Chronologie sommaire

Mostowski — I will tell you still one story. After the soldiers came and I took my bread... we were led to what the Germans call a "Durchgangslager", that is the term. And people were divided in two parts. The older ones in one direction, the younger in the other direction and the younger ones had to be sent to a concentration camp, but I somehow escaped – but that is beside the point.

> John Crossley. « Reminiscences of logicians ». In : *Algebra and logic (Fourteenth Summer Res. Inst., Austral. Math. Soc., Monash Univ., Clayton, 1974)*. 1975, 1-62. Lecture Notes in Math., Vol. 450

La chronologie ci-dessous ne prétend guère à l'objectivité. • J'ai délibérément omis théories du calcul et de la démonstration. • Quoique lui imputant plusieurs décennies de retard dans la prise au sérieux de la logique mathématique, je me suis fait la violence de mentionner le logicisme. • La théorie des ensembles, disjointe de la logique, est signalée par une astérisque.

§ 5 **1847 : naissance de l'école algébrique.** Boole algébrise le raisonnement propositionnel ; pas de vrai précurseur. Les continuateurs immédiats seront moins révolutionnaires et la quantification, lentement conquise.

> George Boole. *The Mathematical analysis of logic, Being an essay towards a calculus of deductive reasoning*. Cambridge : Macmillan, Barclay & Macmillan, 1847. 82 p.

§ 6 **1868 : un *modèle* pour la géométrie hyperbolique.** • La question de la redondance du « postulat des parallèles » est ancienne. Au XVIII^{e} siècle Saccheri crut en produire une démonstration par l'absurde ; Lambert sut ne pas y réussir. Par la suite Gauß, Bolyai, Lobatchevski développèrent des « théories non euclidiennes ». • Beltrami paraît le premier à délibérément chercher un modèle pour une géométrie jusque-là donnée axiomatiquement : il l'*interprète* dans une structure usuelle. • Après lui d'éminents mathématiciens comme Klein et Poincaré produiront d'autres interprétations (qu'ils appelleront modèles). • Comme toute branche des mathématiques digne de ce nom, la logique doit beaucoup à la géométrie ; en ses débuts la tentative d'évacuer l'intuition géométrique fut une stérilisante erreur.

Eugenio Beltrami. *Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea.* Napoli : Fran. e Gennaro de Angelis, 1868

§ 1, § 3 * **1873–1884 : découverte du transfini.** Travaux principaux de Cantor ; grand rôle, surtout initial, de Dedekind. • 1873 (pub. 74) : indénombrabilité des réels. • 1878 : forme naïve de l'hypothèse du continu. • 1883 : ordinaux transfinis. Peu savent contribuer aux visions de Cantor ; Bendixson y réussit. Après 1884, Cantor se fait plus rare. • 1887 : Dedekind démontre le théorème de Cantor-Bernstein (non publié).

Ivar Bendixson. « Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points (Extrait d'une lettre adressée à M. Cantor à Halle) ». In : *Acta Math.* 2.1 (1883), p. 415-429 | Georg Cantor. « Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen ». In : *J. Reine Angew. Math.* 77 (1874), p. 258-262 | Georg Cantor. « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre ». In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878), p. 242-258 | Georg Cantor. « Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 5 ». In : *Math. Ann.* 21.4 (1883), p. 545-591

1880–1910 : trois courants (1), les volapüks du logicisme. Diverses réflexions sur le formalisme ; leur fortune éditoriale est mal corrélée à leur intérêt mathématique. • 1879 : *idéographie* de Frege. • 1889 : formalisme de Peano (ironiquement nommé « pasigraphie » par Schröder), qui s'imposera ; on peut le déplorer. • 1910–1913 : à travers la somme de Russell et Whitehead, déjà presque anachronique, le logicisme aura durable influence. • Le plus étonnant reste que des mathématiciens s'y soient pris.

Giuseppe Peano. *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Augusta Taurinorum (Turin) : Fratres Bocca, 1889. xvi+20

1880–1910 : trois courants (2), l'école algébrique. Sa reconnaissance a souffert de la notoriété du logicisme. • 1885 : Peirce semble entrevoir la logique élémentaire. Notation Σ/Π. Ses travaux restent inaperçus ; en Europe, Frege a plus de visibilité. • 1890–1905 : Schröder publie son traité, à quoi Skolem se référera souvent. • 1910 : on peut rattacher à cette branche les préoccupations de Weyl tentant d'élucider le mot « definit ». • Si Schröder est aujourd'hui peu lisible, retenir que *sans l'école algébrique, point de Löwenheim, point de Skolem.*

Charles Peirce. « On the Algebra of Logic : A Contribution to the Philosophy of Notation ». In : *Amer. J. Math.* 7.2 (1885), p. 180-202 | Ernst

SCHRÖDER. *Vorlesungen über die Algebra der Logik I*. Leipzig : B. G. Teubner, 1890. xii+717 | Hermann WEYL. « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ». In : *Math. naturw. Bl.* 7 (1910), p. 93-95, 109-113

1880–1910 : trois courants (3), néo-classicisme de l'école axiomatique.
§ 8 On peut faire remonter les efforts « néo-euclidiens » pour axiomatiser les objets
mathématiques à Pasch, voire à l'école prussienne d'analyse (Weierstraß) dont
§ 11 Cantor émane à sa façon. • 1888 : Dedekind axiomatise les entiers au deuxième
ordre et prouve leur absolue catégoricité. • 1899 : *Grundlagen der Geometrie*
de Hilbert. La coordinatisation des plans projectifs desarguésiens reste un cas
§ B d'école d'*interprétation* en logique élémentaire. • 1903 : Huntington axiomatise
§ 15 les réels au deuxième ordre et prouve leur absolue catégoricité. • 1904 : Veblen
introduit le concept de catégoricité, attribuant le nom à Dewey. • L'école axiomatique survivra jusque dans les années 1930, par les « *postulate theorists* » américains, dont Huntington, Langford, Sheffer ou Veblen.

Richard DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig : Vieweg und Sohn, 1888. xv+58 | David HILBERT. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig : Teubner, 1899. 92 p. | Edward HUNTINGTON. « Complete sets of postulates for the theory of real quantities ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 4.3 (1903), p. 358-370 | Oswald VEBLEN. « A system of axioms for geometry ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 5.3 (1904), p. 343-384

1897–1905 : l'âge des antinomies. Leur nature est diverse ; certaines concernent
les visions de Cantor, d'autres ruinent les théories naïves de la vérité. On y voit
§ 1 a posteriori une matrice commune. • 1891 : Cantor retrouve l'indénombrabilité
des réels, par argument diagonal. • 1897 : il écrit à Hilbert que la « totalité
§ 22 des ℵ » ne saurait posséder d'ℵ. • 1897 : Burali-Forti critique le caractère ordinal de Ord. • 1903 : Zermelo mentionne à Hilbert le problème d'une *Menge aller Mengen*. • 1905 : G. Kőnig et Richard discutent le plus petit nombre non définissable. • Avant 1908 : paradoxe de Berry, rapporté par Russell.

Cesare BURALI-FORTI. « Una questione sui numeri transfiniti ». In : *Rend. Circ. Mat. Palermo* 11 (1897), p. 154-164 | Georg CANTOR. « Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre ». In : *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 1 (1892), p. 75-78 | Julius KÖNIG. « Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem ». In : *Math. Ann.* 61 (1905), p. 156-160 | Jules RICHARD. « Lettre à la rédaction ». In : *Revue générale des Sciences pures et appliquées* 12 () | Bertrand RUSSELL. « Mathematical logic as based on the theory of types ». In : *Am. J. Math.* 30 (1908), p. 222-262

1900 : tout le poids de Hilbert (1). Parmi ses 23 problèmes, Hilbert pose : 1. le « problème de la puissance du continu de Cantor », 2. « la cohérence des axiomes arithmétiques », et 10. la « décision de la résolubilité d'une équation diophantienne ». Il appelle ainsi de ses vœux une théorie des ensembles, une théorie de la démonstration, une théorie de la calculabilité/décidabilité. • Le relativisme et le concept de modèle resteront étrangers à la vision de Hilbert ; c'est une force, et ce sera une faute.

David Hilbert. « Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900 ». In : *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1900), p. 253-297

§ 24* **1904–1917 : effervescence ensembliste.** • 1904 : au congrès de Heidelberg, G. Kőnig croit réfuter l'hypothèse du continu ; son argument est démonté par
§ 21, § 23 Hausdorff et Zermelo. • 1904 : Zermelo démontre l'axiome du choix, et sa quête aboutit en 1908 : première axiomatisation (imparfaite) de l'appartenance.
§ 2 • 1908 : Hausdorff donne corps à la théorie des ordres de Cantor. Ses travaux culminent en 1914 : première somme de théorie descriptive des ensembles. • 1916 : il publie en même temps qu'Alexandroff la *preuve de l'hypothèse du*
§ 22 *continu pour les boréliens.* • 1917 : Mirimanoff uniformise les ordinaux.

Pavel Alexandroff. « Sur la puissance des ensembles mesurables ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 162 (1916), p. 323-325 | Felix Hausdorff. « Untersuchungen über Ordnungstypen ». In : *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl.* 59 (1907), p. 84-159 | Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig : Veit & Comp., 1914. viii+476 | Felix Hausdorff. « Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen ». In : *Math. Ann.* 77 (1916), p. 430-437 | Julius Kőnig. « Zum Kontinuum-problem ». In : *Math. Ann.* 60 (1905), p. 177-180 | Dimitri Mirimanoff. « Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles ». In : *Enseign. Math.* 19 (1917), p. 37-52 | Ernst Zermelo. « Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann ». In : *Math. Ann.* 59.4 (1904), p. 514-516 | Ernst Zermelo. « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I ». In : *Math. Ann.* 65.2 (1908), p. 261-281

1906–1910 : narquois et sceptiques. • 1906 : Poincaré raille la « logistique » de Peano-Russell-Whitehead, et prédit sa stérilité. • 1908 : Brouwer attaque le tiers-exclu. Ses conceptions épistémologiques se feront franchement ésotériques. • 1910 : Weyl commence à se rapprocher des thèses de Brouwer.

Luitzen Brouwer. « De onbetrouwbaarheid der logische principes ». In : *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* 2 (1908), p. 152-158 | Henri Poincaré.

« Les mathématiques et la logique ». In : *Rev. de métaphys. et de morale* 14 (1906), p. 294-317

§ 15 **1915–1922 : relativisme — naissance de la logique.** • 1915 : Löwenheim fonde la logique mathématique dans un texte inaperçu sauf de Skolem, lequel date de cette époque passée à Göttingen son « paradoxe ». • Intense activité de Skolem, dont les publications restent confidentielles. Algèbres de Boole et de Heyting, élimination des quantificateurs, logique monadique du deuxième
§ 10, § 21 ordre, satisfaisabilité dénombrable. • 1922 : sa communication à Helsinki a 20 ans d'avance. Il y définit la logique élémentaire, passe juste à côté de sa complétude (l'argument est essentiellement celui que fournira Gödel), revient sur la satisfaisabilité dénombrable, formule ZF, énonce le « paradoxe de Skolem », et prévoit l'incomplétude de ZF, jugeant le problème difficile. Ni Gödel ni Tarski ne s'y référeront. • En 1922 la logique mathématique existe ; contre un préjugé répandu elle ne doit *rien* à l'axe logiciste. Mais celui-ci domine et il faudra l'école polonaise pour le faire reculer.

Leopold Löwenheim. « Über Möglichkeiten im Relativkalkül ». In : *Math. Ann.* 76.4 (1915), p. 447-470 | Thoralf Skolem. *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls.* Kristiania, 1919. 37 p. | Thoralf Skolem. *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.* Kristiania, 1920. 36 p. | Thoralf Skolem. « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre ». In : 5. Kongreß Skandinav. in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Helsinki : Akademiska Bokhandeln, 1923, p. 217-232

1917–1930 : tout le poids de Hilbert (2). À Göttingen, centre des mathématiques mondiales, règne Hilbert. Son positivisme est le revers de son énergie stimulante. • 1917 : cours sur les fondements. Dès cette époque son assistant Bernays joue un rôle considérable. • 1918 (pub. 1926) et 1921 : Bernays et Post démontrent indépendamment la complétude de la logique propositionnelle. • 1928 : traité d'Ackermann et Hilbert, a posteriori peu en prise avec la modernité. Löwenheim n'est pas cité ; Skolem, seulement pour la forme normale. Logique du « premier » et « deuxième ordre » sont présentées parallèles.
§ 10, § SÉ2 • 1929 (pub. 1930) : doctorat de Gödel ; sa preuve de complétude est essentiellement l'argument antérieur de Skolem, mais Hilbert en faisait un problème ouvert. • 1931 : Herbrand meurt ; s'il eût vécu, Bourbaki l'eût-il pris comme conseiller en logique ? • Göttingen accouchera de la théorie de la démonstration et aura contribué à l'avénement de la calculabilité ; mais la théorie des modèles ne lui doit guère.

David Hilbert et Whilhelm Ackermann. *Grundzüge der theoretischen Logik*. T. 27. Springer, Cham, 1928 | Paul Bernays. « Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der “Principia Mathematica” ». In : *Math. Z.* 25 (1926), p. 305-320 | Kurt Gödel. « Über die Vollständigkeit des Logikkalküls ». Thèse de doct. Universität Wien, 1929 | Jacques Herbrand. « Recherches sur la théorie de la démonstration ». Thèse de doct. Faculté des Sciences de Paris, 1930, p. 128 | Emil Post. « Introduction to a General Theory of Elementary Propositions ». In : *Amer. J. Math.* 43.3 (1921), p. 163-185

1918–1939 : l’École polonaise. On ne la résume pas à Tarski : v. théorie § SÉ1 descriptive des ensembles, et ne pas oublier Łukasiewicz. • 1920 : création de *Fundamenta Mathematicae* ; Sierpiński et Kuratowski au premier plan. Tarski § 17 y publie dès 1923. • 1927–1930 : le séminaire de Tarski reprend l’élimination § 6 des quantificateurs ; travaux de Presburger. • 1934–1935 : la sémantique enfin décrite et la conséquence logique élucidée. (Certains philosophes voient en Bol- § F zano un précurseur.) • L’algébrisation de la logique paraît devoir quelque chose à Lindenbaum ; ce sera contesté par Tarski. • L’école polonaise est l’avant-garde de la modernisation de la logique.

Wacław Sierpiński. « Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points ». In : *Fundam. Math.* 1 (1920), p. 1-6 | Mojżesz Presburger. « Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt ». In : *Comptes-rendus du premier Congrès des Mathématiciens des Pays slaves/Sprawozdanie z I Kongresu matematyków krajów słowiańskich, Varsovie 1929*. 1930, p. 92-101 | Alfred Tarski. « Über den Begriff der logischen Folgerung ». In : t. 394. Actes du Congrès international de philosophie scientifique. Sorbonne, Paris, 1935. Paris : Hermann, 1936, p. 1-11 | Alfred Tarski. « Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen ». In : *Stud. Philos* 1 (1935), p. 261-405

§ 21 * **1922–1937 : ∈ rentre dans le rang.** • 1922 : parallèles à l’élucidation de Skolem, les travaux de Fraenkel asseyent l’axiomatique de Zermelo ; ils connaî- § P tront meilleure fortune. • 1925 : ceux de von Neumann confirment que, malgré Zermelo, *la théorie des ensembles est devenue une théorie mathématique.* § 1 • 1927 : D. Kőnig isole un lemme essentiel dans ses travaux sur la divisibilité § 25 des cardinaux. • 1930 : découverte de la hiérarchie cumulative par Zermelo, et des cardinaux inaccessibles par Sierpiński et Tarski. • Divers systèmes se succèdent, dont 1937 : celui de Bernays plus tard repris par Gödel. • Pendant toute cette période l’URSS et surtout la Pologne jouent un grand rôle en théorie descriptive des ensembles, notamment avec Kuratowksi et Sierpiński.

Paul Bernays. « A system of axiomatic set theory I ». In : *J. Symb. Log.* 2 (1937), p. 65-77 | Adolf Fraenkel. « Der Begriff „definit“ und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms ». In : *Berl. Ber.* 1922 (1922), p. 253-257 | Adolf Fraenkel. « Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre ». In : *Math. Ann.* 86.3-4 (1922), p. 230-237 | Dénes Kőnig. « Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche ». In : *Acta Litt. Sci. Szeged* 3 (1927), p. 121-130 | Wacław Sierpiński et Alfred Tarski. « Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles ». In : *Fundam. Math.* 15 (1930), p. 292-300 | János von Neumann. « Eine Axiomatisierung der Mengenlehre ». In : *J. Reine Angew. Math.* 154 (1925), p. 219-240 | Ernst Zermelo. « Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre ». In : *Fundam. Math.* 16 (1930), p. 29-47

§ G **1925–1935 : l’intuitionnisme se structure.** Brouwer marginalisé, le courant prend vite des allures de *mouvance*. • 1925 : Kolmogorov entrevoit la double négation. • 1927 : Weyl conquis aux thèses de Brouwer, dont il se détachera plus tard. • 1930 : Heyting formalise le raisonnement intuitionniste.
§ H • 1933 : Gödel propose des liens entre intuitionnisme, prouvabilité, et modalité de Lewis (qui remonte aux années 1910), puis • 1934 : il achève l’interprétation de la logique classique en logique intuitionniste. Cette dernière n’a pas encore de sémantique.

Kurt Gödel. « Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls ». In : *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*. 4. Wien, 1933, p. 39-40 | Kurt Gödel. « Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie ». In : *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*. T. 4. Wien, 1933, p. 34-38 | Arend Heyting. « Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik I ». In : *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* 1930 (1930), p. 42-56 | Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov. « Über das Prinzip tertium non datur ». In : *Rec. Math. Moscou* 32 (1925), p. 646-667

§ 19, § 20 **1930 : l’éclair, et puis l’aveuglement.** • 1930 (pub. 1931) : Gödel découvre l’incomplétude, et notamment, celle de la logique d’ordre supérieur. Peu comprennent ; von Neumann assurément. • Mais les pistes sont brouillées : Gödel fait référence à Russell-Whitehead, et ne publie pas la preuve du « second théorème ». Le « cercle de Vienne » bénéficie de son affiliation. Les malentendus s’amoncellent et les deux explications de l’incomplétude passeront inaperçues :
§ 11, § 16 • 1934 : découverte des modèles non standard de l’arithmétique par Skolem. • 1936 : preuve de la cohérence de PA par Gentzen.

Gerhard Gentzen. « Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie ». In : *Math. Ann.* 112.1 (1936), p. 493-565 | Kurt Gödel. « Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I ». In : *Monatsh. Math. Phys.* 38.1 (1931), p. 173-198 | Thoralf Skolem. « Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen ». In : *Fundam. Math.* 23 (1934), p. 150-161

§ 9, § J **1936 : de l'autre côté.** • En 1935, Gentzen a créé la théorie de la démonstration, dépassant de beaucoup les travaux de Jaśkowski. • 1936 : premier article de Turing. Le λ-calcul de Church s'affine, et débouche sur la « thèse de Church » : les théories du calcul (dont celle de Herbrand-Gödel) s'unifient, et Kleene les poursuit. Rosser étend les théorèmes de Gödel. Un peu plus âgé, Curry fait partie des futurs grands informaticiens. • On retient 1936 comme année de naissance de la logique informatique. C'est également celle de la fondation de l'*Association for Symbolic Logic* et du *Journal of Symbolic Logic*. • Avant même l'embrasement européen, le centre de gravité se déplace vers les États-Unis, où von Neumann travaille depuis 1933 et Gödel commence à se rendre dès 1934. • La réponse légendaire de Hilbert à Rust n'est pas traçable avec certitude ; mais ci-gîra Göttingen.

Stanisław Jaśkowski. « On the rules of suppositions in formal logic ». In : Studia logica 1 (1934), p. 32 | Gerhard Gentzen. « Untersuchungen über das logische Schließen I ». In : *Math. Z.* 39.1 (1935), p. 176-210 | Barkley Rosser. « Extensions of some theorems of Gödel and Church ». In : *J. Symb. Log.* 1 (1936), p. 87-91

1936–1938 : la modernité silencieuse. Chez les esprits les plus lucides, impollués par le péanisme, l'algèbre ou la géométrie s'unissent à la logique.
§ 11 • 1936 : Maltsev atteint la compacité non dénombrable et commence à l'appli-
§ 5 quer. (Le nom « compacité » ne sera donné qu'en 1952 par Tarski.) • 1936 :
le théorème de représentation de Stone lie la logique à l'analyse fonctionnelle.
§ 17 • 1937 : Mostowski s'empare de l'idée et initie l'étude descriptive des espaces de
§ 13 théories logiques. • 1938 : axiomatisation des structures définissables (en avance
sur les anneaux polyadiques ou cylindriques) et reformulation de la théorie de
§ F Galois en logique pure par Krasner.

Marc Krasner. « Une généralisation de la notion de corps ». In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 17 (1938), p. 367-385 | Anatoly Maltsev. « Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik ». In : *Rec. Math. Moscou, n. Ser.* 1 (1936), p. 323-336 | Andrzej Mostowski. « Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik ». In : *Fundam. Math.* 29 (1937), p. 34-53 | Marshall Stone. « The theory of representations for Boolean algebras ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 40.1 (1936), p. 37-111

§ 26, § 27 * **1938 : *Gödeldämmerung.*** Gödel avait la cohérence relative de AC dès 1936 ; il publie celle de HC entre 1938 et 1940. Puis il entre dans le silence.

Kurt Gödel. « The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 24 (1938), p. 556-557 | Kurt Gödel. *The Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.* Annals of Mathematics Studies, no. 3. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1940, p. 66

1939–1945 : les vivants et les morts. • Tarski quitte fortuitement l'Europe en août 1939 ; Gödel quelques mois plus tard. • Dans les années qui suivent, Lindenbaum et Presburger sont assassinés par les nazis ; Hausdorff et D. Kőnig fuient les persécutions dans la mort ; Mostowski réchappe par miracle. Les locaux et les archives de *Fundamenta Mathematicae* brûlent le 1er septembre 1942. • Emprisonné pour nazisme, Gentzen meurt dans un camp soviétique.

§ 14 **1948–1954 : « théorie des modèles ».** • Nom donné par Tarski à une discipline qu'il n'invente pas seul, comme le montrent les travaux de Robinson, et avant eux Maltsev. • 1948 : doctorat de Henkin, qui jouera un rôle important dans la mathématisation de la logique dans le bloc de l'Ouest. • 1953 : (§ 18) doctorat de Fraïssé, premier article de Hintikka. Les liens entre logique et jeux de va-et-vient s'affineront avec Ehrenfeucht. Dès cette époque, la vision de la théorie des modèles comme « liens entre syntaxe et sémantique » est simpliste. (§ 16) • Ne pas négliger les importantes contributions polonaises, notamment de Łoś. Mais le cas des ultraproduits, dans l'ombre jusque vers 1958, montre qu'il n'est de succès sans l'adoubement de Tarski.

Roland Fraïssé. « Sur quelques classifications des systèmes de relations ». Thèse de doct. Université de Paris, 1953. iii+viii+152 | Jaakko Hintikka. « Distributive normal forms in the calculus of predicates ». In : *Acta Philos. Fenn.* 6 (1953), p. 71 | Jerzy Łoś. « Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres ». In : *Mathematical interpretation of formal systems.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955, p. 98-113 | Abraham Robinson. *On the metamathematics of algebra.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951, p. ix+195 | Alfred Tarski. « Contributions to the theory of models I ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 57 (1954), 572-581 = Indagationes Math. 16, 572-581 (1954)

1948–1958 : sémantiques pour les logiques non classiques. • Une interprétation topologique de la modalité fut donnée dès les années 1930, puis explorée par McKinsey et Tarski, mais la sémantique faisait défaut. • 1948 :

Mostowski puis Rasiowa proposent des interprétations algébriques des logiques § G, § H « de Lewis et de Heyting » (modale et intuitionniste). • 1958–1959 : Bayart, § I Hintikka et Kripke dégagent leur interprétation « par mondes possibles ». • La sémantique faisceautique de Joyal est postérieure.

Arnould Bayart. « Correction de la logique modale du premier et du second ordre S_5 ». In : *Logique et Analyse* 1.1 (1958), p. 28-45 | Saul Kripke. « A completeness theorem in modal logic ». In : *J. Symb. Logic* 24 (1959), p. 1-14 | John McKinsey. « A solution of the decision problem for the Lewis systems S_2 and S_4, with an application to topology ». In : *J. Symbolic Logic* 6 (1941), p. 117-134 | Helena Rasiowa. « Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis ». In : *Fund. Math.* 38 (1951), p. 99-126

1963 : *America triumphans ?* (1). En théorie des modèles l'école de Berkeley s'impose, et le congrès qui s'y tient en 1963 consacre son chef de file § 7 Tarski, autoproclamé « *the greatest living sane logician* ». • 1958–1959 : Karp et Scott donnent leur essor aux logiques infinitaires. 1961 : Vaught emploie la théorie descriptive des ensembles en logique, ouvrant la voie à 1962 : théorème § SÉ5 de catégoricité de Morley (pub. 1965). 1963 : Hanf, puis Keisler lient compacité des logiques infinitaires et axiomes de grands cardinaux.

John Addison, Leon Henkin et Alfred Tarski, éd. *The theory of models*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1965. xv+494 | Michael Morley. « Categoricity in power ». Thèse de doct. The University of Chicago, 1962

* **1963 : *America triumphans ?* (2).** • 1963 : Cohen obtient l'indépendance négative de AC et HC sur ZF, puis la médaille Fields en 1966. • Pourtant dès 1962 Mycielski et Steinhaus avaient introduit l'axiome de détermination.

Paul Cohen. « The independence of the continuum hypothesis ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 50 (1963), p. 1143-1148 | Jan Mycielski et Hugo Steinhaus. « A mathematical axiom contradicting the axiom of choice ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 10 (1962), p. 1-3

§ K **1969 : la fin et le début.** • 1968 : Ax applique avec succès la théorie des § N modèles aux corps finis. • 1969 : Lindström caractérise la logique élémentaire, assemblant a posteriori tous les phénomènes depuis 1915. La « théorie des modèles abstraite » ne tiendra pas ses promesses. • 1969 : premier article de Shelah.

James Ax. « The elementary theory of finite fields ». In : *Ann. of Math. (2)* 88 (1968), p. 239-271 | Per Lindström. « On extensions of elementary logic ». In : *Theoria* 35 (1969), p. 1-11 | Saharon Shelah. « Stable theories ». In : *Israel J. Math.* 7 (1969), p. 187-202