theory for the rationalists ». In : *Notices Amer. Math. Soc.* 53.2 (2006), p. 206-213

sens des modèles de PA. Ce sont deux généralisations orthogonales des entiers, comme sont distinctes les œuvres de Cantor et de Skolem.

Les entiers du modèle sont-ils standard ? La question « tous les entiers de $\omega[\mathbb{V}]$ sont-ils standard, i.e. de *vrais* entiers ? » n'a pas de sens formel. Les vrais entiers sont des objets intuitifs et non formels, mais on n'écrit de preuves formelles qu'avec des objets formels. La question prend sens si l'on formalise les notions jusqu'alors intuitives dans un « méta-modèle » $\hat{\mathbb{V}}$ englobant tout. En ce cas, si $\omega[\mathbb{V}]$ coïncide avec $\omega[\hat{\mathbb{V}}]$, on parle d'*ω-modèle* ; cette notion mal nommée est exploitée en § P.

Retour sur l'incomplétude de* PA*. • Les suites d'entiers définies par Goodstein (exercice 3.5) convergent [Goo44] ; la démonstration est menée dans ZF. En fait ZF est indispensable [KP82]. On a donc un énoncé de PA vrai dans $\mathbb{N}$ mais non démontrable dans PA ; il illustre l'incomplétude de PA, mais sa nature est « vraiment » arithmétique et non abstraitement logique.

***Modèles de* PA*, entiers des modèles de* ZF** Tout modèle de PA n'est pas nécessairement de la forme $\omega[\mathbb{V}]$ puisque $\omega[\mathbb{V}] \models \ulcorner\mathrm{Coh(PA)}\urcorner$, alors qu'il existe des modèles de $\mathrm{PA} \cup \neg\{\ulcorner\mathrm{Coh(PA)}\urcorner\}$. On n'a pas de caractérisation générale des modèles de PA qui sont de la forme $\omega[\mathbb{V}]$; on en a une dans le cas dénombrable. Soit $\mathbb{M} \models \mathrm{PA}$ dénombrable. Alors $\mathbb{M} = \omega[\mathbb{V}]$ pour un $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ ssi $\mathbb{M}$ est *récursivement saturé* et est modèle de l'ensemble des $\{+, \cdot\}$-conséquences de ZF [Ena14]. (Naturellement cet énoncé demande d'avoir travaillé dans un modèle ambiant $\hat{\mathbb{V}} \models \mathrm{ZF}$, si bien que l'existence de modèle devient $\hat{\mathbb{V}} \models [\mathbb{V}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner]$ au sens technique des sections finales.)

Limite au paradoxe de Skolem. À supposer que nous maîtrisions la notion (la croire absolue revenant à avoir fixé un méta-cadre formel $\hat{\mathbb{V}}$) de dénombrabilité, et que ZF soit cohérente, il existe un modèle dénombrable de ZF. En revanche il n'existe pas de modèle *effectif* de ZF, i.e. récursivement présenté. S'il y en avait un, disons $\mathbb{M}$, alors la partie standard de $\mathrm{Th}(\omega[\mathbb{M}])$ serait une théorie complète *et récursive* étendant PA, contre son incomplétude. On peut également procéder via le théorème de Tennenbaum (§ 19, notes conclusives).

• **Notions de finitude.** Les diverses notions de finitude envisageables coïncident en supposant l'axiome du choix ; pas sans. Pour plus de notions distinctes, [Lév58] (certains résultats déjà obtenus par Mostowski) ; état de l'art en [De 02]. La suite se concentre sur formellement fini et Dedekind-fini.

- Le choix dénombrable (un produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide) entraîne « non fini implique non Dedekind-fini ». • Démonstration : pour chaque $k < \omega$, il existe une injection $f_k \colon k \hookrightarrow E$; en choisir une par entier formel, puis former $\bigcup_\omega \operatorname{im} f_k$.
- Pourtant l'équivalence « Dedekind-fini = fini » est *plus faible* que le choix dénombrable. • D'après [Jech2, Theorem 8.6]

[Goo44] : Reuben Goodstein. « On the restricted ordinal theorem ». In : *J. Symbolic Logic* 9 (1944), p. 33-41

[KP82] : Laurie Kirby et Jeff Paris. « Accessible independence results for Peano arithmetic ». In : *Bull. London Math. Soc.* 14.4 (1982), p. 285-293

[Ena14] : Ali Enayat. « Standard models of arithmetic ». In : *Idées fixes : a Festschrift dedicated to Christian Bennet on the occasion of his 60th birthday.* Sous la dir. de M. Kasa. T. 61. Göteborg : Department of Philosophy, Linguistics et Theory of Science, University of Gothenburg, 2014

[Lév58] : Azriel Lévy. « The independence of various definitions of finiteness ». In : *Fundam. Math.* 46 (1958), p. 1-13

[De 02] : Omar De la Cruz. « Finiteness and choice ». In : *Fundam. Math.* 173.1 (2002), p. 57-76

[Jech2] : Thomas Jech. *The axiom of choice.* Studies in Logic and the Foundations of Ma-

appliqué à $\aleph_\omega$, cardinal singulier de cofinalité ω, il (est cohérent qu'il) existe un modèle où tout ensemble s'injecte dans les entiers ou contient une copie des entiers, mais où AC_ω est en défaut. • Dans ZF$\setminus$\{AF\}, cela semble apparaître (sans forcing, par modèles de permutations) dans [Lév64, p. 147]. J'ignore d'où vient la version « avec AF » (par forcing).

– L'équivalence « Dedekind-fini = fini » n'est donc pas une forme de choix ; on peut pourtant lui chercher des reformulations [Her11, Theorem 12].
– L'existence d'ensembles Dedekind-finis mais non formellement finis est cohérente à ZF : exercice 25.8 (en violant choix *et* fondation) ou le « deuxième modèle de Cohen » (en violant le choix). Cela peut même se produire avec des ensembles réputés naturels, comme suit.

  Théorème ([Mil11, Theorem 1.4]). Il est cohérent à ZF qu'existe un ensemble Dedekind-fini, formellement infini, et borélien dans $\mathbb{R}$.

– Il est cohérent à ZF qu'à équipotence près existent $2^{\aleph_0}$ ensembles Dedekind-finis [Tru74, Theorem 7].
– Enfin même dans un modèle où les diverses notions *formalisées* coïncident, rien ne dit qu'elles reflètent aussi la notion *intuitive* (v. « Aspects des entiers » supra), de même qu'un modèle de PA peut dépasser $\mathbb{N}$.

• **Équivalents du choix.** • On peut remplir un livre avec les équivalents de l'axiome du choix dans ZF : [Rubin-Rubin].

– L'implication « comparaison $\Rightarrow$ AC » apparaît dans [Har15] : en langage moderne, si X est un ensemble, il existe un ordinal α tel que $\alpha \not\hookrightarrow X$ (exercice 22.9), donc par comparaison $X \hookrightarrow \alpha$, ce qui munit X d'un bon ordre. Le renforcement suivant n'est pas publié.

  Théorème ([FOB08]). Soient $\mathbb{V} \models$ ZF et $1 < k < \omega$. Alors $\mathbb{V} \models$ AC ssi $\mathbb{V} \models$« pour toute k-famille d'ensembles $E_1, \ldots, E_k$, il existe $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$ tels que $E_i \hookrightarrow E_j$ ».

  On ignore si la propriété est encore vraie avec des familles indexées par ω.

– Théorème de Krull et axiome du choix. Dans ZF :
  – l'existence générale d'idéaux maximaux dans les anneaux commutatifs unitaires équivaut à l'axiome du choix ;
  – l'existence d'idéaux maximaux dans les seuls anneaux de Boole équivaut à l'existence générale d'idéaux *premiers* dans les anneaux commutatifs unitaires (annoncé par Scott, mais [Ban83]).

• Curiosité : dans ZF on sait ramener AC à un énoncé à cinq quantificateurs (on compte vraiment les quantificateurs, pas l'alternance), et l'on sait que c'est impossible avec trois ; mais c'est ouvert avec quatre

thematics, Vol. 75. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973, p. xi+202
[Lév64] : Azriel Lévy. « The interdependence of certain consequences of the axiom of choice ». In : *Fundam. Math.* 54 (1964), p. 135-157
[Her11] : Horst Herrlich. « The finite and the infinite ». In : *Appl. Categ. Struct.* 19.2 (2011), p. 455-468
[Mil11] : Arnold Miller. « A Dedekind finite Borel set ». In : *Arch. Math. Logic* 50.1-2 (2011), p. 1-17
[Rubin-Rubin] : Herman Rubin et Jean Rubin. *Equivalents of the axiom of choice.* second. T. 116. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, p. xxviii+322
[FOB08] : David Feldman, Mehmet Orhon et Andreas Blass. « Generalizing Hartogs' Trichotomy Theorem ». 2008
[Ban83] : Bernhard Banaschewski. « The power of the ultrafilter theorem ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 27.2 (1983), p. 193-202

[Mae07]. • Enfin rappelons que les équivalences de § 23.2 requièrent les autres axiomes de ZF ; en logique du deuxième ordre, elles sont fausses (ex. 12.8).

• **Retour au théorème de Cantor-Bernstein.**

Subpotence et surpotence. Notons $E \hookrightarrow F$ s'il existe un injection de E dans F, et $E \twoheadrightarrow F$ s'il existe une surjection de E sur F.

- L'énoncé $(\forall E)(\forall F)[(E \hookrightarrow F) \to (F \twoheadrightarrow E)]$ se montre sans choix. • En effet on peut supposer $E \neq \varnothing$; prendre alors un $e_0 \in E$. On construit une surjection en retournant le graphe de $E \hookrightarrow F$, et complétant par $f \mapsto e_0$ là où ce n'est pas défini. • Ce raisonnement est valable sans choix, *mais requiert une disjonction de cas* i.e. du tiers exclu.
- Le *principe de partition* est l'énoncé : $(\forall E)(\forall F)[(F \twoheadrightarrow E) \to (E \hookrightarrow F)]$. • Il se montre aisément avec choix mais *on ignore s'il est équivalent au choix.* L'annonce [San+21] ne convainc pas les spécialistes. L'état actuel de nos connaissances reste [Hig95].
- Ne pas confondre le principe de partition avec l'énoncé d'*existence de sections ensemblistes* : $(\forall E)(\forall F)(\forall g)[(g\colon F \twoheadrightarrow E) \to (\exists f)(f\colon E \hookrightarrow F) \wedge (g \circ f = \mathrm{Id}_E)]$. • Dans ZF, ce principe équivaut à AC.

Retourner une injection demande du tiers-exclu (comme d'ailleurs Cantor-Bernstein, [BP19]), retourner une surjection demande du choix. On ignore encore si le second point est une caractérisation du choix.

Cantor-Bernstein dual. Le *principe de Cantor-Bernstein dual* est l'énoncé : $(\forall E)(\forall F)[(E \twoheadrightarrow F \wedge F \twoheadrightarrow E) \to (E \simeq F)]$.

Il est clair avec choix ; *on ignore s'il est équivalent au choix.* Un renforcement l'est [BM90]. En tout cas « Cantor-Bernstein dual » n'est pas conséquence de ZF sans choix : exercice 25.8.

• **Cohérence relative**

L'axiome de l'infini est évidemment indépendant de ZF\{AI}. • ZF\{AI} $\not\models$ AI a été vu à l'ex. 21.7. • Pour voir ZF\{AI} $\not\models$ ¬AI, il faut admettre la cohérence d'une théorie de l'infini actuel, typiquement ZF. Mais par incomplétude cette cohérence ne risque pas d'être établie dans ZF, encore moins dans ZF\{AI}.

L'axiome du choix aussi est indépendant de ZF. • Cohérence positive : Gödel dans l'univers constructible (§ 27). Puis Gödel encore suggéra une preuve plus simple via la définissabilité par ordinaux (§ 26). • La cohérence négative est plus subtile. • Fraenkel [**Fra22a**] (§ 21) obtint la cohérence de ¬AC dans le système informel de Zermelo, sans fondation, sans schéma de remplacement, et surtout où la séparation reposait sur la notion maladroite de « (bien) défini », que Fraenkel tenta imparfaitement d'élucider (v. § 21, notes conclusives). • La méthode « de permutation » (exercice 25.8) pour ¬AC est de Mostowski [Mos39] ; on détruit AF. C'est donc une preuve de cohérence relative de ¬AC dans ZF\{AF}. • Pour ¬AC dans ZF (avec AF), il fallut attendre le forcing [Coh63b].

[Mae07] : Kurt Maes. « A 5-quantifier $(\in, =)$-expression ZF-equivalent to the Axiom of Choice ». 2007

[San+21] : Adonai Sant'Anna et al. « Flow : the Axiom of Choice is independent from the Partition Principle in ZFU ». 2021

[Hig95] : Masasi Higasikawa. « Partition principles and infinite sums of cardinal numbers ». In : *Notre Dame J. Formal Logic* 36.3 (1995), p. 425-434

[BM90] : Bernhard Banaschewski et Gregory Moore. « The dual Cantor-Bernstein theorem and the partition principle ». In : *Notre Dame J. Formal Logic* 31.3 (1990), p. 375-381

[Mos39] : Andrzej Mostowski. « Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip ». In : *Fundam. Math.* 32 (1939), p. 201-252

[Coh63b] : Paul Cohen. « The independence of the continuum hypothesis ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 50 (1963), p. 1143-1148

- **Topologie avec ou sans choix**

Espaces non métriques. Hors espaces métriques, il n'y a pas de liens généraux entre compacité et compacité séquentielle. • Un espace compact non séquentiellement compact : $[0,1]^{[0,1]}$, par le théorème de Tychonoff d'une part et l'argument diagonal de Cantor d'autre part. • Un espace séquentiellement compact non compact : $\aleph_1$ avec pour ouverts ses segments initiaux. La non-compacité est claire ; pour la compacité séquentielle, se rappeler que les suites sont indexées par ω.

Une compacité séquentielle indécidable dans **ZFC.** La compacité séquentielle de $X = [0,1]^{\aleph_1}$ (pour la topologie produit) est indécidable dans ZFC. En effet l'axiome de Martin MA [Sho75] a les propriétés suivantes :

- dans ZFC + ¬HC, il entraîne la compacité séquentielle de X ;
- il est conséquence de ZFC + HC.

En conséquence, si HC est vérifiée, alors $X \simeq [0,1]^{[0,1]}$ n'est pas séquentiellement compact ; en revanche si ¬HC est vérifiée, alors X l'est. Comme HC est indécidable dans ZFC, la compacité séquentielle de X aussi.

Espaces métriques. Dans ZF sans choix, pour un espace métrique, compact entraîne séquentiellement compact ; dans ZFC, la réciproque est vraie ; ces choses sont classiques. • En revanche, toujours dans ZF sans choix, il existe un espace métrique séquentiellement compact qui n'est pas compact. En effet dans le premier modèle de [Coh63b], les réels possèdent *un sous-ensemble infini qui ne contient pas de sous-ensemble dénombrable*, i.e. $I \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est en bijection avec aucun ordinal fini, et tel que $\neg(\exists f)(f : \mathbb{N} \hookrightarrow I)$. Quitte à passer aux transformations usuelles, I peut être pris non majoré ; notamment il ne sera pas compact. Mais une ω-suite à valeurs dans I ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs : donc I est séquentiellement compact.

Théorème de Tychonoff et choix. D'après l'exercice 23.8, le théorème de Tychonoff équivaut à AC [Kel50] (l'article de Kelley contient une erreur notoire dans sa définition de la topologie sur Y_i). Sans choix on peut sauver quelque chose.

Théorème (ZF ; [Loe65])**.** Soient I un ensemble *bien ordonné* et $(X_i, \mathcal{T}_i)$ des espaces de Borel-Lebesgue. Alors leur produit est encore de Borel-Lebesgue.

Par ailleurs si l'on remplace la notion d'espace topologique par celle de *locale*, alors le théorème de Tychonoff est vrai sans choix (mais les structures résultantes n'ont de points que sous AC) [Joh81].

Les conséquences patho-topologiques de ¬AC fournissent leur lot de publications annuelles.

§ 24. Cardinaux

Outre la récurrence ordinale, le second aspect de la révélation cantorienne est d'avoir rénové le concept de « taille » en revenant à l'opération de comptage. La cardinalité s'éclaire en termes d'ordinaux (§ 24.1) ; l'addition et la multiplication cardinales sont bien comprises (§ 24.2), mais l'exponentiation reste

[Sho75] : Joseph Shoenfield. « Martin's axiom ». In : *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), p. 610-617
[Kel50] : John Kelley. « The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice ». In : *Fund. Math.* 37 (1950), p. 75-76
[Loe65] : Peter Loeb. « A new proof of the Tychonoff theorem ». In : *Amer. Math. Monthly* 72 (1965), p. 711-717
[Joh81] : Peter Johnstone. « Tychonoff's theorem without the axiom of choice ». In : *Fund. Math.* 113.1 (1981), p. 21-35

énigmatique (§ 24.3). Les sections §§ 24.1 et 24.2 n'emploient pas l'axiome du choix ; § 24.3, si.

Prérequis : §§ 21–23.

---

card X **Définition** (cardinal d'un ensemble)**.** Pour X un ensemble bien ordonnable, on appelle *cardinal formel* de X le plus petit ordinal en bijection avec X, noté $\operatorname{card} X$.

Remarques

— On rappelle que dans ZFC *tout* ensemble est bien ordonnable, donc tout ensemble amorphe possède un cardinal.

— En revanche l'expression « cardinal d'un ensemble amorphe » suppose de travailler avec AC ; sans lui, la situation est catastrophique (v. notes finales).

— Dans ZFC, deux ensembles X et Y ont même cardinal naïf (i.e. sont équipotents, v. chapitre I, § 1.1) ss'ils ont même cardinal formel.

Les sections § 24.1 et § 24.2 ne demandent pas de choix.

§ 24.1. La collection des cardinaux et la fonctionnelle aleph

Définition (cardinal formel)**.** Un *cardinal formel* est un ordinal minimal pour l'équipotence, i.e. qui n'est en bijection avec aucun ordinal moindre.

κ On note traditionnellement κ un cardinal formel. Tout cardinal d'ensemble bien ordonnable est bien un cardinal formel. Dorénavant nous dirons simplement « cardinal » au lieu de « cardinal formel ».

Remarques

— Il suit du principe de comparaison ordinale que deux cardinaux sont toujours comparables.

— Tout ordinal fini (i.e. élément de ω, § 23.1) est un cardinal : récurrence immédiate.

— Tout cardinal est un ordinal ; s'il est infini, c'est même un ordinal limite (« hôtel de Hilbert »).

— Il existe une définition de *cardinal limite en tant que cardinal*, qui n'est pas un pléonasme.

— La borne supérieure d'un ensemble de cardinaux est un cardinal.
En notation évidente, disons $\alpha = \sup C$, qui est un ordinal. Supposons $\operatorname{card} \alpha < \alpha$. Par définition de la borne supérieure il existe $\kappa \in C$ tel que $\operatorname{card} \alpha < \kappa$; pourtant $\kappa = \operatorname{card} \kappa \leqslant \operatorname{card} \alpha$, contradiction.

Les cardinaux formels forment une collection définissable, ce qui permet la notation suivante.

Card **Notation.** Soit Card la collection définissable des cardinaux.

$\aleph_\alpha$ **Proposition** (et définition)**.** Il existe un unique isomorphisme de collections ordonnées entre $(\mathrm{Ord}, <)$ et $(\mathrm{Card}_{\geqslant\omega}, <)$ (cardinaux infinis) ; il est noté $\aleph$.

Démonstration. Comme toute sous-collection de Ord, la collection $\mathrm{Card}_{\geqslant\omega}$ est définissable, bien ordonnée, à segments initiaux propres ensemblistes.

Lemme (Hartogs)**.** La collection Card est cofinale, i.e. non majorée, dans Ord.

Démonstration. La démonstration *ne demande pas l'axiome du choix* ; elle était à l'exercice 22.9 (et implicite dans la preuve du théorème 23.2). Noter qu'avec l'axiome du choix on a un argument plus simple : si Card est majorée, disons par α, on peut par choix prendre un ordinal équipotent à $P(\alpha)$; par le théorème « du saut » de Cantor, il n'est pas dans α. □

Si Card était un ensemble, et donc un ensemble d'ordinaux, elle serait majorée, contradiction. C'est donc une classe propre. Ainsi $\mathrm{Card}_{\geqslant\omega}$ est une collection classe-bien ordonnée, à segments initiaux propres ensemblistes : par la Proposition 22.1 elle est classe-isomorphe à Ord. □

Remarques

- $\aleph_0 = \mathrm{card}\,\omega$ est le premier cardinal infini.
- $\aleph_1$ est le premier cardinal non dénombrable. On retiendra le raisonnement suivant, illustrant l'efficacité du point de vue cantorien.

Lemme. Un cardinal infini κ est la réunion des ordinaux de cardinal $< \kappa$. En particulier $\aleph_1$ est la réunion de tous les ordinaux dénombrables.

Démonstration. Soit κ un cardinal infini. La collection définissable des ordinaux de cardinal moindre forme un ensemble : sinon ce serait Ord entière, alors qu'il existe des cardinaux (et donc des ordinaux) majorant strictement κ d'après le lemme de Hartogs. Soit α leur borne supérieure (union). On affirme que $\alpha = \kappa$: il suffit de le voir en tant qu'ordinaux. Soit β un ordinal.

Si $\kappa \leqslant \beta$, alors $\kappa = \mathrm{card}\,\kappa \geqslant \mathrm{card}\,\beta \leqslant \beta$ donc $\beta \notin \alpha$: ceci montre $\alpha \subseteq \kappa$ i.e. $\alpha \leqslant \kappa$. Si réciproquement $\beta \in \kappa$, alors $\mathrm{card}\,\beta \leqslant \beta < \kappa$: donc β est de cardinal moindre. D'où $\kappa \in \alpha$. □

Remarque. Considérant la fonctionnelle $\aleph\colon \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$, on voit que l'équation $\aleph_\alpha = \alpha$ possède des solutions arbitrairement grandes (exercice 22.4).

Enfin la fonctionnelle $\aleph$ permet une définition utile.

Définition (cardinal successeur)**.** Un cardinal est *successeur* s'il est de la forme $\aleph_{\alpha+1}$; *limite* s'il est de la forme $\aleph_\alpha$ avec α ordinal limite.

κ^+ En général on note κ^+ le plus petit cardinal $> \kappa$; c'est bien sûr un successeur.

§ 24.2. Addition et multiplication cardinales

Définition (ZF ; addition et multiplication cardinales)**.** Soient κ, λ deux cardinaux.

- — On note $\kappa + \lambda$ le cardinal de l'ensemble bien ordonnable $\kappa \sqcup \lambda = (\kappa \times \{0\}) \sqcup (\lambda \times \{1\})$.
- — On note $\kappa \cdot \lambda$ le cardinal de l'ensemble bien ordonnable $\kappa \times \lambda$.

Il y a quelque chose à justifier. Notons $+_{\mathrm{Card}}$ la première opération et $+_{\mathrm{Ord}}$ la somme ordinale (§ 22.3). Alors $\kappa \sqcup \lambda$ est équipotent à $\kappa +_{\mathrm{Ord}} \lambda$, donc bien ordonnable, et :

$$\kappa +_{\mathrm{Card}} \lambda = \mathrm{card}(\kappa +_{\mathrm{Ord}} \lambda).$$

Ceci justifie de ne pas noter les indices Ord ou Card : c'est clair d'après contexte, ayant annoncé qu'on pensait à κ et λ comme cardinaux plutôt que comme ordinaux. Idem pour la multiplication. D'ailleurs ces notions dégénèrent à l'infini.

Proposition (ZF)**.** Soient κ, λ deux cardinaux.

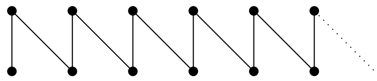
(i) Si κ ou λ est infini, alors $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

(ii) Si κ ou λ est infini et l'autre est non nul, alors $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Démonstration. Supposons $\kappa \geqslant \lambda$. Ce qui fera marcher la démonstration dans les deux cas est le principe (immédiat par contraposée) : si γ est un ordinal avec $\mathrm{card}\,\gamma < \kappa$, alors $\gamma < \kappa$.

(i) Clairement $\kappa \leqslant \mathrm{card}(\kappa \sqcup \lambda) \leqslant \mathrm{card}(\kappa \sqcup \kappa) = \kappa + \kappa$. Il suffit donc de montrer $\kappa = \kappa \cdot 2$ pour tout κ infini. Récurrence sur κ (légitimée par la fonctionnelle $\aleph$).

Mettons sur $\kappa \times \{0, 1\}$ l'ordre suivant : $(x, i) \leqslant (y, j)$ si $(x < y) \vee (x = y \wedge i \leqslant j)$.



Le bon ordre qui fait marcher la preuve

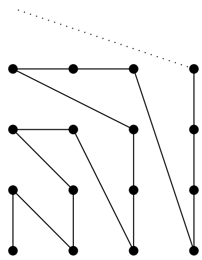
C'est un bon ordre A (minimiser sur x, puis sur i). Soit $p = (x, i) \in A$. Alors $I_A(p) \subseteq I_\kappa(x+1) \times \{0, 1\}$ et $I_\kappa(x+1)$ est propre dans κ, donc par récurrence :

$$\operatorname{card} I_A(p) \leqslant \operatorname{card} I_\kappa(x+1) \cdot 2 = \operatorname{card} I_\kappa(x+1) < \kappa,$$

d'où $\operatorname{ord} I_A(p) \leqslant \kappa$. Soit $\alpha = \operatorname{ord} A$, clairement limite. On vient de voir que si $\gamma \in \alpha$, alors $\gamma \leqslant \kappa$. Ainsi $\alpha = \bigcup_{\gamma \in \alpha} \gamma \leqslant \kappa$, donc $\kappa \cdot 2 = \operatorname{card} A = \operatorname{card} \alpha \leqslant \kappa$.

(ii) On suppose en outre $\lambda \neq \varnothing$. Cette fois il s'agit de montrer $\kappa^2 = \kappa$. Mettons sur $\kappa \times \kappa$ l'ordre suivant :

$$(x, y) \leqslant (z, t) \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} & \max(x, y) < \max(z, t) \\ \vee & \max(x, y) = \max(z, t) \wedge x < z \\ \vee & \max(x, y) = \max(z, t) \wedge x = z \wedge y < t \end{pmatrix}$$



Le bon ordre qui fait marcher cette seconde preuve

C'est un bon ordre B (minimiser le max, puis la première composante, puis la seconde). Cette fois pour $p = (x, y) \in B$, notant $m = \max(x, y) \in \kappa$, on a $I_B(p) \subseteq (m+1)^2$. Ici encore les segments initiaux de ce bon ordre sont tous de cardinal $< \kappa$, donc d'ordinal $< \kappa$; il suit $\kappa^2 = \operatorname{card} B \leqslant \kappa$. $\square$

Corollaire (ZFC)**.** Si X est un ensemble infini, alors X^2 est équipotent à X.

Cet énoncé caractérise en fait AC : exercice 23.2.

§ 24.3. L'exponentiation cardinale et l'hypothèse du continu

La proposition suivante est naïve et sa preuve laissée en exercice.

Proposition (ZF)**.** Soient X, Y, Z trois ensembles.
- — $X^{Y \sqcup Z}$ est équipotent à $X^Y \times X^Z$;
- — $X^{Y \times Z}$ est équipotent à X^{Y^Z} ;
- — (ZFC) si X est infini, $X \twoheadrightarrow Y$, et que Y a au moins deux éléments, alors Y^X est équipotent à 2^X.

On travaille dorénavant avec l'axiome du choix.

• Exponentiation cardinale

Définition (ZFC ; exponentiation cardinale)**.** Soit $\lambda^\kappa = \operatorname{card} \lambda^\kappa$ (en tant qu'ensemble de fonctions).

Remarques
- — L'exponentiation cardinale n'est *pas* l'exponentiation ordinale :
$$\exp_{\mathrm{Ord}}(2, \omega) = \omega \quad \text{mais} \quad \exp_{\mathrm{Card}}(2, \aleph_0) > \aleph_0,$$
car par le théorème du saut $\operatorname{card} P(\omega) > \operatorname{card} \omega$. On ne rencontre hélas pas toujours deux notations distinctes pour ces opérations essentiellement distinctes.
- — Noter le rôle de l'axiome du choix : rien ne garantit sinon que λ^κ soit bien ordonnable.
- — Même en présence de choix, ZFC contraint très peu l'exponentielle. Par exemple, l'injectivité de 2^X est indécidable.

• Hypothèse du continu.

En montrant que X ne se surjecte jamais sur $P(X)$, Cantor a établi $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $2^{\aleph_0}$?

Hypothèse du continu : $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Remarques
- — Dans ZFC, HC équivaut à : toute partie infinie de la droite est soit dénombrable, soit en bijection avec la droite. C'est d'ailleurs l'énoncé d'origine, qui peut se formuler en termes de cardinalités intuitives, sans choix. Mais il est délicat de travailler sur ces derniers en l'absence de choix ; il est même cohérent à ZF que $\mathbb{R}$ possède un sous-ensemble infini sans sous-ensemble dénombrable (Cohen).

— ZFC ne décide pas HC (Gödel, Cohen). Il y a pire : l'absence de consensus sur la vérité de HC (certains prônant ou ayant prôné $2^{\aleph_0} = \aleph_2$), voire sur le sens d'une vérité pour HC. Certains théoriciens des ensembles considèrent la *cohérence* comme vérité ultime, sans référence à une nature ensembliste trop invisible.

— L'hypothèse du continu généralisée HCG est : $(\forall \kappa \geqslant \aleph_0)(2^\kappa = \kappa^+)$, où κ^+ désigne le *cardinal* successeur (v. 24.1).

La suite esquisse une première limitation sur la valeur de $2^{\aleph_0}$.

Théorème (G. Kőnig ; ZFC)**.** Soient $I \neq \varnothing$ et pour chaque $i \in I$, deux ensembles A_i, B_i avec $\operatorname{card} A_i < \operatorname{card} B_i$. Alors $\operatorname{card} \bigcup_I A_i < \operatorname{card} \prod_I B_i$.

Noter qu'en l'absence de choix, le membre de droite peut être $\varnothing$.

Démonstration. On peut supposer les B_i disjoints entre eux, et $A_i \subset B_i$. Montrons l'inégalité large. Pour chaque i on fixe un $b_i \in B_i \backslash A_i$. À $a_{i_0} \in \bigcup_I A_i = \bigsqcup_I A_i$, on associe la fonction qui envoie $i \neq i_0$ sur b_i, et i_0 sur a_{i_0}. On vient bien d'injecter la réunion dans le produit.

Montrons l'inégalité stricte en éliminant l'égalité. Sinon il existe une surjection $f \colon \bigcup_I A_i \twoheadrightarrow \prod_I B_i$. Notons $\iota_i \colon A_i \hookrightarrow \bigcup_I A_i$ l'injection canonique, et $\pi_i \colon \prod_I B_i \twoheadrightarrow B_i$ la projection canonique. Pour $i \in I$, la composée :

$$\pi_i \circ f \circ \iota_i \colon A_i \hookrightarrow \bigcup_I A_i \to \prod_I B_i \twoheadrightarrow B_i$$

ne peut être surjective par cardinalité. Donc il existe $b_i \notin \pi_i \circ f(A_i)$. On emploie l'axiome du choix et l'on forme $\beta = (b_i)_{i \in I}$. Par hypothèse, $\beta = f(a_{i_0})$ pour un $a_{i_0} \in A_{i_0}$. Pourtant :

$$b_{i_0} = \pi_{i_0}(\beta) = \pi_{i_0} \circ f(a_{i_0}) = \pi_{i_0} \circ f \circ \iota_{i_0}(a_{i_0}) \in \pi_{i_0} \circ f(A_{i_0},$$

contradiction. □

Corollaire (ZFC)**.** $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Démonstration. Supposons l'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$. Pour $n \in \omega$, soit $A_n = \aleph_n$. Noter que pour n fixé, $A_n < \aleph_\omega = 2^{\aleph_0}$. En outre $\bigcup_\omega A_n = \aleph_\omega$; une inclusion est claire ; réciproquement si $\alpha \in \aleph_\omega$, alors $\operatorname{card} \alpha$ est un $\aleph_n$, et $\alpha \in \aleph_{n+1}$.

Ainsi d'après le théorème de Kőnig :

$$\aleph_\omega = \bigcup_\omega A_n < \operatorname{card} \prod_\omega 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0},$$

contradiction. □

Remarque. L'argument ne montre pas $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$: on a utilisé l'égalité absurde dès le début de la preuve.

À toutes fins utiles on rappelle que la cardinalité n'a rien d'absolu : si deux modèles partagent un point x, et même s'ils ont en commun la même droite ordinale Ord, ils n'ont pas de raison de s'accorder sur $\operatorname{card} x$.

Exercices

24.1. ($\beth$, *beth*, est la deuxième lettre de l'alphabet hébreu.) On définit par récurrence ordinale : $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, et aux limites $\beth_\alpha = \sup\{\beth_\beta : \beta \in \alpha\}$.

a. Si besoin, reformuler la construction en termes de récursion ordinale.

b. Montrer que $\beth$ est strictement croissante et majore $\aleph$. Montrer que l'hypothèse du continu généralisée (« pour tout cardinal κ, on a $2^\kappa = \kappa^+$ ») équivaut à : $\aleph$ et $\beth$ coïncident.

c. Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ est *fortement limite* si $(\forall\lambda < \kappa)(2^\lambda < \kappa)$. Montrer que κ est fortement limite ssi de la forme $\beth_\alpha$ pour α limite.

(*) d. Montrer $\beth_\omega^{\aleph_0} = \beth_{\omega+1}$.

24.2 (axiome de symétrie de Freiling). Soit $I = [0,1]$. Commençons par une heuristique.

> On tire au hasard un point $x \in I$. La probabilité qu'il soit rationnel est nulle ; presque sûrement il est irrationnel. On tire à présent au hasard *deux* points $x_1, x_2 \in I$. Presque sûrement, x_2 n'est pas dans $x_1 \cdot \mathbb{Q}$ (qui est dénombrable). Donc il existe x_1, x_2 tels que $x_2 \notin f(x_1)$, où l'ensemble $f(x_1) = x_1 \cdot \mathbb{Q}$ (choisi tel dans ce premier exemple) est dénombrable et ne dépend que de x_1.
>
> Soit plus généralement $f\colon I \to P_{\aleph_0}(I)$ une fonction qui à chaque réel de I associe une partie dénombrable de I. Comme précédemment, si l'on tire deux réels $x_1, x_2 \in I$, alors presque sûrement $x_2 \notin f(x_1)$. La nature ne dépend pas de l'ordre de tirage ; presque sûrement $x_2 \notin f(x_1) \wedge x_1 \notin f(x_2)$; il existe donc des solutions à cet énoncé, et l'on peut quantifier sur f. Ceci motive l'axiome suivant.

On appelle *axiome de symétrie* (d'ordre $\aleph_0$) l'énoncé :

$$\mathrm{AS}_{\aleph_0} : \quad (\forall f)[(f\colon I \to P_{\aleph_0}(I)) \to (\exists x_1)(\exists x_2)(x_1 \in I \wedge x_2 \in I \wedge x_1 \notin f(x_2) \wedge x_2 \notin f(x_1))].$$

Montrer que l'axiome de symétrie $\mathrm{AS}_{\aleph_0}$ équivaut à la négation de HC.

(**) **24.3 (problème de Wetzel).**

a. On suppose $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Soit $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ une famille de fonctions holomorphes $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que :
$$(\forall z \in \mathbb{C})(\operatorname{card}\{f_\alpha(z) : \alpha \in A\} \leqslant \aleph_0).$$
Montrer, en admettant les manipulations intuitives sur les cardinaux, que A est au plus dénombrable.

Rappel : si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et non nulle, alors elle n'a dans tout compact qu'un nombre fini de zéros.

b. On suppose $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Montrer qu'il existe une famille $\{f_\alpha : \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$ de fonctions holomorphes $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que :
$$(\forall z \in \mathbb{C})(\operatorname{card}\{f_\alpha(z) : \alpha \in 2^{\aleph_0}\} \leqslant \aleph_0).$$
Indication : mettre le bon ordre ω_1 sur $\mathbb{C}$ et construire les fonctions f_α pour $\alpha < \omega_1$. À chaque étape, réindexer en $\{f_\beta : \beta < \alpha\} = \{g_n : n \in \omega\}$ et $\{z_\beta : \beta < \alpha\} = \{t_n : n \in \omega\}$. Poser $M_n = \max\{t_0, \dots, t_{n-1}\}$ puis trouver des complexes $a_n = a_n(\alpha)$ tels que la fonction $h(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \prod_{m<n}(z - t_m)$ ait les propriétés suivantes :

- $a_n \leqslant \frac{1}{n! M_n^n}$;
- $(\forall n)(n < \omega \to h(t_n) \in \mathbb{Q}[i])$;
- $(\forall n)(n < \omega \to h(t_n) \neq g_n(t_n))$.

Les exercices 24.4 et 24.5 sont indispensables à tous les suivants.

24.4 (cofinalité).

cof **Définition** (cofinalité)**.**

- Soient X, Y deux ordres. Y est *cofinal* dans X s'il existe une fonction croissante $f\colon Y \to X$ d'image non majorée.
- La *cofinalité* d'un ordre X est le plus petit ordinal cofinal dans X, noté $\operatorname{cof} X$.

La notion est surtout utile pour des ordinaux α, β et des cardinaux κ, λ : alors $\operatorname{cof} X$ existe sans même recourir au choix.

a. Vérifier que α est un ordinal successeur ssi $\operatorname{cof} \alpha = 1$; que $\operatorname{cof} \omega = \operatorname{cof} \aleph_\omega = \omega$; en général $\operatorname{cof} \aleph_\alpha \leqslant \alpha$. Vérifier que ni $\alpha \leqslant \beta$ ni $\operatorname{cof} \alpha \leqslant \beta$ n'entraîne $\operatorname{cof}(\alpha) \leqslant \operatorname{cof}(\beta)$.

b. Montrer que $\operatorname{cof} \alpha$ est un cardinal et $\operatorname{cof} \alpha \leqslant \operatorname{card} \alpha$; en outre $\operatorname{cof} \operatorname{cof} \alpha = \operatorname{cof} \alpha$. En déduire que $\operatorname{cof} \kappa$ est le plus petit cardinal λ tel qu'il existe une partie non bornée de cardinal λ.

c. Montrer que $\operatorname{cof} \kappa$ est le plus petit cardinal λ tel qu'il existe λ parties de cardinal $< \kappa$ couvrant κ.

d. Montrer que $\kappa < \kappa^{\operatorname{cof} \kappa}$ et retrouver $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. En déduire que si $(\forall \lambda)(\operatorname{Card}(\lambda) \wedge \lambda < \kappa) \to \kappa^\lambda = \kappa$, alors $\operatorname{cof} \kappa = \kappa$.

Définition (cardinal régulier ou singulier)**.** Un cardinal infini κ est *régulier* si $\operatorname{cof} \kappa = \kappa$; singulier sinon.

24.5 (cardinaux inaccessibles).

Définition (cardinal (fortement) inaccessible ; ZFC)**.** Un cardinal κ est dit *(fortement) inaccessible* si :

- $\kappa > \aleph_0$;
- κ est *régulier*, i.e. $\operatorname{cof} \kappa = \kappa$;
- $(\forall \lambda)(\lambda < \kappa \to 2^\lambda < \kappa)$.

On évite d'aborder le sujet en l'absence de choix.

a. Montrer que κ est inaccessible ssi pour toute famille $\{x_i : i \in I\}$ d'ensembles de cardinal $< \kappa$ indexée par I de cardinal $< \kappa$, on a card $\prod_I x_i < \kappa$.
b. Montrer le lemme suivant.

   Lemme. Si κ est inaccessible, alors κ possède κ parties de cardinal $< \kappa$.

On ne peut pas démontrer dans ZFC l'existence de tels cardinaux (exercice 25.2).

24.6. Cet exercice illustre l'intrusion (pas toujours souhaitée) des cardinaux en théorie des modèles. On travaille dans un modèle de ZFC avec un cardinal inaccessible κ. Appelons « petit » tout ensemble de cardinal $< \kappa$.

a. Montrer que toute théorie élémentaire en petit langage possède un modèle $\mathbb{M}$ de cardinal κ qui est *saturé en son cardinal*, i.e. tel que tout type de $\mathbb{M}$ utilisant un petit ensemble de paramètres est réalisé dans $\mathbb{M}$.
b. En déduire le lemme de cohérence disjointe de Robinson (v. § 8, notes conclusives).

24.7 (cardinaux de saturation). Cet exercice raffine l'ex. 24.6. Il faut connaître la notion de saturation (ex. 17.2). On appelle *cardinal de saturation* un cardinal indénombrable κ tel que :

– κ est régulier, i.e. cof $\kappa = \kappa$ (ex. 24.4) ;
– $\kappa = \sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda$.

On ne considèrera que des théories élémentaires de cardinal $< \kappa$.

a. Montrer que si κ est de saturation, alors toute théorie possède un modèle $(< \kappa)$-saturé de cardinal κ.
b. Pour λ un cardinal, on note $\mathbb{O}_\lambda$ l'ensemble 2^λ muni de l'ordre lexicographique.
   Montrer que si $X \subseteq \mathbb{O}_\lambda$, alors X possède une partie cofinale de cardinal $\leqslant \lambda$.
c. En déduire que si $\mathbb{M} \models$ DLO est $(< \lambda^+)$-saturé, alors $\mathbb{O}_\lambda \hookrightarrow \mathbb{M}$.
d. Conclure que κ est de saturation ssi toute théorie élémentaire de cardinal $< \kappa$ possède un modèle $(< \kappa)$-saturé de cardinal κ.

ZFC ne statue pas sur l'existence de cardinaux de saturation. Un cardinal inacessible (ex. 24.5) serait de saturation, mais la réciproque est fausse. Par exemple, sous HC, $\aleph_1$ est de saturation.

24.8 (clubs, ensembles stationnaires, lemme de Fodor). On fixe un cardinal régulier non dénombrable $\kappa = \text{cof}\, \kappa > \aleph_0$; en particulier toute ω-suite à valeurs dans κ a sa borne supérieure dans κ.

On rappelle que dans la topologie de l'ordre sur κ, un point $y \in \kappa$ est adhérent à $X \subseteq \kappa$ s'il existe un ordinal α et des $x_\beta \in X$ (pour $\beta < \alpha$) tels que $y = \sup\{x_\beta : \beta < \alpha\}$.

Un *club* (pour « closed, unbounded ») de κ est une partie $C \subseteq \kappa$:

– fermée, i.e. si $x \in \kappa$ est adhérent à C, alors $x \in C$;
– non bornée, i.e. si $x < \kappa$ alors existe $c \in C$ tel que $x < c$.

Un *ensemble stationnaire* de κ est une partie $S \subseteq \kappa$ qui rencontre chaque club.

a. Vérifier que $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ est un ordinal limite}\}$ est stationnaire, et que tout club est stationnaire. Donner un ensemble stationnaire qui n'est pas un club.
b. Soient $\alpha < \kappa$ et $\{C_\beta : \beta < \alpha\}$ des clubs. Montrer que $\bigcap_\alpha C_\beta$ est un club. [Répéter ω fois.]

c. Soient $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ des clubs. Montrer que leur *intersection diagonale* $C = \{x \in \kappa : (\forall\alpha)(\alpha < x \to x \in C_\alpha)\}$ est un club. [Pour le caractère non borné, construire $f\colon \kappa \to \kappa$ telle que $\alpha < f(\alpha) \in \bigcap_\alpha C_\beta$.]

d. Soit $S \subseteq \kappa$. Une fonction $f\colon S \to \kappa$ est *régressive* si $\alpha \neq \varnothing \to f(\alpha) < \alpha$. Montrer le *lemme de Fodor* : si S est stationnaire et $f\colon S \to \kappa$ est régressive, alors il existe $\alpha \in \kappa$ tel que $f^{-1}(\alpha)$ soit stationnaire.

e. Soient $S = \{\alpha < \kappa : \operatorname{cof} \alpha = \aleph_0\}$ et pour chaque $\alpha \in S$, une suite strictement croissante telle que $\alpha = \sup\{\beta_\alpha^n : n < \omega\}$. Montrer qu'il existe $n < \omega$ tel que pour tout $\gamma < \kappa$, l'ensemble $S_\gamma = \{\alpha \in S : \beta_\alpha^n \geqslant \gamma\}$ soit stationnaire.

f. En déduire que κ contient κ ensembles stationnaires deux à deux disjoints.

24.9 (modèles de DLO**).** Il faut de la familiarité avec les ensembles stationnaires (exercice 24.8). Pour chaque $X \subseteq \aleph_1$, on construit un ordre linéaire dense sans extrémités comme suit :

– $\mathbb{O}_X^\varnothing = \mathbb{Q}$;

– $\mathbb{O}_X^{\alpha+1} = \begin{cases} \mathbb{O}_X^\alpha \sqcup \mathbb{Q} & \text{si } \alpha \in X \\ \mathbb{O}_X^\alpha \sqcup \{*\} \sqcup \mathbb{Q} & \text{si } \alpha \notin X \end{cases}$;

– $\mathbb{O}_X^\alpha = \bigcup_\alpha \mathbb{O}_X^\beta$ si α est limite ;

– $\mathbb{O}_X = \bigcup_{\aleph_1} \mathbb{O}_X^\alpha$.

Ce sont bien des modèles de DLO de cardinal $\aleph_1$ (évident).

a. Soit $\mathbb{A} \models$ DLO dénombrable. Une *extension droite* est un $\mathbb{A}' \models$ DLO dénombrable dont $\mathbb{A}$ soit segment initial strict. Montrer que les deux cas possibles sont l'extension *rationnelle* $\mathbb{A} \sqcup \mathbb{Q}$, et l'extension *irrationnelle* $\mathbb{A} \sqcup \{*\} \sqcup \mathbb{Q}$; les distinguer en fonction des majorants de $\mathbb{A}$.

b. Soient $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}'$ et $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ deux extensions droites dénombrables d'ordres isomorphes. Si toutes deux sont rationnelles ou toutes deux irrationnelles, montrer qu'elles restent isomorphes.

c. On suppose que $X \triangle Y$ n'est pas stationnaire. Montrer que $\mathbb{O}_X \simeq \mathbb{O}_Y$. [Récurrence le long d'un club.]

d. On suppose $f\colon \mathbb{O}_X \simeq \mathbb{O}_Y$. Montrer que $X \triangle Y$ n'est pas un ensemble stationnaire. On pourra montrer que $\{\alpha < \aleph_1 : f(\mathbb{O}_X^\alpha) = \mathbb{O}_Y^\alpha\}$ est un club, par va-et-vient.

e. En déduire que DLO a $2^{\aleph_1}$ modèles de cardinal $\aleph_1$.

Notes conclusives

Pour aller extrêmement loin dans les grands cardinaux, la référence est [Kanamori].

• **Repères historiques**

Darnach würden die linearen Mannigfaltigkeiten aus zwei Klassen bestehen, von denen die erste alle Mannigfaltigkeiten in sich fasst, welche sich auf die Form: functio ips. ν (wo ν alle positiven ganzen Zahlen durchläuft) bringen lassen; während die zweite Klasse alle diejenigen Mannigfaltigkeiten in sich aufnimmt, welche auf die Form: functio ips. x (wo x alle reellen Werthe $\geqslant 0$ und $\leqslant 1$ annehmen kann) zurückführbar sind. Entsprechend diesen beiden Klassen würden daher bei den unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten nur zweierlei Mächtigkeiten vorkommen; die ge-

naue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit. [**Can78**, dernier paragraphe]

Cardinaux formels. La définition explicite de cardinal comme « ordinal minimal dans sa classe d'équipotence » est présente dans [**Neu28a**, VII.2]. Cantor avait pourtant noté l'importance des « ordinaux initiaux » donc je n'ai pas de certitude quant à l'origine de cette idée.

Hypothèse du continu. La question est chez Cantor ; Hilbert ne l'a pas trouvée sans importance. • En 1904, Gyula Kőnig (père de Dénes Kőnig ; avant magyarisation il s'appelait *Julius König*, d'où coexistence des deux noms) crut prouver que le continu n'est *aucun* $\aleph_\alpha$; son argument fut réfuté par Hausdorff et Zermelo [Ebb07]. L'article [Kőn05] est la version amendée de la communication de Kőnig ; le « théorème » vient de [Kőn05, 2] mais prend sa forme actuelle dans [**Zer08**, 34_{VI}], d'où son attribution par Schoenflies à Zermelo (attribution reprise par Tarski [Tar38b, p. 74]). • Pour l'histoire de l'hypothèse du continu (généralisée), [Moo11]. • Dans une reformulation idoine, HCG entraîne AC (compléments § R).

Équicohérence de HC***.*** • Si ZF est cohérente, alors ZFC ∪ {HCG} aussi [**Gödel**] (v. § 27). • Si ZF est cohérente, alors ZFC ∪ {¬HC} aussi [Coh63b], [**Cohen**], invention du forcing. • Tharp [Tha65] (non publiée) et Chuaqui [Chu72] ont indépendamment étendu la méthode à KM, plus forte que ZFC. • En fait HC est même indépendante de ZFC ∪ {« Grothendieck-Tarski » } (v. § 25, notes conclusives). La raison technique est que les grands cardinaux ne sont pas affectés par le forcing ; donc en forçant une violation de HC, on reste dans un modèle à univers (nombreux inaccessibles).

Axiome de symétrie de Freiling (ex. 24.2). [Fre86], dont on recommande vivement la lecture. (On peut montrer de même que $\mathrm{AS}_{<2^{\aleph_0}}$ est incohérent à ZFC ; il y a encore d'autres propriétés dans l'article d'origine.) • Consciemment ou non, Freiling reprenait la ligne de [Erd54] et suivants, notamment les travaux avec Hajnal sur la conjecture de Ruziewicz (précision tirée de [Kan14]). • Quarante ans après son apparition, l'axiome de symétrie n'est pas considéré comme une expérience de pensée décisive contre HC, mais comme un simple équivalent de sa négation.

[Ebb07] : Heinz-Dieter Ebbinghaus. « Zermelo and the Heidelberg Congress 1904 ». In : *Historia Math.* 34.4 (2007), p. 428-432

[Kőn05] : Julius Kőnig. « Zum Kontinuum-problem ». In : *Math. Ann.* 60 (1905), p. 177-180

[Tar38b] : Alfred Tarski. « Über unerreichbare Kardinalzahlen ». In : *Fundam. Math.* 30 (1938), p. 68-89

[Moo11] : Gregory Moore. « Early history of the generalized continuum hypothesis : 1878–1938 ». In : *Bull. Symbolic Logic* 17.4 (2011), p. 489-532

[**Gödel**] : Kurt Gödel. *The Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.* Annals of Mathematics Studies, no. 3. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1940, p. 66

[**Cohen**] : Paul Cohen. *Set theory and the continuum hypothesis.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1966, p. vi+154

[Tha65] : Leslie Tharp. « Constructibility in impredicative set theory ». Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology, 1965, p. vi+63

[Chu72] : Rolando Chuaqui. « Forcing for the impredicative theory of classes ». In : *J. Symbolic Logic* 37 (1972), p. 1-18

[Fre86] : Chris Freiling. « Axioms of symmetry : Throwing darts at the real number line ». In : *J. Symb. Log.* 51 (1986), p. 190-200

[Erd54] : Paul Erdős. « Some remarks on set theory. III ». In : *Michigan Math. J.* 2 (1954), p. 51-57

[Kan14] : Akihiro Kanamori. « Erdős and set theory ». In : *Bull. Symb. Log.* 20.4 (2014), p. 449-490

Cardinaux inaccessibles (exercice 24.5) : apparaissent dans [ST30]. • Ce ne sont pas les premiers « grands cardinaux » ; Hausdorff, et Mahlo avaient déjà formulé des conditions fortes. • J'ignore quel argument S. et T. avaient pour écrire : « On peut démontrer par contre que le problème de l'existence des nombres inaccessibles plus grands [que $\aleph_0$] ne se laisse résoudre par affirmative dans aucun des systèmes actuels de la Théorie des Ensembles. » C'est clair avec la hiérarchie cumulative, introduite en 1930 par Zermelo ; v. ex. 25.2 et § 25, notes conclusives.

Problème de Wetzel (ex. 24.3). [Erd64]. Histoire dans [GS15], plus récents développements dans [SW23] (qui n'a rien d'introductif).

• **Notations.** • La notation $\aleph$ est de [Can95, § 4]. • La notation $\beth$ (ex. 24.1) apparaît sous la plume de Peirce d'après [Moo11]. • Il y a aussi une fonctionnelle gimel $\gimel$; j'ignore s'il y a une daleth $\daleth$.

• **Grands cardinaux** Quelle légitimité à introduire des axiomes enrichissant encore la combinatoire de ZF ?

Pour. • Si les ensembles permettent *tout* fors l'incohérence, il est légitime d'introduire des propriétés de plus en plus fortes. • Depuis Maddy cette approche est nommée *maximise*, d'après la version remaniée en 1964 de [Göd47] :

> *I am thinking of an axiom which (similar to Hilbert's completeness axiom in geometry) would state some maximum property of the system of all sets, wheras axiom A states a minimum property. Note that only a maximum property would seem to harmonize with the concept of set explained in footnote 11.*
> Gödel, [Benacerraf-Putnam, note 19 p. 478]

(L'axiome A est $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. La note 11 explique la vision itérative des ensembles.) • Discussion de cette approche : [Mad88a] et [Mad88b].

• À l'opposé Skolem rejetait l'infini non dénombrable ; rejoignait-il Kronecker ?

> *... l'affirmation de l'existence des ensembles non-dénombrables ne doit être considérée que comme un jeu de mots, cet absolu non-démontrable* [sic] *n'est donc qu'une fiction. La véritable portée du théorème de Löwenheim est justement cette critique du non-démontrable absolu. Bref : cette critique ne réduit pas les infinis supérieurs de la théorie simple des ensembles* ad absurdum*, elle les réduit à des non-objets.* [Sko41, § 2]

• Sa position s'étayait du relativisme dont il fut le promoteur. Lui fut reproché de faire du dénombrable un *absolu* [Sko58, Interventions]), et j'ignore sa parade à cette critique. • Skolem se rapprocha du formalisme et du

[ST30] : Wacław Sierpiński et Alfred Tarski. « Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles ». In : *Fundam. Math.* 15 (1930), p. 292-300

[Erd64] : Paul Erdős. « An interpolation problem associated with the continuum hypothesis ». In : *Michigan Math. J.* 11 (1964), p. 9-10

[GS15] : Stephan Garcia et Amy Shoemaker. « Wetzel's Problem, Paul Erdős, and the Continuum Hypothesis : a mathematical mystery ». In : *Amer. Math. Soc. Notices* 3.62 (2015), p. 243-247

[SW23] : Jonathan Schilhan et Thilo Weinert. « Wetzel families and the continuum ». arXiv 2310.19473. 2023

[Can95] : Georg Cantor. « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I ». In : *Math. Ann.* 46 (1895), p. 481-512

[Göd47] : Kurt Gödel. « What is Cantor's continuum problem ? » In : *Amer. Math. Monthly* 54 (1947), p. 515-525

[Sko58] : Thoralf Skolem. « Une relativisation des notions mathématiques fondamentales ». In : *Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales.* T. LXX. Colloq. Internat. CNRS. CNRS, Paris, 1958, p. 13-18

finitisme [Sko55] ; il manque une thèse d'histoire de la logique intitulée *Skolem et l'infini*.

La vision *maximise* fait actuellement consensus parmi les spécialistes de théorie des ensembles. Mais on rencontre plus de croyants en théologie qu'en biologie évolutive. • Reste la question : « les grands cardinaux ont-ils une incidence sur les *vraies* mathématiques ? » Elle est tendancieuse et sans doute mal posée ; mais en l'état reçoit une réponse *positive*. Les grands cardinaux contrôlent en effet des problèmes de combinatoire dans les entiers [Fri98].

• **Cardinalités sans l'axiome du choix.** L'axiome du choix réduit l'étude des cardinalités naïves (par classes d'équipotence) à celles des cardinaux formels, i.e. ordinaux minimaux. Sans AC, le comportement des cardinalités est fantasque. Fors des trivialités, seuls subsistent deux résultats : le théorème de Bernstein-Cantor-Schröder (§ 1) et le théorème de division de Lindenbaum (§ A). Voici quelques points culturels déprimants. Il est cohérent à ZF que :

– pour tout ensemble partiellement ordonné $(I, <)$, il existe un modèle où $(I, \leqslant)$ se plonge dans la relation de comparaison « par injections » des cardinalités intuitives [Jec66], indép. [Tak68]. Sans AC on n'a donc pas de limite sur la complexité de la relation de comparaison.

– $\mathbb{R}$ possède un sous-ensemble infini sans sous-ensemble dénombrable (Cohen).

– $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables (cela contredit évidemment le choix dénombrable ; Morris établit un énoncé plus fort et plus technique). [Mor70], jamais publié ; la première preuve parue semble [Kar20]. • Ce sujet est plus subtil qu'il n'y paraît. Oui, l'axiome du choix dénombrable (AC pour les familles dénombrables d'ensembles) implique qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Mais non, l'axiome du choix pour les familles dénombrables *d'ensembles dénombrables* ne l'implique pas [How92] ; en revanche il suffit d'avoir l'axiome pour les familles dénombrables d'ensembles au plus continus, comme noté par Sierpiński.

Pour se faire peur en l'absence de l'axiome du choix, consulter [Jech2, Chapter 10]. On se consolera avec un théorème de Solovay [Sol70] : il est cohérent à ZF que toute partie de $\mathbb{R}$ soit Lebesgue-mesurable.

• **Quelle valeur pour le continu ?** Avec le forcing à peu près tout est permis. Le théorème de Kőnig montre que $\operatorname{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$ (exercice 24.4). C'est même la seule restric-

[Sko55] : Thoralf Skolem. « A critical remark on foundational research ». In : *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* 28 (1955), p. 100-105
[Fri98] : Harvey Friedman. « Finite functions and the necessary use of large cardinals ». In : *Ann. of Math. (2)* 148.3 (1998), p. 803-893
[Jec66] : Thomas Jech. « On ordering of cardinalities ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 14 (1966), 293-296 (loose addendum)
[Tak68] : Moto-o Takahashi. « On incomparable cardinals ». In : *Comment. Math. Univ. St. Paul.* 16 (1967/68), p. 129-142
[Mor70] : Douglass Morris. « Adding total indiscernibles to models of set theory ». Thèse de doct. Madison, Wisconsin : The University of Wisconsin, 1970, p. 62
[Kar20] : Asaf Karagila. « The Morris model ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 148.3 (2020), p. 1311-1323
[How92] : Paul Howard. « The axiom of choice for countable collections of countable sets does not imply the countable union theorem ». In : *Notre Dame J. Formal Logic* 33.2 (1992), p. 236-243
[Sol70] : Robert Solovay. « A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable ». In : *Ann. of Math. (2)* 92 (1970), p. 1-56

tion. • [Eas70] élucide les contraintes sur les valeurs de la fonctionnelle 2^κ en les cardinaux réguliers. (Easton travaille dans BGN mais la différence est cosmétique ; v. § Q.)

Théorème ([Eas70])**.** Soit G une fonctionnelle de Ord vers Ord telle que :

– G est croissante ;
– pour tout ordinal α, on a $\operatorname{cof} \aleph_{G(\alpha)} > \aleph_\alpha$;

Alors il est cohérent à ZF que pour tout α, si $\aleph_\alpha$ est régulier alors $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{G(\alpha)}$.

• Conséquence *très* faible, déjà connue de Cohen : si $\operatorname{cof} \kappa > \aleph_0$ (i.e. si κ n'est pas une ω-limite de cardinaux moindres), alors il est cohérent à ZF que $2^{\aleph_0} = \kappa$.

• ***Possible Cofinalities.*** Cantor a compris l'addition et la multiplication cardinales. Le programme « Possible Cofinalities » de Shelah est simple : puisqu'on ne peut pas comprendre l'exponentiation cardinale, aborder le problème plus général des produits infinis de cardinaux. Mais Shelah ne tente pas de décrire le cardinal d'un produit, insuffisamment contraint par ZFC ; il s'intéresse à sa cofinalité. *Malgré la grande latitude laissée à l'arithmétique cardinale,* ZFC *contraint ces cofinalités.* Premier survol dans [Vää21a].

§ 25. L'axiome de fondation et la hiérarchie cumulative

La *hiérarchie cumulative* est une stratification définie par récursion ordinale en itérant la pleine puissance (§ 25.1) ; c'est la collection totale si et seulement si le modèle ambiant vérifie l'axiome de fondation (§ 25.2). La collection $\mathbb{V}$ forme toujours un modèle de ZF *avec fondation* (§ 25.3).

Prérequis : §§ 2, 21–23.

Nous n'avons pas étudié en détail l'axiome de fondation AF. Dans cette section seulement on travaillera avec des modèles ZF$\setminus\{$AF$\}$, qui seront notés $\mathbb{U}$. On construira un foncteur élémentaire $\mathbf{Mod}(\mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AF}\}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathrm{ZF})$, i.e. une $\in$-formule élémentaire qui à tout modèle $\mathbb{U} \models \mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AF}\}$ associe une collection définissable (au sens de la théorie des modèles) $\mathbb{V}[\mathbb{U}] \models \mathrm{ZF}$.

Remarque (« vision itérative »)*.* La « vision itérative » des ensembles les conçoit comme obtenus à partir de $\varnothing$ en itérant les constructions usuelles.

— Ces itérations sont de longueur ordinale ; on arrive ainsi à la hiérarchie cumulative des V_α. La vision itérative postule que cette hiérarchie recouvre le modèle. Ce premier aspect est clair, mais un peu long à écrire (§ 25.1).
— Par caractère bien ordonné des ordinaux, cette vision coïncide aussi avec l'absence de chaînes infinies descendantes d'ensembles $x_0 \ni x_1 \ni \dots$; mais ce point de vue est délicat sans choix.

[Eas70] : William Easton. « Powers of regular cardinals ». In : *Ann. Math. Logic* 1 (1970), p. 139-178
[Vää21a] : Jouko Väänänen. « An overview of Saharon Shelah's contributions to mathematical logic, in particular to model theory ». In : *Theoria* 87.2 (2021), p. 349-360

Cela plaide pour énoncer l'axiome de fondation sous sa forme technique : $(\forall x)[x \neq \varnothing \to (\exists y)(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)]$, dont l'intuition est pourtant la vision itérative.

§ 25.1. Hiérarchie cumulative et rang d'appartenance

Soit $\mathbb{U} \models \mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AF}\}$.

V_α, $\mathbb{V}$, $\mathrm{rg}_\mathbb{V}$

Définition (hiérarchie cumulative ; rang d'appartenance)**.**

— Par récursion ordinale (§ 22.2), posons $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} P(V_\beta)$.

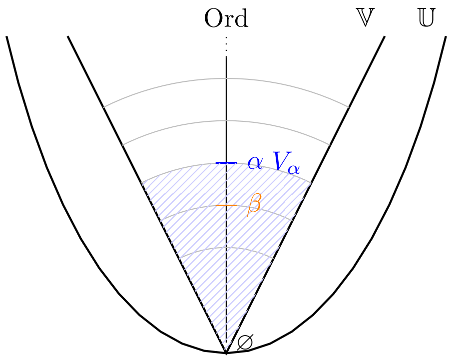
Ceci définit une relation fonctionnelle de domaine la collection Ord. (On peut détailler comme suit : $V_\varnothing = \varnothing$; $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$; pour α limite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$.)

— Soit $\mathbb{V}(x)$ la collection définissable : $(\exists\alpha)(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \in V_\alpha)$. C'est la *hiérarchie cumulative.*

— Si $\mathbb{U} \models \mathbb{V}(x)$, on note $\mathrm{rg}(x)$ (ou $\mathrm{rg}_\mathbb{V}(x)$) le minimum de la collection non vide $\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \in V_\alpha$, dit *rang ordinal d'appartenance* de x. Ceci définit une relation fonctionnelle de domaine la collection $\mathbb{V}$ et d'image une sous-collection de Ord.

Remarque. La notation usuelle en indice reflète insuffisamment que les V_α sont obtenus *uniformément*, i.e. par une fonctionnelle définissable : il existe une relation définissable $R(x, y)$ telle que $\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AF}\} \models (\forall\alpha)(\forall y)(\mathrm{Ord}(\alpha) \to (R(\alpha, y) \leftrightarrow y = V_\alpha))$; en fait V_α est une abréviation. La relation R est obtenue par récursion ordinale.

Notamment $\mathbb{V}(\cdot)$ est bien une formule élémentaire en $\{\in\}$, et donc une collection définissable. Munissant $\mathbb{V}[\mathbb{U}]$ de l'appartenance induite $\in_{|\mathbb{V}[\mathbb{U}]}$, on verra $\mathbb{V}(\cdot)$ comme un foncteur (pour le moment, des modèles de $\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AF}\}$ vers les $\in$-structures).



La sous-collection $\mathbb{V}$ est, par définition, stratifiée en les V_α.

Remarques

- Pour tous ordinaux, V_α est transitif et $(\beta < \alpha) \to (V_\beta \subseteq V_\alpha \wedge V_\beta \in V_\alpha)$.
- Par construction, $\operatorname{rg} x$ (si défini) est toujours successeur. Pour un ordinal, $\operatorname{rg} \alpha = \alpha + 1$.
- $\mathbb{U} \models (\mathbb{V}(x) \wedge y \in x) \to (\mathbb{V}(y) \wedge \operatorname{rg} y < \operatorname{rg} x)$.

Lemme. $\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AF}\} \models (\forall x)[\mathbb{V}(x) \leftrightarrow (\forall y)(y \in x \to \mathbb{V}(y))]$.

Démonstration. Un sens reprend les remarques ci-dessus : si $x \in V_\alpha$ et $y \in x$, alors $y \in V_\alpha$ par transitivité ; plus finement si $x \in V_{\beta+1} = P(V_\beta)$, alors $y \in x \subseteq V_\beta$, d'où $\operatorname{rg} y < \operatorname{rg} x$.

Si réciproquement $\mathbb{U}$ vérifie $(\forall y)(y \in x \to \mathbb{V}(y))$, on forme par remplacement $\{\operatorname{rg} y : y \in x\}$, qui est un ensemble bien défini d'ordinaux. Il admet une borne supérieure α, et donc $\mathbb{U} \models (\forall y)(y \in x \to y \in V_\alpha)$. Ainsi $x \subseteq V_\alpha$ et $x \in V_{\alpha+1}$. □

§ 25.2. Hiérarchie cumulative et axiome de fondation

On rappelle ce dernier : $(\forall x)[x \neq \varnothing] \to [(\exists y)(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)]$.

Proposition. $\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AF}\} \models \mathrm{AF} \leftrightarrow (\forall x)\mathbb{V}(x)$.

L'énoncé concis donné pour AF équivaut donc bien à la vision itérative.

Démonstration. Le sens réciproque est clair : supposons $\mathbb{U} \models (\forall x)\mathbb{V}(x)$.

Soit un point $x \neq \varnothing$. Soit $y \in x$ de rang minimal α. Si $z \in y$, alors $\operatorname{rg} z < \operatorname{rg} y$, donc $z \notin x$: ainsi $x \cap y = \varnothing$.

Pour le sens direct on voudrait raisonner ainsi :

> soit x tel que $\mathbb{U} \models \neg\mathbb{V}(x)$. Par le lemme 25.1, il existe $x_1 \in x$ tel que $\neg\mathbb{V}(x_1)$. Puis $x_2 \in x_1$ tel que $\neg\mathbb{V}(x_2)$. On forme alors $a = \{x_n : n \in \omega\}$. Si $b \in a$, alors b est un x_n, et $x_{n+1} \in a \cap b$, ce qui contredit AF.

Le problème n'est pas la récursion (formalisable), mais que cet argument suppose un choix dénombrable alors que l'on n'a pas fait d'hypothèse sur AC dans $\mathbb{U}$. On corrige en prenant à chaque étape *toutes* les pathologies.

Lemme (et définition : clôture transitive)**.** Tout ensemble x est inclus dans un plus petit ensemble transitif, appelé sa *clôture transitive* et noté $\mathrm{cl}(x)$.

En particulier un ensemble x est transitif si et seulement $\mathrm{cl}(x) = x$.

Démonstration. Soit x donné ; $x_\varnothing = x$; $x_{n+1} = x_n \cup \bigcup(x_n)$; $x_\omega = \bigcup(\{x_n : n \in \omega\})$. Clairement $x \subseteq x_\omega$; si $z \in y \in x_\omega$, alors y est un x_n, et $z \in x_n \subseteq x_{n+1} \subseteq x_\omega$. Ainsi x_ω est transitif. Si $x \subseteq t$ avec t transitif, on montre par récurrence (formelle, i.e. sur les entiers du modèle) $x_n \subseteq t$, d'où $x_\omega \subseteq t$. □

Soit donc x tel que $\mathbb{U} \models \neg\mathbb{V}(x)$; soit $a = \{y \in \mathrm{cl}(x) : \neg\mathbb{V}(y)\}$. Clairement $a \neq \varnothing$; or si $b \in a$, alors $\mathbb{U} \models \neg\mathbb{V}(b)$, donc par le lemme 25.1 il existe c tel que $\mathbb{U} \models c \in b \wedge \neg\mathbb{V}(c)$. Il suit que $\mathbb{U} \models c \in \mathrm{cl}(x) \wedge \neg\mathbb{V}(c)$, i.e. $\mathbb{U} \models c \in a \cap b$, d'où a contredit AF. □

§ 25.3. Hiérarchie cumulative et modèle intérieur

Théorème. Soit $\mathbb{U} \models \mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AF}\}$. Notant $\mathbb{V} = (\mathbb{V}[\mathbb{U}], \in_{|\mathbb{V}})$ la sous-collection définie par $\mathbb{V}(x)$ et munie de l'appartenance induite, on a $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ (avec fondation).

La collection définissable $\mathbb{V}$ est donc un foncteur de $\mathbf{Mod}(\mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AF}\})$ vers $\mathbf{Mod}(\mathrm{ZF})$. (On rappelle que la théorie des ensembles a préempté l'emploi du mot « partie ».)

Démonstration. Il s'agit simplement de vérifier les axiomes, mais on prendra garde à la relativisation lors des quantifications. Pour éviter les confusions on notera d'abord ε la relation d'appartenance restreinte $\in_{|\mathbb{V}}$. Au fil de l'argument nos notations deviendront moins scrupuleuses ; en réalité il n'y a pas de confusion possible entre $\in$ et ε. On emploiera sans mention le lemme 25.1.

— Extensionnalité. Soient a, b de $\mathbb{V}$ tels que $(\mathbb{V}, \varepsilon) \models (\forall x)(x \mathrel{\varepsilon} a \leftrightarrow x \mathrel{\varepsilon} b)$; on montre $(\mathbb{V}, \varepsilon) \models a = b$. Pour cela nous utiliserons l'extensionnalité dans $\mathbb{U}$.

Soit x de $\mathbb{U}$ vérifiant $(\mathbb{U}, \in) \models x \in a$. Alors $(\mathbb{U}, \in) \models x \in a \wedge \mathbb{V}(a)$, donc par transitivité $(\mathbb{U}, \in) \models \mathbb{V}(x)$. Par définition de la relation induite, $(\mathbb{V}, \varepsilon) \models x \mathrel{\varepsilon} a$. Par hypothèse $(\mathbb{V}, \varepsilon) \models x \mathrel{\varepsilon} b$, d'où par définition encore $(\mathbb{U}, \in) \models x \in b$. Avec la réciproque identique, on a ainsi $(\mathbb{U}, \in) \models (\forall x)(x \in a \leftrightarrow x \in b)$. Par extensionnalité dans $(\mathbb{U}, \in)$ vient $(\mathbb{U}, \in) \models a = b$, et donc $(\mathbb{V}, \varepsilon) \models a = b$.

On comprend qu'*une collection transitive vérifie l'extensionnalité* pour l'appartenance induite.

Et comme il n'y a qu'une relation d'appartenance par collection, il n'y a pas d'ambiguïté : on notera simplement $\mathbb{U}$ au lieu de $(\mathbb{U}, \in)$ et $\mathbb{V}$ au lieu de $(\mathbb{V}, \varepsilon)$.

— Somme. Soit a de $\mathbb{V}$ donné. Soit $x = \bigcup[\mathbb{U}](a)$ (réunion calculée dans $\mathbb{U}$). On montre que x est dans $\mathbb{V}$, et qu'il y est la réunion de a.

Soit en effet b de $\mathbb{U}$ tel que $\mathbb{U} \models b \in x$. Alors $\mathbb{U} \models (\exists y)(b \in y \wedge y \in a)$; par transitivité, b est dans $\mathbb{V}$. Donc $\mathbb{U} \models (\forall b)(b \in x \to \mathbb{V}(b))$; il suit que $\mathbb{U} \models \mathbb{V}(x)$.

Si maintenant b est un point de $\mathbb{V}$, alors $\mathbb{V} \models b \mathrel{\varepsilon} x$ ssi $\mathbb{U} \models b \in x$ ssi $\mathbb{U} \models (\exists y)(b \in y \wedge y \in a)$ ssi (grâce à la transitivité) $\mathbb{V} \models (\exists y)(b \mathrel{\varepsilon} y \wedge y \mathrel{\varepsilon} a)$. Ainsi $\mathbb{V} \models (b \mathrel{\varepsilon} x) \leftrightarrow (\exists y)(b \mathrel{\varepsilon} y \wedge y \mathrel{\varepsilon} a)$: donc b est bien la $\mathbb{V}$-réunion de a.

On comprend qu'*une collection transitive $\mathcal{C}$ close sous la fonctionnelle $\bigcup[\mathbb{U}]$ vérifie la somme.*

Et comme dans $\mathbb{V}$ on n'utilise que ε, on se reprend à noter celle-ci $\in$.

— Puissance. Même raisonnement.

— Schéma de remplacement. Soit $\varphi(x, y, \mathbf{z})$ (avec paramètres dans $\mathbb{V}$) qui définit dans $\mathbb{V}$ une fonctionnelle f ; soit d de $\mathbb{V}$. Attention, il n'est pas clair que $\varphi(x, y, \mathbf{z})$ définisse encore une fonctionnelle dans $\mathbb{U}$.

Soit $\varphi_{\mathbb{V}}(x, y, \mathbf{z})$ la relativisée de φ (obtenue en bornant les quantificateurs à $\mathbb{V}$). Par construction, pour des points de $\mathbb{V}$, on a $\mathbb{U} \models \varphi_{\mathbb{V}}(x, y, \mathbf{z})$ ssi $\mathbb{V} \models \varphi(x, y, \mathbf{z})$. Alors $\mathbb{U} \models$ « $\varphi_{\mathbb{V}}(x, y, \mathbf{z})$ définit une fonctionnelle sur $\mathbb{V}$ ». Celle-ci calcule la même chose que f, où elles sont définies, mais son domaine pourrait être plus grand. On applique le schéma de remplacement à $\varphi_{\mathbb{V}}$ et d dans $\mathbb{U}$; soient $C = \{f(x) : x \in d\}$ l'ensemble image (dans $\mathbb{U}$) et $c = \{y \in C : \mathbb{V}(y)\}$.

Par construction les membres de c sont tous dans $\mathbb{V}$. Donc $\mathbb{U} \models \mathbb{V}(c)$, et c est l'ensemble image de d par f, au sens de $\mathbb{V}$.

— Infini. Évident car $\mathbb{U} \models \mathbb{V}(\omega)$ (en fait $\mathbb{V}$ a les mêmes ordinaux que $\mathbb{U}$). On comprend qu'*une collection transitive contenant les ordinaux de* $\mathbb{U}$ *a la même notion d'« être un ordinal »*.

— Fondation. On ne va bien sûr pas invoquer la fondation dans $\mathbb{U}$. Soit a non vide de $\mathbb{V}$; il reste non vide dans $\mathbb{U}$. Par transitivité, tout $b \in a$ est dans $\mathbb{V}$ et possède un rang ordinal. Soit donc $b \in a$ de rang minimal. Dans $\mathbb{U}$, si $c \in b$, alors $\operatorname{rg} c < \operatorname{rg} b$, donc $c \notin a$. Notamment $\mathbb{U} \models a \cap b = \varnothing$. Mais b est bien dans $\mathbb{V}$, donc $\mathbb{V} \models a \cap b = \varnothing$. Ainsi $\mathbb{V} \models \mathrm{AF}$. □

Remarques

— Pour la fondation, on peut aussi montrer $\mathbb{V} \models (\forall x)\mathbb{V}(x)$. (La notation peut prêter à confusion ; à gauche il s'agit des $\mathbb{U}$-points d'un foncteur ; à droite, de la formule définissant ce foncteur.) Soit en effet a de $\mathbb{V}$. Dans $\mathbb{U}$ il existe un ordinal α tel que $\mathbb{U} \models a \in V_\alpha$. Mais on montre par récurrence ordinale que $V_\alpha[\mathbb{U}] = V_\alpha[\mathbb{V}]$: en effet les deux modèles ont la même notion de puissance et la même notion d'ordinal. Donc $\mathbb{V} \models a \in V_\alpha$, et $\mathbb{V} \models \mathbb{V}(a)$. On conclut par la proposition 25.2.

— Le foncteur $\mathbb{V}$ est même idempotent : on a montré $\mathbb{V} \models (\forall x)\mathbb{V}(x)$, i.e. $\mathbb{V}[\mathbb{V}[\mathbb{U}]] = \mathbb{V}[\mathbb{U}]$.

— L'inspection de l'argument permet certaines troncatures aux niveaux V_α (exercice 25.2).

Exercices

25.1. On part de ω ; on interprète $(\mathbb{Z}\,;+,\cdot)$ dans ω^2/R_1 pour l'équivalence $a + d = b + c$, puis $(\mathbb{Q}\,;+,\cdot)$ dans $(\mathbb{Z} \times \omega_{>0})/R_2$ pour l'équivalence $a \cdot d = b \cdot c$; on interprète enfin $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des classes de suites de Cauchy rationnelles modulo « la différence tend vers 0 ». Déterminer α minimal tel que $\mathbb{R} \in V_\alpha$.

25.2.

a. Vérifier les points suivants. On rappelle que la *théorie de Zermelo* Z n'a pas le schéma de remplacement mais celui de séparation (§ 21.2), et l'axiome de la paire.

(i) Si α est un ordinal quelconque, alors $(V_\alpha, \in_{|V_\alpha})$ est transitif et clos sous parties ; il vérifie extensionnalité, somme (et séparation) et fondation.

(ii) Si α est limite, V_α est clos sous $\{\cdot\}$, $\bigcup$, et P ; il vérifie (paire et) puissance.

(iii) Si $\alpha > \omega$, alors V_α vérifie infini.

(iv) En déduire que $V_\alpha \models \mathrm{Z}$ ssi α est un ordinal limite $> \omega$.

(v) Montrer que $V_{\omega+\omega} \models$ Z, mais $V_{\omega+\omega} \not\models$ ZF.
[Dans $V_{\omega+\omega}$, pas d'ordinal formel pour le bon ordre suivant sur ω défini par $k \preceq \ell$:si (k et ℓ ont même parité et $k \leqslant \ell$) ou (k est pair et ℓ impair).]

(vi) Soit α limite. Montrer que $\beth_\alpha = \alpha$ ssi $V_\alpha \models (\forall x)(\exists \beta)(\exists f)(\mathrm{Ord}(\beta) \wedge f\colon x \simeq \beta)$.

b. Montrer que ZF$\setminus\{$AI$\}$ $\not\models$ AI, et que ZF $\not\models$« il existe un cardinal inaccessible ». (Autre preuve à l'exercice P.2).

c. Soit M un ensemble transitif et clos sous parties tel que $\mathbb{M} = (M, \in_{|M})$ vérifie ZF$\setminus\{$AI$\}$. Montrer qu'il existe un ordinal limite α tel que $M = V_\alpha$.

25.3. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

Les ordinaux de V_α sont les $\beta < \alpha$. Considérons $\alpha = \aleph_1 > \aleph_0$. Comme $\aleph_0 \in V_{\omega+1}$, on a $P(\aleph_0) \in V_{\omega+2} \in V_\alpha$. Ainsi $2^{\aleph_0}$ est un ordinal de V_α, i.e. $2^{\aleph_0} < \omega_1$; le continu est dénombrable.

25.4 (modèles de ZFC^2). Relire la définition d'un cardinal inaccessible (exercice 24.5) ; on travaille dans $\mathbb{V} \models$ ZFC fixé.

a. Soit α un ordinal. Montrer que si α est un cardinal inaccessible, alors $(V_\alpha, \in) \models$ ZFC.

b. En déduire que (si ZFC est cohérente), alors ZFC$\cup$« il n'existe pas de cardinal inaccessible » l'est.
Note : en revanche (si ZFC est cohérente), ZFC ne démontre *pas* « il existe un cardinal inaccessible » (exercice P.3).

c. Le modèle ambiant fournit les concepts de « partie » et « fonction » pour la logique du deuxième ordre, mais la sémantique reste extérieure. Montrer que α est un cardinal inaccessible ssi $(V_\alpha, \in) \models$ ZFC^2.

d. Déduire que si M et $\varepsilon \subseteq M^2$ sont des points de $\mathbb{V}$ tels que $(M, \varepsilon) \models$ ZFC^2, alors il existe un cardinal inaccessible κ tel que $(M, \varepsilon) \simeq (V_\kappa, \in)$. [Tasser.]

En résumé, « κ inaccessible » équivaut à « $V_\kappa \models$ ZFC^2 », et elles entraînent « $V_\kappa \models$ ZFC ». Il suit que les cardinaux inaccessibles sont caractérisables *au deuxième ordre* au sens de § 12, notes conclusives.

25.5. Outre celle de cardinal inaccessible, cet exercice demande une nouvelle définition.

Définition (univers de Grothendieck)**.** Un *univers de Grothendieck* est un ensemble $U \neq \varnothing$ tel que le modèle ambiant vérifie :

- $(\forall x)(x \in U \to x \subseteq U)$;
- $(\forall x)(x \in U \to \{x\} \in U)$;
- $(\forall x)(x \in U \to P(x) \in U)$;
- $(\forall I)(\forall f)[(I \in U \wedge f\colon I \to U) \to (\bigcup(\mathrm{im}\, f) \in U)]$.

Remarque. Le dernier axiome est un remplacement « externe » car la fonction n'est pas tenue d'avoir son graphe dans U. Notamment c'est plus fort que l'axiome de réunion $(\forall x)(x \in U \to \bigcup(x) \in U)$.

On se place dans un modèle de ZFC. Montrer que les univers de Grothendieck sont exactement les V_κ pour $\kappa = \aleph_0$ ou κ cardinal inaccessible.

25.6. On travaille dans un modèle de ZF. Un ensemble x est *héréditairement (au plus) dénombrable* s'il vérifie : $(x \hookrightarrow \omega) \wedge (\forall y)(y \in \mathrm{cl}(x) \to y \hookrightarrow \omega)$, ou encore $\mathrm{cl}(\{x\}) \hookrightarrow \omega$. On omet de dire « au plus » et l'on note $\mathrm{HP}_{\aleph_1}$ la collection de ces ensembles « héréditairement plus petits que $\aleph_1$ ».

a. En présence de choix dénombrable, montrer que x est héréditairement dénombrable ssi sa clôture transitive $\mathrm{cl}(x)$ est dénombrable.

b. Dans ZFC, montrer que $\mathrm{HP}_{\aleph_1} \subseteq V_{\aleph_1}$ est un ensemble de cardinal $2^{\aleph_0}$.

c. Généralisation. Soit HP_κ la collection des ensembles héréditairement $< \kappa$.
Montrer dans ZFC que HP_κ est un ensemble et $\mathrm{HP}_\kappa \subseteq V_\kappa$, avec égalité ssi $\beth_\kappa = \kappa$; en qu'en général, $\operatorname{card} \mathrm{HP}_\kappa = \sup\{2^\lambda : \lambda < \kappa\}$.

d. Montrer que si $\kappa > \aleph_0$ est régulier, alors $(\mathrm{HP}_\kappa, \in)$ vérifie $\mathrm{ZFC}\backslash\{P\}$ (axiomes sauf la puissance) ; que si κ est inaccessible, alors $\mathrm{HP}_\kappa = V_\kappa$ avec l'appartenance induite est modèle de ZFC.

25.7 (modèle dénombrable et graphe aléatoire).

a. Soit $(\mathbb{V}, \in) \models \mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AI}\}$ dénombrable. Soit aRb la relation $a \in b \vee b \in a$. Montrer que $(\mathbb{V}, R)$ est isomorphe au *graphe aléatoire* (ex. 2.7).

b. Soit $\mathrm{HP}_{\aleph_1}$ l'ensemble des ensembles héréditairement au plus dénombrables (ex. 25.6). *On suppose* HC. Montrer que tout graphe de cardinal $\leqslant \aleph_1$ se plonge dans $(\mathrm{HP}_{\aleph_1}, R)$ pour la relation R ci-dessus.

Le modèle standard de la théorie des ensembles finis est $(V_\omega, \in)$; cette structure est bi-interprétable avec $(\mathbb{N}\,;+,\cdot)$ (ex. 21.7). On vient de voir que (V_ω, R) est le graphe aléatoire (v. § N).

25.8 (modèles de permutation (1)). Suite de l'exercice 21.6. On appelle *bouclette* un élément a vérifiant $\{a\} = a$. Soit $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$.

a. Montrer que si ZF est cohérente, alors $(\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AF}\}) \cup \{$« il existe au moins κ bouclettes » $\}$ aussi.

b. Montrer que sans fondation ni choix, il peut exister un ensemble fini au sens de Dedekind mais non formellement fini (exercice 23.3). En déduire que le principe de Cantor-Bernstein dual n'est pas conséquence de $\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AF}\}$.

Suite à l'exercice 26.7.

25.9 (automorphismes d'un modèle).

a. Montrer que (si ZF est cohérente) il existe des modèles $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ ayant des automorphismes $j\colon \mathbb{V} \simeq \mathbb{V}$ non triviaux.

b. Permettre la récurrence transfinie demande de pouvoir parler de certaines collections d'ordinaux. On ajoute j au langage et l'on note $\mathrm{ZF}(j)$ la théorie où le schéma de remplacement passe en revue toutes les $\{\in, j\}$-formules.
Montrer que si j est *définissable*, alors $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ entraîne $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}(j)$.

c. On suppose $j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{V}; \in)$ *et* $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}(j)$. Montrer $j = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. (En particulier, pas d'automorphismes définissables d'un modèle de ZF.)

d. Montrer que c'est faux sans fondation : donner un modèle avec automorphismes définissables.

Le sujet plus délicat des plongements élémentaires $\mathbb{V} \rightarrowtail \mathbb{V}$ est discuté à la fin du SÉ5.

25.10. Un domaine V est muni de *deux* structures de modèle de ZF qui interagissent bien, comme suit. Soit $\hat{\mathbb{V}} = (V; \in_1, \in_2)$. Soit ZF_i la théorie disant que $\in_i$ vérifie les axiomes de ZF, où toutes les $\{\in_1, \in_2\}$-formules sont prises en compte dans le remplacement. On suppose $\hat{\mathbb{V}} \models \mathrm{ZF}_1 \cup \mathrm{ZF}_2$, et l'on note $\mathbb{V}_i = (V; \in_i)$.

a. Soit $\mathbb{c}_i(x) = (\mathrm{cl}_i(\{x\}_i), \in_i)$ la clôture transitive de $\{x\}$ munie de l'appartenance, le tout (y compris le singleton) calculé dans $\mathbb{V}_i$. Montrer que si f, f' de V sont deux isomorphismes $\mathbb{c}_1(x) \simeq \mathbb{c}_2(y)$, alors $f = f'$.

b. On note $\varphi(x, y)$ la relation : $(\exists f)(f\colon \mathbb{c}_1(x) \simeq \mathbb{c}_2(y))$. Montrer que si $\hat{\mathbb{V}} \models \varphi(x, y)$, alors $\mathbb{V}_1 \models \mathrm{Ord}(x)$ ssi $\mathbb{V}_2 \models \mathrm{Ord}(y)$.

c. Montrer que si $\mathbb{V}_1 \wedge \mathrm{Ord}(\alpha)$ et que $f\colon \mathbb{c}_1(\alpha) \simeq \mathbb{c}_2(\beta)$, alors f s'étend en $\hat{f}\colon V_{1,\alpha} \simeq V_{2,\beta}$, où $V_{i,\gamma}$ est le γ^e niveau de la hiérarchie cumulative de $\mathbb{V}_i$.

d. En déduire que φ définit un isomorphisme $\mathbb{V}_1 \simeq \mathbb{V}_2$.

25.11. Cet exercice fait saisir la différence entre choix et choix global. On veut montrer le lemme suivant.

Lemme. Dans ZF, AC équivaut à l'énoncé : « pour tout ordinal α, $P(\alpha)$ est bien ordonnable ».

a. Montrer qu'il suffit d'obtenir : « pour tout ordinal α, V_α est bien ordonnable ».

b. Trouver l'erreur dans le raisonnement :

> Récurrence ordinale. Trivial en $\varnothing$; si $V_\alpha \simeq \beta$, alors $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha) \simeq P(\beta)$ reste bien ordonnable ; aux limites on met bout-à-bout des bons ordres sur les V_β pour $\beta < \alpha$, ce qui donne un bon ordre sur V_α.

c. Produire un raisonnement correct. [D'abord fixer α, puis uniformiser la récursion ci-dessus pour $\beta < \alpha$. On pourra bien ordonner $P(\kappa_\alpha)$ pour κ_α l'ordinal de Hartogs de V_α (exercice 22.9).]

Notes conclusives

- **Repères historiques**

The idea of this axiom was first conceived by von Neumann in his paper Eine Axiomatisierung der Mengenlehre ***(Journal für die reine und angewandte Mathematik**, vol. 154 (1925), see p. 239, axiom VI 4). From the original form of it he passed to the present form of the axiom, or to a somewhat stronger axiom in a form adapted to his system, in* Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre ***(Journal fur die reine und angewandte Mathematik**, vol. 160 (1929), see p. 231). Zermelo independently introduced this axiom, calling it* Axiom der Fundierung, *in his paper* Über Grenzzahlen und Mengenbereiche ***(Fundamenta mathematicae**, vol. 16 (1930), see p. 31).*
[Ber41, note 18 p. 6]

Axiome de fondation. Citation supra.

Modèle intérieur bien fondé. Entrevu dès [**Sko23**, § 6] (la notion de fondation restant informelle) : « Man sieht nun fast unmittelbar, dass diejenigen Mengen M eines Bereiches B, für welche jede ε-Reihe im Endlichen abbrechen muss, einen Teil B' von B bilden müssen, für welchen die Axiome noch gültig sind. »

Hiérarchie cumulative. • Introduite par Zermelo dans le remarquable [Zer30], travail majeur qui passa inaperçu et le resta : peu après vint Gödel, puis les nazis brisèrent la dernière période de créativité de Zermelo.

[Ber41] : Paul Bernays. « A system of axiomatic set theory II ». In : *J. Symbolic Logic* 6 (1941), p. 1-17

[Zer30] : Ernst Zermelo. « Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre ». In : *Fundam. Math.* 16 (1930), p. 29-47

• La hiérarchie cumulative est une bonne transcription, en logique élémentaire (même si ce point échappait à Zermelo), du typage ensembliste intuitif : les ordinaux étant donnés, les ensembles de type $\alpha + 1$ sont les collections d'ensembles de type α.

Modèles de **ZFC².** • Caractérisation des modèles intérieurs de ZFC² comme les V_κ pour κ inaccessible (exercice 25.4) : [Zer30]. • Généralisé par Shepherdson ([She51a] et suivants) dans le cadre de BGN ; Shepherdson va beaucoup plus loin car il pose la question de l'*absoluité*, i.e. dans quelle mesure ses modèles appelés « super-complets » peuvent avoir des propriétés différentes du modèle ambiant. • Une théorie ayant ensembles et classes, comme BGN (§ Q), aura plutôt ses modèles de la forme $V_{\kappa+1}$ pour κ inaccessible. Montague et Scott [Mon65b, § 2] ont donné (sans détails) une théorie du deuxième ordre dont les modèles sont exactement ces $V_{\kappa+1}$. • Ex. 25.10 : [Vää19], qui trouve également son origine dans [Zer30] pour ZFC². Se relie à la *catégoricité interne*. • On peut aussi s'interroger sur Z^2, théorie de Zermelo au deuxième ordre (séparation, pas remplacement) ; curiosité marginale [Uzq99].

• **Terminologie, notations.** • Par opposition à l'axiome de fondation, la hiérarchie cumulative est l'invention de Zermelo et ne devrait pas porter d'autre nom ; il n'y a pas de fondement historique à l'appeler « hiérarchie de von Neumann ». • La notation V_α, absente de [Zer30] mais désormais classique, est liée au choix de $\mathbb{V}$ pour les modèles (v. § 21) ; elle peut entretenir la confusion. • On trouve aussi la notation R_α. • Bourbaki (réf. infra) fait valoir que la propriété de ne pas avoir de suite infinie descendante pour $\in$ pourrait s'appeler *artinianité*, comme en algèbre. • Les V_κ pour κ inaccessible sont parfois appelés les « modèles standard » de ZF ; on déconseille la terminologie.

• **Graphe aléatoire (ex. 25.7).** La preuve emploie la fondation. Avec anti-fondation, on obtient le graphe aléatoire avec boucles aléatoires [AC21].

• **Axiome de fondation.** L'axiome a pour vocation d'interdire les suites infinies descendantes $x_0 \ni x_1 \ni \dots$; mais comme en § 23.1 le problème est de savoir par quels entiers on indexe. En présence de choix, AF équivaut au caractère bien fondé de $\in$ *au sens des* $\omega[\mathbb{V}]$*-suites.* Si dans $\mathbb{V} \models$ ZFC l'ensemble $\omega[\mathbb{V}]$ excède les entiers intuitifs, on peut avoir une suite décroissante *indexée par les entiers intuitifs.* Il n'y a pas de moyen formel de s'en rendre compte, ou d'interdire ce cas de figure : toute formalisation en logique élémentaire crée des artéfacts non standard.

• **Modèles « naturels » de** ZFC **et** ZFC² **(ex. 25.4).** • V_α est modèle de ZFC² ssi α est un cardinal inaccessible. • Pour ZFC, la condition « α est un cardinal inaccessible » reste évidemment suffisante, mais n'est plus nécessaire. En effet si κ est un cardinal inaccessible, il existe un ordinal $\beta < \kappa$ tel que $(V_\beta; \in) \preccurlyeq (V_\kappa; \in)$ [MV59]. Notamment si κ est le premier inaccessible, prendre $\beta < \kappa$ convenant : il donne un modèle mais n'est

[She51a] : John Shepherdson. « Inner models for set theory I ». In : *J. Symbolic Logic* 16 (1951), p. 161-190

[Mon65b] : Richard Montague. « Set theory and higher-order logic ». In : *Formal Systems and Recursive Functions (Proc. Eighth Logic Colloq., Oxford, 1963).* North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 131-148

[Vää19] : Jouko Väänänen. « An extension of a theorem of Zermelo ». In : *Bull. Symb. Log.* 25.2 (2019), p. 208-212

[Uzq99] : Gabriel Uzquiano. « Models of second-order Zermelo set theory ». In : *Bull. Symbolic Logic* 5.3 (1999), p. 289-302

[AC21] : Bea Adam-Day et Peter Cameron. « Undirecting membership in models of anti-foundation ». In : *Aequationes Math.* 95.2 (2021), p. 393-400

[MV59] : Richard Montague et Robert Vaught. « Natural models of set theories ». In : *Fund. Math.* 47 (1959), p. 219-242

pas inaccessible. • On rappelle que ZFC ne prouve pas l'existence de cardinaux inaccessibles (ex. 25.2). • La réciproque [MV59, Theorem 8.1] est amusante : si $\beta < \alpha$ sont deux ordinaux et $(V_\beta; \in) \preccurlyeq (V_\alpha; \in)$, alors ce sont des modèles de ZF.

- **Automorphismes de modèles (ex. 25.9).** Si ZF est cohérente, il existe même un modèle avec un automorphisme d'ordre 2, ; pour tout groupe fini G il en existe un ayant au moins G automorphismes [Coh74] (plus difficile, par forcing).

- **Univers**

Univers de Tarski. • La notion d'univers remonte [Tar38b], qui introduit deux variantes d'ensembles appelés *inaccessibles*. Tarski montre (Satz 20) qu'un ensemble est élément d'un univers ss'il est de cardinal majoré par un cardinal inaccessible ; puis il caractérise les cardinaux d'ensembles inaccessibles (Satz 21). En particulier il établit le fait suivant.

Théorème (Tarski)**.** Dans ZF il y a équivalence entre :

– tout ensemble appartient à un univers (de Tarski) [« axiome des univers de Tarski »] ;
– la collection des cardinaux inaccessibles est non bornée.

• Tarski, qui travaille sans AC (le maniement des cardinaux est donc assez contre-intuitif), montre en outre [Tar38b, § 2, IV] que *son* axiome des univers entraîne AC.

Univers de Bourbaki. • Les définitions de [Tar38b] paraissent moins naturelles que celle d'univers dit « de Grothendieck » (tirée de « papiers secrets de Nicolas Bourbaki ») [SGA4, Appendice à l'Exposé 1]. Sans citer Zermelo ni Tarski, Bourbaki expose en détail le lien avec les cardinaux inaccessibles ; ne supposant pas l'axiome de fondation, il remplace V_α par les ensembles héréditairement de cardinal $< \kappa$. • Ces univers permettent une algébrisation élégante des opérations ensemblistes utiles « en vraies mathématiques » ; cela étant, le projet d'asseoir l'algèbre homologique sur une théorie des ensembles (in fine, de la combinatoire infinie) reste étonnant. • Kruse [Kru65] a lié les univers de Grothendieck aux « modèles supercomplets » de Shepherdson (qui sont les V_κ) ; Williams [Wil69] est revenu sur le calcul de κ. Ces travaux semblent assez légers ; il est possible que Kruse et Williams n'aient pas eu accès à [SGA4] mais à des fragments. Par ailleurs, aucun des deux ne cite [Zer30].

Théorème. Dans ZFC, il y a équivalence entre « tout ensemble appartient à un univers de Grothendieck » et « la collection des cardinaux inaccessibles est cofinale dans celle des cardinaux ».

C'est encore équivalent à : « tout ensemble appartient à un univers de Tarski ». • Tout devient exagérément délicat dans ZF sans choix (aussi en raison de l'existence de définitions non équivalentes de « cardinal inaccessible ») [Solo8]. Notamment, l'axiome des univers de Bourbaki n'entraîne *pas* AC,

---

[Coh74] : Paul Cohen. « Automorphisms of set theory ». In : *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*. T. Vol. XXV. Proc. Sympos. Pure Math. Published for the Association for Symbolic Logic by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1974, p. 325-330

[SGA4] : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*. T. 269. Lecture Notes in Mathematics. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Berlin-New York : Springer-Verlag, 1972, p. xix+525

[Kru65] : Arthur Kruse. « Grothendieck universes and the super-complete models of Shepherdson ». In : *Compositio Math.* 17 (1965), 96-101 (1965)

[Wil69] : Neil Williams. « On Grothendieck universes ». In : *Compositio Math.* 21 (1969), p. 1-3

[Solo8] : Robert Solovay. AC *and strongly inaccessible cardinals*. Message électronique sur et n'est *pas équivalent* à l'axiome des univers de Tarski.

- **Ensembles héréditairement petits (ex. 25.6).** • La définition de HP_κ pour κ singulier est sujette à fluctuations dans la littérature mais ce n'est pas le présent propos. • [Jec82] a commencé l'étude de $\mathrm{HP}_{\aleph_1}$ sans AC ; on peut généraliser. Sans AC, il faut évidemment formaliser « strictement plus petit » à la Scott, par ensembles de représentants. Pour X un ensemble, $|X|$ désigne la collection des ensembles *de rang cumulatif minimal* équipotents à X : c'est un ensemble. La relation « strictement plus petit » est l'existence d'une injection $|Y| \hookrightarrow |X|$, mais l'absence de bijection $|Y| \simeq |X|$.

Théorème (ZF ; [Hol14])**.** HP_X est un ensemble.

En revanche son cardinal (au sens de $|X|$) semble peu contrôlé ; la question pourrait être ouverte.

§ 26. Ensembles héréditairement définissables par ordinaux

La *définissabilité par ordinaux* tient compte des concepts modèle-théoriques ; sa formalisation requiert d'internaliser la satisfaction, ce qui n'est possible que localement (§ 26.1). On peut alors introduire la collection DO des ensembles définissables par ordinaux ; étonnamment, *elle-même est définissable* (§ 26.2). Ajoutant une clause héréditaire, la sous-collection résultante HDO forme un modèle intérieur (§ 26.3).

Prérequis : §§ 8, 13, 20, 21–23, 25.

En § 25 nous avons construit un foncteur élémentaire $\mathbb{V}\colon \mathbf{Mod}(\mathrm{ZF}\setminus\{\mathrm{AF}\}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathrm{ZF})$. Cette section présente un foncteur élémentaire $\mathrm{HDO}\colon \mathbf{Mod}(\mathrm{ZF}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathrm{ZFC})$; par opposition au foncteur $\mathbb{V}$, il n'est pas idempotent.

Le but naïf, inatteignable, est de considérer la collection des points du modèle qui sont définissables sans paramètres. Faute de pouvoir quantifier sur les formules du langage, cette collection informelle n'est pas elle-même définissable. Elle le deviendra pourtant en admettant des paramètres ordinaux ; c'est non trivial, et même contre-intuitif.

§ 26.1. Formalisation de la satisfaction

Cette sous-section formalise les notions de § 6. Il y a deux difficultés.

---

la liste FOM. 2008

[Jec82] : Thomas Jech. « On hereditarily countable sets ». In : *J. Symbolic Logic* 47.1 (1982), p. 43-47

[Hol14] : Randall Holmes. « On hereditarily small sets in ZF ». In : *MLQ Math. Log. Q.* 60.3 (2014), p. 228-229

1. Pour quantifier sur les formules, il faut les formaliser, au risque d'en créer de *non standard* (tout comme il peut y avoir des éléments de ω ne correspondant à aucun entier intuitif).
2. Il faut internaliser la satisfaction, qu'emploie la définissabilité. Le théorème d'indéfinissabilité de la vérité de Tarski (§ 20) interdit une approche à la fois formelle et globale ; il force à *travailler à niveau fixé*. A posteriori ceci légitime l'approche suivie en § 6 : la satisfaction est bel et bien relative.

- **Structure relationnelle formelle de taille ensembliste.** C'est une paire $\mathbb{A} = (A, \mathcal{L})$ où A est un point du modèle et $\mathcal{L}$ un ensemble de parties des puissances cartésiennes de A.

  Noter que tout point du modèle hérite d'une structure relationnelle en restreignant l'appartenance. Si A est un ensemble amorphe, on prendra par défaut $\mathbb{A} = (A, \in_{|A})$.

- **Formules formelles.** Dans une théorie conçue pour manier l'infini, la syntaxe est aisément codable.

$\ulcorner\mathrm{Var}\urcorner$ **Notation.** Soit Σ un ensemble dénombrable, pour les divers symboles logiques ; il contient un sous-ensemble dénombrable $\ulcorner\mathrm{Var}\urcorner$ de *variables formelles*. (Grâce à l'infini actuel, on évite les contorsions du chapitre IV type $x\_\{s(0)\}$.)

Remarques

— « Dénombrable » est au sens formel ; on peut plonger la collection intuitive $\mathcal{V} = \mathrm{Var}$ des vraies variables dans l'ensemble formel des variables formelles $\ulcorner\mathrm{Var}\urcorner$, comme on peut plonger les entiers intuitifs dans ω. Pour x une vraie variable on notera $\#x$ la variable formelle associée.

— Naturellement Σ et $\ulcorner\mathrm{Var}\urcorner$ ne sont pas tant des points de $\mathbb{V}$, que des collections définissables (foncteurs élémentaires) dont ZF prouve la dénombrabilité, i.e. $\sigma(x)$ tel que $\mathrm{ZF} \models (\exists\Sigma)[(\Sigma \simeq \omega) \wedge (\forall x)(x \in \Sigma \leftrightarrow \sigma(x)]$.

Définition (expression formelle, formule formelle)**.**

— Une *expression formelle* est une suite finie de symboles, i.e. un élément de $\bigcup_{n\in\omega} \Sigma^n$. Noter que la longueur est finie *au sens formel*, i.e. potentiellement non standard.

— À toute vraie expression E correspond en contrepartie une expression $\#E$ formelle $\#E$.

$\ulcorner\mathrm{Form}\urcorner$ — On sait par arbres de construction définir l'ensemble $\ulcorner\mathrm{Form}\urcorner$ des *formules formelles*.

Dans la suite f désigne une formule formelle ; on réserve φ pour une vraie formule.

Remarques

— Dans un modèle, $\omega[\mathbb{V}]$ peut contenir de « faux » entiers, et donc $\ulcorner\mathrm{Form}\urcorner$ contenir de « fausses » formules. Il peut ainsi exister des objets $f \in \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner$ qui ne sont pas de la forme $\#\varphi$. Comme toujours le concept de « standard » échappe au pouvoir d'expression de la logique élémentaire. La différence avec § 19.3 est que PA dispose d'un modèle de référence : $\mathbb{N}$, qui se plonge dans les autres.

— L'écriture « $\mathbb{V} \models f$ » n'a pas de sens pour $f \in \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner$ quelconque ; pour définir $\mathbb{V} \models \varphi$ comme en § 6, φ doit être une *vraie* formule, notion extérieure au modèle car préalable à son étude.

• **Paramètres.** On vient de formaliser les formules, puis de transporter les vraies formules dans les formules formelles ; faisons de même pour les paramètres. Rappelons que :

— $\ulcorner\mathrm{Var}\urcorner$ désigne l'ensemble dénombrable des variables *formelles* ;

— les vraies variables forment une collection informelle $\mathcal{V} = \mathrm{Var}$; leur image $\#\,\mathrm{Var}$ dans le modèle forme une partie (a priori non définissable) de $\ulcorner\mathrm{Var}\urcorner[\mathbb{V}]$;

— de vrais paramètres dans A sont donnés par une application partielle $\mathbf{b}$ à domaine une collection vraiment finie de vraies variables, et image dans A.

Notation.

$\ulcorner\mathrm{Par}(X)\urcorner$ — Soit $\ulcorner\mathrm{Par}\urcorner$ la collection des *paramètres formels*, définie par « être une fonction à domaine fini $\subseteq \ulcorner\mathrm{Var}\urcorner$ » ; c'est une collection définissable, pas un ensemble.

— Pour A un ensemble fixé, soit $\ulcorner\mathrm{Par}(A)\urcorner$ l'ensemble des *paramètres formels dans* A, i.e. des paramètres à image $\subseteq A$; c'est bien un ensemble.

— Pour une variable formelle x, on note $\ulcorner\mathrm{Par}_{x^c}(A)\urcorner$ l'ensemble des paramètres formels dans A qui ne sont pas définis en x.

Remarques

— Les domaines sont *formellement* finis. Il peut y avoir des paramètres formels de domaine une partie de $\ulcorner\mathrm{Var}\urcorner$ formellement mais non intuitivement finie.

— À de vrais paramètres $\mathbf{b}$ dans A correspondent des paramètres formels $\#\mathbf{b}$ dans A : pour chaque vraie variable x de $\operatorname{dom}\mathbf{b}$, poser $\#\mathbf{b}(\#x) = \mathbf{b}(x)$.

— À toute vraie formule à paramètres $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ correspond une formule formelle à paramètres $\#\varphi(\#\mathbf{x}, \#\mathbf{b})$. Toutes ne sont pas de cette dernière espèce.

— Autant la différence entre vraies formules φ et formules formelles f est importante à refléter en notation, autant celle entre vraies variables et variables formelles, ou vrais paramètres et paramètres formels, provoque peu de confusion. *On notera indifféremment x ou $\mathbf{b}$ pour de vrais objets ou des objets formels ; le contexte permet de juger.*

— On écrira donc encore $\#\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ au lieu de $\#\varphi(\#\mathbf{x}, \#\mathbf{b})$ pour la contrepartie formelle d'une vraie formule à paramètres.

— Enfin $\#\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ prend un sens dans tout modèle contenant $\mathbf{b}$. On écrira donc $\ulcorner\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b})\urcorner$ le terme qui dans $\mathbb{V}$ vaut $\#\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b})$.

— Une alternative aux paramètres est d'introduire systématiquement le langage $\mathcal{L}_A$. Les textes spécialisés en théorie des ensembles adoptent souvent ce point de vue.

• **Satisfaction relative**

Théorème (Tarski)**.** Il n'existe *pas* de relation unaire définissable $\ulcorner\models\urcorner f(\mathbf{b})$, conditionnée à « $f(\mathbf{b})$ est une formule formelle à paramètres », telle que pour chaque *vraie* formule à paramètres $\varphi(\mathbf{b})$, on ait $\mathbb{V} \models (\ulcorner\models\urcorner\#\varphi(\mathbf{b}))$ ssi $\mathbb{V} \models \varphi(\mathbf{b})$.

Démonstration. La preuve est la même qu'au Chapitre IV. □

Il n'y a donc pas de satisfaction à la fois globale (sur $\mathbb{V}$) et formalisée (elle-même définie par une $\{\in\}$-formule élémentaire). On peut pourtant procéder localement.

$\models$ **Lemme** (et notation)**.** Il existe une relation *binaire* définissable (i.e. une vraie $\{\in\}$-formule) $\mathbb{A}\ulcorner\models\urcorner f(\mathbf{b})$:

— conditionnée à « $\mathbb{A}$ est une structure relationnelle formelle de taille ensembliste » $\wedge$ « $f(\mathbf{b})$ est une formule formelle à paramètres dans A »,

— telle que pour chaque vraie structure relationnelle $\mathbb{A}$ de domaine un point de $\mathbb{V}$ et chaque vraie formule à paramètres $\varphi(\mathbf{b})$, on ait $\mathbb{V} \models (\mathbb{A}\ulcorner\models\urcorner\#\varphi(\mathbf{b}))$ ssi $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{b})$.

C'est l'*internalisation de la satisfaction.* Elle servira surtout avec $\mathbb{A} = (A, \in_{|A})$.

Démonstration. Récursion (formelle) sur la structure de f, internalisant la récursion intuitive de § 6. Noter que les quantifications dans $A^{\ulcorner \mathrm{Var} \urcorner}$ sont un autre indice de la nécessité de prendre pour A un ensemble, et non $\mathbb{V}$ entier.

Une autre bonne approche est la suivante, où les paramètres sont des fonctions *globales* $\ulcorner \mathrm{Var} \urcorner \to A$ dont on n'utilisera qu'une information finie. On note $T_{\mathbb{A}}(x)$ la propriété :

> x est un ensemble de paires $(f, \mathbf{b}) \in \ulcorner \mathrm{Form} \urcorner \times \ulcorner \mathrm{Par}(A) \urcorner$ contenant les configurations de base, et close sous les conditions sémantiques usuelles (typiquement, $(\ulcorner \neg \urcorner f, \mathbf{b}) \in x$ ssi $(f, \mathbf{b}) \notin x$).

La relation $\mathbb{A} \ulcorner \models \urcorner f(\mathbf{b})$ est alors : « pour tout ensemble $x \in P(\ulcorner \mathrm{Form} \urcorner \times \ulcorner \mathrm{Par}(A) \urcorner)$ ayant la propriété $T_{\mathbb{A}}$, on a $(f, \mathbf{b}) \in x$ ». (Noter l'uniformité en $\mathbb{A}$, pour peu qu'elle reste de taille ensembliste.) □

Remarques

- Si $\mathbb{A}$ est une structure formelle de taille ensembliste, alors pour tout vrai énoncé φ, on a $\mathbb{V} \models \varphi_{|\mathbb{A}} \leftrightarrow (\mathbb{A} \ulcorner \models \urcorner \# \varphi)$, où $\varphi_{|\mathbb{A}}$ est l'énoncé relativisé.
  En effet par récurrence intuitive, pour toute formule à paramètres dans $\mathbb{A}$, on a bien $\mathbb{V} \models \varphi_{|\mathbb{A}}(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{V} \models (\mathbb{A} \ulcorner \models \urcorner \# \varphi(\mathbf{a}))$.
- On peut grâce à $\ulcorner \models \urcorner$ *définir* « $\mathbb{A} \models f(\mathbf{b})$ » (noter les guillemets) pour f de longueur non standard, mais en raison du théorème de Tarski on ne peut pas évacuer la dépendance en $\mathbb{A}$. La notion relative de vérité (satisfaction) vue au chapitre II est donc incontournable.
- C'est particulièrement visible dans l'approche « propriété $T_{\mathbb{A}}$ » : impossible d'étendre à $T_{\mathbb{V}}$, il faudrait quantifier sur $\ulcorner \mathrm{Var} \urcorner^{\mathbb{V}}$.
- Comme toujours, n'est pas féconde la recherche d'un cadre absolu mais l'étude des liens entre les divers cadres.

• **Définissabilité formelle**

$[\![\mathbb{A} : f]\!]$ **Notation.** Soit $[\![\mathbb{A} : f]\!]$ la fonction binaire définissable qui :

- prend en arguments une structure formelle de taille ensembliste $\mathbb{A} = (A ; \mathcal{L})$ et une formule formelle $f(x, \mathbf{b})$ de la variable formelle libre x à paramètres formels $\mathbf{b} \in \ulcorner \mathrm{Par}_{x^c}(A) \urcorner$,
- et renvoie le sous-ensemble de A des « solutions de $f(x, \mathbf{b})$ dans $\mathbb{A}$ », i.e. :

$$[\![a \in \mathbb{A} : f(a, \mathbf{b})]\!] = \{a \in A : [\mathbb{A} \ulcorner \models \urcorner f(a, \mathbf{b})]\}.$$

Remarques

— La vérité (formelle) de f est estimée *dans* $\mathbb{A}$, grâce à la relation $[\mathbb{A}\ulcorner\models\urcorner f(\cdot)]$ estimée dans $\mathbb{V}$.

— On ne confondra surtout pas avec $\{a \in A : \varphi(a, \mathbf{b})\}$, où la satisfaction est estimée dans $\mathbb{V}$, et porte sur une vraie formule.

— Pour $\varphi(x, \mathbf{b})$ une *vraie* formule à vrais paramètres dans la vraie structure ensmbliste $\mathbb{A}$:

$$[\![a \in \mathbb{A} : \#\varphi(a, \mathbf{b})]\!] = \{a \in A : [\mathbb{A}\ulcorner\models\urcorner\#\varphi(a, \mathbf{b})]\} = \{a \in A : \mathbb{A} \models \varphi(a, \mathbf{b})\} = \varphi(\mathbb{A}, \mathbf{b}).$$

On a bien formalisé la définissabilité ; on pourrait parler de *définissabilité formelle.*

§ 26.2. Ensembles définissables par ordinaux

Le caractère héréditaire sera pris en compte par la suite, au moyen de la clôture transitive introduite en § 25.2 ; c'est un détail technique.

DO **Définition** (ensembles définissables par ordinaux)**.** Soit DO(a) la collection définissable :

$$(\exists\alpha)(\exists f)(\exists\mathbf{b})\,(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge (f \in \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner) \wedge (\mathbf{b} \in \ulcorner\mathrm{Par}_{x^c}(\alpha)\urcorner) \wedge ([\![x \in V_\alpha : f(x, \mathbf{b})]\!] = a))\,.$$

(On trouve aussi « $= \{a\}$ » dans la littérature ; voir exercice 26.1.)

Ainsi a est dans DO ssi c'est une partie formellement définissable *d'un certain niveau* V_α, avec paramètres des éléments de α. Ceux-ci sont également les ordinaux $< \alpha$, ou encore les ordinaux présents dans V_α.

Remarque. On vient de dévier doublement de la définition intuitive :

— en tolérant des formules formelles : prix à payer pour pouvoir quantifier sur les définitions (les formules non standard étant alors inévitables) ;

— en se restreignant à des niveaux V_α : prix à payer pour avoir une satisfaction définissable (le théorème de Tarski empêchant l'approche globale).

La proposition suivante a donc quelque chose de miraculeux.

Proposition. Soit $\mathbb{V} \models$ ZF. Alors $\mathbb{V} \models$ DO(a) ssi a est définissable par ordinaux dans le sens intuitif.

Démonstration.

— Le sens direct demande quelques codages. On peut indexer de manière effective par des ordinaux :

  — les V_α (par α),

  — les formules formelles (codages usuels ; on peut même coder dans ω) ; à chaque formule formelle f correspond un unique ordinal ;

  — les paramètres ordinaux (codages usuels) ; à chaque suite *formellement finie* d'ordinaux $\mathbf{b}$ correspond un unique ordinal.

  « De manière effective » signifie qu'il existe des fonctionnelles *définissables* (au sens intuitif, et sans paramètres) réalisant des correspondances injectives depuis ces collections vers Ord.

  Supposons $\mathbb{V} \models \mathrm{DO}(a)$; soient α et $f(x, \mathbf{b})$ tels que $a = [\![x \in V_\alpha : f(x, \mathbf{b})]\!]$. Comme la construction $[\![A : f]\!]$ est élémentaire, cette égalité est une *vraie* formule. Traduisant V_α, f et $\mathbf{b}$ via les codages, on a donc une définition de a à paramètres ordinaux, au sens intuitif du terme.

— La réciproque demande un principe de transfert entre $\mathbb{V}$ et les V_α.

  Lemme (« schéma de réflexion » ; exercice 26.8)**.** Soit $\varphi(\mathbf{x})$ une vraie formule. Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ et δ un ordinal. Alors il existe $\alpha > \delta$ tel que pour tout $\mathbf{c} \in V_\alpha$ on ait $\mathbb{V} \models \varphi(\mathbf{c})$ ssi $V_\alpha \models \varphi(\mathbf{c})$.

  (Ainsi $(V_\alpha, \in_{|V_\alpha})$ est une sous-structure « φ-élémentaire » de $\mathbb{V}$, sans exiger l'élémentarité pour toutes les formules.)

  Soit donc a (intuitivement) définissable par ordinaux, disons via la vraie formule à paramètres ordinaux $\varphi(x, \mathbf{b})$. Par fondation, il existe δ tel que $a, \mathbf{b}$ sont dans V_δ ; par réflexion soit $\alpha > \delta$ tel que V_α ne se trompe pas sur la vraie formule $\chi(y, \mathbf{z}) : (\forall x)(\varphi(x, \mathbf{z}) \leftrightarrow x \in y)$. Comme $\mathbb{V} \models (\forall x)(\varphi(x, \mathbf{b}) \leftrightarrow x \in a)$, énoncé à paramètres dans V_α, on a bien $V_\alpha \models (\forall x)(\varphi(x, \mathbf{b}) \leftrightarrow x \in a)$, ou encore $a = [\![x \in V_\alpha : \#\varphi(x, \mathbf{b})]\!]$. Ainsi $\mathbb{V} \models \mathrm{DO}(a)$. □

Remarques

— Sens direct. Noter l'importance du caractère local des formules, i.e. leur dépendance en un nombre *au plus fini* de variables ; il permet de considérer des paramètres *de domaine fini*. Pour cette définition la collection ⌜Par(Ord)⌝ est bien ordonnable de type Ord, ce qui légitime la réindexation des $\mathbf{b}$. Si l'on tolérait des « paramètres infinis » (fonctions de domaine ω), il faudrait déjà produire un bon ordre sur α^ω : impossible dès que $\alpha > 1$.

— Sens réciproque. Comme le suggère l'emploi de la réflexion et donc l'inévitabilité des ordinaux, le même énoncé serait faux sans paramètres. En général, la collection des points $\varnothing$-définissables au sens intuitif, n'est pas elle-même définie par une formule. C'est d'ailleurs plus conforme à l'impossibilité de quantifier sur le langage. V. ex. 26.4.

§ 26.3. Ensembles héréditairement définissables par ordinaux

On rappelle l'existence pour chaque ensemble x d'une clôture transitive $\mathrm{cl}(x)$ (§ 25.2).

HDO **Définition** (ensembles héréditairement définissables par ordinaux)**.** Soit $\mathrm{HDO}(x)$ la collection : $(\forall y)(y \in \mathrm{cl}(\{x\}) \to \mathrm{DO}(y))$.

Remarques

— Comme $\mathrm{cl}(\{x\}) = \{x\} \cup \mathrm{cl}(x)$, cela signifie que x et les éléments de sa clôture transitive sont tous dans DO (ne pas oublier x).

— Clairement, $\mathbb{V} \models \mathrm{HDO}(x) \leftrightarrow [\mathrm{DO}(x) \wedge (\forall y)(y \in x \to \mathrm{HDO}(y)]$.

— Si $\mathbb{V} \models (\forall x)\mathrm{DO}(x)$, alors $\mathbb{V} \models (\forall x)\mathrm{HDO}(x)$; les énoncés $\mathbb{V} = \mathrm{DO}$ et $\mathbb{V} = \mathrm{HDO}$ sont équivalents.

En général (le foncteur) DO ne produit pas un modèle intérieur. Le théorème suivant justifie l'intérêt pour HDO.

Théorème. Soit $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$. Alors $\mathrm{HDO} \models \mathrm{ZFC}$, où HDO est la structure $(\mathrm{HDO}[\mathbb{V}], \in_{|\mathrm{HDO}[\mathbb{V}]})$.

Démonstration. La proposition 26.2 sera invoquée sans mention.

— Extensionnalité. La collection HDO est clairement transitive : c'est donc évident.

— Somme. Soit a de HDO ; soit $b = \bigcup(a) = \bigcup[\mathbb{V}](a)$ (en fait il n'y a pas d'ambiguïté). Disons que $\varphi(x, \boldsymbol{\alpha})$ définit a ; alors $(\exists y)(x \in y \wedge \varphi(y, \boldsymbol{\alpha}))$ définit b, donc $\mathbb{V} \models \mathrm{DO}(b)$. En outre si $\mathbb{V} \models c \in b$, alors $\mathbb{V} \models (\exists x)(c \in x \wedge x \in a)$, donc par transitivité $\mathbb{V} \models \mathrm{HDO}(c)$.

  Ainsi $\mathbb{V} \models \mathrm{HDO}(b)$. On sait alors (voir le cas de $\mathbb{V}$, théorème § 25.3) que b est bien la HDO-réunion de a.

— Puissance. Se produit ici quelque chose de notable.

  Soit a de HDO. Soit $b = \{x \in P(a) : \mathrm{HDO}(x)\}$ (puissance et séparation dans $\mathbb{V}$). Avec une définition ordinale de a on en forme aisément une de b, donc $\mathbb{V} \models \mathrm{DO}(b)$. Par transitivité, on a même $\mathbb{V} \models \mathrm{HDO}(b)$. Et b est bien la HDO-puissance de a.

On comprend qu'*une collection transitive* $\mathcal{C}$ *close sous* $\{x \in P(a) : \mathcal{C}(x)\}$ *vérifie la puissance* (pour cette puissance restreinte, et toujours l'appartenance induite).

— Remplacement. Soient $d, \mathbf{z}$ dans HDO et $\varphi(x, y, \mathbf{z})$ définissant dans HDO une fonctionnelle. Prenant la formule relativisée, la $\mathbb{V}$-image de d sous la fonctionnelle $\mathrm{HDO}(x) \wedge \mathrm{HDO}(y) \wedge \varphi_{|\mathrm{HDO}}(x, y, \mathbf{z})$ est dans HDO, et forme la HDO-image de d.

— Infini. On a $\mathbb{V} \models \mathrm{HDO}(\omega)$; en fait $\mathbb{V}$ et HDO ont les mêmes ordinaux.

— Fondation. Toute sous-collection transitive de $\mathbb{V}$ vérifie la fondation.

— Choix. Pour tout point a de DO, il existe (au moins) un triplet $(\alpha, f, \mathbf{b})$ attestant $\mathbb{V} \models \mathrm{DO}(a)$. Ces triplets sont bien ordonnables par les codages de formules et de uplets d'ordinaux, puis le codage des triplets d'ordinaux par un ordinal unique γ. À donc a de DO associons le plus petit ordinal γ codant un triplet $(\alpha, f, \mathbf{b})$ attestant $\mathbb{V} \models \mathrm{DO}(a)$. Cette correspondance est injective : elle plonge $\mathrm{DO}[\mathbb{V}]$ dans Ord.

On a donc sur DO entier une relation définissable de bon ordre global. À plus forte raison pour la sous-collection HDO. À tout point non vide de HDO on associera son plus petit élément dans ce sens : c'est une forme de choix très forte. $\square$

Remarques

— On a même montré : $\mathrm{ZF} \models (\mathbb{V} = \mathrm{DO}) \to \mathrm{AC}$.

— Attention, il n'est pas toujours vrai que $\mathrm{HDO} \models (\forall x)\mathrm{HDO}(x)$. On s'assurera que l'argument naïf est fallacieux. En tant que *foncteur*, HDO n'est pas idempotent ; v. notes finales.

— Relire l'argument pour l'axiome des parties, qui repose sur une notion de *puissance restreinte*. En revanche il n'y a pas de notion de « réunion restreinte » : si $\mathcal{C}$ est transitive et $\mathbb{V} \models \mathcal{C}(a)$, alors $b = \bigcup[\mathbb{V}](a)$ est déjà sous-collection de $\mathcal{C}$. En effet par transitivité $\mathbb{V} \models (\forall x)(x \in b \to \mathcal{C}(x))$. Les modèles intérieurs transitifs servent ainsi à ajuster le comportement de la puissance, pas de la réunion ; celle-ci ne pose d'ailleurs jamais problème.

— La possibilité de restreindre la portée de la fonction puissance laisse entrevoir celle de modérer sa combinatoire. C'est ce qu'a fait Gödel dans l'*univers constructible* (§ 27).

Exercices

26.1. En théorie des modèles un point a d'une structure $\mathbb{A}$ est *caractérisable* par une formule à paramètres $\varphi(x, \mathbf{b})$ (on dit aussi *rationnel sur* $\mathbf{b}$) si $\mathbb{A} \models (\forall x)(\varphi(x, \mathbf{b}) \leftrightarrow x = a)$. Mais en théorie des ensembles, a peut être vu en tant que point *et* en tant que partie du modèle.

De vrais paramètres $\mathbf{b}$ étant fixés, montrer que sont équivalents :

(i) le point a est caractérisable à paramètres $\mathbf{b}$;

(ii) la partie du modèle $\{a\}$ est définissable à paramètres $\mathbf{b}$;

(iii) la partie du modèle $a = \{x \in a : x = x\}$ est définissable à paramètres $\mathbf{b}$;

(iv) la relation unaire « être élément de a » est définissable à paramètres $\mathbf{b}$.

La théorie des ensembles dit alors que *le point* a est définissable à paramètres $\mathbf{b}$. C'est un fautif abus de langage ; mais d'après l'exercice aucune confusion n'en résulte.

26.2. Redémontrer le théorème d'indéfinissabilité de Tarski pour ZF.

26.3. Énoncer et démontrer (dans ZFC) une version *formelle* du théorème de Löwenheim-Skolem descendant.

26.4. Soit $\mathbb{V} \models$ ZF. La définissabilité dans $\mathbb{V}$ est vue de l'extérieur, par la théorie des modèles.

a. Soit $\mathcal{C}$ une collection $\varnothing$-définissable contenant tous les points $\varnothing$-définissables. Montrer que DO est incluse dans $\mathcal{C}$.

b. Soit $\mathcal{C}$ une collection $\varnothing$-définissable et transitive qui peut être bien ordonnée par un bon ordre $\varnothing$-définissable. Montrer que $\mathcal{C}$ est incluse dans HDO.

c. Soit $\mathbb{D}$ la collection des points $\varnothing$-définissables. Montrer que $\mathbb{D} \leqslant$ DO.

d. En déduire que $\mathbb{V} \models (\forall x)\mathrm{DO}(x)$ ssi $\mathbb{D} \leqslant \mathbb{V}$ (attention à la réciproque).

Remarques

- Par opposition à DO, la collection $\mathbb{D}$ n'est en général pas définissable par une formule de ZF, i.e. pas les $\mathbb{V}$-points d'un foncteur élémentaire.
- Une conséquence de c. est que si $\mathbb{V} \models (\forall x)\mathrm{DO}(x)$, alors $\mathbb{D} \models$ ZF. Notamment, $\mathbb{D}$ est un modèle de ZF *dont tout point est définissable sans paramètres* (vu de l'extérieur) ; v. notes finales.

26.5 (choix global). Soit $\mathbb{V} \models$ ZF. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) il existe une relation fonctionnelle codant une bijection entre $\mathbb{V}$ et Ord ;

(ii) $\mathbb{V} \models (\forall x)\mathrm{DO}(x)$;

(iii) il existe une relation binaire de bon ordre (au sens classe) sur $\mathbb{V}$, dont les segments initiaux propres sont ensemblistes ;

(iv) il existe une relation fonctionnelle codant un opérateur de choix global, i.e. une relation fonctionnelle τ sur $\mathbb{V}$ telle que $(\forall x)(x \neq \varnothing \to \tau(x) \in x)$.

Les trois propriétés existentielles supra ne sont pas des énoncés de ZF car on quantifie sur le langage. Leur équivalence avec l'énoncé (ii) repose sur le schéma de réflexion, qui repose sur celui de remplacement, lui-même une quantification sur le langage. Mais ces propriétés existentielles deviennent des énoncés dans BGN (exercice Q.4).

26.6. Un *sélecteur* est une formule sans paramètres $\varphi(x)$ telle que $\mathrm{ZF} \models (\exists_{=1} x)\varphi(x)$. Montrer que $\mathrm{ZF} \cup \{\mathbb{V} = \mathrm{DO}\}$ est la plus faible extension de ZF ayant la (méta-)propriété suivante : « *chaque collection $\varnothing$-définissable non vide rencontre un sélecteur* ».

Remarque. C'est bien une « méta-propriété ». Pour formaliser l'énoncé, il faut plonger la théorie des modèles dans une théorie formelle. En effet un schéma d'énoncés règlerait la quantification universelle sur les collections, mais pas l'existentielle sur les sélecteurs.

26.7 (modèles de permutation (2)).

a. Montrer que AC n'est pas conséquence de $\mathrm{ZF} \setminus \{\mathrm{AF}\}$.

b. Montrer que ZF n'interdit pas l'existence d'ensembles amorphes (ex. 23.5).

[Généraliser HDO en HDO^+ : « héréditairement définissables par ordinaux et bouclettes ».]

26.8 (schéma de réflexion). On fait montrer l'important lemme suivant (qui n'est pas un énoncé de ZF).

Lemme (schéma de réflexion)**.** Soit $\varphi(\mathbf{x})$ une vraie formule. Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ et β un ordinal de $\mathbb{V}$. Alors il existe $\alpha > \beta$ tel que pour chaque $\mathbf{a} \in V_\alpha$, on ait $\mathbb{V} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $V_\alpha \models \varphi(\mathbf{a})$.

a. Un ensemble A *reflète* une formule $\varphi(\mathbf{x})$ si la sous-structure $(A, \in_{|A})$ est φ-élémentaire, i.e. pour chaque $\mathbf{a} \in A$, on a $\mathbb{V} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $(A, \in_{|A}) \models \varphi(\mathbf{a})$.
   Montrer que si des ensembles croissants $(A_n : n \in \omega)$ reflètent φ et toutes ses sous-formules, alors $\bigcup_\omega A_n$ reflète φ.

b. Un ordinal α *convient* à φ si V_α reflète φ et toutes ses sous-formules.
   Montrer que la collection $\mathcal{C}(\varphi)$ des α convenant à φ est définissable [penser à relativiser $\varphi_{|V_\alpha}$, i.e. borner les quantificateurs].

c. Montrer que $\mathcal{C}(\varphi)$ est close sous ω-limites et non majorée. [Pour $(\exists y)\chi(\mathbf{x}, y)$, prendre les rangs d'éventuels témoins et penser à itérer ω fois.] En déduire le lemme.

Remarques

– À φ fixée, on a ainsi :

$$\mathrm{ZF} \models (\forall \beta \in \mathrm{Ord})(\exists \alpha \in \mathrm{Ord}_{>\beta})(\forall \mathbf{a} \in V_\alpha)[\varphi(\mathbf{a}) \leftrightarrow \varphi_{|V_\alpha}(\mathbf{a})],$$

où l'on a pris quelques libertés d'écriture.

– La récurrence sur φ est extérieure à ZF : on ne peut pas quantifier sur φ. Pour le faire il faudrait typiquement plonger la sémantique $\models$ dans une théorie des ensembles. Mais cela créerait une mise en abîme, et l'on aurait seulement $\mathrm{ZF} \models [\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner \ulcorner \models \urcorner (\forall f \in \ulcorner \mathrm{Form} \urcorner) \ulcorner f - \text{réflexion} \urcorner]$. V. ex. 26.9.

26.9 (applications de la réflexion).

a. ZF n'est pas finiment axiomatisable [songer à Gödel].

b. On suppose ZF cohérente. Alors $\mathrm{ZF} \cup$« c est transitif » $\cup \mathrm{ZF}_{|c}$ est cohérente.

26.10 (réflexion Σ_1). Une formule Σ_1 est de la forme $(\exists \mathbf{x})\varphi_0$, où φ_0 est à quantifications bornées, i.e. en $(\forall x \in y)$ et $(\exists x \in y)$. On fixe $\mathbb{V} \models \mathrm{ZFC}$. Une collection $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \in_{|\mathcal{C} \times \mathcal{C}})$ est 1-*élémentaire*, noté $\mathbb{C} \preccurlyeq_1 \mathbb{V}$, si l'on peut transférer la vérité des formules Σ_1 (et donc aussi de leur négation) entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{V}$.

(*) a. Montrer que pour tout κ infini on a $\mathrm{HP}_\kappa \preccurlyeq_1 \mathbb{V}$ [fixer d'abord $\varphi(\mathbf{a})$; Löwenheim-Skolem puis Mostowski]. Déduire que si $\beth_\kappa = \kappa$, alors $V_\kappa = H_\kappa \preccurlyeq_1 \mathbb{V}$.

(*) b. Où l'argument naïf pour $\mathrm{HP}_\kappa \leqslant \mathbb{V}$ échoue-t-il ?

c. Montrer la réciproque : si $V_\kappa \leqslant_1 \mathbb{V}$, alors $\beth_\kappa = \kappa$. [Ex. 25.2.]

Notes conclusives

Pour s'initier à DO et HDO, consulter le mémoire [Lan16] sous la direction de Sy-David Friedman.

• **Repères historiques**

> *So one is led to the concept of definability in terms of ordinals, i.e., definability by expressions containing names of ordinal numbers and logical constants, including quantification referring to sets. This concept should, I think, be investigated.* [Göd04]

Ensembles (héréditairement) définissables par ordinaux. • Plusieurs années après l'univers constructible, Gödel suggérait d'introduire la collection DO. Il conjecturait en conclusion que DO forme un modèle intérieur vérifiant l'axiome du choix. • Modulo la clause d'hérédité ce fut rapidement confirmé [MS71] (dont on lira la note historique finale). • La construction diffère de l'univers constructible, et même HC est indépendante de $\mathbb{V} = \mathrm{HDO}$ [McA71] (McAloon a effectué son doctorat sous la direction de Solovay). • Un peu délaissée après 1980, HDO connaît un regain d'intérêt depuis la fin des années 2000.

Schéma de réflexion (exercice 26.8). • Souvent attribué à Lévy, mais celui-ci renvoie à Montague ; la référence donnée par Lévy (Feferman-Montague) n'a jamais abouti. • Non-axiomatisabilité finie de ZF (ex. 26.9.a.) : [Mon61b], suivant un phénomène similaire pour PA [Ryl52]. • L'ex. 26.10 vient de [Lév65, Theorem 36] (qui contient beaucoup plus).

• **Comportement de** HDO. • Le foncteur HDO n'est pas idempotent ; en fait il est cohérent à ZF que la suite des itérées de HDO soit strictement décroissante arbitrairement longtemps [Jec75]. • Pour tout $\mathbb{M} \models \mathrm{ZF}$, on a $\mathrm{HDO}[\mathbb{M}] \models \mathrm{ZFC}$. On peut s'interroger sur l'image du foncteur HDO : $\mathbf{Mod}(\mathrm{ZF}) \to \mathbf{Mod}(\mathrm{ZFC})$.

[Lan16] : Timo Lang. « Old and new results on ordinal definability ». Mém. de mast. Universität Wien, 2016. 69 p.

[Göd04] : Kurt Gödel. « Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics (1946) ». In: *The undecidable.* Ed. by Martin Davis. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions, Corrected reprint of the 1965 original [Raven Press, Hewlett, NY; MR0189996]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, pp. ii+413

[MS71] : John Myhill et Dana Scott. « Ordinal definability ». In : *Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., (1967).* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, p. 271-278

[McA71] : Kenneth McAloon. « Consistency results about ordinal definability ». In : *Ann. Math. Logic* 2.4 (1970/71), p. 449-467

[Mon61b] : Richard Montague. « Semantical closure and non-finite axiomatizability I ». In : *Infinitistic Methods (Proc. Sympos. Foundations of Math., Warsaw, 1959).* Pergamon, Oxford-London-New York-Paris, 1961, p. 45-69

[Ryl52] : Czesław Ryll-Nardzewski. « The role of the axiom of induction in elementary arithmetic ». In : *Fund. Math.* 39 (1952), 239-263 (1953)

[Lév65] : Azriel Lévy. « A hierarchy of formulas in set theory ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 57 (1965), p. 76

[Jec75] : Thomas Jech. « Forcing with trees and ordinal definability ». In : *Ann. Math. Logic* 7 (1974/75), p. 387-409

Théorème ([Rog77, « Lemma »])**.** (On travaille dans $\mathbb{V} \models$ ZFC ambiant.) Soit $\mathbb{M} \models$ ZFC un modèle transitif dénombrable. Alors il existe un modèle transitif dénombrable $\mathbb{N} \models$ ZFC qui est « extension générique de $\mathbb{M}$ » et tel que $\mathrm{HDO}[\mathbb{N}] = \mathbb{M}$.

En forçant par le collapse de Lévy, tout cardinal peut être rendu dénombrable ; donc la clause de dénombrabilité n'est pas une contrainte technique. Morale informelle : *tout modèle de* ZFC *est le* HDO *d'un autre.* Conséquence formelle : si φ est un énoncé et $\varphi_{|\mathrm{HDO}}$ son relativisé, alors ZF $\models \varphi_{|\mathrm{HDO}}$ ssi ZFC $\models \varphi$. • Enfin, tout ensemble peut « être obtenu par forcing » à partir de HDO (mais pas simultanément) : [HR17].

• **Choix et choix global (exercice 26.5).** • Les conditions sont aussi équivalentes à « tout ensemble Π_2-définissable non vide rencontre DO » [DH19], mais c'est déjà plus difficile. L'article contient des variations sur le sujet. • BGN permet d'*énoncer* le principe de choix global CG sous la forme d'un axiome (§ Q). Les formes directes (existentielles) ne sont pas des énoncés de ZF, et l'on procède comme suit.

Soit τ un symbole de fonction unaire. Soit ZFC_τ la théorie obtenue à partir de ZF :

– en permettant les $\{\in, \tau\}$-formules dans le schéma de remplacement ;
– avec l'axiome $(\forall x)(x \neq \varnothing \to \tau(x) \in x)$.

La fonction τ se comporte donc comme l'« opérateur ε » de Hilbert (la notation serait ici malheureuse). On peut aussi introduire une relation binaire de bon ordre global ; d'après l'exercice 26.5, cela revient au même.

Théorème (CFJKSBG : lire infra)**.** Soit φ un $\{\in\}$-énoncé. Alors ZFC $\models \varphi$ ssi $\mathrm{ZFC}_\tau \models \varphi$.

Ce théorème a été obtenu avec forcing indépendamment par Cohen, Felgner, Jensen, Kripke, et Solovay, ; mais aussi sans forcing, indépendamment par et Boffa, et Gaifman [Gai75]. Gaifman a même établi une réciproque.

Théorème ([Gai75])**.** On travaille au sein d'un modèle $\mathbb{V}$ de ZFC. Soit $\mathbb{M} \models$ ZFC dont les ordinaux soient cofinaux à ω. (En toute rigueur, $\mathbb{V} \models (\mathbb{M} \ulcorner\models\urcorner \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner)$ et $\mathrm{cof}[\mathbb{V}](\mathrm{Ord}[\mathbb{M}]) = \omega[\mathbb{V}]$.) Alors il $\mathbb{V}$-existe un $\mathbb{V}$-sous-ensemble de $\mathbb{M}$ qui en fait un modèle de ZFC_τ.

On ignore si l'hypothèse est nécessaire.

• **Définissabilité sans paramètres (ex. 26.4).** On fixe $\mathbb{M} \models$ ZF. La notion de définissabilité globale est extérieure à $\mathbb{M}$, car la satisfaction globale l'est. L'argument suivant est donc incorrect :

> il y a un nombre dénombrable de formules, donc il y a un nombre dénombrable de définitions, donc il y a des points de $\mathbb{M}$ non définissables.

Ce n'est pas plus paradoxal que le paradoxe de Skolem, mais on peut le reformuler ainsi (v. ex. 26.4 c.).

Théorème ([Myh52])**.** Il est cohérent qu'existent des modèles dont tout point est définissable sans paramètres.

[Rog77] : Stanisław Roguski. « The theory of the class HOD ». In : *Set theory and hierarchy theory, V (Proc. Third Conf., Bierutowice, 1976).* 1977, 251-255. Lecture Notes in Math., Vol. 619
[HR17] : Joel Hamkins et Jonas Reitz. « The set-theoretic universe *V* is not necessarily a class-forcing extension of HOD ». 2017
[DH19] : François Dorais et Joel Hamkins. « When does every definable nonempty set have a definable element ? » In : *MLQ Math. Log. Q.* 65.4 (2019), p. 407-411
[Gai75] : Haim Gaifman. « Global and local choice functions ». In : *Israel J. Math.* 22.3-4 (1975), p. 257-265
[Myh52] : John Myhill. « The hypothesis that all classes are nameable ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 38 (1952), p. 979-981

« *One often hears it said that since there are indenumerably many sets and only denumerably many names, therefore there must be nameless sets. The above shows this argument to be fallacious.* » [Myh52, p. 981] • Formalisation scrupuleuse de l'énoncé : on peut avoir $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ et $\mathbb{V} \models (\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$ avec la propriété :

> pour tout $m \in \mathbb{M}$, il existe $f \in \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner[\mathbb{M}]$ telle $[\![a \in \mathbb{M} : f(a)]\!] = \{m\}$.

Le $\ulcorner\mathrm{Form}\urcorner[\mathbb{M}]$ signifie qu'on prend les formules formelles au sens de $\mathbb{M}$ (sans autoriser de paramètres). Il y a plutôt peu de telles formules, d'où l'impression de paradoxe. Or même en réécrivant le terme de gauche $\{a \in M : (\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner f(a))\}$, la relation $\ulcorner\models\urcorner$ reste calculée dans $\mathbb{V}$, et n'échappe pas à la dépendance externe. • Généralisations et récents développements dans [HLR13] puis [Ham22].

• **Sur la réflexion**

– De sa puissance. • Soit Z la théorie de Zermelo (extensionnalité, somme, puissance, paire, compréhension, infini). Alors $Z \cup \{\text{schéma de réflexion}\} \models \mathrm{ZF}$ [Lév60, Theorem 6]. (Lévy joue même à retrouver AI.) • C'est encore vrai en dégradant Z vers la (très faible) *théorie de Kripke-Platek*.
– De sa qualité (ex. 26.10). • Il existe des points fixes de $\beth$ arbitrairement grands, ce qui garantit l'ubiquité de la réflexion Σ_1. • Pour de la réflexion Σ_2, il faut de grands cardinaux ; pour Σ_3, de plus grands encore.

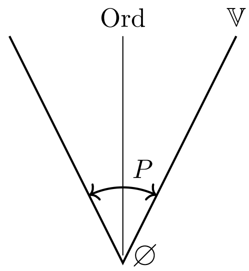
Tout ceci suggère un autre point de vue sur ZF, où la réflexion n'est plus un schéma de théorèmes, mais un schéma d'axiomes absolument central. Ce point de vue a inspiré un pan de la recherche sur les grands cardinaux. V. [Bag23].

§ 27. La hiérarchie constructible

L'*univers constructible* de Gödel est obtenu par récursion ordinale de la *puissance définissable* (§ 27.1) ; c'est encore un modèle intérieur (§ 27.2), qui vérifie l'hypothèse du continu généralisée (§ 27.3).

Prérequis : §§ 15, 21–26.

[HLR13] : Joel David Hamkins, David Linetsky et Jonas Reitz. « Pointwise definable models of set theory ». In : *J. Symbolic Logic* 78.1 (2013), p. 139-156
[Ham22] : Joel Hamkins. « Every countable model of arithmetic or set theory has a pointwise-definable end extension ». In : (2022). arXiv 2209.12578
[Lév60] : Azriel Lévy. « Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory ». In : *Pacific J. Math.* 10 (1960), p. 223-238
[Bag23] : Joan Bagaria. « Large cardinals as principles of structural reflection ». In : *Bull. Symb. Log.* 29.1 (2023), p. 19-70



Longueur de Ord, degré d'ouverture de $P(\cdot)$

Deux paramètres paraissent contrôler la *taille* d'un modèle de ZF : la *longueur* de sa droite ordinale, et le *degré d'ouverture* de sa fonction puissance (ces trois intuitions ne sont formalisables que si l'on peut relier des modèles). On a entrevu en montrant HDO $\models$ ZF (§ 26.3) la possibilité de modérer ce degré d'ouverture. C'est ce qu'a fait Gödel pour exhiber un modèle intérieur « minimal » parmi ceux ayant tous les ordinaux du modèle ambiant. Le foncteur élémentaire $\mathbb{L}$ obtenu a des propriétés remarquables.

§ 27.1. Puissance définissable

On va contraindre la fonction puissance puis reproduire la construction de la hiérarchie cumulative. Rappelons qu'on a formalisé en §§ 26.1, *de façon aussi naïve que possible* :

- la notion de structure relationnelle ;
- l'ensemble ⌜Form⌝ des formules ;
- pour A un ensemble, l'ensemble ⌜$\mathrm{Par}_{x^c}(A)$⌝ des paramètres dans A non définis en x ;
- une relation binaire $\mathbb{A}$⌜$\models$⌝$f(\mathbf{b})$ exprimant la satisfaction dans la structure relationnelle formelle $\mathbb{A}$ de la formule formelle à paramètres $f(\mathbf{b})$;
- une fonction binaire $[\![\mathbb{A} : f(x, \mathbf{b})]\!]$ exprimant l'« ensemble des solutions dans $\mathbb{A}$ de la formule formelle $f(x, \mathbf{b})$ ».

Par défaut, un ensemble A sera muni de $\in_{|A}$.

$P_{\text{déf}}$ **Définition** (puissance définissable)**.** Soient $\mathbb{V} \models$ ZF et A un point de $\mathbb{V}$.

- Une partie $b \subseteq A$ est *définissable à paramètres dans* A si :

$$(\exists f)(\exists \mathbf{c})[(f \in \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner) \wedge (\mathbf{c} \in \ulcorner\mathrm{Par}_{x^c}(A)\urcorner) \wedge ([\![x \in A : f(x, \mathbf{c})]\!] = b)].$$

  C'est une formule élémentaire.

— Soit $P_{\text{déf}}(A) = \{b \in P(A) : b$ est définissable à paramètres dans $A\}$.

Remarques

— L'ensemble A fournit non seulement les paramètres, mais aussi le *cadre* pour l'évaluation de $\ulcorner\models\urcorner$ (requis par inexistence d'une satisfaction définissable globale $\ulcorner\models\urcorner$).

— $P_{\text{déf}}$ est calculée dans $\mathbb{V}$ (où l'on emploie puissance et séparation).

— L'emploi de la puissance dans la définition de $P_{\text{déf}}(A)$ est pdéagogique et inessentiel.

En fait $P_{\text{déf}}(A)$ est l'image de la fonctionnelle qui à chaque formule formelle et chaque choix de paramètres dans A associe $[\![x \in A : f(x, \mathbf{c})]\!]$. Le remplacement suffit donc pour la définition, qui possède un sens dans « ZF$\setminus\{P\}$ » (théorie sans axiome de la puissance ; il faut quand même remettre l'axiome de la paire qui cesse d'être conséquence).

— Attention : $a_1 \subseteq a_2$ n'entraîne *pas* $P_{\text{déf}}(a_1) \subseteq P_{\text{déf}}(a_2)$. Soient a_2 infini et $a_1 \in P(a_2)\setminus P_{\text{déf}}(a_2)$ non définissable (il en existe par argument de cardinalité) ; alors $a_1 \in P_{\text{déf}}(a_1)$.

En revanche $(a_1 \in a_2 \wedge a_1 \subseteq a_2)$ entraîne bien $P_{\text{déf}}(a_1) \subseteq P_{\text{déf}}(a_2)$. (Considérer $[\![x \in a_2 : f_{|a_1}(x, \mathbf{c}) \wedge x \in a_1]\!]$, en notant qu'on emploie bien $a_1 \in a_2$.)

On reproduit alors la construction de la hiérarchie cumulative pour cette opération restreinte.

L_α, $\mathbb{L}$, $\mathrm{rg}_{\mathbb{L}}$ **Définition** (hiérarchie constructible)**.**

— Soient $L_\varnothing = \varnothing$; $L_{\alpha+1} = P_{\text{déf}}(L_\alpha)$; et aux limites $L_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} L_\beta$.
(Cela s'abrège en : $L_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} P_{\text{déf}}(L_\beta)$.)

— Soit $\mathbb{L}(x)$ la collection : $(\exists\alpha)(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \in L_\alpha)$.

— Si $\mathbb{V} \models \mathbb{L}(a)$, soit $\mathrm{rg}_{\mathbb{L}}(a)$ le plus petit α tel que $a \in L_\alpha$.

Remarques

— L_α est transitif et $L_\alpha \subseteq V_\alpha$; en fait $(\forall n)[(n \leqslant \omega) \to (L_n = V_n)]$, mais ils diffèrent dès $\omega + 1$. (Ils peuvent coïncider à nouveau : exercice 27.2.)

— Si $\beta < \alpha$, alors $L_\beta \in L_\alpha$ et $L_\beta \subseteq L_\alpha$.

— Si défini, $\mathrm{rg}_{\mathbb{L}}(a)$ est successeur.

— Si α est un ordinal alors $\mathbb{L}(\alpha)$ et $\mathrm{rg}_{\mathbb{L}}(\alpha) = \alpha + 1$ (moins immédiat que pour $\mathbb{V}$).

— Si $b \in a$ et $\mathbb{L}(a)$, alors $\mathrm{rg}_{\mathbb{L}}(b) < \mathrm{rg}_{\mathbb{L}}(a)$.

— Attention : $(\forall y)(y \in x \to \mathbb{L}(y))$ n'entraîne *pas* $\mathbb{L}(x)$.
  Attention encore : $\mathbb{L}(x) \wedge x \subseteq L_\alpha$ n'entraîne *pas* $x \in L_{\alpha+1}$ (il peut être définissable « à paramètres tardifs ») ; l'inclusion $L_{\alpha+1} \subsetneq P[\mathbb{L}](L_\alpha)$ est stricte en général.

L'*axiome de constructibilité* est $(\forall x)\mathbb{L}(x)$; on le note $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. Cet axiome entraîne AC, car $\mathbb{L}$ est toujours sous-collection de HDO et donc de DO (revoir la preuve de § 26.3).

§ 27.2. Modèle intérieur constructible

Proposition (Gödel)**.** Soit $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$. Alors $\mathbb{L} \models \mathrm{ZF} \cup \{\mathbb{V} = \mathbb{L}\}$.

Démonstration.

— Extensionnalité. Évident par transitivité.

— Somme. La collection $\mathbb{L}$ est transitive et close sous $\mathbb{V}$-réunion. En effet si a est de $\mathbb{L}$, disons $a \in L_\alpha$, alors $b = \bigcup[\mathbb{V}](a) \subseteq L_\alpha$. En outre $[\![x \in L_\alpha : (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)]\!] = b$; donc $b \in P_{\text{déf}}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$. Cela suffit.

— Puissance. La collection $\mathbb{L}$ est transitive et close sous puissance *relative*. En effet si a est de $\mathbb{L}$, soit $b = \{x \in P(a) : \mathbb{L}(x)\}$. On forme $\{\mathrm{rg}_{\mathbb{L}}(x) : x \in b\}$, ensemble d'ordinaux qui possède une borne supérieure α. Noter que $a \in b$ donc $a \in L_\alpha$, et $b \subseteq L_\alpha$ y possède une définition à paramètre a. Donc $b \in L_{\alpha+1}$. Cela suffit.
  Noter que considérer $P_{\text{déf}}(a)$ ne suffirait pas : certains éléments de b peuvent être constructibles « à paramètres tardifs ».

— Remplacement. Même raisonnement.

— Infini. Les ordinaux de $\mathbb{V}$ et $\mathbb{L}$ sont les mêmes.

— Fondation. Évident car $\mathbb{L}$ est une sous-collection transitive de $\mathbb{V}$.

— Constructibilité. C'est moins trivial qu'il n'y paraît. Les ordinaux ne changent pas de $\mathbb{V}$ à $\mathbb{L}$, mais $P_{\text{déf}}$ le pourrait. Heureusement on a formalisé $\ulcorner\models\urcorner$ et donc $P_{\text{déf}}$ de façon aussi explicite que possible ; on parle d'« absoluité ». On peut donc se convaincre que $\mathbb{L} \models \mathbb{V} = \mathbb{L}$, à comparer au mauvais comportement de HDO. □

Remarques

— On répète que $P[\mathbb{L}]$ n'est pas $P_{\mathbb{V}\text{-déf}}$, car les paramètres de définition doivent apparaître assez tôt. En revanche pour un point de $\mathbb{L}$, les fonctions $P_{\mathbb{L}\text{-déf}}$ et $P_{\mathbb{V}\text{-déf}}$ calculent la même chose.

— Si $\mathcal{C}$ est une sous-collection transitive de $\mathbb{V}$ telle que $\mathcal{C} \models \mathrm{ZF}$ et $\mathbb{V} \models (\forall\alpha)(\mathrm{Ord}(\alpha) \to \mathcal{C}(\alpha))$, alors $\mathbb{V} \models (\forall x)(\mathbb{L}(x) \to \mathcal{C}(x))$.
C'est une forme (admise, non invoquée dans la suite) de minimalité *à droite ordinale constante* : $\mathbb{L}$ règle au minimum le degré d'ouverture de la fonction puissance.

Il suit de la proposition que $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ est cohérent à ZF. La fin se passe donc dans un modèle de l'axiome de constructibilité.

§ 27.3. Cohérence de l'hypothèse du continu

Rappelons l'énoncé de HCG en présence de choix : $(\forall\kappa)(\mathrm{Card}(\kappa) \to 2^\kappa = \kappa^+)$, où κ^+ désigne le cardinal successeur (§ 24.1), i.e. prochain $\aleph$.

Théorème (Gödel)**.** $\mathrm{ZF} \cup \{\mathbb{V} = \mathbb{L}\} \models \mathrm{HCG}$.

Démonstration. Soit $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF} \cup \{\mathbb{V} = \mathbb{L}\}$. Alors $\mathbb{V} \models \mathrm{AC}$; on parlera de cardinaux. Nous allons montrer la propriété suivante.

($*$) Soit κ un cardinal infini. Alors $P(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$.

Lemme A (théorème de Löwenheim-Skolem)**.** Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZFC}$ et $(\mathbb{A}; \mathcal{L})$ une structure relationnelle portée par un ensemble de $\mathbb{V}$. Si $S \subseteq \mathbb{A}$ est une partie de cardinal $\kappa \geqslant \mathrm{card}\,\mathcal{L}$, alors il existe $\mathbb{A}_0 \ulcorner\leqslant\urcorner \mathbb{A}$ contenant S et de cardinal κ.

Démonstration. Vue en § 15 et à l'ex. 26.3. □

On utilisera seulement $\mathbb{A}_0 \leqslant \mathbb{A}$.

Lemme B (tassement/contraction de Mostowski ; exercice 22.8)**.** Soit (X, ε) une relation extensionnelle et bien fondée sur un ensemble. Alors il existe un unique ensemble transitif Y et un unique isomorphisme $\pi\colon (X, \varepsilon) \simeq (Y, \in_{|Y})$.

Lemme C (caractérisation « intérieure » des L_α ; admis)**.** Il existe un (vrai) énoncé φ tel que :

$$\mathrm{ZFC} \models (\forall a)[a \text{ transitif}] \to [(a \ulcorner\models\urcorner \#\varphi) \leftrightarrow (\exists\alpha)(\mathrm{Ord}_{\lim}(\alpha) \wedge a = L_\alpha)]\,.$$

Remarque. La vérification de transitivité doit être menée dans l'univers ambiant ; affirmer la transitivité en interne est au mieux une tautologie, au pire un non-sens.

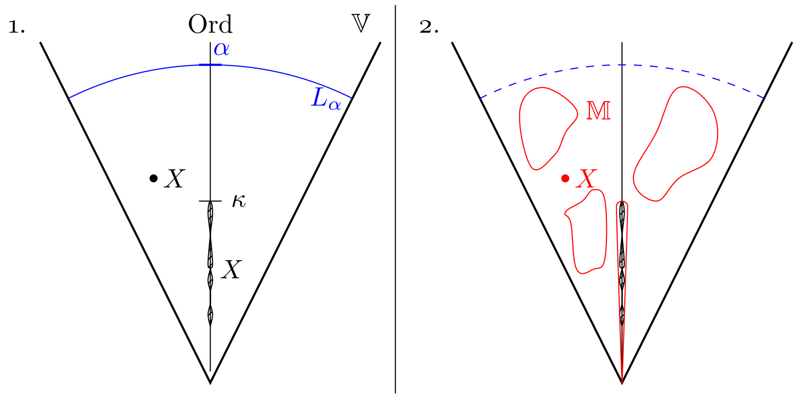
Lemme D (cardinal)**.** Si $\mathbb{V} \models \mathrm{ZFC}$ (pour parler de cardinaux) et que a est infini, alors $\operatorname{card} P_{\text{déf}}(a) = \operatorname{card} a$. Notamment pour tout cardinal infini κ, on a $\operatorname{card} L_\kappa = \kappa$.

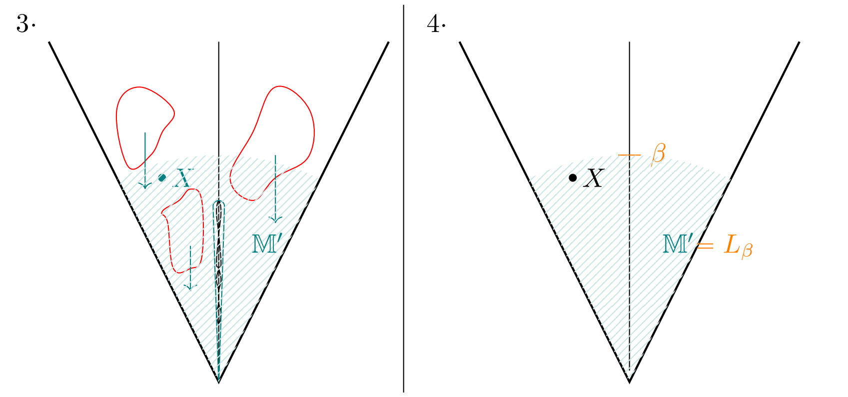
Démonstration. Compter les paires (f, p) ; par construction $\operatorname{card} \operatorname{VarLib}(f)$ est un entier formel donc $\operatorname{card} P_{\text{déf}}(a) \leqslant \aleph_0 + \operatorname{card}(a^{<\omega}) = \operatorname{card} a$.

Par récurrence sur les ordinaux, $\operatorname{card} L_\alpha = \operatorname{card} \alpha$: c'est clair en ω, compatible aux successeurs, ainsi qu'aux limites. Quand α est un cardinal on a le résultat désiré. □

Montrons $(*)$. Soit κ un cardinal infini ; montrons que $P(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$.

1. Soit $X \in P(\kappa)$; ainsi $X \subseteq \kappa$. En tant que point du modèle $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, il existe α tel que $X \in L_\alpha$. Quitte à l'augmenter on peut le supposer limite et supérieur à $\kappa + \omega$, de sorte que $\kappa \cup \{X\} \subseteq L_\alpha$.
2. D'après le théorème de Löwenheim-Skolem dans $\mathbb{V}$, il existe une sous-structure élémentaire $(\mathbb{M}, \in) \preccurlyeq (L_\alpha, \in)$ telle que $\kappa \cup \{X\} \subseteq \mathbb{M}$ et $\operatorname{card} \mathbb{M} = \kappa$.
3. $\mathbb{M}$ n'a rien de transitif, mais il est extensionnel et bien fondé. Par le tassement de Mostowski, il existe un unique couple $(\mathbb{M}', \pi)$ de $\mathbb{V}$ tel que $\mathbb{M}'$ soit transitif et $\pi\colon (\mathbb{M}, \in) \simeq (\mathbb{M}', \in)$. En outre, par construction de π, on a $\pi_\kappa = \operatorname{Id}_\kappa$, de sorte que $X \in \mathbb{M}'$.
4. Soit φ donné par la « caractérisation intérieure ». On a $\mathbb{V} \models (L_\alpha \ulcorner\models\urcorner \#\varphi)$, donc $(L_\alpha, \in) \models \varphi$. Ainsi $(\mathbb{M}, \in) \models \varphi$ puis $(\mathbb{M}', \in) \models \varphi$, d'où $\mathbb{V} \models (\mathbb{M}' \ulcorner\models\urcorner \#\varphi)$. Donc il existe β tel que $\mathbb{M}' = L_\beta$.





Mais alors, grâce au lemme cardinal, à l'isomorphisme, et par construction de $\mathbb{M}$:

$$\operatorname{card}\beta = \operatorname{card}L_\beta = \operatorname{card}\mathbb{M}' = \operatorname{card}\mathbb{M} = \kappa,$$

de sorte que $\beta < \kappa^+$. Ainsi $X \in \mathbb{M}' = L_\beta \subseteq L_{\kappa^+}$.

Ceci montre $(*)$, i.e. $P(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ pour tout κ. Grâce encore au lemme cardinal, pour tout cardinal infini vient $2^\kappa \leqslant \operatorname{card}L_{\kappa^+} = \kappa^+$: c'est l'hypothèse du continu généralisée. □

Remarque. Pour la formulation idoine de l'hypothèse du continu généralisée, $\mathrm{ZF} \cup \{\mathrm{HCG}\} \models \mathrm{AC}$ (voir compléments, § R) ; nous ne l'utilisons pas car $\mathbb{L}$ vérifie $(\forall x)\mathrm{DO}(x)$, donc AC.

Exercices

27.1. Soit κ un cardinal régulier. Montrer que L_κ vérifie $\mathrm{ZF}\setminus\{P\}$.

27.2. On va montrer le lemme suivant.

Lemme. Sous $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, on a $L_\alpha = V_\alpha$ ssi $(\alpha \leqslant \omega) \vee (\aleph_\alpha = \alpha)$.

a. Dans ZFC, donner une formule générale pour $\operatorname{card}L_\alpha$ et une pour $\operatorname{card}V_\alpha$. On pourra introduire $\beth_\alpha$, définie par itération de $\kappa \mapsto 2^\kappa$ et réunion aux limites.

b. Dans ZFC, déduire que $L_\alpha = V_\alpha$ entraîne $(\alpha \leqslant \omega) \vee (\aleph_\alpha = \alpha)$.

c. Sous $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, montrer la réciproque. On pourra partir de $x \in V_\alpha$ et imiter la démonstration du théorème 27.3.

Rappelons que ZF contraint très peu les points fixes de la fonctionnelle $\aleph$ (v. ex. 22.4).

27.3. Montrer que $\mathrm{ZF} \models (\mathbb{L} = \mathrm{DO}) \leftrightarrow (\mathbb{V} = \mathbb{L})$. [Penser à $P(L_\alpha)$.]

27.4. On note ZF$\backslash\{P\}$ la théorie sans axiome de la puissance (mais avec axiome de la paire). Elle permet de formaliser $P_{\text{déf}}$. On se place dans un modèle $\mathbb{V} \models$ ZFC.

a. Soit $\mathbb{M}$ un ensemble transitif tel que $(\mathbb{M}, \in) \models$ ZF$\backslash\{P\}$. On rappelle que $\text{Ord}[\mathbb{V}] \cap \mathbb{M}$ est l'ordinal des ordinaux présents dans $\mathbb{M}$ (ex. 22.2). Montrer que $\mathbb{M} \models (\mathbb{V} = \mathbb{L})$ ssi $\mathbb{M} = \mathbb{L}_{\text{Ord}[\mathbb{M}]}$.

b. Pour κ un cardinal, la collection HP_κ des ensembles héréditairement de cardinal $< \kappa$ forme un ensemble (ex. 25.6). Montrer que $\mathbb{L}_\kappa \subseteq \text{HP}_\kappa$.

(*) c. En déduire que dans ZFC, sont équivalents : $(\mathbb{V} = \mathbb{L})$ et $(\forall \kappa \geqslant \aleph_0)(\text{HP}_\kappa = \mathbb{L}_\kappa)$. [Adapter la démonstration de § 27.3.]

d. La *longueur ordinale* d'une relation bien fondée est le plus petit ordinal ne s'injectant pas dedans.
Montrer : $(\mathbb{V} = \mathbb{L})$ ssi « pour tout $\kappa \geqslant \aleph_0$, tout modèle bien fondé $(A, \varepsilon) \models$ ZF$\backslash\{P\}$ de longueur ordinale κ est isomorphe à $(\text{HP}_\kappa, \in)$ ». [Tasser.]

On peut dans la dernière question se restreindre à κ régulier ; en effet la définition classique de HP_κ pour κ singulier fluctue (v. § 25, notes conclusives).

(*) **27.5.** Soient $\hat{\mathbb{V}} \models$ ZF, qui permet le raisonnement formel, et $\mathbb{V}$ une collection transitive munie de $\in$. Supposons $\hat{\mathbb{V}} \models (\mathbb{V} \ulcorner\models\urcorner \ulcorner\text{ZF}\urcorner)$.

Montrer que $\mathbb{V}$ contient un plus petit sous-modèle transitif, i.e. $\hat{\mathbb{V}} \models (\exists x)(x \in \mathbb{V} \wedge (x, \in)\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\text{ZF}\urcorner \wedge$ « plus petit »). [C'est un L_α.]

(*) **27.6.** On note $P'_{\text{déf}}(A)$ la puissance définissable *sans paramètres*, puis L'_α obtenu par récursion, et $\mathbb{L}'$ la collection-réunion. Montrer que $\mathbb{L}' = \mathbb{L}$.

27.7. Soit $\mathcal{C}(x)$ une collection d'un modèle $\mathbb{V} \models$ ZFC.

- On fixe un point A du modèle. Soit $\mathbb{A}'$ la structure $(A, \in_{|A}, \mathcal{C}_{|A})$ où bien sûr $\mathcal{C}_{|A} = \{a \in A : \mathcal{C}(a)\}$.
- Une partie $b \subseteq A$ est *$\mathcal{C}$-définissable à paramètres dans A* s'il existe une $\{\in, R\}$-formule formelle à paramètres dans A telle que $b = [\![x \in \mathbb{A}' : f(x, \mathbf{c})]\!]$.
- La puissance $\mathcal{C}$-définissable est notée $P_{\mathcal{C}\text{-déf}}(A)$. On forme alors les $L_\alpha[\mathcal{C}]$ et $\mathbb{L}[\mathcal{C}]$.

Lemme. Il existe une collection définissable d'ordinaux $\mathcal{C}$ telle que $\text{HDO} = \mathbb{L}[\mathcal{C}]$.

Pour la preuve on fixe :

- une relation fonctionnelle bijective G entre Ord et HDO, définie sans paramètres ;
- une relation fonctionnelle bijective F entre paires d'ordinaux et ordinaux, définie sans paramètres.

Soit alors $\mathcal{C}(\gamma)$ définie par $(\exists \alpha)(\exists \beta)[\beta \in G(\alpha) \wedge \gamma = F(\alpha, \beta)]$.

a. Montrer que $\mathbb{L}[\mathcal{C}]$ est sous-collection de HDO.
b. Soit x un ensemble d'ordinaux tel que $\text{DO}(x)$. Montrer que x est de $\mathbb{L}[\mathcal{C}]$.
c. Déduire l'inclusion réciproque.

27.8. Montrer que si ZF est cohérente, alors PST aussi. [Partir d'un modèle agréable pour contrôler les cardinaux ; dans PST les ensembles sont dénombrables ; mettre une clause héréditaire.]

(**) **27.9.** Relire § 12, notes conclusives. Chaque modèle de ZF fournit un cadre pour la sémantique pleine de la logique du deuxième ordre $\mathbb{A}^{2,p}$, dont l'équivalence logique est notée $\equiv_2$.

Lemme. On suppose $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel fini. Soient $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ deux $\mathcal{L}$-structures dénombrables et $\equiv_2$-équivalentes. Alors $(\mathbb{A}_1, \mathcal{L}) \simeq (\mathbb{A}_2, \mathcal{L})$.

Pour la simplicité des notations, on supposera que $\mathcal{L}$ se résume à une relation binaire.

a. On suppose $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. Montrer qu'il existe une formule du deuxième ordre $\Phi(<, X, Y)$ telle que $\Phi(<_\omega, X, Y)$ définit un bon ordre sur $P(\omega)$.
b. Conclure.

27.10. Un *modèle intérieur* de ZF est une sous-collection transitive $\mathcal{C}$, contenant Ord[$\mathbb{V}$], et telle que $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \in_{|\mathcal{C}}) \models$ ZF. Montrer que tout modèle intérieur contient $\mathbb{L}$.

Notes conclusives

La somme sur la structure fine de la hiérarchie constructible reste [Devlin], qui a remplacé des prédécesseurs plus synthétiques. Aller si loin dans la combinatoire infinie éloigne de la logique.

- **Repères historiques**

My conviction that $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ of course has been somewhat shaken. But it still seems plausible to me. One of my reasons is that I don't believe in any kind of irrationality such as, e.g., random sequences in an absolute sense. Perhaps $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ does follow from my Axioms 1–4, but unfortunately Axiom 4 is rather doubtful, while Axioms 1-3 seem extremely likely *to me. But probably they can be proved* not *to imply $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_2$.*

I hope this letter will convince you that my state of mind has improved since I sent you the paper. [Gödel III, p. 424-425 ; lettre à Tarski, 1970]

Does set theory, once we get beyond the integers, refer to an existing reality, or must it be regarded, as formalists would regard it, as an interesting formal game? [...]

A typical argument for the objective reality of set theory is that it is obtained by extrapolation from our intuitions of finite objects, and people see no reason why this has less validity. Moreover, set theory has been studied for a long time with no hint of a contradiction. It is suggested that this cannot be an accident, and thus set theory reflects an existing reality. In particular, the Continuum Hypothesis and related statements are true or false, and our task is to resolve them.

A counter-argument is that the extrapolation has no basis in reality. We cannot search through all possible sets of reals to decide the continuum hypothesis. We have no reason at all to believe that these sets exist. It is simply an empirical fact that no contradiction has been found.

Clearly both points of view have their strengths and weaknesses. Through the years I have sided more firmly with the formalist position. [Coh05, p. 2416]

On peut tenir que [**Sko23**, § 6] préfigure la notion de modèle intérieur, mais sans insister. La hiérarchie cumulative était vue comme absolue et non dépendante d'un modèle par Zermelo [Zer30]. Enfin HDO ne fut suggérée par Gödel qu'après ses travaux sur $\mathbb{L}$ [Göd04]. L'univers constructible est donc le premier modèle intérieur, introduit par Gödel pour [**Gödel**] (annoncé

[Devlin] : Keith Devlin. *Constructibility.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1984, p. xi+425

[Coh05] : Paul Cohen. « Skolem and pessimism about proof in mathematics ». In : *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 363.1835 (2005), p. 2407-2418 dans [Göd38]) ; il ne commente pas le choix de la notation L. • Après cet ultime grand œuvre qu'il fit paraître entre 1938 et 1940, Kurt Gödel se tut presque : deux notes en physique théorique, et quelques remarques. • Quant au fameux complot pour faire disparaître l'œuvre de Leibniz [Rescher, chapitre 13, pp. 155-180].

- **Ordinaux et** ZF**.** Relire § 22, notes conclusives. Notant T_{Ord} la théorie élémentaire de Takeuti pour l'arithmétique ordinale, on a bi-interprétabilité de T_{Ord} et $\mathrm{ZF} \cup \{\mathbb{V} = \mathbb{L}\}$ [Yas67].

- **Complexité de la satisfaction en logique du deuxième ordre.** Un modèle de ZFC fournit le cadre. Au codage près, l'ensemble S_2 des énoncés valides en sémantique pleine du deuxième ordre est une partie de $\mathbb{N}$, dont la complexité échappe à l'arithmétique $(\mathbb{N}\ ;\ +, \cdot)$. Cet ensemble est Π_2-universel.

Soient R une relation binaire et $\mathcal{L} = \{R\}$; Λ^1 désigne la logique élémentaire et $\mathbb{\Lambda}^2$ celle du deuxième ordre. On note $\mathrm{Val}_i = \{\varphi \in \Lambda^{i,p}(\mathcal{L})\text{-Én} :\models \varphi\}$ l'ensemble des énoncés vrais partout et $S_i = \#\,\mathrm{Val}_i \subseteq \mathbb{N}$.

Par complétude (i.e. existence d'un système de déduction explicite adapté), S_1 est élémentairement définissable dans $(\mathbb{N}\ ;+,\cdot)$; il est même Σ_1. Mais par incomplétude finitaire, S_2 n'est pas définissable dans $(\mathbb{N};+,\cdot)$; on le plonge alors dans $\mathbb{V}$ pour l'étudier.

Théorème. On travaille dans $\mathbb{V} \models \mathrm{ZFC}$. Alors S_2 est :

- inclus dans ω et Π_2-définissable dans $\mathbb{V}$, i.e. possède une définition élémentaire Π_2 sans paramètres,
- universel en tant que tel, i.e. si S est un ensemble Π_2 sans paramètres inclus dans ω, alors S est Δ_0-définissable dans $(\mathbb{V};S)$.

Le premier point est connu, puisqu'on a pu mener une telle construction au chapitre II.

Démonstration. On fixe un langage fini $\mathcal{L}$, typiquement une relation binaire. Soit φ un vrai $\mathcal{L}$-énoncé du deuxième ordre. Soit $\mathrm{Val}_2(\varphi)$ l'affirmation informelle : « φ est vraie dans toute structure relationnelle », plus précisément « φ est vraie dans toute structure relationnelle *de taille ensembliste* ».

Cette affirmation est informelle ; ce n'est pas un $\mathcal{L}$-énoncé. Pour la formaliser on plonge la sémantique pleine dans la théorie ZFC. Alors $\mathrm{Val}_2(\varphi)$ est bien rendue par le $\{\in\}$-énoncé du deuxième ordre : $(\forall \mathbb{m})($« $\mathbb{m}$ est une $\ulcorner\mathcal{L}\urcorner$-structure $\to \mathbb{m}\ulcorner\models_2\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner)$, où $\ulcorner\models_2\urcorner$ est la modélisation dans ZFC de la satisfaction dans $\mathbb{\Lambda}^{2,p}$. Pour revenir au premier ordre, il faut manier $P(\mathbb{m})$, et donc sortir de $\mathbb{m}$. C'est fait en montant dans la hiérarchie cumulative : si $\mathbb{m}$ est de niveau α, alors $V_{\alpha+1}$ permet de manipuler son ensemble de parties. Mais le plus simple reste de ne considérer que des ordinaux limites. On formalise donc $\mathrm{Val}_2(\varphi)$ par : $(\forall \alpha)[\mathrm{Ord}_{\mathrm{lim}}(\alpha) \to (\forall \mathbb{m} \in V_\alpha)(\mathrm{Sat}_\varphi(V_\alpha, \mathbb{m}))]$, où $\mathrm{Sat}_\varphi(x, y)$ est le $\{\in\}$-énoncé élémentaire conditionné à « $y \in x$ » et codant pour la satisfaction de φ par y en tant que structure du deuxième ordre dans x.

La relation binaire Sat_φ est de classe Σ_1 et la construction est assez uniforme en φ. Il suit que la formalisation donnée de Val_2 est un $\{\in\}$-énoncé élémentaire de classe Π_2 portant sur tous les $\ulcorner\mathcal{L}\urcorner$-énoncés formels.

À codage des formules (formelles) près, Val_2 est une partie de ω ; elle est Π_2 dans $\mathbb{V}$. Elle est même universelle dans le sens où toute autre partie Π_2-de $\mathbb{V}$ incluse dans ω, est Δ_0-définissable dans $(\omega\ ;+,\cdot,\mathrm{Val}_2)$.

[Göd38] : Kurt Gödel. « The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 24 (1938), p. 556-557
[Rescher] : Nicholas Rescher. *Philosophical Episodes.* ontos verlag. Berlin, Boston : De Gruyter, 2011, p. viii+214
[Yas67] : Mariko Yasugi. « Interpretations of set theory and ordinal number theory ». In : *J. Symbolic Logic* 32 (1967), p. 145-161

Soit θ^2 un énoncé du deuxième ordre dont les modèles soient exactement les V_κ pour κ point fixe de $\beth$. On rappelle :

– que les points fixes de $\beth$ sont cofinaux dans Card ;
– que ces V_κ sont finiment axiomatisables (« ensemble transitif ayant réunion et puissance, et dont tout point est en bijection avec un ordinal »).

Soit $A \subseteq \omega$ qui soit Π_2-définissable dans $\mathbb{V}$. Soit $(\forall y)(\exists z)\varphi(x, y, z)$ une définition Π_2, où φ est une $\{\in\}$-formule Δ_0. On fixe un entier formel n, et l'on note χ_n l'énoncé $(\forall y)(\exists z)\varphi(n)$. On montre $n \in A$ ssi $\mathrm{Val}_2(\theta^2 \to \chi_n)$. Supposons $n \in A$, i.e. $\mathbb{V} \models (\forall y)(\exists z)\varphi(n)$. Soit V_α un modèle de θ^2. Soit a de V_α. Par hypothèse $\mathbb{V} \models (\exists z)\varphi(n, a)$. Par réflexion Σ_1, $V_\alpha \models (\exists z)\varphi(n, a)$. Donc tout modèle formel de θ^2 est modèle de χ_n. Ainsi $\mathrm{Val}_2(\theta^2 \to \chi_n)$. Supposons $\mathrm{Val}_2(\theta^2 \to \chi_n)$. Soit a de $\mathbb{V}$. Il vit dans un V_α, et quitte à augmenter α, on peut le supposer point fixe de $\beth$. Notamment $V_\alpha \models \theta^2$. Donc $V_\alpha \models \chi_n$, et $V_\alpha \models (\exists z)\varphi(n, a)$. Ceci remonte à $\mathbb{V}$, d'où $\mathbb{V} \models \chi_n$.

En conclusion, $n \in A$ ssi $\mathrm{Val}_2(\theta^2 \to \chi_n)$. Les opérations syntaxiques sont clairement disponibles dans $(\omega ; +, \cdot)$, donc on a produit une définition de A dans $(\omega ; +, \cdot, \mathrm{Val}_2)$. □

• **Modèle minimal (ex. 27.5).** [She53, § 4.3] (écriture logicisante), indépendamment retrouvé par [Coh63a] d'un point de vue « génératif » (v. [**Cohen**, III. 6, p.104]).

• **Hiérarchie constructible dans d'autres logiques.** Un modèle $\mathbb{V} \models$ ZF permet de formaliser la sémantique pleine du deuxième ordre. On peut alors étudier la hiérarchie des L^2_α, obtenue en itérant la « puissance définissable au deuxième ordre » (en maintenant la stratification des paramètres).

Théorème ([MS71, § 3])**.** ZFC $\models \mathbb{L}^2 =$ HDO.

(C'est faux dans ZF sans choix [Szc77].)
• [KMV21] poursuit le sujet, en envisageant $\mathbb{L}$ dans diverses logiques ; les extensions les plus simples de $\Lambda_{\omega,\omega}$ ne changent pas $\mathbb{L}$.

• **Modèles dénombrables.** Naturellement « dénombrable » requiert un $\mathbb{V} \models$ ZFC ambiant, au sein duquel les modèles considérés sont des structures formelles. La tradition est d'omettre $\mathbb{V}$ des notations.

Extensions finales. Si $\mathbb{M} \leqslant \mathbb{N}$ sont deux modèles, $\mathbb{N}$ est *extension finale* de $\mathbb{M}$ si $\mathbb{M}$ est clos $\in_\mathbb{N}$-inférieurement, i.e. $\mathbb{N} \models (a \in b)$ et b dans $\mathbb{M}$ entraînent a dans $\mathbb{M}$.

Théorème ([Bar71])**.** Un modèle ambiant formalise les notions. Soit $\mathbb{M} \models$ ZF un modèle dénombrable. Alors il possède une extension finale $\mathbb{N} \models$ ZF $\cup \{\mathbb{V} = \mathbb{L}\}$.

Pour le démontrer il faut beaucoup de logique infinitaire, ou beaucoup de théorie des ensembles. Hamkins a donné une nouvelle démonstration [HW20, § 2]. Barwise a éga-

[She53] : John Shepherdson. « Inner models for set theory III ». In : *J. Symbolic Logic* 18 (1953), p. 145-167
[Coh63a] : Paul Cohen. « A minimal model for set theory ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), p. 537-540
[Szc77] : Zbigniew Szczepaniak. « The consistency of the theory ZF + $L^1 \neq$ HOD ». In : *Set theory and hierarchy theory, V (Proc. Third Conf., Bierutowice, 1976)*. 1977, 285-290. Lecture Notes in Math., Vol. 619
[KMV21] : Juliette Kennedy, Menachem Magidor et Jouko Väänänen. « Inner models from extended logics : Part 1 ». In : *J. Math. Log.* 21.2 (2021), Paper No. 2150012, 53
[Bar71] : Jon Barwise. « Infinitary methods in the model theory of set theory ». In : *Logic Colloquium '69 (Proc. Summer School and Colloq., Manchester, 1969)*. North-Holland, Amsterdam, 1971, p. 53-66
[HW20] : Joel Hamkins et Kameryn Williams. « The Σ_1-definable universal finite sequence ». 2020

lement montré la nécessité de l'hypothèse de dénombrabilité. En tout cas passer au modèle intérieur $\mathbb{L}[\cdot]$ n'est pas la seule façon d'obtenir un modèle de $\mathbb{V} = \mathbb{L}$.

Universalité de $\mathbb{L}$

Théorème ([Ham13, Main Theorem 1])**.** Soit $(\mathbb{M}, \in)$ un modèle dénombrable (d'un fragment faible) de ZF. Alors $\mathbb{M}$ est isomorphe à un sous-modèle de $\mathbb{L}(\mathbb{M})$.

Le « fragment faible » doit permettre certaines constructions par séparation très limitées ; il n'emploie même pas l'axiome de la puissance. La preuve est une variation sur le va-et-vient (menée depuis la réalité ambiante).

Un corollaire étonnant. Un corollaire de la méthode employée par Hamkins est encore plus surprenant.

Théorème ([Ham13, Main Theorem 2])**.** Soient $(\mathbb{M}_1, \in)$ et $(\mathbb{M}_2, \in)$ deux modèles dénombrables (dudit fragment faible) de ZF. Alors l'un des $(\mathbb{M}_i, \in)$ se plonge dans l'autre.

C'est faux en non dénombrable [FGH17].

• **Quelle valeur pour le continu ?** Cohen a montré, par le forcing qu'il inventa, que HC n'est pas conséquence de ZFC. Il suit que HC est indépendante de ZFC. En déduire que le continu n'a pas de valeur ultime, voire que la question n'a pas de sens, est une position admissible mais de nature épistémologique, et qui ne saurait passer pour une vérité absolue. Dans sa version la plus naïve (hélas aussi la plus commune) elle présuppose quelque chose comme le caractère indépassable de ZFC comme cadre mathématique ; cette dernière thèse est bien aventureuse.

> *Also, it is very suspicious that, as against the numerous plausible propositions which imply the negation of the continuum hypothesis, not one plausible proposition is known which would imply the continuum hypothesis. Therefore one may on good reason suspect that the role of the continuum problem in set theory will be this, that it will finally lead to the discovery of new axioms which will make it possible to disprove Cantor's conjecture.*
>
> [Göd47, derniers mots]

Depuis dès avant Cohen — la chose est explicite chez Gödel [Göd47] — on cherche de nouveaux axiomes 1. justifiés par leur portée explicative de phénomènes *connus* et 2. appréciables pour leur vertu prédictive de phénomènes *inconnus*. Cette démarche, inductive au sens non mathématique, des théoriciens des ensembles cherchant de tels axiomes est analogue à celle des physiciens britanniques de la seconde moitié du XVII^{e} siècle tentant d'expliquer les lois de Kepler *par des lois plus en amont*. À ce point il faut clairement abandonner l'image stérile et stérilisante du jeu formel pour les mathématiques.

Le problème est que les axiomes de grands cardinaux ne déterminent pas HC. Le premier résultat dans cette direction concernait les cardinaux mesurables (§ SÉ5) ; il y en a d'autres depuis.

Théorème ([LS67, Theorem 1])**.** Si ZFC $\cup$ {« il existe un cardinal mesurable » } est cohérente, alors ses extensions par HC et $\neg$HC le sont aussi.

Spéculer sur les hauteurs de la hiérarchie cardinale ne permet donc pas de trancher ; intuitivement, le continu se rencontre en bas de la hiéarachie. Des axiomes à caractère plus combinatoire (comme « diamant », $\diamondsuit$)

[Ham13] : Joel Hamkins. « Every countable model of set theory embeds into its own constructible universe ». In : *J. Math. Log.* 13.2 (2013), p. 1350006, 27

[FGH17] : Gunter Fuchs, Victoria Gitman et Joel Hamkins. « Incomparable ω_1-like models of set theory ». In : *MLQ Math. Log. Q.* 63.1-2 (2017), p. 66-76

[Göd47] : Kurt Gödel. « What is Cantor's continuum problem? » In: *Amer. Math. Monthly* 54 (1947), pp. 515–525

[LS67] : Azriel Lévy et Robert Solovay. « Measurable cardinals and the continuum hypothesis ». In : *Israel J. Math.* 5 (1967), p. 234-248 permettent quant à eux de décider positivement, mais ont tendance à contredire les axiomes de grands cardinaux.

De grands mathématiciens (Gödel, Tarski, Woodin) ont cru à $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Woodin eut un ambitieux programme et pourtant cessa d'y croire ; l'excellent [Rit15] présente à la fois l'« Ω-logique » et la « quête pour $\mathbb{L}$ ultime ».

Récente indication en faveur de $2^{\aleph_0} = \aleph_2$: deux axiomes qui l'impliquent classiquement sont en fait « alignés », i.e. l'un des deux entraîne l'autre [AS21]. L'article n'est pas trivial mais son introduction est remarquablement lisible.

• **Complétude et catégoricité au deuxième ordre (2).** Suite et fin de la discussion de § 12, notes conclusives. Pour modéliser la sémantique pleine $\mathbb{A}^{2,p}$ on adopte une théorie élémentaire des ensembles : ZFC. • Soient $\simeq$ l'isomorphisme entre structures et $\equiv_2$ l'équivalence logique *au deuxième ordre en sémantique pleine*, encore appelée $\mathbb{A}^{2,p}$-équivalence ($\mathbb{A} \equiv_2 \mathbb{B}$ signifie $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ $[\mathbb{A}^{2,p}]$). Clairement $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ entraîne $\mathbb{A} \equiv_2 \mathbb{B}$. • On rappelle (ex. 8.6) que l'affirmation « $\equiv_2$ entraîne $\simeq$ » ne peut être vraie en toute généralité ; a minima il faut un langage fini et des structures équipotentes. • La propriété « pour des structures dénombrables en langage fini, $\equiv_2$ entraîne $\simeq$ », i.e. « en langage fini et en sémantique pleine, une théorie du deuxième ordre sémantiquement complète est $\aleph_0$-catégorique », est alors énonçable dans ZFC. • Mais il y est indécidable.

Théorème ([Mar73] ; indép. [Ajt79])**.** L'énoncé en question φ est indécidable dans ZFC. Plus précisément :

- ZF $\cup \{\mathbb{V} = \mathbb{L}\}$ (axiome de constructibilité de Gödel, chapitre V, § 27) entraîne φ.
- Si ZF est cohérente, alors ZF$\cup\{\neg\varphi\}$ aussi.

• La partie « facile » est l'exercice 27.9. La partie difficile requiert du forcing. • Marek montre même l'indécidabilité dans ZFC de : « deux *ordinaux* dénombrables de même théorie du deuxième ordre sont égaux ». (Ajtai ne cite pas Marek, mais attribue des résultats similaires à Magidor sans donner de référence.) • [Ajt79] montre aussi l'indécidabilité dans ZFC de « $\mathbb{A} \equiv_2 \mathbb{B}$ entraîne $\mathbb{A} \equiv_3 \mathbb{B}$ » (en logique du troisième ordre). Bien relire l'énoncé du théorème de Hintikka 12.3, qui ne fournit qu'une traduction. • De manière générale, une implication entre les relations d'équivalence logique $\equiv_n$ et d'isomorphisme est soit triviale, soit indécidable dans ZFC. Travaux repris et généralisés dans [Kes13]. • Revenons au deuxième ordre et au théorème ci-dessus. Solovay [Sol06] fournit même, sous $\mathbb{V} \neq \mathbb{L}$, des contre-exemples *finiment axiomatisables.* • D'après l'ex. 8.6 e., le contre-exemple de Marek porte sur des théories infinies, et celui de Solovay sur des structures qui ne sont pas des bons ordres. • En conclusion, un $\mathbb{A}^2$-énoncé complet n'est pas nécessairement $\aleph_0$-catégorique. Même sous des hypothèses très fortes, le *Gabelbarkeitssatz* reste indécidable. À ma connaissance, personne ne l'a sérieusement envisagé comme ajout possible à ZFC.

[Rit15] : Colin Rittberg. « How Woodin changed his mind : new thoughts on the continuum hypothesis ». In : *Arch. Hist. Exact Sci.* 69.2 (2015), p. 125-151
[AS21] : David Asperó et Ralf Schindler. « Martin's Maximum^{++} implies Woodin's axiom $(*)$ ». In : *Ann. of Math. (2)* 193.3 (2021), p. 793-835
[Mar73] : Wiktor Marek. « Sur la consistance d'une hypothèse de Fraïssé sur la définissabilité dans un langage du second ordre ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 276 (1973), A1169-A1172
[Ajt79] : Miklós Ajtai. « Isomorphism and higher order equivalence ». In : *Ann. Math. Logic* 16.3 (1979), p. 181-203
[Kes13] : Lauri Keskinen. « Characterizing all models in infinite cardinalities ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 164.3 (2013), p. 230-250
[Sol06] : Robert Solovay. *An example of an axiomatizable second order theory that is complete but non-categorical ?* Message électronique sur la liste FOM. 2006

• **Existe-t-il une réalité ensembliste ?** • Argument d'autorité : Gödel semblait ne pas l'exclure. Il y aurait alors des *ensembles naturels* comme il y a des nombres naturels. Cela n'empêche pas l'existence de modèles non standard à toute tentative de description axiomatique, dont l'étude peut d'ailleurs nous renseigner sur le modèle naturel. • Or supposons qu'il existe un modèle standard formé des ensembles naturels ; lequel serait-ce ? On se méfiera de l'argument selon lequel $\mathbb{L}$ (qui d'ailleurs est un foncteur et non pas un objet), étant minimal à ordinaux constants, forme de ce fait la réalité standard ; voici pourquoi. • ZFC est obtenue en schématisant élémentairement la théorie du deuxième ordre ZFC^2. Les modèles de cette dernière sont connus : les V_κ pour κ inaccessible (exercice 25.4) Il y a deux autres exemples importants de telle schématisation. Chacune des théories $\mathrm{PA}^2, \mathrm{RCF}^2$ (corps ordonné définissablement complet) possède un unique modèle ; chacune possède une schématisation élémentaire bien étudiée. L'unique modèle de PA^2 est minimal, quoique non élémentairement, parmi ceux de PA. RCF possède un modèle minimal (qui se plonge élémentairement dans tous les modèles), la clôture réelle de $\mathbb{Q}$; ce n'est pas l'unique modèle de RCF^2. • *La minimalité d'un modèle ne garantit donc pas son caractère standard.* C'est l'une des raisons pour lesquelles même les mathématiciens qui croient à la nature ensembliste ne s'accordent pas sur ce qu'elle serait. • [Ham12] développe la conception « multiverselle » ; le but est de comprendre la catégorie des modèles de ZFC. De grand intérêt les §§ 9 et 10 indiquant les tendances actuelles.

• **Où s'initier au forcing ?** Les sources ne manquent pas, mais le récent [Džamonja] se distingue.

§ SÉ5. Sujet d'étude 5 : cardinaux mesurables

Ce sujet d'étude présente de grands cardinaux très liés à la logique : les cardinaux mesurables. Après de premières propriétés, on les intercalera entre les cardinaux *fortement* et *faiblement* compacts, qui possèdent eux aussi une interprétation logique. Puis on passe aux ultrapuissances indexées par des cardinaux mesurables, pour démontrer le théorème de Scott, avant d'envisager des questions de rigidité de modèles de ZF.

Prérequis : Pour les deux premières parties, § 1 ; §§ 6–7 ; §§ 10–11 ; § 16 ; §§ 21–24 ; exercices 24.4 et 24.5. Les parties 3 et 4 demandent en outre §§ 25–27 et les exercices 22.8 et 26.8.

• Un modèle $\mathbb{V} \models \mathrm{ZFC}$ est fixé. • Plutôt qu'un objet, un *grand cardinal* est une propriété P affirmant le caractère « très infini » d'un cardinal. C'est souvent l'extrapolation d'un trait possédé par $\aleph_0$, renforcé par la non-dénombrabilité. En général ZFC ne démontre pas l'existence de grands cardinaux, qui restent hypothétiques. • Au cœur du sujet est la notion suivante.

Définition (filtre κ-complet)**.** Un filtre est *κ-complet* s'il est clos sous intersections de familles de cardinal $< \kappa$, i.e. : si $\lambda < \kappa$ et $(X_\alpha : \alpha <\in \lambda) \in \mathcal{F}^\lambda$, alors $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{F}$.

[Ham12] : Joel David Hamkins. « The set-theoretic multiverse ». In : *Rev. Symb. Log.* 5.3 (2012), p. 416-449

[Džamonja] : Mirna Džamonja. *Fast track to forcing.* T. 98. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 2021, p. xiii+147

Question préliminaire. Étendre le théorème de Łoś à $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ pour les ultrafiltres κ-complets.

1. Cardinaux mesurables

Cette partie introduit les cardinaux *mesurables*. Les questions 1.4 à 1.6 sont optionnelles. On pourra les omettre et passer à § 2.

Définition (cardinal mesurable)**.** Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ est *mesurable* s'il existe un ultrafiltre κ-complet non principal de $P(\kappa)$.

1.1. **Premières propriétés**

(a) Montrer qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ de $P(X)$ est κ-complet ssi pour tout cardinal $\lambda < \kappa$ et toute partition $X = \bigsqcup_{\alpha \in \lambda} X_\alpha$, il existe un unique $\alpha \in \lambda$ tel que $X_\alpha \in \mathcal{U}$.

(b) Montrer que si κ est mesuré par $\mathcal{U}$, alors tout membre de $\mathcal{U}$ est de cardinal κ.

(c) Soient X un ensemble et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre $\aleph_1$-complet et non principal de $P(X)$. Soit κ minimal tel que $\mathcal{U}$ n'est pas κ^+-complet. Montrer que κ est mesurable.

(d) En déduire que le plus petit cardinal λ tel qu'il existe un ultrafiltre $\aleph_1$-complet non principal de $P(\lambda)$ est mesurable.

1.2. **Mesurable implique inaccessible.** Soit κ mesurable.

(a) Montrer que κ est *régulier*, i.e. $\operatorname{cof}\kappa = \kappa$, i.e. ne peut s'écrire comme réunion de $< \kappa$ parties de cardinal $< \kappa$.

(b) Montrer que si $\lambda < \kappa$, alors $2^\lambda < \kappa$. [Surjecter sinon $f\colon 2^\lambda \twoheadrightarrow \kappa$.] Conclure.

(c) Déduire que, si cohérente, ZFC ne démontre pas l'existence de cardinaux mesurables.

1.3. **Caractérisation modèle-théorique.** Soit $\kappa > \aleph_0$. Montrer que κ est mesurable ssi :

> toute $\Lambda_{\kappa,\kappa}$-théorie T réunion croissante $T = \bigcup_{\alpha<\kappa} T_\alpha$ (sans hypothèse sur les $\operatorname{card} T_\alpha$) de théories satisfaisables, est elle-même satisfaisable.

[Introduire des relations R_A pour $A \subseteq \kappa$, des points c_α pour $\alpha \in \kappa$, et un « point générique » ∞ codant l'ultrafiltre.]

Les questions suivantes, facultatives, reviennent aux sources du sujet. On peut passer à § 2.

Définition. Une *mesure d'Ulam* sur un ensemble X est une fonction $\mu\colon P(X) \to [0,1]$ non nulle, dénombrablement additive, et telle qu'en tout point, $\mu(\{x\}) = 0$. On dit que X est *Ulam-mesurable*.

1.4. Soit κ le plus petit cardinal Ulam-mesurable, s'il en existe. On veut montrer que $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$, ou que κ est même Ulam-mesurable par une mesure à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Une partie $A \subseteq \kappa$ est *divisible* s'il y a une décomposition $A = A_0 \sqcup A_1$ en parties de mesure > 0.

(a) On suppose qu'il y a une partie non négligeable indivisible. Montrer que κ est Ulam-mesurable par une (autre) mesure à valeurs $\{0, 1\}$.

On suppose dorénavant que toute partie non négligeable est divisible. On construit un arbre de parties non négligeables indexé par les suites de domaine ordinal à valeurs $\{0, 1\}$ en posant $A_\varnothing = \kappa$, $A_s = A_{s,0} \sqcup A_{s,1}$, et pour s de domaine un ordinal limite :

$$A_s = \bigcap_{\beta < \operatorname{dom} s} A_{s|\beta}.$$

(b) Montrer que chaque chemin ainsi que chaque niveau de l'arbre est dénombrable.

(c) En déduire que $2^{\aleph_0}$ est Ulam-mesurable et conclure.

1.5. Soit κ le plus petit cardinal Ulam-mesurable, s'il en existe, par μ. Montrer que μ est $(< \kappa)$-additive.

1.6. En déduire que le plus petit cardinal Ulam-mesurable (s'il existe) est mesurable ou inférieur à $2^{\aleph_0}$.

2. Cardinaux fortement et faiblement compacts

Cette partie présente les cardinaux fortement et faiblement compacts, les caractérise logiquement, et les compare aux mesurables. Elle n'est pas utilisée par la suite.

Définition (cardinal ou logique fortement compact(e))**.** Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal.

— κ est *fortement compact* si tout filtre κ-complet s'étend en un ultrafiltre κ-complet.

— $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ est *fortement compacte* si toute théorie $(< \kappa)$-satisfaisable, est globalement satisfaisable.

Dans la première clause, pas de restriction sur la taille de l'ensemble portant le filtre. Dans la seconde, pas de restriction sur la taille du langage.

2.1. **Fortement compact implique mesurable.**

(a) Montrer qu'un cardinal fortement compact est régulier. [Passer dans κ^+ ; si κ est singulier, alors « κ-complet » entraîne « κ^+-complet », or mesurable implique inaccessible par 1.2.]

(b) Déduire que si κ est fortement compact, il est mesurable.

2.2. **Équivalence des deux compacités fortes**

(a) Montrer que si κ est fortement compact, alors $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ l'est.

(b) Montrer que si la logique $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ est fortement compacte, alors κ l'est (la logique propositionnelle $\Lambda_{\kappa,0}$ suffit).

(c) Retrouver directement : « si $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ est fortement compacte, alors κ est mesurable ».

Aux thèmes précédents on ajoute le lemme de Kőnig. Refaire d'abord les exercices 11.1 et 16.2.

Définition (arbre ensembliste ; propriété de l'arbre)**.**

— Un *arbre ensembliste* est un ordre partiel $\mathbb{A} = (A, \sqsubseteq)$ ayant un plus petit élément (enraciné) et tel que chaque $\mathbb{A}_{\sqsubset s}$ est bien ordonné.

— La *hauteur* de $s \in \mathbb{A}$ est ord $\mathbb{A}_{\sqsubset s}$ et celle de $\mathbb{A}$ est $\sup\{h(s) : s \in \mathbb{A}\}$. Les *niveaux* $\alpha < h(\mathbb{A})$ sont bien définis.

— Un cardinal κ a la *propriété de l'arbre* si tout arbre ensembliste de hauteur κ et dont chaque niveau est de cardinal $< \kappa$, possède une branche de longueur κ. (L'hypothèse sur les niveaux entraîne que le branchement est $< \kappa$, mais est plus forte. En l'absence de propriétés de κ, les diverses contraintes sur la taille d'un arbre ne sont pas équivalentes.)

Définition (cardinal ou logique faiblement compact(e))**.**

— Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ est *faiblement compact* si pour chaque famille $\mathcal{B} \subseteq P(\kappa)$ de cardinal κ, il existe un filtre non principal de $P(\kappa)$ qui est κ-complet et décide $\mathcal{B}$, i.e. $(\forall X)(X \in \mathcal{B} \to X \in \mathcal{F} \vee X^c \in \mathcal{F})$.

— La logique $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ est *faiblement compacte* si pour tout langage $\mathcal{L}$ de cardinal $\leqslant \kappa$, tout ensemble de $\Lambda_{\kappa,\kappa}(\mathcal{L})$-énoncés $(< \kappa)$-satisfaisable est globalement satisfaisable. (V. notes finales.)

2.3. **Faiblement compact équivaut à (inaccessible + propriété de l'arbre).**

(a) Échauffement : montrer que « propriété de l'arbre » implique « régulier ».

(b) Montrer qu'un cardinal faiblement compact est inaccessible. (Pour la régularité, partitionner κ ; pour la propriété exponentielle, injecter sinon $f : \kappa \hookrightarrow 2^{\lambda}$.)

(c) Montrer qu'un cardinal faiblement compact a la propriété de l'arbre.

(d) Montrer qu'un cardinal inaccessible ayant la propriété de l'arbre est faiblement compact. (On pourra se ramener à $\mathcal{B}$ anneau de Boole κ-complet, et étiqueter l'arbre $2^{<\kappa}$.)

2.4. **Équivalence des deux compacités faibles**

(a) Montrer que si κ est faiblement compact alors $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ l'est. (Indication : Henkin, pas Łoś.)

(b) On suppose $\Lambda_{\kappa,0}$ (logique *propositionnelle*) faiblement compacte. Montrer que κ l'est.

Ainsi « fortement compact » implique « mesurable » implique « faiblement compact » implique « inaccessible ». Si cohérente, ZFC ne démontre l'existence d'aucun de ces cardinaux (v. question 1.2).

3. Ultrapuissance indexée par un cardinal mesurable

Cette partie fait démontrer deux résultats importants par ultraproduits. On propose d'abord une méthode « tronquée », par ultrapuissances de structures ensemblistes, puis on reprend l'argument avec des ultrapuissances de taille classe.

Théorème F (Hanf-Tarski)**.** Si κ est mesurable, alors c'est le κ^{e} cardinal inaccessible.

Théorème G (Scott)**.** Si $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, alors il n'y a pas de cardinal mesurable.

On suppose qu'il existe un cardinal mesurable κ, mesuré par l'ultrafiltre κ-complet $\mathcal{U}$ de $P(\kappa)$.

3.1. **Théorème de Hanf-Tarski.**
Soit $\mathbb{O}^* = \int_{i\in\kappa} (\kappa, <) d\mathcal{U}(i)$ l'ultrapuissance de $(\kappa, <)$ modulo $\mathcal{U}$. On note $d\colon (\kappa, <) \hookrightarrow \mathbb{O}^*$ le plongement diagonal envoyant α sur $[(\alpha)]$ (classe de la suite constante).

(a) Montrer que $\mathbb{O}^*$ est un bon ordre [penser à $\Lambda_{\omega_1,\omega}$], puis que $\operatorname{ord} \mathbb{O}^* > \kappa$.

(b) Une formule du 2^{e} ordre est Σ^1_1 si de la forme $(\exists X)(Q)\varphi_0$, où (Q) est un bloc de quantifications élémentaires et φ_0 est (du deuxième ordre mais) sans quantificateurs.

Vérifier que la disjonction de deux telles formules reste Σ^1_1, et que pour une telle formule (éventuellement à paramètres), si $\{i \in \kappa : (\kappa, <) \models \varphi\} \in \mathcal{U}$, alors $\mathbb{O}^* \models \varphi$.

(c) Donner une $\in$-formule $\varphi_{\neg\text{rég}}(x)$ de classe Σ^1_1 telle que pour $\alpha < \kappa$ on ait : $(\kappa, <) \models \varphi_{\neg\text{rég}}(\alpha)$ ssi α n'est pas un cardinal régulier.

(d) Écrire une formule à quantifications élémentaires $\varphi(X, R, Y)$ signifiant : « R code une injection $X \hookrightarrow P(Y)$ ». Déduire qu'il existe une $\in$-formule $\varphi_{\neg\mathrm{In}}(x)$ de classe Σ^1_1 telle que pour tout $\alpha < \kappa$ on ait :

$$(\kappa, <) \models \varphi_{\neg\mathrm{In}}(\alpha) \quad \text{ssi} \quad \alpha \text{ n'est pas un cardinal inaccessible.}$$

(e) On suppose $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ n'est pas un cardinal inaccessible}\}$ majoré par $\alpha_0 < \kappa$. Montrer $\mathbb{O}^* \models (\forall x)(x \leqslant d(\alpha_0) \vee \varphi_{\neg\mathrm{In}}(x))$.

(f) De la contradiction résultante, déduire que κ est le κ^{e} cardinal inaccessible.

3.2. **Théorème de Scott.** On suppose que κ est le plus petit cardinal mesurable. Soit $\lambda = (\operatorname{card} P(P(P(\kappa))))^+$.

(a) On note HP_λ l'ensemble des ensembles héréditairement de taille $< \lambda$, i.e. tels que $\mathrm{card}(x \cup \{x\}) < \lambda$. (C'est bien un ensemble : v. ex. 25.6.) On note $\mathbb{H} = (\mathrm{HP}_\lambda, \in)$.

Donner une formule élémentaire sans paramètres telle que $\mathbb{H} \models (\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow x = \kappa)$.

(b) Soit $\mathbb{H}^* = (H^*, \varepsilon^*) = \int_{i \in \kappa} \mathbb{H} d\mathcal{U}(i)$. Montrer que $\mathbb{H}^* \models \mathrm{ZF} \setminus \{P\}$ et que la relation ε^* est bien fondée.

(c) Montrer que l'ordinal de $\mathbb{H}^*$ (i.e. l'ordinal des $\mathbb{V}$-ordinaux présents dans $\mathbb{H}^*$, v. ex. 22.2) est exactement λ. [Compter le nombre de ε^*-prédécesseurs d'un ordinal de $\mathbb{H}^*$ en pensant à la régularité de λ.]

(d) Démontrer $\mathrm{ord}\, d(\kappa) > \kappa$ puis $\mathbb{H}^* \not\simeq \mathbb{H}$. Conclure $\mathbb{V} \neq \mathbb{L}$ de l'exercice 27.4.

On reprend à présent les arguments pour *former une ultrapuissance du modèle dans le modèle.*

3.3. **Tassement de taille classe.** Refaire d'abord l'exercice 22.8. Soit maintenant $(\mathcal{C}; \varepsilon)$ une classe munie d'une relation extensionnelle, bien fondée, et à segments ε-initiaux ensemblistes (i.e. si $\mathbb{V} \models \mathcal{C}(a)$, alors la $\mathbb{V}$-sous-collection $(\mathcal{C}(x) \wedge x \,\varepsilon\, a)$ est un ensemble). Montrer qu'il existe une unique collection transitive $\mathcal{D}$ et un unique isomorphisme $\pi\colon (\mathcal{C}; \varepsilon) \simeq (\mathcal{D}; \in_{|\mathcal{D}})$.

3.4. **Formation de $\mathbb{V}^*_\kappa$.** Soit $\mathcal{F}(x)$ la collection définissable : « x est le graphe d'une fonction de domaine κ ». (C'est une classe propre, mais bien une sous-collection de $\mathbb{V}$.) Sur $\mathcal{F}$ on met la relation d'équivalence : $f \sim g$ si $\{i \in \kappa : f(i) = g(i)\} \in \kappa$.

(a) En général, la classe d'équivalence $(\mathcal{F}(g) \wedge g \sim f)$ est une classe propre. La *classe d'équivalence restreinte* $[f]$ est la collection $\mathcal{F}(x) \wedge (x \sim f) \wedge (\forall h)[(\mathcal{F}(h) \wedge h \sim f) \to (\mathrm{rg}\, x \leqslant \mathrm{rg}\, h)]$.

Montrer que $[f]$ est un *ensemble.*

(b) Soit V^* la classe propre $(\exists f)(\mathcal{F}(f) \wedge x = [f])$. Soit sur V^* la relation $[f] \;\varepsilon^*\; [g]$:si $\{i \in I : \mathbb{V} \models f(i) \in g(i)\} \in \mathcal{U}$. Montrer que c'est bien défini, i.e. ne dépend pas des représentants.

(c) Vérifier le théorème de Łoś entre $\mathbb{V}$ et (V^*, ε^*).

(d) En déduire que (V^*, ε^*) est extensionnelle, bien fondée, à segments ε^*-initiaux ensemblistes.

3.5. Soient $\mathbb{V}^*_\kappa = (V^*, \varepsilon^*)$ et $d_\kappa\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*_\kappa$ le plongement diagonal. Soient $\mathbb{M}_\kappa = (M_\kappa, \in)$ le tassement de Mostowski de $\mathbb{V}^*_\kappa$ et $\pi_\kappa\colon \mathbb{V}^*_\kappa \simeq \mathbb{M}_\kappa$ l'isomorphisme associé. (La notation omet $\mathcal{U}$.)

Soit $j_\kappa = \pi_\kappa \circ d_\kappa$. Montrer que j_κ est un plongement élémentaire $\mathbb{V} \rightarrowtail \mathbb{M}_\kappa$ de graphe définissable. Montrer que $j_\kappa(\kappa) > \kappa$.

3.6. En se rappelant que $\mathbb{L}$ est le plus petit modèle intérieur de $\mathbb{V}$ (ex. 27.10), retrouver le théorème de Scott.

4. Plongements élémentaires de l'univers et phénomènes de rigidité

Le dernier thème est motivé par la partie 3 mais n'utilise pas ses résultats.

Les cardinaux mesurables produisent des plongements élémentaires vers des classes transitives, $j\colon \mathbb{V} \rightarrowtail \mathbb{M}$. Peut-on avoir $\mathbb{M} = \mathbb{V}$? La question n'est pas celle des automorphismes de $\mathbb{V}$ (on peut ou non refaire l'ex. 25.9) mais des plongements élémentaires $j\colon \mathbb{V} \rightarrowtail \mathbb{V}$ *sans demander la surjectivité.* • On ne suppose pas non plus la définissabilité de j, objet a priori très externe à $\mathbb{V}$. Or la récurrence ordinale veut des collections définissables. Il faut donc *ajouter j au langage et supposer $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}(j)$, théorie dont les instances du remplacement prennent en compte les $\{\in, j\}$-formules.*

Théorème H (rigidité)**.** Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ et $j\colon \mathbb{V} \rightarrowtail \mathbb{V}$ tels que $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}(j)$.

(i) Si j est définissable, alors $j = \mathrm{Id}$.

(ii) Si $\mathbb{V} \models \mathrm{AC}$, alors $j = \mathrm{Id}$.

Dans le premier cas, les $\{\in, j\}$-instances du remplacement sont déjà présentes dans ZF, i.e. l'hypothèse $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}(j)$ est redondante. Pas dans le second. On travaille sous ces hypothèses, et $j \neq \mathrm{Id}$.

4.1. **Point critique**

(a) Montrer que pour tout ordinal α de $\mathbb{V}$, l'image $j(\alpha)$ est encore un ordinal de $\mathbb{V}$, et que $j(\alpha) \geqslant \alpha$.

(b) Montrer que pour tout ordinal, $(j_{|\alpha} = \mathrm{Id}_\alpha) \to (j_{|V_\alpha} = \mathrm{Id}_{V_\alpha})$. [Pour l'incrémentation, montrer $j(x) \subseteq V_\alpha$.]

(c) On appelle *point critique* de j l'ordinal $\mathrm{crit}(j) = \min[\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge j(\alpha) \neq \alpha]$. Montrer que $\mathrm{crit}(j) \notin \mathrm{im}\, j$ est un cardinal inaccessible (en supposant AC pour avoir la définition usuelle).

(d) Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

$j(\mathrm{crit}(j)) = j(\{\alpha < \mathrm{crit}(j)\}) = \{j(\alpha) : \alpha < \mathrm{crit}(j)\} = \mathrm{crit}(j)$, contradiction.

4.2. **Points critiques et mesurabilité** (question facultative)

(a) Si κ est mesurable et j_κ comme à la question 3.5, montrer que $\mathrm{crit}(j_\kappa) = \kappa$.

(b) Retour au cas général. Montrer que $\mathrm{crit}(j)$ est mesuré par $\mathcal{U} = \{A \in P(\mathrm{crit}(j)) : \mathrm{crit}(j) \in j(A)\}$.

(c) Montrer que le diagramme suivant se factorise uniquement :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "j_{\mathrm{crit}(j)}"'] & & \mathbb{M} \\ & \mathbb{M}_{\mathrm{crit}(j)} \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

4.3. **Rigidité (i) de Suzuki.** *On suppose j définissable*, disons par $y = j(x)$ ssi $\mathbb{V} \models \varphi(x, y, a)$.

(*) (a) Soit $i\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un $\in$-plongement. Montrer que i est élémentaire ssi :

$$\mathbb{V} \models (\forall\alpha)(\forall f)(\forall \mathbf{b}) \left[\begin{array}{l} \text{« } \alpha \text{ est un ordinal et } f(\mathbf{b}) \text{ une formule formelle à param. dans } V_\alpha \text{ »} \\ \to \qquad\qquad\qquad\qquad (V_\alpha \ulcorner\!\models\!\urcorner f(\mathbf{b}) \leftrightarrow V_{i(\alpha)} \ulcorner\!\models\!\urcorner f(i(\mathbf{b}))) \end{array} \right].$$

[Procéder par réflexion, exercice 26.8. Il faut monter ω fois.]

(b) En déduire que la collection $\mathcal{C}(z)$: « $\varphi(x, y, z)$ définit un plongement élémentaire $\neq$ Id » est $\varnothing$-définissable et non vide. (Ce plongement est alors noté j_z.)

(c) Montrer que la fonctionnelle κ_z de $\mathcal{C}$ vers Card qui envoie z sur $\operatorname{crit}(j_z)$ est $\varnothing$-définissable.

(d) Minimiser κ_z et tirer une contradiction.

4.4. **Rigidité (ii) de Kunen.** *On suppose* $\mathbb{V} \models \mathrm{ZFC}(j)$.

(a) Soit λ un cardinal vérifiant $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$. Montrer qu'il existe $f\colon \lambda^{\aleph_0} \to \lambda$ telle que pour tout $A \subseteq \lambda$ de cardinal λ et tout $\alpha < \lambda$, il existe $s \in A^{\aleph_0}$ telle que $f(s) = \alpha$. [Énumérer les paires (A_β, α_β) par 2^λ et former des s_β tous distincts.]

(b) Soient $\kappa_0 = \operatorname{crit}(j)$, puis $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$ et enfin $\lambda = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$. Montrer que $j(\lambda) = \lambda$ et $\lambda^{\aleph_0} = 2^\lambda$.

(c) Soient f comme à la question 4.4.a, $A = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\}$ et $\kappa_0 < \lambda$. Montrer qu'il existe $s \in A^{\aleph_0}$ telle que $j(f)(s) = \kappa_0$. Déduire une contradiction.

(d) Où a-t-on utilisé le choix ? Où a-t-on utilisé le $\{\in, j\}$-remplacement ?

(e) Montrer que la rigidité permet de retrouver le théorème de Scott.

Notes conclusives

Tout traité de théorie des ensembles mentionne les grands cardinaux mais on recommande [Kanamori].

- **Repères historiques**

  Measurable cardinals were introduced by Ulam in [1930], where he proved that they are inaccessible. They are now known to be much larger than that, larger than all the hyperinaccessibles, Mahlos and weakly compacts. Indeed, because of their power, they are probably the best known large cardinals of all. The voice of caution reminds us that they were invented by the same fellow who invented the hydrogen bomb.[22]

  Avec sa note :

  [22] *This particular voice of caution belonged to my thesis advisor, John Burgess.* [Mad88a, § IV]

Cardinaux mesurables. • Introduits par Ulam travaillant sur une question de Banach [Ula30]. (L'École polonaise se penchant sur

[Kanamori] : Akihiro Kanamori. *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings.* Second. Springer Monographs in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2003, p. xxii + 536

[Ula30] : Stanisław Ulam. « Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre ». In : *Fundam. Math.* 16 (1930), p. 140-150

la théorie de la mesure donna aussi le théorème de Banach-Tarski inspiré par Hausdorff ; v. § S.) • Caractérisation modèle-théorique : [Kei62]. On a depuis également une interprétation catégorique : [Bla76] et indépendamment [Trn71]. • Si κ est mesurable, c'est le κ^{e} inaccessible : on l'attribue souvent à [Tar62, Theorem 3], mais celui-ci invoque [Han64]. La preuve semble apparaître dans [Kei62]. • Théorème de Scott « $\mathbb{L}$ n'a pas de mesurables » : [Sco61a]. Pour la démonstration par troncatures (i.e. en prenant l'ultrapuissance de HP_λ) j'ai suivi [Chang-Keisler]. • Représentants uniformes pour ultraproduit de classe propre (« *Scott's trick* ») : [Abstracts3, résumé 626t].

Cardinaux compacts. • En germe dès [ET43], et repris dans [ET61]. Les élèves de Tarski (Keisler, Hanf) ont établi leurs propriétés logiques [Han64]. • Autre caractérisation remarquable : κ faiblement compact ssi tout ordre total de cardinal κ contient une copie de κ ou de κ^{op}. • Ces cardinaux sont beaucoup étudiés du point de vue de la théorie de Ramsey, qui appartient à la combinatoire (v. § 11, notes conclusives) ; j'ai préféré mettre en avant les liens avec la logique mathématique. • De manière générale les grands cardinaux combinatoires (de type Ramsey) sont *inférieures et antérieurs* aux grands cardinaux de type logique, qui viennent plutôt des années 1950 ou 1960. L'exception notable est la classe des cardinaux mesurables, dont Ulam ignorait évidemment l'interprétation modèle-théorique. • La lecture modèle-théorique des grands cardinaux revient un peu en vogue ; [Bon20] et suite en cours [Bon+22].

Phénomènes de rigidité. • Rigidité de Kunen (avec choix mais sans définissabilité) : [Kun71a]. Cela n'interdit évidemment pas les plongements élémentaires $\mathbb{V} \rightarrowtail \mathbb{M}$, où $\mathbb{M}$

[Kei62] : Jerome Keisler. « Some applications of the theory of models to set theory ». In : *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr.)* Stanford : Stanford Univ. Press, 1962, p. 80-86

[Bla76] : Andreas Blass. « Exact functors and measurable cardinals ». In : *Pacific J. Math.* 63.2 (1976), p. 335-346

[Trn71] : Věra Trnková. « On descriptive classification of set-functors II ». In : *Comment. Math. Univ. Carolinae* 12 (1971), p. 345-357

[Tar62] : Alfred Tarski. « Some problems and results relevant to the foundations of set theory ». In : *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr.)* Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1962, p. 125-135

[Han64] : William Hanf. « Incompactness in languages with infinitely long expressions ». In : *Fund. Math.* 53 (1963/64), p. 309-324

[Sco61a] : Dana Scott. « Measurable cardinals and constructible sets ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961), p. 521-524

[Chang-Keisler] : Chen-Chung Chang et Jerome Keisler. *Model theory.* Third. T. 73. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, p. xvi+650

[Abstracts3] : Victor Klee. « The June meeting in Vancouver ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 61 (1955), p. 433-444

[ET43] : Paul Erdős et Alfred Tarski. « On families of mutually exclusive sets ». In : *Ann. of Math. (2)* 44 (1943), p. 315-329

[ET61] : Paul Erdős et Alfred Tarski. « On some problems involving inaccessible cardinals ». In : *Essays on the foundations of mathematics.* Magnes Press, Hebrew Univ., Jerusalem, 1961, p. 50-82

[Bon20] : Will Boney. « Model theoretic characterizations of large cardinals ». In : *Israel J. Math.* 236.1 (2020), p. 133-181

[Bon+22] : Will Boney et al. « Model Theoretic Characterizations of Large Cardinals Revisited ». In : (2022). arXiv 2202.00549

[Kun71a] : Kenneth Kunen. « Elementary embeddings and infinitary combinatorics ». In : *J.*

est une classe propre stricte (sinon ZFC démontrerait qu'il n'y a pas de cardinaux mesurables). • Ce théorème entraîne l'incohérence des « cardinaux de Reinhardt » théorisés peu avant. C'était la première fois qu'un axiome de grand cardinal hardi, mais naturel et plausible, donnait une contradiction. • La preuve de Kunen est plus élémentaire qu'à première vue car elle n'utilise qu'un cas particulier de Erdős-Hajnal ; j'ai suivi [Jech]. D'autres preuves existent depuis (v. [Kanamori, § 23] ; dernière en date [Zap96]) ; toutes utilisent le choix. L'analogue de Kunen sans choix est ouvert. • Rigidité de Suzuki (sans choix mais avec définissabilité) : [Suz99]. • Généralisations dans [HKP12]. • Le problème des plongements élémentaires de $\mathbb{V}$ n'est pas clos. On peut atténuer l'hypothèse $\mathbb{V} \models \mathrm{ZFC}(j)$ en supposant seulement la $\{\in, j\}$-séparation et le $\{\in\}$-remplacement. La rigidité de Kunen n'élimine pas cette possibilité, appelée « axiome de totalité » par son inventeur [Cor00]. On recommande l'introduction de [Ham01].

• **Terminologie**

Notion d'arbre ensembliste. L'adjectif « ensembliste » est pour bien distinguer des arbres graphe-théoriques. • La théorie géométrique des groupes considère des arbres graphe-théoriques hautement infinitaires qui ne sont pas bien fondés. • Inversement, l'arbre ensembliste $\omega + 1$ n'est pas un arbre graphe-théorique : il n'est pas graphe-théoriquement connexe.

Logiques faiblement compactes. • Il existe une variante encore plus faible de la compacité d'un cardinal, où l'on restreint non seulement le nombre de symboles, aussi celui d'*énoncés* à $\leqslant \kappa$. On l'appellera « très faible compacité ». • On a : « κ très faiblement compact » équivaut à « faible compacité en $\leqslant \kappa$ énoncés + κ inaccessible ». • Il y a un fossé entre les deux [Boo76]. • « *Tarski's original formulation of weak compactness had the more stringent condition* $|\Sigma| = \kappa$ *and does not imply the inaccessibility of* κ *(Boos [76]), while the one that is adopted here does (4.4) which is the modern preference* » [Kanamori, p. 37].

• **Théorème de Scott.** • On rappelle que $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ réduit au minimum le degré d'ouverture de $P[\mathbb{V}]$ (puisque $\mathbb{L}$ est le plus petit « modèle intérieur »), alors que l'existence de mesurables paraît ne parler que de la longueur de $\mathrm{Ord}[\mathbb{V}]$. Le théorème est alors étonnant car on imagine mal une corrélation entre les deux. • Cette explication est bien sûr trompeuse : la mesurabilité de κ concerne au fond le degré d'ouverture de P aux alentours de κ. • Les spécialistes de théorie des ensembles aiment trop les grands cardinaux pour accepter $\mathbb{V} = \mathbb{L}$.

• **Rigidité sans fondation.** V. [Dag+14].

Symbolic Logic 36 (1971), p. 407-413
[Jech] : Thomas Jech. *Set theory.* Second. Perspectives in Mathematical Logic. Berlin : Springer-Verlag, 1997, p. xiv + 634
[Zap96] : Jindřich Zapletal. « A new proof of Kunen's inconsistency ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 124.7 (1996), p. 2203-2204
[Suz99] : Akira Suzuki. « No elementary embedding from V into V is definable from parameters ». In : *J. Symbolic Logic* 64.4 (1999), p. 1591-1594
[HKP12] : Joel Hamkins, Gregory Kirmayer et Norman Perlmutter. « Generalizations of the Kunen inconsistency ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 163.12 (2012), p. 1872-1890
[Cor00] : Paul Corazza. « The wholeness axiom and Laver sequences ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 105.1-3 (2000), p. 157-260
[Ham01] : Joel David Hamkins. « The wholeness axioms and $V = \mathrm{HOD}$ ». In : *Arch. Math. Logic* 40.1 (2001), p. 1-8
[Boo76] : William Boos. « Infinitary compactness without strong inaccessibility ». In : *J. Symbolic Logic* 41.1 (1976), p. 33-38
[Dag+14] : Ali Daghighi et al. « The foundation axiom and elementary self-embeddings of the universe ». In : *Infinity, computability, and metamathematics.* T. 23. Tributes. Coll. Publl.,

• **Cardinaux supercompacts**

Définition. Un cardinal κ est *supercompact* si pour tout ordinal α, il existe une collection transitive $\mathbb{M}_\alpha$ et un plongement élémentaire $j_\alpha : \mathbb{V} \rightarrowtail \mathbb{M}_\alpha$ tels que :
- κ est le premier ordinal déplacé par j_α ;
- $j_\alpha(\kappa) > \alpha$;
- $\mathbb{M}_\alpha^\alpha \subseteq \mathbb{M}_\alpha$.

(L'existence, pour chaque α, d'un j_α signifie qu'il existe une vraie formule à paramètres $J(\alpha, x, y)$ qui en chaque α ordinal définit un plongement élémentaire $y = j_\alpha(x)$ etc.) Cette définition pourrait sembler ad hoc, pour le besoin de renforcer les jeux d'élémentarité. Magidor a révélé le lien entre supercompacité et propriétés de la sémantique pleine du deuxième ordre (v. ex. 15.9).

Théorème ([Mag71])**.** L'(éventuel) plus petit supercompact serait aussi le cardinal de Löwenheim de la sémantique pleine $\mathbb{A}^{2,p}$, i.e. κ tel que tout $\mathbb{A}^2$-énoncé φ ayant un modèle ensembliste possède aussi un modèle de cardinal $\leqslant \kappa$.

En revanche il est cohérent à ZF que, si de tels cardinaux existent, le premier d'entre eux soit aussi le premier fortement compact [Mag76].

• **Grands cardinaux.** Pour la théorie des ensembles, le but des axiomes de grands cardinaux n'est pas d'éclairer les propriétés des extensions de $\Lambda_{\omega,\omega}$, mais celles de la nature ensembliste. Nous laissons le sujet. La référence pour les propriétés de grands cardinaux est bien sûr [Kanamori, p. 472].

• **Propriété de l'arbre**

Théorème.

(i) Le cardinal $\aleph_1$ n'a pas la propriété de l'arbre (attribué à Aronszajn).

(ii) Si cohérente, ZF ne démontre pas que $\aleph_2$ n'a pas la propriété de l'arbre (Mitchell).

Un « arbre d'Aronszajn » est un arbre ensembliste montrant que κ n'a pas ladite propriété. • Excellente introduction au sujet, avec remarques historiques : [Mor18]. Pour approfondir, [Kunen, § III.5] (lecture difficile). • La propriété de l'arbre inspire encore une abondante littérature. Il est difficile de donner un état des lieux à jour ; commencer par [Ung21, premières pages].

London, 2014, p. 89-112
[Mag71] : Menachem Magidor. « On the role of supercompact and extendible cardinals in logic ». In : *Israel J. Math.* 10 (1971), p. 147-157
[Mag76] : Menachem Magidor. « How large is the first strongly compact cardinal ? or A study on identity crises ». In : *Ann. Math. Logic* 10.1 (1976), p. 33-57
[Mor18] : Frédéric Morneau-Guérin. « Le lemme de König et les arbres d'Aronszajn ». In : *Bulletin AMQ* 58.2 (mai 2018), p. 44-60
[Kunen] : Kenneth Kunen. *Set theory.* T. 34. Studies in Logic. London : College Publications, 2011, p. viii + 401
[Ung21] : Spencer Unger. « Successive failures of approachability ». In : *Israel J. Math.* 242.2 (2021), p. 663-695