Compléments au chapitre I (« Variations sur C·A·N·T·O·R »)

Aperçu du chapitre. Les compléments sont structurés comme le cours, mais les sections sont de longueur et difficulté moins uniformes. Chacune possède encore exercices et notes conclusives. • Le *continu arithmétique* est l'unique corps ordonné complet au sens de Dedekind (§ A) ; on en redémontre l'existence et l'unicité. • Le *théorème de division de Lindenbaum* (§ B) affirme, sans choix, la régularité de la multiplication d'un cardinal par un entier non nul. • On présente aussi le rôle des *ultrafiltres en topologie* (§ C). • L'*algèbre topologique* (§ D) algébrise les opérateurs de topologie ; un résultat important est le *théorème de McKinsey-Tarski*, parfois utile aux logiques non classiques.

§ A. Notions de nombres : réels

On rappelle l'unicité puis l'existence du *continu arithmétique*, i.e. du corps ordonné $(\mathbb{R}\,; +, \cdot, \leqslant)$. Les deux sous-sections sont indépendantes. § A.1 établit la propriété caractéristique du groupe ordonné $(\mathbb{R}\,; +, \leqslant)$, et donc du corps ordonné $(\mathbb{R}\,; +, \cdot, \leqslant)$. Ce dernier possède de nombreuses modélisations ; celle exposée en § A.2 provient d'une élégante inspiration algébrique.

Prérequis : § 2.

§ A.1. Unicité

Définition (complétude au sens de Dedekind)**.** Un ordre total $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ est *complet au sens de Dedekind* s'il vérifie le principe : chaque partie non vide et majorée possède une borne supérieure.

Remarque. La quantification sur les parties est tributaire d'un cadre ensembliste lui donnant sens. C'est une quantification « non élémentaire », ou « d'ordre supérieur ».

Pour deux parties X, Y d'un ordre, on écrit $X \leqslant Y$ si $(\forall x)(\forall y)[(x \in X \wedge y \in Y) \to (x \leqslant y)]$.

Définition (complétude au sens de Hölder)**.** Un ordre total $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ est *complet au sens de Hölder* s'il vérifie le principe :

> pour chaque paire de parties X, Y non vides, si $X \leqslant Y$, alors $(\exists z)(X \leqslant \{z\} \leqslant Y)$.

Remarques

— Un ordre total est complet au sens de Hölder ss'il l'est au sens de Dedekind ; la formulation à la Hölder est plus symétrique.

— Notamment la condition « Dedekind$^{\mathrm{op}}$ » (avec des minorants et des bornes inférieures) équivaut, pour un ordre total, à la condition de Dedekind.

— Complétude et densité (v. § 2.2) sont indépendantes : penser à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ dans l'ordre usuel.

— Tolérer des parties vides demanderait d'avoir un plus grand et un plus petit éléments ; c'est peu compatible avec une structure de groupe.

— La variante stricte naïve :

> pour chaque paire de parties X, Y non vides, si $X < Y$, alors $(\exists z)(X < \{z\} < Y)$

écrase l'ordre en au plus un point. La restreindre à des parties X, Y de cardinalité bornée est une forme de *saturation* (§ 17), et peut mener aux nombres surréels (§ U, ex. U.3).

La complétude au sens de Hölder est donc bien adaptée au théorème suivant ; d'autres notions non équivalentes conviennent mieux à d'autres contextes.

Théorème. Soit $(\mathbb{A}\,; +, \leqslant)$ un groupe abélien totalement ordonné complet au sens de Hölder. Alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{R}$ en tant que tel.

Remarques

— L'analogue pour des ordres purs sans structure algébrique est faux : les ordres finis, plus généralement les ordinaux, également les complétions d'ordres de cardinal $> |2|^{|\aleph_0|}$ (exercice A.2), sont d'immédiats contre-exemples.

— L'hypothèse de commutativité est superflue, pour la bonne définition de « groupe totalement ordonné » : v. notes conclusives.

Démonstration. Tous les isomorphismes sont dans la catégorie des groupes ordonnés (isomorphismes de groupes croissants). On va montrer qu'il y a (au plus) trois types d'isomorphisme : trivial, non trivial non dense, non trivial dense. La viabilité du troisième cas est établie en § A.2. On suppose $\mathbb{A}$ non trivial.

Notons que $\mathbb{A}$ est *archimédien*, i.e. pour tout $a \neq 0$, le sous-groupe $\langle a \rangle$ est non borné. Il suffit de le voir pour $a > 0$. Supposons $\langle a \rangle$ majoré : l'ensemble des majorants étant non vide, $\langle a \rangle$ possède une borne supérieure, disons b, et clairement $b > a$. Ainsi $0 < b - a < b$ donc $b - a$ ne majore pas $\langle a \rangle$. Il existe alors un entier k tel que $ka \geqslant b - a$, d'où $b \leqslant (k+1)a$; contradiction.

L'étude se divise en deux, selon que l'ordre $(\mathbb{A}; \leqslant)$ est dense ou non, i.e. selon qu'il vérifie ou non :

$$(\forall x)(\forall y)[(x < y) \to (\exists z)(x < z < y)].$$

Si $(\mathbb{A}; \leqslant)$ n'est pas dense, soit $(x < y)$ une paire l'attestant. On montre $\mathbb{A} = \langle y - x \rangle$. Soit en effet $z \in \mathbb{A}$; on peut supposer $z > 0$. Par archimédianité, soit $k > 0$ minimal tel que $z \leqslant k(y - x)$. Alors :

$$(k-1)(y-x) < z \leqslant k(y-x),$$

donc $0 < z - (k-1)(y-x) \leqslant y - x$. La non-densité force l'égalité, d'où $z = k(y-x) \in \langle y - x \rangle$. Ainsi $\mathbb{A} = \langle y - x \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Supposons dorénavant $(\mathbb{A}; \leqslant)$ dense. On va montrer que tous les tels $\mathbb{A}$ sont isomorphes, ce qui établira bien qu'il y a *au plus* trois types.

Pour chaque entier n, on a : $(\forall a)[(a > 0) \to (\exists b)(0 < nb \leqslant a)]$. En effet par densité il existe une subdivision $0 = a_0 < \ldots < a_n = a$. Le plus petit des $b_i = a_i - a_{i-1}$ pour $i = 1, \ldots, n$ convient.

Pour chaque entier n, on a : $(\forall a)(\exists b)(nb = a)$. En effet on peut supposer $a > 0$. Soit alors $X = \{x : 0 < nx \leqslant a\}$, partie non vide et majorée. Soit $b = \sup X$. Si $nb < a$, soit $\varepsilon = a - nb > 0$. Par le point précédent, il existe $\eta > 0$ tel que $n\eta \leqslant \varepsilon$, de sorte que $a = nb + \varepsilon \geqslant n(b + \eta)$. Mais $b + \eta \notin X$, d'où $a \geqslant n(b + \eta) > a$, contradiction. Le cas $nb > a$ mène à une contradiction similaire. Donc b convient.

Il suit que $\mathbb{A}$ est divisible, et étant sans torsion, il est même uniquement divisible. Notamment tout $a \neq 0$ appartient à un unique sous-groupe divisible minimal, appelé son « enveloppe divisible », $\mathbb{Q}_a = \{x \in \mathbb{A} : (\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(nx \in \langle a \rangle)\} \simeq \mathbb{Q}$. Noter que $\mathbb{Q}_a$ est dense dans $(\mathbb{A}; \leqslant)$, par archimédianité.

Soient $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ *deux* groupes abéliens ordonnés complets au sens de Hölder et denses ; montrons qu'ils sont isomorphes. Soient $1 \in \mathbb{A}_{>0}$ et $1' \in \mathbb{A}'_{>0}$ fixés. Soient $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ et $\mathbb{Z}' = \langle 1' \rangle$. Il existe un (unique) isomorphisme $f \colon \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}'$ envoyant 1 sur $1'$. Celui-ci s'étend de manière unique aux enveloppes divisibles

$\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}'_{1'}$ (dorénavant notées sans les indices) en un isomorphisme $f\colon \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}'$.

On veut étendre en un isomorphisme global. Pour $a \in \mathbb{A}\backslash\mathbb{Q}$, soient $X_a = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$ et $Y_a = \{q \in \mathbb{Q} : q > a\}$. Soient $X'_a = f(X_a)$ et $Y'_a = f(Y_a)$; on a $X'_a < Y'_a$. (Les paires $(X_a < Y_a)$ et $(X'_a < Y'_a)$ sont souvent appelées *coupures.*) Le premier n'a pas de plus grand élément, ni le second de plus petit. Par complétude au sens de Hölder de $\mathbb{A}'$, il existe $a' \in \mathbb{A}'$ entre X'_a et Y'_a ; il est unique par densité de $\mathbb{Q}'$, et hors de $\mathbb{Q}'$. L'extension de f qui envoie chaque a sur a' reste un isomorphisme de groupes ordonnés. C'évident, mais pénible et peu instructif à écrire. $\square$

Remarques

— Dans ces notations, l'isomorphisme entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$ dépend du choix de 1 et de $1'$, mais est alors unique.

— En particulier, partant du corps $(\mathbb{R}\,; +, \cdot, \leqslant)$, on peut définir les exponentielles réelles comme suit. Soit $b > 0$. D'après le théorème, $(\mathbb{R}\,; +, \leqslant, 1)$ est uniquement isomorphe $(\mathbb{R}_{>0}\,; \cdot, \leqslant, b)$. L'exponentielle de base b est cet isomorphisme. (Sans analyse, on ne peut pas distinguer e.)

Corollaire (Huntington)**.** Tous les corps totalement ordonnés complets au sens de Hölder sont uniquement isomorphes en tant que tels.

Démonstration. Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ deux tels objets. Les groupes additifs ordonnés $(\mathbb{K}\,; +, \leqslant)$ et $(\mathbb{K}'\,; +, \leqslant)$ ne sont ni triviaux ni isomorphes à $\mathbb{Z}$. D'après le théorème, ils sont isomorphes entre eux. En outre on a même un unique isomorphisme vérifiant $f(1) = f(1')$.

Pour l'instant f n'est qu'un isomorphisme de groupes abéliens ordonnés ; il reste à montrer qu'il est multiplicatif. Cela revient à montrer qu'il existe une seule structure multiplicative de neutre donné sur un groupe abélien ordonné complet dense. Comme dans le théorème, on peut procéder par coupures rationnelles (ou densité des rationnels) ; c'est assez fastidieux. $\square$

§ A.2. Existence

Un préjugé tenace aime lier la logique aux « fondements des mathématiques », et lui confier des tâches comme la « construction » des réels. C'est se méprendre en profondeur ; mais il est ici possible d'étonner sans décevoir.

Définition (fonction bornée, quasi-endomorphisme)**.**

— Une fonction $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ est *bornée* si $\operatorname{im} f$ l'est, i.e. est fini.
On note $\operatorname{Bor}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions bornées $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

— Pour $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ on pose :

$$df\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)+f(y)-f(x+y). \end{array}$$

— Une fonction $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est un *quasi-endomorphisme* si df est bornée. On note alors $\|df\|$ le plus petit entier $M_f \geqslant 0$ tel que $\operatorname{im} df \subseteq [\![-M_f, M_f]\!]$. Cela entraîne que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$f(x)+f(y)-M_f \leqslant f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)+M_f.$$

On note $\operatorname{QEnd}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des quasi-endomorphismes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exemples

— Tout endomorphisme de $\mathbb{Z}$, toute fonction bornée de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, est un quasi-endomorphisme.

— La somme ou différence de deux quasi-endomorphismes en reste un ; $(\operatorname{QEnd}(\mathbb{Z})\,;+)$ est un groupe abélien.

— Si l'on dispose des réels et de la partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$, alors pour $r \in \mathbb{R}$ la fonction :

$$f_r\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \cdot r \rfloor \end{array}$$

est un quasi-endomorphisme.

Théorème. Le groupe quotient $\operatorname{QEnd}(\mathbb{Z})/\operatorname{Bor}(\mathbb{Z})$ est naturellement muni d'une structure de corps ordonné, complet au sens de Dedekind.

Démonstration. Elle emploie six lemmes.

Lemme A (d'ordre)**.** Soit $f \in \operatorname{QEnd}(\mathbb{Z})$. Alors :

— soit $f \in \operatorname{Bor}(\mathbb{Z})$;

— soit $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$;

— soit $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

Démonstration. Les trois cas s'excluent deux à deux. Supposons f non borné. Quitte à considérer $\pm f(\pm x)$, on peut supposer $f(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ non majoré.

Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

Soit $M_f = \|df\|$. On peut supposer $M_f \geqslant 1$: sinon f est un endomorphisme de $\mathbb{Z}$ et tout est clair. Comme $f(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ n'est pas majoré, il existe $\ell \geqslant 1$ tel que $f(\ell) \geqslant 2M_f$. On affirme : $(\forall x)(x \geqslant 1 \to f(\ell x) \geqslant M_f \cdot x)$. C'est en effet clair en 1. Si c'est vrai en x donné, alors :

$$f(\ell(x+1)) = f(\ell x + \ell) \geqslant f(\ell x) + f(\ell) - M_f \geqslant M_f \cdot x + M_f,$$

ce qui établit la propriété par récurrence.

Soit $N \geqslant 0$ tel que $f([\![0, \ell-1]\!]) \subseteq [\![-N, N]\!]$. Écrivons la division euclidienne $x = \ell q + r$ avec $q \geqslant 1$ et $0 \leqslant r < \ell$. Alors d'après ce qui précède :

$$f(x) = f(\ell q + r) \geqslant f(\ell q) + f(r) - M_f \geqslant M_f \cdot q - (M_f + N).$$

Comme la fonction qui à x associe le quotient de sa division euclidienne par $\ell \geqslant 1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, la fonction f aussi.

Il reste à montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. Or pour $x < 0$ on a :

$$f(x) = (f(x) + f(-x) - f(0)) + (f(0) - f(-x)) \leqslant M_f + f(0) - f(-x),$$

qui tend vers $-\infty$ avec x. □

Lemme B (de composition)**.** Soient $f, g \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$. Alors :

(i) $g \circ f \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$;

(ii) $g \circ f - f \circ g \in \mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Soient $M_f = \|df\|$ et $M_g = \|dg\|$.

(i) Soit N tel que $g([\![-M_f, M_f]\!]) \subseteq [\![-N, N]\!]$. Soient $x, y \in \mathbb{Z}$. Notons :
- $f(x+y) = f(x) + f(y) + \eta$ avec $\eta \in [\![-M_f, M_f]\!]$;
- $g(f(x+y)) = g(f(x) + f(y)) + g(\eta) + \varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 \in [\![-M_g, M_g]\!]$;
- $g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) + \varepsilon_2$ avec $\varepsilon_2 \in [\![-M_g, M_g]\!]$.

Alors $(g \circ f)(x+y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + g(\eta))$, et le terme d'erreur est dans $[\![-N - 2M_g, N + 2M_g]\!]$, qui ne dépend pas de x ou y. Donc $g \circ f \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$.

(ii) Pour $x, y \in \mathbb{Z}$ on a :

$$|f(xy) - xf(y)| \leqslant M_f|x-1| \leqslant M_f(|x|+1).$$

En effet à y fixé, c'est évident pour $x = 1$ et $x = 0$ puis se montre par récurrence positive et négative sur x.
Appliquant en $y = 1$, il existe $a_f \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant a_f|x|$ aux infinis. Échangeant x et y dans l'inégalité puis sommant, on trouve :

$$\begin{aligned}|xf(y) - yf(x)| &\leqslant |xf(y) - f(xy)| + |f(xy) - yf(x)| \\ &\leqslant M_f(|x| + |y| + 2).\end{aligned}$$

Appliquons en $y = g(x)$. On rappelle qu'il existe $a_g \geqslant 0$ tel que $|g(x)| \leqslant a_g|g(x)|$ aux infinis. Il existe donc aussi b tel que pour x aux infinis :

$$|x \cdot (f \circ g)(x) - g(x) \cdot f(x)| \leqslant M_f(|x| + |g(x)| + 2) \leqslant b|x|.$$

Échangeant f et g et sommant, on obtient ainsi $c \in \mathbb{Z}$ tel que pour x aux infinis :

$$|x \cdot (g \circ f - f \circ g)(x)| \leqslant c|x|.$$

Notamment le quasi-endomorphisme $g \circ f - f \circ g$ reste borné. □

Lemme C (d'inversion)**.** Soit $f \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ non borné. Alors il existe $g \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ tel que $f \circ g - \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Supposons d'abord $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, soit :

$$g(x) = \min\{y \in \mathbb{Z} : f(y) \geqslant x\}.$$

La partie de $\mathbb{Z}$ considérée est en effet non vide et minorée par hypothèse.

Soit $M_f = \|df\|$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a par construction $f(g(x)) \geqslant x$ mais $f(g(x) - 1) < x$, d'où $(f \circ g)(x) \geqslant x > (f \circ g)(x) - f(1) - M_f$. Ainsi $f \circ g - \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$. Il reste à montrer $g \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$.

Soient x_1, x_2, et $x_3 = x_1 + x_2$ dans $\mathbb{Z}$; notons $y_i = g(x_i)$. Avec $a = f(1) + M_f$, on vient de voir :

$$x_i \leqslant f(y_i) < x_i + a.$$

Notamment $-a \leqslant f(y_1) + f(y_2) - f(y_3) \leqslant 2a$, d'où $|f(y_1 + y_2 - y_3)| \leqslant 2a + 2M_f$. Par l'hypothèse asymptotique sur f, il suit que $y_1 + y_2 - y_3$ reste borné quand x_1 et x_2 varient. Donc par définition, $g \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$.

D'après le lemme d'ordre A, il reste à traiter le cas où $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. On peut reprendre la preuve précédente en renversant les relations d'ordre, ou procéder comme suit. Soit $f_1 = f \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, dont l'asymptotique est positive. Par le cas positif, il existe $g_1 \in \mathrm{QEnd}$ tel que $f_1 \circ g_1 - \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ soit borné. Soit $g = -g_1$; alors $f \circ g = f_1 \circ g_1$ donc g convient. □

Lemme D (de partie entière)**.** Soit $f \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$. Alors l'entier :

$$\lfloor f \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : f(x) - kx \text{ reste minorée en } x \to +\infty\}$$

est bien défini et vérifie :

(i) $\lfloor f \rfloor + \lfloor g \rfloor \leqslant \lfloor f + g \rfloor \leqslant \lfloor f \rfloor + \lfloor g \rfloor + 1$;

(ii) si $h \in \mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$, alors $\lfloor f + h \rfloor = \lfloor f \rfloor$;

(iii) $\lfloor g \circ f \rfloor = \lfloor f \circ g \rfloor$.

Démonstration. D'après le lemme d'ordre A, « rester minorée en $+\infty$ » équivaut à « ne pas tendre vers $-\infty$ en $+\infty$ ». Soit $M_f = \|df\|$. Par une rapide récurrence, ou revenant à une formule établie pour le lemme de composition B (ii), pour $x \geqslant 1$ on a $|f(x) - xf(1)| \leqslant M_f \cdot x$. Ainsi :

$$(f(1) - M_f)x \leqslant f(x) \leqslant (f(1) + M_f)x.$$

La partie de $\mathbb{Z}$ considérée dans l'énoncé du lemme est donc non vide et majorée, et $\lfloor f \rfloor$ est bien défini.

(i) Par définition, $f(x) - \lfloor f \rfloor x$ et $g(x) - \lfloor g \rfloor x$ restent minorées au voisinage de $+\infty$. Leur somme aussi, donc $\lfloor f \rfloor + \lfloor g \rfloor \leqslant \lfloor f = g \rfloor$. En revanche $f(x) - (\lfloor f \rfloor + 1)x$ et $g(x) - (\lfloor g \rfloor + 1)x$ ne sont pas minorées en $+\infty$, donc d'après le lemme d'ordre A elles tendent vers $-\infty$. Leur somme aussi, d'où $\lfloor f + g \rfloor < \lfloor f \rfloor + \lfloor g \rfloor + 2$.

(ii) Évident car h ne change pas l'asymptotique.

(iii) Évident par (ii) et le lemme de composition (ii) B. □

Pour $x \in \mathbb{Z}$ on note $\mu_x \in \mathrm{End}(\mathbb{Z})$ la multiplication par x.

Lemme E (de régularisation)**.** Pour $f \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ soit :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor \mu_x \circ f \rfloor. \end{array}$$

Alors :

(i) $\tilde{f} \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{im}\, d\tilde{f} \subseteq [\![-1,1]\!]$;
(ii) $f - \tilde{f} \in \mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$;
(iii) si $f = \tilde{f}$, $g = \tilde{g}$, et $g - f$ reste minorée en $x \to +\infty$, alors $(\forall x)(x \geqslant 1 \to g(x) \geqslant f(x))$.

Démonstration. Par le lemme de partie entière D (iii), on a toujours $\tilde{f}(x) = \lfloor \mu_x \circ f \rfloor = \lfloor f \circ \mu_x \rfloor$.

(i) Grâce aux propriétés de la partie entière D (i), on a pour $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) &= \lfloor \mu_x \circ f \rfloor + \lfloor \mu_y \circ f \rfloor \leqslant \lfloor \mu_{x+y} \circ f \rfloor \\ &\leqslant \lfloor \mu_x \circ f \rfloor + \lfloor \mu_y \circ f \rfloor + 1 = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) + 1.\end{aligned}$$

Mais $\lfloor \mu_{x+y} \circ f \rfloor = \tilde{f}(x+y)$, donc $\mathrm{im}\, d\tilde{f} \subseteq [\![-1,1]\!]$ et $\tilde{f} \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$.

(ii) Soit $M_f = \|df\|$. Soit x fixé. Par définition, pour y assez grand, on a $-y \leqslant (f \circ \mu_x)(y) - \lfloor f \circ \mu_x \rfloor \cdot y \leqslant y$. Comme $f \circ \mu_x(y) = f(xy)$ et grâce à une inégalité du Lemme de composition B (ii), on obtient pour les grandes valeurs positives de y :

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \cdot y \leqslant |f(x) \cdot y - f(xy)| + |f(xy) - \lfloor f \circ \mu_x \rfloor \cdot y| \leqslant M_f \cdot y + y.$$

Il suit que $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant M_f + 1$, d'où $f - \tilde{f} \in \mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$.

(iii) Soit par l'absurde $x \geqslant 1$ tel que $g(x) < f(x)$. Alors d'après le lemme de partie entière D (i) :

$$\begin{aligned}\lfloor (g-f) \circ \mu_x \rfloor &= \lfloor g \circ \mu_x - f \circ \mu_x \rfloor \leqslant \lfloor g \circ \mu_x \rfloor - \lfloor f \circ \mu_x \rfloor \\ &= \tilde{g}(x) - \tilde{f}(x) = g(x) - f(x) < 0,\end{aligned}$$

donc par définition :

$$(g-f)(xy) = (g-f) \circ \mu_x(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} -\infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse asymptotique sur $g - f$. □

Un élément $f \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ est dit *régulier* si $\tilde{f} = f$.

Lemme F (de complétude)**.** Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ une partie non vide et formée d'éléments réguliers dominés sur $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (i.e. il existe un quasi-endomorphisme les majorant simultanément sur $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$). Soit la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$g(x) = \max\{f(x) : f \in \mathcal{F}\},$$

et complétée par imparité. Alors $g \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$.

Démonstration. La fonction g est bien définie par l'hypothèse de domination. Pour montrer que c'est un quasi-endomorphisme, il suffit de borner par un M_g les valeurs de $g(x) + g(y) - g(x + y)$ pour $x, y > 0$. En effet le cas $x, y \leqslant 0$ s'en déduit immédiatement, alors que si $y < 0 < x$ on distingue deux sous-cas :

— si $x + y \geqslant 0$, alors $|g(x) + g(y) - g(x + y)| = |g(x + y - y) - g(-y) - g(x + y)| \leqslant M_g$;

— l'autre sous-cas est identique.

Soient donc x_1, x_2 et $x_3 = x_1 + x_2$ des entiers *positifs*. Par définition, il existe des $f_i \in \mathcal{F}$ tels que $g(x_i) = f_i(x_i)$. Par le lemme d'ordre A, le comportement asymptotique de chaque $f_i - f_j \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ est connu. Il existe donc une des f_i (« la plus forte ») telle que pour chaque $j \in \{1, 2, 3\}$ la différence $f_i - f_j$ reste minorée au voisinage de $+\infty$ (mais f_i n'est pas forcément unique, par exemple si deux des fonctions en jeu sont égales). Comme les fonctions sont régulières, par le lemme de régularisation E (iii), $f_i - f_j$ est positive en tout $x \geqslant 1$. Notamment par définition de g :

$$g(x_j) \geqslant f_i(x_j) \geqslant f_j(x_j) = g(x_j),$$

d'où $g(x_j) = f_i(x_j)$ pour chaque $j = 1, 2, 3$. Ainsi $g(x_1) + g(x_2) - g(x_3) = f_i(x_1) + f_i(x_2) - f_i(x_3)$, et par le lemme de régularisation E (i) cette quantité reste dans $[\![-1, 1]\!]$. Donc g est un quasi-endomorphisme. □

Montrons le théorème. La structure $(\mathrm{QEnd}(\mathbb{Z}) ; +, \circ)$ n'est pas rigoureusement un anneau car la distributivité droite échoue. Mais par le lemme de composition B (ii), l'opération $\circ$ induit sur le groupe quotient $\mathcal{R} = \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z}) / \mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$ une loi $\cdot$ qui en fait un anneau commutatif. Par le lemme d'inversion C, c'est même un corps.

Notons $[f]$ la classe de f modulo $\mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$; il n'y a pas de risque de confusion avec la partie entière $\lfloor f \rfloor$ qui n'intervient plus. Soit $r \in \mathcal{R}$ de la forme $r = [f]$. Définissons « $r \geqslant 0$ » par : f reste minorée au voisinage de $+\infty$. D'après le lemme d'ordre A, c'est bien défini et compatible avec les opérations. Ainsi $(\mathcal{R} ; +, \cdot, \leqslant)$ est un corps ordonné.

Il reste à montrer que $\mathcal{R}$ est complet au sens de Dedekind. Soit $A \subseteq \mathcal{R}$ une partie non vide et majorée par un $b \in \mathcal{R}$. Pour $a \in A$ on prend $f_a \in \mathrm{QEnd}(\mathbb{Z})$ qui le représente. Quitte à considérer $\tilde{f}_a$ qui est à f_a congru modulo $\mathrm{Bor}(\mathbb{Z})$ d'après le lemme de régularisation E (iii), on peut supposer f_a régulier. Soit $\mathcal{F} = \{f_a : a \in A\}$. Cette partie est non vide et dominée par un représentant de b. Soit g donné par le lemme de complétude F. Alors $[g]$ est clairement la borne supérieure de A. $\square$

Exercices

A.1. Soit $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ un ordre total, complet au sens de Dedekind, sans extrémités, ayant une partie dénombrable dense. Montrer $\mathbb{O} \simeq (\mathbb{R}; \leqslant)$.

A.2 (complétion d'un ordre total). Cet exercice manie des ordres totaux avec extrémités (quitte à rajouter $\pm\infty$). La complétude devient : *chaque partie possède une borne supérieure.*

Soit $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$ un ordre *total.* On appelle *complétion* de $\mathbb{O}$ une paire $(\hat{\mathbb{O}}, \iota)$ telle que :

- $\hat{\mathbb{O}}$ est un ordre total et complet,
- $\iota\colon \mathbb{O} \hookrightarrow \hat{\mathbb{O}}$ est un plongement (ici, fonction strictement croissante),
- tout élément de $\hat{\mathbb{O}}$ est de la forme $\sup \iota(X)$ pour une partie $X \subseteq \mathbb{O}$.

a. Montrer qu'une complétion vérifie cette propriété universelle, où $\mathbb{C}$ est un ordre *complet* :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{O} \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & & \mathbb{C} \\ & \hat{\mathbb{O}} \arrow[ur, hook, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

En déduire l'unicité de la complétion à isomorphisme près (existence à la question c.).

b. Vérifier qu'aucune des constructions suivantes ne convient en général : l'ensemble des $\mathbb{O}_{\leqslant x}$, l'ensemble des $\mathbb{O}_{<x}$, l'ensemble des parties closes inférieurement.

c. Pour $X \subseteq O$ soient $\mathrm{Maj}\, X = \{m \in O : (\forall x)(x \in X \to x \leqslant m)\}$ l'ensemble de ses majorants et $\mathrm{Min}\, X$ l'ensemble de ses minorants. Soient $\hat{\mathbb{O}} = \{X \subseteq O : \mathrm{Min}\,\mathrm{Maj}\, X = X\}$ ordonné par inclusion, et ι la fonction $x \mapsto \mathbb{O}_{\leqslant x}$. Montrer que $(\hat{\mathbb{O}}, \iota)$ est la complétion de $\mathbb{O}$. [Invoquer l'ex. 3.8.]

d. Notations de § 2. L'ordre $(\mathcal{C}; \leqslant_{\mathrm{lex}})$ est-il la complétion de $(\mathcal{A}; \leqslant_{\mathrm{lex}})$? de $(\mathcal{A}; \leqslant_{\mathrm{lat}})$? [Points de saut.]

e. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

> On note $C_1(\mathbb{O}) = \hat{\mathbb{O}}$ la complétion Min Maj. Soit $C_2(\mathbb{O}) = \{X \subseteq O : \mathrm{Maj}\,\mathrm{Min}\, X = X\}$, qui est encore une complétion pour l'inclusion. Formons l'ordre opposé $\mathbb{O}^{\mathrm{op}} = (O, \leqslant^{\mathrm{op}})$, où $a \leqslant^{\mathrm{op}} b$ ssi $b \leqslant a$. Comme ${}^{\mathrm{op}}$ échange Min et Maj, on trouve $C_1(\mathbb{O}^{\mathrm{op}}) = C_2(\mathbb{O})$, pour la même relation d'inclusion, donc

en tant qu'ordres. Par propriété universelle, $C_1(\mathbb{O}) \simeq C_2(\mathbb{O}) = C_1(\mathbb{O}^{\mathrm{op}})$, donc le diagramme suivant commute et démontre $\mathbb{O} \simeq \mathbb{O}^{\mathrm{op}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{O} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{O}^{\mathrm{op}} \arrow[d, hook] \\ C_1(\mathbb{O}) \arrow[r, "\simeq"] & C_1(\mathbb{O}^{\mathrm{op}}). \end{tikzcd}$$

En aménageant la définition, la méthode est plus généralement valable dans les treillis (§ 5.2).

A.3 (notions de complétude pour les corps ordonnés). Soit $\mathbb{K}$ un corps totalement ordonné. On pose $|x| = \max(x, -x)$. Une ω-suite est une suite usuelle, indexée par les vrais entiers.

– Une ω-suite est *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, il existe un entier n tel que pour tous les entiers $p, q \geqslant n$, on a $|x_p - x_q| < \varepsilon$. (Le critère est exprimé dans $\mathbb{K}$, avec les vrais entiers.) La *complétude au sens de Cauchy* est la convergence de telles suites.
– La *complétude faible au sens de Cantor* est la propriété que si les $I_n = [a_n, b_n]$ forment une ω-suite décroissante d'intervalles fermés vérifiant $b_n - a_n \to 0$, alors $\bigcap_{\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$. La *complétude forte au sens de Cantor* est la même condition sans supposer $b_n - a_n \to 0$.

a. Montrer que si $\mathbb{K}$ est complet au sens de Dedekind-Hölder, il l'est au sens de Cantor fort.
b. Montrer que $\mathbb{K}$ est complet au sens de Cauchy ss'il l'est au sens de Cantor faible. [Réciproque : construire d'abord une ω-suite strictement décroissante et de limite 0.]
c. Montrer que $\mathbb{K}$ est archimédien ssi $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$ ssi $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0.
d. Montrer que $\mathbb{K}$ est complet au sens de Dedekind-Hölder ssi toute ω-suite croissante majorée converge ss'il est archimédien *et* complet au sens de Cauchy.
e. (2^{e} lecture : connaître § 17.) Donner un corps complet au sens de Cantor fort, mais pas de Dedekind-Hölder. [Saturer.]
(*) f. Le corps des séries de Laurent réelles $\mathbb{R}((X))$ est le corps des fractions de l'anneau des séries formelles $\mathbb{R}[[X]]$, ou encore le corps des séries formelles $\sum_{n \geqslant -n_0} a_n X^n$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On l'ordonne de sorte que $X > 0$ soit infiniment petit. Montrer que $\mathbb{R}((X))$ est complet au sens de Cauchy, mais pas de Cantor fort.

En présence d'archimédianité, les diverses formes naïves de complétude coïncident et caractérisent $(\mathbb{R}\,; +, \cdot, \leqslant)$; c'est faux sans archimédianité.

$$\text{Dedekind-Hölder} \Longrightarrow \text{Cantor fort} \Longrightarrow (\text{Cantor faible} = \text{Cauchy}).$$

A.4. Montrer que la partie entière définie au Lemme A.2.D coïncide avec la notion usuelle, et que les éléments réguliers sont exactement les fonctions $x \mapsto \lfloor x \cdot r \rfloor$ pour r réel.

A.5 (réels de Conway). Soient $\mathcal{A}$ l'arbre binaire infini et $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses branches. On note $\check{\mathcal{C}} = \{\sigma \in \mathcal{C} : (\forall n)(\exists n')(n' \geqslant n \wedge \sigma(n') \neq \sigma(n)\}$ l'ensemble des branches non ultimement constantes. On munit $\mathbb{R} = \mathcal{A} \sqcup \check{\mathcal{C}}$ de l'ordre partiel d'extension $\sqsubseteq$ et de l'ordre latéral $\leqslant$ (v. § 2).

a. Montrer que deux points $x \neq y$ de $\mathbb{R}$ ont un plus haut ancêtre commun noté $x \sqcap y$. Faire un dessin, et montrer que $x < y$ ssi $[x < (x \sqcap y) = y] \vee [x = (x \sqcap y) < y] \vee [x < (x \sqcap y) < y]$.
b. Montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathbb{R}; \leqslant)$.
Pour les questions suivantes on fixe deux parties $\Gamma, \Delta \subseteq \mathbb{R}$ non vides vérifiant $\Gamma \leqslant \Delta$.
c. Un *préfixe* pour (Γ, Δ) est un $a \in \mathcal{A}$ tel que $(\exists \gamma \in \Gamma)(\exists \delta \in \Delta)(a \sqsubseteq \gamma \wedge a \sqsubseteq \delta)$. Montrer que pour $n < \omega$, il existe au plus un préfixe de hauteur n.

d. On suppose qu'il existe un plus grand préfixe a de hauteur finie. Montrer $\Gamma \leqslant \{a\} \leqslant \Delta$.

e. On suppose le contraire. Soit α la branche infinie définie par les préfixes. Justifier cette définition, puis montrer $\alpha \in \check{\mathcal{C}}$ et $\Gamma \leqslant \{\alpha\} \leqslant \Delta$.

f. Déduire que $(\mathbb{R}; \leqslant)$ est un ordre complet au sens de Dedekind-Hölder.

Suite en § U.

Notes conclusives

[Rie01] compte trente-sept descriptions de $(\mathbb{R}\,; +, \cdot, \leqslant)$ et [Pro13] moitié moins. [Wei15] recense vingt et une « constructions ».

- **Repères historiques**

  Die Lehre von den messbaren Grössen ist bereits von EUKLID *auf eine hohe Stufe gebracht worden. Sie hat neuerdings von verschiedenen Seiten eingehende Behandlung erfahren. Trotzdem scheint mir diese Lehre noch nicht erschöpfend abgehandelt zu sein; auch haben sich in einige der neueren Bearbeitungen Irrthümer und Unklarheiten eingeschlichen, weshalb ich glaube, dass eine erneute Entwicklung dieser so wichtigen und elementaren Theorie von Nutzen ist.* [Höl01, S. 3–4]

Décrire n'est pas « construire ». • Axiomatiser les réels n'est pas la même chose que les formaliser. Le premier point cherche l'unicité ; le second l'existence. Par exemple Dedekind a donné une « construction » mais pas de caractérisation. [Hil00b] oppose ainsi la « méthode axiomatique » à la « méthode génétique » (à la Dedekind). • Les axiomatisations furent souvent, à l'origine, des tentatives de caractériser à isomorphisme près. En logique on parle d'« absolue catégoricité » si ce but est atteint (v. § 8). C'est impossible en logique élémentaire (v. *Premier ou deuxième ordre* infra). • Le terme « construction » récuse le platonisme mathématique et paraît téméraire. Mais une formalisation est une *interprétation*, i.e. une représentation d'une structure au sein d'une autre ; ici, du corps réel dans l'anneau des entiers. V. § 13 pour la notion en logique élémentaire ; ici l'interprétation serait « d'ordre supérieur ».

Axiomatisations. • La question passionnait le tournant du XX[e] siècle. Hilbert notamment, figure du renouveau de l'axiomatique, a proposé une telle description. [Hil00b] est à l'analyse ce que [**Hilbert**] fut à la géométrie. Ses axiomes se répartissent en quatre blocs ; les trois premiers n'ont rien de notable. Mais l'axiome IV.1 (« d'Archimède ») présuppose la notion d'entier intuitif. L'axiome IV.2 (« de complétude ») est encore plus délicat, voire maladroit : il énonce la maximalité de la structure ambiante. L'indépendance de IV.1 et IV.2, est soulignée, mais pas leur différence de nature. En termes contemporains, le premier est en logique infinitaire $\Lambda_{\omega_1,\omega}$, mais le second en logique du deuxième ordre $\mathbb{A}^2$; v. *Premier ou deuxième*

[Rie01] : Oswald RIEMENSCHNEIDER. « 37 elementare axiomatische Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers ». In : *Mitt. Math. Ges. Hamburg* 20 (2001), p. 71-95

[Pro13] : James PROPP. « Real analysis in reverse ». In : *Amer. Math. Monthly* 120.5 (2013), p. 392-408

[Wei15] : Ittay WEISS. « The real numbers—a survey of constructions ». In : *Rocky Mountain J. Math.* 45.3 (2015), p. 737-762

[Höl01] : Otto HÖLDER. « Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß ». In : *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl.* 53 (1901), p. 1-64

[Hil00b] : David HILBERT. « Über den Zahlbegriff ». In : *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 8 (1900), p. 180-184

[**Hilbert**] : David HILBERT. *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig : Teubner, 1899. 92 p.

ordre infra, et § 7. La méthode axiomatique doit beaucoup à Hilbert, mais les méthodes de cette méthode n'étaient alors pas clarifiées. • L'axiome d'Archimède fut ainsi nommé dans [Sto83, p. 504]. • Un jalon majeur est [Höl01], peu lu hors du monde germanique. Évidemment inspiré par Hilbert, Hölder axiomatise le *groupe* ordonné $(\mathbb{R};+,\leqslant)$ comme en § A.1. Il montre l'archimédianité, la commutativité (v. *Groupes ordonnés* infra), récupère la multiplication dont il montre l'unicité ; mais pas l'unicité du corps à isomorphisme près. Appareil de notes historiques instructif. • Huntington semble ne pas avoir lu Hölder. [Hun03] donne une axiomatisation possédant un unique modèle : il caractérise à isomorphisme près le corps des réels (via la structure algébrique et l'axiome « de la limite monotone »). Le corollaire A.1 peut lui être attribué. Huntington contribua à diffuser les idées de Cantor et Dedekind aux États-Unis [**Hun05a**], [Hun05b]. • Plus sur l'école « axiomatique » américaine autour de Huntington, et notamment une comparaison de [Hun03] et [Höl01] : [Sca91]. • L'axiomatisation de Hölder-Huntington fut allégée dans [Tarski, § 61 sqq.] (Tarski cite seulement le second). Cette variante artificielle appelle trois remarques : 1. elle suppose une associativité « tordue » et pas de commutativité ; 2. la totalité de l'ordre est conséquence indirecte [Ucs08] ; 3. reposant sur la complétude à la Dedekind-Hölder, elle est « du deuxième ordre » (v. ci-dessous). C'est donc une curiosité.

Constructions. • La « construction à la Cauchy » est de Méray [Mér69], bien que parfois attribuée à Cantor. • Les célèbres « coupures » apparaissent dans [Dedekind] ; Dedekind dit les avoir conçues dès 1858. Utiles en théorie des ordres, elles sont bien laborieuses en algèbre. • La méthode de § A.2 était connue de Schanuel selon [Art04] dont on a suivi l'exposition ; retrouvée indépendamment dans [ACa03]. [Str85] donne une preuve erronée de la complétude. [Gru05] y remédie via une copie externe de $\mathbb{R}$; c'est peu

[Sto83] : Otto Stolz. « Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes ». In : *Math. Ann.* 22 (1883), p. 504-520
[Hun03] : Edward Huntington. « Complete sets of postulates for the theory of real quantities ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 4.3 (1903), p. 358-370
[**Hun05a**] : Edward Huntington. « The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory I ». In : *Ann. Math. (2)* 6 (1905), p. 151-184
[Hun05b] : Edward Huntington. « The continuum as a type of order : an exposition of the modern theory ». In : *Ann. of Math. (2)* 7.1 (1905), p. 15-43
[Sca91] : Michael Scanlan. « Who were the American postulate theorists? » In : *J. Symbolic Logic* 56.3 (1991), p. 981-1002
[Tarski] : Alfred Tarski. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* Oxford University Press, New York, 1941, p. xviii+239
[Ucs08] : Stefanie Ucsnay. « A note on Tarski's note ». In : *Amer. Math. Monthly* 115.1 (2008), p. 66-68
[Mér69] : Charles Méray. « Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données ». In : *Revue des sociétés savantes, 2e série* 4 (1869), p. 280-289
[Dedekind] : Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig : Vieweg, 1872. vii+24
[Art04] : Robert Arthan. « The Eudoxus real numbers ». arXiv :math/0405454. 2004
[ACa03] : Norbert A'Campo. « A natural construction for the real numbers ». arXiv :math/0301015. 2003
[Str85] : Ross Street. « An efficient construction of real numbers ». In : *Austral. Math. Soc. Gaz.* 12.3 (1985), p. 57-58
[Gru05] : Theo Grundhöfer. « Describing the real numbers in terms of integers ». In : *Arch. Math. (Basel)* 85.1 (2005), p. 79-81

satisfaisant. Le correctif [Str03] n'a pas été publié. • Ex. A.5 : Conway a même retrouvé la structure algébrique + et · sur $\mathcal{A} \sqcup \check{\mathcal{C}}$; alors ($\mathbb{R}$; $\sqsubseteq, \leqslant, +, \cdot$) forme une troncature de la structure surréelle. Restreinte à $\mathbb{R}$, la définition de + et · déforme l'intuition du cas général, d'où son absence dans l'exercice. Enfin [Wei15, 2.20.1] ne rend pas justice à Conway ; même restreinte à $\mathbb{R}$, sa méthode ne se ramène pas à du Dedekind. Plus sur les surréels en § U.

Complétions. Ex A.2 : [Mac37, § 11], issu du doctorat de MacNeille sous la direction de Stone, à l'origine par une approche type « coupures de Dedekind ». L'exercice donne la méthode générale à retenir, qui reste valable pour des treillis. P. ex. [Sco08, § 10].

- **Premier ou deuxième ordre.** • Une quantification « du premier ordre » porte sur les seuls éléments ; au « deuxième ordre » on peut aussi quantifier sur les parties. • La différence majeure entre axiomes du premier ou deuxième ordre n'était qu'entrevue en 1900. Elle s'élucide en § 6 et prend tout son sens en § 12. • Les descriptions des réels de type Hölder ou Huntington (ou, pour les entiers, Dedekind ou Peano) sont « du deuxième ordre ». § A.1 est ainsi une axiomatisation du deuxième ordre caractérisant ($\mathbb{R}$; $+, \cdot, \leqslant$) à isomorphisme près. • Aucune axiomatisation « du premier ordre » ne peut caractériser ($\mathbb{R}$; $+, \cdot, \leqslant$) à isomorphisme près (§ 11 ou § 15). Sa meilleure description au premier ordre est la théorie des *corps réels clos*. Dégagés par Artin et Schreier, ces corps furent étudiés logiquement (au « premier ordre ») par Tarski [**Tarski2**]. Leur théorie est très bien comprise : ex. K.5. • Ne pas confondre les deux axiomatisations de Tarski : au premier ordre [**Tarski2**] à la Artin-Schreier (qui a d'autres modèles que $\mathbb{R}$ mais est un outil fiable), au deuxième ordre [Tarski] à la Hölder-Huntington (qui a la force illusoire du deuxième ordre). • Les travaux de Tarski sur les réels « au premier ordre » ont contribué à faire naître la théorie des modèles, et un demi-siècle plus tard, l'o-minimalité. V. § K, notes conclusives.

- **Thèse de Cantor-Dedekind et corps non archimédiens.** • D'après le corollaire A.1, ($\mathbb{R}$; $+, \cdot, \leqslant$) jouit d'un statut particulier en mathématiques. Cependant : 1. sa description repose sur un cadre ensembliste sous-jacent ; 2. il ne permet pas l'une des grandes découvertes du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle : l'analyse non archimédienne. • Par ailleurs, l'adéquation de ce corps au continu *géométrique* (i.e. à l'idée de droite) n'est pas un théorème mais une thèse épistémologique. On peut l'appeler « thèse de Cantor-Dedekind ». Elle est très tenable mais pas incontestable. • Les années 1870–1910 eurent la passion des corps non archimédiens avec Dubois-Reymond, Veronese, Hausdorff, Hahn, Levi-Civita, Hardy [Ehr21, §§ 1–6]. On mentionne les η_α *de Hausdorff*, ordres généralisant le comportement de ($\mathbb{Q}$; $\leqslant$) et dont l'existence est liée au comportement de la fonction puissance cardinale ; v. § U, ex. U.2. • Analyse non standard et « hyperréels » : § 11, notes conclusives. • Le dernier avatar des corps non archimédiens est le (super-)corps des *nombres surréels* de Conway (§ U).

- **Sur la méthode de Schanuel (§ A.2).** • Interprétant « borné » par « fini », on peut calculer le quotient QEnd / Bor pour d'autres groupes abéliens, et retrouver ainsi

---

[Str03] : Ross Street. « Update on the efficient reals ». 2003

[Mac37] : Holbrook MacNeille. « Partially ordered sets ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 42.3 (1937), p. 416-460

[Sco08] : Dana Scott. « The algebraic interpretation of quantifiers : intuitionistic and classical ». In : *Andrzej Mostowski and foundational studies.* IOS, Amsterdam, 2008, p. 289-312

[**Tarski2**] : Alfred Tarski. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry.* Santa Monica, California : RAND Corporation, 1948, p. iii+60

[Ehr21] : Philip Ehrlich. « Contemporary infinitesimalist theories of continua and their late nineteenth- and early twentieth-century forerunners ». In : *The history of continua.* Oxford : Oxford Univ. Press, 2021, p. 502-570 les p-adiques $\mathbb{Q}_p$ et l'anneau adélique des rationnels $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ [Her18], [Kio19]. • En fait QEnd / Bor s'interprète comme le premier groupe de *cohomologie bornée* d'un complexe naturel ; les suivants s'annulent.

• **Groupes ordonnés** (culture algébrique). • Dans un groupe non commutatif, la définition peut exiger d'un ordre total qu'il soit compatible avec les multiplications à gauche, avec les multiplications à droite, ou avec les deux (ordre bilatère). Le groupe est *archimédien* si pour $g, h > 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $h < g^n$.

Théorème (Hölder-Conrad). Si $(G;\cdot,\leqslant)$ est ordonné à gauche et archimédien, alors G est commutatif et se plonge dans $(\mathbb{R}\,;+,\leqslant)$.

• En germe dans [Höl01] ; retrouvé pour un ordre bilatère dans [Car39] ; un ordre unilatère suffit [Con59, 3.8]. • Si $(G\,;\cdot,\leqslant)$ est ordonné (à gauche ou à droite) et complet, il est archimédien. Soient en effet $g, h > 1$. Soit $X = \{g^n : n \in \mathbb{N}\}$ et supposons $X \leqslant h$. Par complétude, soit $x = \sup X \leqslant h$. Par compatibilité à gauche, les fonctions $t \mapsto c\cdot t$ sont des automorphismes de $(G;\leqslant)$. Notamment $gx = g \sup X = \sup gX$. Mais $X = gX \cup \{1\}$ donc $\sup gX = \sup X$, et enfin $gx = x$ d'où $g = 1$: contradiction. • Les groupes *non abéliens* ordonnés ne sont pas à négliger. Par exemple on peut mettre un ordre total sur le groupe libre : [Iwa48] (Iwasawa l'attribue généreusement à Everett et Ulam) ou Birkhoff et Tarski (non publié). • Pour approfondir : premiers chapitres de [Clay-Rolfsen].

§ B. Théorème de division de Lindenbaum

Si $A \times \{1,\ldots,n\}$ et $B \times \{1,\ldots,n\}$ sont équipotents, alors A et B le sont déjà.
Prérequis : § 1.

On travaille dans la catégorie des ensembles ; $\simeq$ désigne une bijection et $\hookrightarrow$ une injection.

Théorème. Soient A, B deux ensembles. Si n est un entier non nul et $A \times \{1,\ldots,n\} \simeq B \times \{1,\ldots,n\}$, alors $A \simeq B$.

Remarques

— Avec du choix on montre que pour A infini, $A \times \{1,\ldots,n\} \simeq A$ (§ 24) ; on ne peut pas le montrer sans choix. Le théorème de division est donc

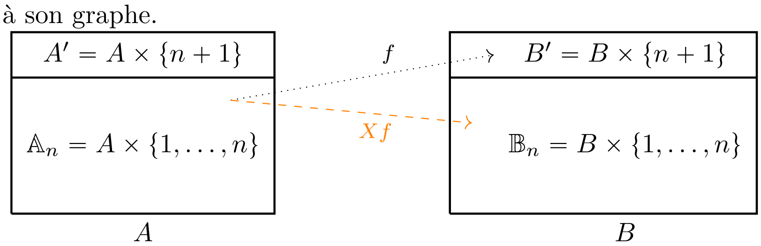
[Her18] : Tessa Hermans. « An elementary construction of the real numbers, the p-adic numbers and the rational adele ring ». Mémoire de licence. Universiteit Leiden, 2018
[Kio19] : Steffen Kionke. « Constructing the completion of a field using Quasimorphisms ». In : *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.* 11.4 (2019), p. 335-337
[Car39] : Henri Cartan. « Un théorème sur les groupes ordonnés ». In : *Bull. Sci. Math.* 63 (1939), p. 201-205
[Con59] : Paul Conrad. « Right-ordered groups ». In : *Michigan Math. J.* 6 (1959), p. 267-275
[Iwa48] : Kenkichi Iwasawa. « On linearly ordered groups ». In : *J. Math. Soc. Japan* 1 (1948), p. 1-9
[Clay-Rolfsen] : Adam Clay et Dale Rolfsen. *Ordered groups and topology.* T. 176. Graduate Studies in Mathematics. Providence : American Mathematical Society, 2016, p. x+154

évident dans une théorie des ensembles avec choix comme ZFC mais un peu miraculeux dans ZF.

— L'énoncé est évidemment faux (avec ou sans choix) si l'on remplace $\{1, \dots, n\}$ par un ensemble infini.

Démonstration. On note $\mathbb{A}_n = A \times \{1, \dots, n\}$, et l'on montre : « si $\mathbb{A}_{n+1} \hookrightarrow \mathbb{B}_{n+1}$, alors $\mathbb{A}_n \hookrightarrow \mathbb{B}_n$ », par récurrence sur n entier. Soit $A' = A \times \{n+1\}$ (« la ligne du haut »), de sorte que $\mathbb{A}_{n+1} = \mathbb{A}_n \sqcup A'$.

On va modifier $f\colon \mathbb{A}_{n+1} \hookrightarrow \mathbb{B}_{n+1}$ en $\check{f}$ de sorte que $\check{f}(\mathbb{A}_n)$ évite B', i.e. $\check{f}(\mathbb{A}_n) \subseteq \mathbb{B}_n$. La restriction de $\check{f}$ fera alors $\mathbb{A}_n \hookrightarrow \mathbb{B}_n$. On construit trois opérateurs sur l'ensemble des injections de $\mathbb{A}_{n+1}$ dans $\mathbb{B}_{n+1}$. Ils ont pour effet de modifier certaines arêtes décrivant le graphe de f. Toute fonction est assimilée à son graphe.

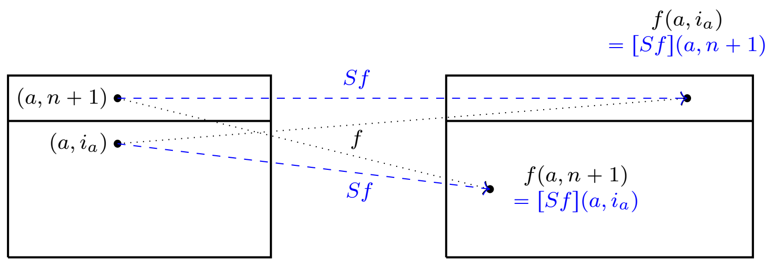


On va progressivement remplacer certaines arêtes donnant f (en pointillés) par des arêtes donnant la fonction Xf (en ligne brisée). Il y aura trois opérateurs X.

— (Définition de S.) Soit $a \in A$. Si $(\forall i)(i \leqslant n \to f(a,i) \in \mathbb{B}_n)$, ou que $f(a, n+1) \in B'$ (« le bas va en bas, ou le haut va en haut »), on ne change pas les arêtes issues de la colonne a. Si en revanche $(\exists i)(i \leqslant n \wedge f(a,i) \in B') \wedge (f(a, n+1) \in \mathbb{B}_n)$ (« un point du bas va en haut, et le haut va en bas »), on procède à une interversion d'images pour « décroiser ». Soit $i_a \leqslant n$ maximal tel que $f(a, i_a) \in B'$. Cette maximalité ne sert qu'à éviter le choix ; la minimalité conviendrait autant. On pose :

$$\begin{cases} [Sf](a, i_a) & = & f(a, n+1) \\ [Sf](a, n+1) & = & f(a, i_a). \end{cases}$$

Noter que Sf est construite en déformant f colonne par colonne, i.e. sans mélanger les diverses valeurs de a. Si $f(a, n+1) \in B'$, ou qu'il n'existe pas d'indice $i_a \leqslant n$ tel que $f(a, i_a) \in B'$, alors Sf coïncide avec f sur la colonne $\{a\} \times \{1, \dots, n+1\}$. Autrement, $Sf_{|\{a\} \times \{1, \dots, n+1\}}$ est obtenue de $f_{|\{a\} \times \{1, \dots, n+1\}}$ en échangeant deux images : donc Sf reste injective.



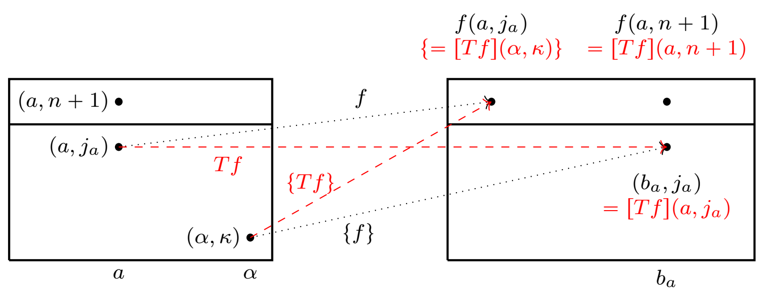
On remplace les arêtes en pointillés par celles en ligne brisée.

La transformée Sf peut encore envoyer des points du bas vers le haut, d'où l'opérateur T.

— (Définition de T.) Soit $a \in A$. Si $(\exists j)(j \leqslant n \wedge f(a,j) \in B') \wedge (f(a,n+1) \in B')$ (« un point du bas et le haut vont en haut »), on prend $j_a \leqslant n$ maximal ; notons $f(a, n+1) = (b_a, n+1)$. On pose alors :

$$\begin{cases} [Tf](a, j_a) & = & (b_a, j_a) \\ [Tf](\alpha, \kappa) & = & f(a, j_a) \text{ si } f(\alpha, \kappa) = (b_a, j_a) \end{cases}$$

Si $(b_a, j_a) \notin \operatorname{im} f$, la deuxième clause n'intervient pas ; il n'y a ni conflit de définition ni perte d'injectivité. Si en revanche $(b_a, j_a) = f(\alpha, \kappa)$ pour $\alpha \in A$ et $\kappa \in \{1, \ldots, n+1\}$, alors $f(\alpha, \kappa) \in \mathbb{B}_n$ donc n'est pas concerné par une éventuelle application de T sur la colonne α. Même dans ce cas c'est bien défini et l'on ne perd pas l'injectivité.



On n'a pas dessiné l'arête *conservée* $f(a, n+1) = [Tf](a, n+1)$. Les arêtes entre accolades n'interviennent que si (b_a, j_a) est déjà l'image d'une paire (α, κ). Le cas $\kappa = n+1$ n'est pas différent.

— (Définition de U.) Soit $U = T \circ S$. (L'introduction directe du seul opérateur U mènerait à d'illisibles disjonctions de cas.)

Soit pour $a \in A$ l'entier $\delta_a(f) = \operatorname{card}\{i \leqslant n : f(a,i) \in B'\}$. On voit que si

$\delta_a(f) > 0$, alors $\delta_a(Uf) \leqslant \delta_a(f) - 1$. Donc $U^n(f)$ injecte $\mathbb{A}_n$ dans $\mathbb{B}_n$, comme voulu.

Par récurrence, ceci montre que si $\mathbb{A}_n \hookrightarrow \mathbb{B}_n$, alors $A \hookrightarrow B$. On conclut par le théorème de Cantor-Bernstein 1.2. □

Exercices

B.1. Dans les notations de la démonstration, montrer que si $\delta_a f \neq 0$ alors $\delta_a(Uf) < \delta_a f$.

B.2 (une preuve directe si $n = 2$). Un *A-graphe* est un graphe orienté tel que :

- les arêtes sont non dégénérées (on n'a jamais $x \to x$) ;
- tout sommet appartient à une unique arête ;
- les arêtes sont indexées par A.

Par exemple $\Gamma_A = A \times \{0, 1\}$ muni des A arêtes $(a, 0) \to (a, 1)$ est un A-graphe.

a. Vérifier qu'une bijection $A \times \{0, 1\} \simeq B \times \{0, 1\}$ met sur Γ_A une structure de B-graphe. Vérifier qu'il suffit d'apparier les A-arêtes et les B-arêtes pour avoir $A \simeq B$.

b. Apparier sans choix les A-arêtes et les B-arêtes. (*)

Notes conclusives

> *Theorem I for $m = 2$ was first proved by F. Bernstein; for the general case Bernstein gave only a rough outline of a proof, the understanding of which presents some difficulties. Another, very elegant proof of I in the case $m = 2$ was published later by W. Sierpiński; and a proof in the general case was found, but not published, by the late A. Lindenbaum.* [Tar49]

• Dans son doctorat [Ber01] (plus accessible en [**Ber05**, § 2]), Bernstein utilisait le choix. Sa démonstration sans choix pour $n > 2$ est disputée. Lindenbaum n'ayant pas donné la sienne, la première preuve publiée est donc celle de Tarski [Tar49]. • Une démonstration pour 3, généralisable aux autres entiers, [DC06] (exposition reniée par Conway) n'a jamais paru formellement ; sa suite [DQ15] non plus. La présentation publiée [Sch15] a été remise ici sous forme conventionnelle. • En oubliant l'ordre sur $\{1, \ldots, n\}$, le résultat devient faux [Lut23]. • L'énoncé « si $A^2 \simeq B^2$ alors

[Tar49] : Alfred Tarski. « Cancellation laws in the arithmetic of cardinals ». In: *Fund. Math.* 36 (1949), pp. 77–92
[Ber01] : Felix Bernstein. « Untersuchungen aus der Mengenlehre ». Thèse de doct. Göttingen, 1901, p. 54
[**Ber05**] : Felix Bernstein. « Untersuchungen aus der Mengenlehre ». In : *Math. Ann.* 61 (1905), p. 117-155
[DC06] : Peter Doyle et John Conway. « Division by three ». arXiv :math/0605779. 2006
[DQ15] : Peter Doyle et Cecil Qiu. « Division by four ». arXiv :math/1504.01402. 2015
[Sch15] : Rich Evan Schwartz. « Pan galactic division ». In : *Math. Intelligencer* 37.3 (2015), p. 8-10
[Lut23] : Patrick Lutz. « Conway and Doyle can divide by three, but I can't. » In : *Math.*

$A \simeq B$ » n'est pas prouvable sans choix car il l'implique dans ZF [Tar24b, Théorème 3] ; c'est lié au « théorème du carré de Tarski », ex. 23.2. • Même pour $n = 2$, la méthode n'est pas constructive car elle repose sur des disjonctions de cas. La logique intuitionniste, sans tiers exclu, ne démontre pas le résultat [Swa18] (non publié).

§ C. Ultrafiltres en topologie

De l'emploi des filtres en topologie : § C.1 introduit les *points limites* des ultrafiltres et § C.2 force la convergence de chaque fonction par *transport* d'ultrafiltres. Enfin § C.3 présente, dans le cas discret, le *compactifié de Stone-Čech* $\beta\mathcal{E}$ d'un espace topologique $\mathcal{E}$.

Prérequis : notions de topologie générale.

Définition (filtre)**.** Soit E un ensemble. Un filtre *sur* E est une partie $\mathcal{F} \subseteq P(E)$ vérifiant :

— $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

— si $X \in \mathcal{F}$ et $X \subseteq Y \subseteq E$, alors $Y \in \mathcal{F}$;

— si $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$, alors $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{F}$.

Remarque. La définition garde un sens dans le cas plus général des treillis (voire des ordres partiels) ; v. § 5.2. Dans ce contexte, un filtre *sur* E est en fait un filtre *du treillis* $P(E)$. On conserve ici la définition naïve.

Exemple. L'ensemble des voisinages ouverts d'un point dans un espace topologique $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ est un filtre sur E.

Les filtres ont été introduits d'après cet exemple ; montrons leur usage en topologie.

1. Une famille de parties $\mathcal{B}$ a la *propriété des intersections finies* si pour chaque entier et tous $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, on a $\bigcap_{i=1}^n B_i \neq \varnothing$.

   Une telle famille est incluse dans un filtre, à savoir :

$$\left\{ A \in P(E) : (\exists n \in \mathbb{N})(\exists B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}) \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq A \right) \right\}.$$

2. Tout filtre est inclus dans un *ultrafiltre*, i.e. filtre maximal pour l'inclusion. C'est la conséquence d'un principe de maximalité (§ 2.1).

Intelligencer (2023), p. 1-5

[Tar24b] : Alfred Tarski (signé Tajtelbaum-Tarski). « Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix ». In : *Fund. Math.* 5 (1924), p. 147-154

[Swa18] : Andrew Swan. « On dividing by two in constructive mathematics ». arXiv :math/1804.04490. 2018

3. Un ultrafiltre contient chaque partie de E ou son complémentaire. Supposons $A^c \notin \mathcal{U}$. Soient $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{U}$. Si $B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A = \varnothing$, alors $B_1 \cap \cdots \cap B_n \subseteq A^c \in \mathcal{U}$; contradiction. Donc $\mathcal{U} \cup \{A\}$ a la propriété des intersections finies, d'où par maximalité $A \in \mathcal{U}$.

§ C.1. Points limites d'un ultrafiltre

Définition (point limite d'un ultrafiltre)**.** Soient $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur E. Un point $\ell \in E$ est *limite de* $\mathcal{U}$, noté $\ell \in \lim \mathcal{U}$, si tout $\mathcal{T}$-voisinage ouvert de ℓ est dans $\mathcal{U}$. $\lim \mathcal{U}$

En cas d'unicité, on notera $\ell = \lim \mathcal{U}$, sans accolades. En revanche la topologie reste implicite dans la notation.

Lemme.

(i) Dans ces notations,

$$\lim \mathcal{U} = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{U}: \\ F \text{ fermé de } \mathcal{T}}} F = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \overline{A}.$$

(ii) $\mathcal{T}$ est de Borel-Lebesgue ssi pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, l'ensemble $\lim \mathcal{U}$ a *au moins* un point.

(iii) $\mathcal{T}$ est séparée ssi pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, l'ensemble $\lim \mathcal{U}$ a *au plus* un point.

Démonstration

(i) En effet, $\ell \in \lim \mathcal{U}$ ssi tout ouvert contenant ℓ est dans $\mathcal{U}$ ssi tout ouvert qui n'est pas dans $\mathcal{U}$ évite ℓ ssi tout fermé appartenant à $\mathcal{U}$ contient ℓ.

(ii) Supposons $\mathcal{T}$ de Borel-Lebesgue ; soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre. Alors la sous-famille $\{F \in \mathcal{U} : F \text{ est fermé de } \mathcal{T}\}$ conserve la propriété des intersections finies. Par hypothèse sur $\mathcal{E}$, son intersection n'est pas vide. Elle vaut $\lim \mathcal{U}$ d'après (i).

Supposons que tout ultrafiltre a une limite ; soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés ayant la propriété des intersections finies. On l'inclut dans un filtre maximal, i.e. un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Par hypothèse et d'après (i), $\varnothing \neq \lim \mathcal{U} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$.

(iii) Supposons $\mathcal{T}$ séparée ; soient $\ell_1 \neq \ell_2 \in \lim \mathcal{U}$. Soient $\ell_i \in O_i$ des ouverts disjoints séparant les points. Par définition, $O_1, O_2 \in \mathcal{U}$, donc $\varnothing = O_1 \cap O_2 \in \mathcal{U}$, absurde.

Supposons que tout ultrafiltre a au plus une limite ; soient $\ell_1 \neq \ell_2 \in E$. Soit $\mathcal{F}_i$ le filtre des voisinages ouverts de ℓ_i. Si $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ a la propriété des intersections finies, on l'inclut dans un filtre puis un ultrafiltre $\mathcal{U}$; mais alors par définition $\ell_1 \neq \ell_2 \in \lim \mathcal{U}$, contradiction. Donc $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ possède une intersection finie vide : c'est la séparation. □

§ C.2. Transport d'ultrafiltres

Les ultrafiltres forcent la convergence de suites à valeurs dans des espaces compacts ; c'est une application de leur transport.

Lemme. Soient I, J deux ensembles et $f\colon I \to J$ [**Ens**]. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur I, alors $f_*(\mathcal{U}) = \{Y \in P(J) : f^{-1}(Y) \in \mathcal{U}\}$ est un ultrafiltre sur J.

Démonstration. On note $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U})$. Si $Y \in \mathcal{V}$ et $Y \subseteq Z \subseteq J$, alors $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$ donc $f^{-1}(Z) \in \mathcal{U}$ et $Z \in \mathcal{V}$. Si $Y_1, Y_2 \in \mathcal{V}$, alors $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \in \mathcal{U}$, donc $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{V}$. Enfin si $Y \notin \mathcal{V}$, alors $f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c \in \mathcal{U}$ et $Y^c \in \mathcal{V}$. Donc $\mathcal{V}$ est un ultrafiltre sur J. □

Corollaire (convergence d'une fonction modulo un ultrafiltre)**.** Soient I un ensemble, $\mathcal{K}$ un espace compact, et $f\colon I \to \mathcal{K}$ [**Ens**]. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur I, alors il existe un unique $\ell \in \mathcal{K}$ tel que :

tout voisinage ouvert V de ℓ dans $\mathcal{K}$ vérifie $\{i \in I : f(i) \in V\} \in \mathcal{U}$.

On dit que f *converge vers* ℓ *modulo* $\mathcal{U}$, noté $\lim_{\mathcal{U}} f = \ell$.

Démonstration. Soit $f_*(\mathcal{U}) = \{Y \in P(K) : f^{-1}(Y) \in \mathcal{U}\}$ l'ultrafiltre transporté. D'après le lemme C.1 et par compacité, l'ensemble $\lim f_*(\mathcal{U})$ est singleton. Mais $\ell \in \lim f_*(\mathcal{U})$ ssi tout voisinage ouvert de ℓ est dans $f_*(\mathcal{U})$ ssi tout voisinage ouvert de ℓ vérifie $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. □

Par exemple un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ permet de forcer la convergence de chaque suite à valeurs dans un compact. Autre emploi remarquable à la preuve du théorème de McKinsey-Tarski (§ D.3).

§ C.3. Compactifié de Stone-Čech

Il y a plusieurs façons de compactifier un espace topologique selon les besoins. La plus simple, la *compactification d'Alexandroff*, ajoute un unique

« point à l'infini » ; en général le résultat est assez grossier. La compactification de Stone-Čech ajoute « autant d'infinis que possible ». En logique elle sert surtout quand l'espace de départ est discret.

Un morphisme dans la catégorie **Top** des espaces topologiques est une fonction continue. Un isomorphisme topologique est parfois appelé homéomorphisme.

Théorème (et définition : compactifié de Stone-Čech)**.** Soit $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace topologique. Alors il existe un espace *compact* $\beta\mathcal{E}$ et un morphisme $\iota_\mathcal{E}\colon \mathcal{E} \to \beta\mathcal{E}$ [**Top**] répondant à la propriété universelle suivante : si $\mathcal{K}$ est un espace *compact* et $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{K}$ [**Top**], $\beta\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\iota_\mathcal{E}"] \arrow[dr, "f"'] & \beta\mathcal{E} \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

Cet espace est alors unique à isomorphisme topologique près.

Remarque. La construction est fonctorielle car $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ [**Top**] induit $\beta f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ [**Top**] d'après le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\iota_\mathcal{E}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\iota_\mathcal{F}\circ f"] & \beta\mathcal{E} \arrow[d, dashed, "\beta f"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\iota_\mathcal{F}"'] & \beta\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

Démonstration dans le cas discret. L'unicité à isomorphisme topologique près résulte de la propriété universellee. Il suffit donc de construire une paire $(\beta\mathcal{E}, \iota_\mathcal{E})$ répondant à la propriété. *On suppose $\mathcal{E}$ discret.*

Étape 1. Construction de $(\beta\mathcal{E}, \iota_\mathcal{E})$.

Vérification. Soit $\beta\mathcal{E}$ l'ensemble des ultrafiltres sur E. Pour $X \subseteq E$ une partie quelconque, soit $O_X = \{\mathcal{U} \in \beta\mathcal{E} : X \in \mathcal{U}\}$. On mnuit $\beta\mathcal{E}$ de la topologie engendrée par les ouverts O_X. Noter que $O_{X_1} \cap O_{X_2} = O_{X_1 \cap X_2}$, donc tout ouvert est réunion d'ouverts O_X. En outre $O_{X^c} = O_X^c$.

La topologie est séparée. En effet si $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$ dans $\beta\mathcal{E}$, alors il existe $X \in \mathcal{U}_1 \backslash \mathcal{U}_2$, donc O_X et O_X^c sont des ouverts séparant $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.

La topologie est de Borel-Lebesgue. Supposons en effet $\beta\mathcal{E} = \bigcup_{i\in I} V_i$

pour des ouverts, que l'on peut supposer de la forme $V_i = O_{X_i}$. Soit $Y_i = X_i^c$. Si $\{Y_i : i \in I\}$ a la propriété des intersections finies, on l'inclut dans un ultrafiltre $\mathcal{U} \in \bigcap_{i\in I} V_i^c$, absurde. Donc il existe un entier n et des indices $i_1, \ldots, i_n$ tels que $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n = \varnothing$. Alors :

$$V_1 \cup \cdots \cup V_n = O_{X_1} \cup \cdots \cup O_{X_n} = O_{X_1 \cup \ldots X_n} = \beta\mathcal{E},$$

ce qui montre la propriété de Borel-Lebesgue.

Soit pour $a \in E$ l'ultrafiltre « principal » (ou « de Dirac ») $\delta_a = \{X \in P(E) : a \in X\}$. Soit alors :

$$\begin{array}{rccc} \iota_{\mathcal{E}}\colon & \mathcal{E} & \to & \beta\mathcal{E} \\ & a & \mapsto & \delta_a. \end{array}$$

Cette fonction est continue, ici car $\mathcal{E}$ est discret (en général il faut travailler plus). ◇

Remarque. Dans le cas discret $\iota_{\mathcal{E}}$ est même injective, mais ce n'est pas vrai en général.

Étape 2. La paire $(\beta\mathcal{E}, \iota_{\mathcal{E}})$ convient.

Vérification. Soit en effet $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{K}$ [**Top**], où $\mathcal{K}$ est compact. Montrons l'existence et l'unicité de l'extension. Soit $\mathcal{U} \in \beta\mathcal{E}$. Dans les notations de § C.2, on pose $\hat{f}(\mathcal{U}) = \lim_{\mathcal{U}} f = \lim f_*(\mathcal{U})$, sans accolades.

Ceci étend f continûment. En effet l'extension est claire : si $a \in E$, alors $\{a\} \in \delta_a$ donc $\{f(a)\} \in f_*(\delta_a)$; il suit $\lim f_*(\delta_a) = f(a)$ et donc $\hat{f}(\delta_a) = f(a)$. Montrons la continuité. Soient $\mathcal{U}_0 \in \beta\mathcal{E}$ et W_0 un voisinage ouvert de $\hat{f}(\mathcal{U}_0) = \lim f_*(\mathcal{U}_0)$ dans $\mathcal{K}$. Alors d'après le Lemme C.1 (i) :

$$W_0^c \cap \left(\bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } \mathcal{K}:\\ f^{-1}(F) \in \mathcal{U}_0}} F \right) = W_0^c \cap \left(\bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } \mathcal{K}:\\ F \in f_*(\mathcal{U}_0)}} F \right) = W_0^c \cap \{\lim f_*(\mathcal{U}_0)\}$$
$$= W_0^c \cap \{\hat{f}(\mathcal{U}_0)\} = \varnothing.$$

Par compacité de $\mathcal{K}$ et clôture sous intersections finies, il existe donc un fermé F de $\mathcal{K}$ tel que $f^{-1}(F) \in \mathcal{U}_0$ et $W_0^c \cap F = \varnothing$. Soit $V_0 = O_{f^{-1}(F)} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathcal{E} : f^{-1}(F) \in \mathcal{U}\}$, qui est ouvert dans $\beta\mathcal{E}$ et contient $\mathcal{U}_0$. Si $\mathcal{U} \in V_0$, alors $F \in f_*(\mathcal{U})$ et donc $\hat{f}(\mathcal{U}) \in F \subseteq W_0$. Ceci montre $\hat{f}(V_0) \subseteq W_0$, donc $\hat{f}$

est continue.

Il reste à montrer l'unicité de $\hat{f}$. Mais $\operatorname{im} \iota_{\mathcal{E}} \subseteq \beta\mathcal{E}$ est topologiquement dense dans $\beta\mathcal{E}$. En effet un ouvert générateur non vide est de la forme O_X avec $X \neq \varnothing$, si bien que pour $a \in X$ on trouve $\delta_a \in O_X$: c'est la densité. Toute fonction continue sur $\beta\mathcal{E}$ est donc déterminée par sa restriction à $\operatorname{im} \iota_{\mathcal{E}}$, d'où l'unicité. $\diamond$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque. (Prérequis : § 5.) Dans la bijection :

$$\begin{array}{ccc} \beta\mathcal{E} & \to & \operatorname{Spec} P(E) \\ \mathcal{U} & \mapsto & \{X^c : X \in \mathcal{U}\}, \end{array}$$

l'ouvert O_X correspond à $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} P(E) : X \notin \mathfrak{p}\}$, également ouvert générateur. Donc $\beta\mathcal{E}$ est topologiquement isomorphe à $\operatorname{Spec} P(E)$, et par conséquent profini ; il est notamment compact.

Exercices

C.1 (théorème de Tychonoff). Démontrer le résultat suivant.

Théorème (Tychonoff)**.** Un produit d'espaces de Borel-Lebesgue est de Borel-Lebesgue, dans la topologie produit.

[Poser $\mathcal{U}_i = (\pi_i)_*(\mathcal{U})$ et montrer $\lim \mathcal{U} = \prod_I \lim \mathcal{U}_i$.] Où raisonne-t-on par choix ?

C.2.

a. Montrer que si $\mathcal{E}$ est discret, alors (i) $\operatorname{im} \iota_{\mathcal{E}}$ est encore discret, et (ii) $\beta\mathcal{E}$ est *extrémalement discontinu*, i.e. l'adhérence de tout ouvert est un fervert (ouvert-fermé).

b. Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique compact, extrémalement discontinu, et dont les points isolés forment une partie dense X. Montrer que $\mathcal{E} \simeq \beta X$ [**Top**].

C.3 (spectre de $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Il faut connaître § 5. Montrer que $\beta\mathbb{N} \simeq \operatorname{Spec}(\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ [**Top**].

C.4 (le nombre d'ultrafiltres). Variante de l'exercice 5.5. (Prérequis : § 4 et § 5.) Si Y est un ensemble infini, on munit $P(Y)$ de la topologie produit via 2^Y. (*)

a. Montrer que si $\mathcal{E} = (E\,; \mathcal{T})$ est un espace profini, alors $\operatorname{Ferv} \mathcal{E}$ est dense dans $P(E)$.

b. En déduire qu'il existe une injection $\iota \colon X \hookrightarrow P(P(X))$ d'image dense.

c. Conclure que si X est infini discret, alors $\operatorname{card} \beta X = \operatorname{card} P(P(X))$.

Notes conclusives

Le compactifié de Stone-Čech est originaire de topologie, mais se rencontre aussi en logique. Référence topologique [Walker].

• **Repères historiques**

Il contemple, étonné, comme enivré d'un philtre,
L'adhérence, un manteau qu'il n'a jamais compris,
Que vêt, sur un compact, immobile, le Filtre.
[Sam45]

• Les filtres furent introduits par Henri Cartan (fils) pour Bourbaki [Car37]. • [Tyc29] compactifie les espaces « complètement réguliers » (le théorème de préservation de compacité par produit, ex. C.1, est du même article [Tyc29, § 2]). • L'étude systématique de ce compactifié commence dans [Sto37, Theorem 78 sqq.] et indépendamment [Čec37] ; le second introduit la notation β. • L'espace βX relie l'analyse fonctionnelle à la théorie des ensembles. Par exemple la description du « reste » $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ dépend de l'hypothèse du continu [Par63], v. [Walker, chapter 3].

• **Loi de semi-groupe sur $\beta\mathbb{N}$.** Les années 1970 ont vu munir $\beta\mathbb{N}$ d'une loi de semi-groupe (non commutative) étendant l'addition usuelle, avec applications inattendues en théorie des nombres, comme la démonstration brève d'un résultat frappant.

Théorème ([Hin74])**.** Soit $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{r} E_k$ une partition finie. Alors il existe k et une partie infinie $A \subseteq E_k$ tels que toute somme finie de membres de A reste dans E_k.

Les premiers chapitres de [Hindman-Strauss] sont très accessibles ; [Bla93] est une excellente exposition.

• **Théorème de Tychonoff et choix.** V. § 23, notes conclusives.

§ D. Algèbre topologique

On introduit deux variations sur les anneaux de Boole, les *treillis de Heyting* et les *anneaux de Boole modaux* (§ D.1). L'arbre binaire infini donne naissance

[Walker] : Russell Walker. *The Stone-Čech compactification.* T. 83. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. New York–Berlin : Springer-Verlag, 1974, p. x+332
[Sam45] : Pierre Samuel. « Le Filtre. Sonnet imité de Mallarmé ». Archives de l'Académie des sciences, fonds Bourbaki, cote hcms001. 1945
[Car37] : Henri Cartan. « Théorie des filtres ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 205 (1937), p. 595-598
[Tyc29] : Andreï Tychonoff. « Über die topologische Erweiterung von Räumen ». In : *Math. Ann.* 102 (1929), p. 544-561
[Sto37] : Marshall Stone. « Applications of the theory of Boolean rings to general topology ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 41.3 (1937), p. 375-481
[Čec37] : Eduard Čech. « On bicompact spaces ». In : *Ann. Math. (2)* 38 (1937), p. 823-844
[Par63] : Ivan Parovičenko. « On a universal bicompactum of weight ℵ ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 150 (1963), p. 36-39
[Hin74] : Neil Hindman. « Finite sums from sequences within cells of a partition of ℕ ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. A* 17 (1974), p. 1-11
[Hindman-Strauss] : Neil Hindman et Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Čech compactification.* 2e éd. De Gruyter Textbook. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 2012, p. xviii+591
[Bla93] : Andreas Blass. « Ultrafilters : where topological dynamics = algebra = combinatorics ». In : *Topology Proc.* 18 (1993), p. 33-56

à de telles structures ayant une forme d'universalité (§ D.2). Le *théorème de McKinsey-Tarski* exprime une forme d'universalité des espaces métriques sans points isolés.

Prérequis : §§ 1–2 et notamment exercice 2.9, §§ 4–5, § C.

L'*algèbre topologique* est le traitement algébrique d'opérations comme l'intérieur, la frontière, la dérivée de Cantor-Bendixson. Cette étude interagit avec la logique mathématique via les logiques non classiques (§ G et § H). Les idées présentées dans cette section ne servent qu'en § I.

§ D.1. Deux variations sur les anneaux de Boole

Les anneaux de Boole (§ 5.1.A) sont des structures usuelles, codant la part propositionnelle de la logique dite « classique ». Mais il existe aussi des logiques « non classiques » (§ 7 ; deux d'entre elles sont abordées en § G et § H), dont la part propositionnelle emploie des déformations des anneaux de Boole.

— Les *treillis de Heyting*, utiles en logique intuitionniste, sont un affaiblissement des anneaux de Boole. Ils ne peuvent plus se décrire en termes d'anneaux et vérifient des conditions moins fortes que les treillis de Boole.

— Les *anneaux de Boole modaux*, utiles en logique modale, sont un enrichissement des anneaux de Boole. Ils possèdent une opération interne supplémentaire et vérifient des conditions étendant la définition des anneaux de Boole.

Définition A (treillis de Heyting)**.** Un *treillis de Heyting* (ou : *pseudo-booléen*) est un treillis $(T; \leqslant)$ distributif, à extrémités 0 et 1, et tel que pour tous a, b, il existe un plus grand élément vérifiant $a \wedge x \leqslant b$. Cet élément est alors unique et noté $a \to b$.

Soit **Heyt** leur catégorie ; par définition, les morphismes préservent 0, $\wedge$, $\vee$ et $\to$ (ces clauses ne sont pas redondantes). **Heyt**

Remarques

— Un treillis de Heyting possède les opérations $\wedge$ et $\vee$ binaires, mais en général pas les formes infinitaires.

— Soit $f \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ un morphisme de **Heyt**. Même si la borne supérieure $\bigvee$ ou inférieure $\bigwedge$ d'une famille $X \subseteq \mathbb{H}$ existe, et même si la borne associée pour $f(X) \subseteq \mathbb{H}'$ existe, f n'est pas tenu d'envoyer l'une sur l'autre.

Exemple. Soit $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace topologique. Alors l'ensemble $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ de ses ouverts muni de $\cup$ et $\cap$ forme un treillis de Heyting pour l'inclusion. Ici $X \to Y$ est $(X^c \cup Y)^\circ$, où ^{c} désigne le complémentaire et $^\circ$ l'intérieur.

Noter que $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ est $\bigvee$- et $\bigwedge$-complet, i.e. toute famille *arbitraire* d'ouverts possède une borne supérieure et une borne inférieure. La borne supérieure $\bigvee$ est donnée par la réunion ensembliste $\bigcup$. La borne inférieure $\bigwedge$ prend l'*intérieur* de l'intersection.

Définition B (anneau de Boole modal)**.** Un *anneau de Boole modal* est un anneau de Boole $(\mathbb{A}\,;+,\cdot)$ muni d'une opération $\square\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ vérifiant $\square 1 = 1$ et $(\forall a)(\forall b)[\square(a \cdot b) = \square a \cdot \square b]$.

Bool$_\square$

Soit $\mathbf{Bool}_\square$ leur catégorie ; par définition, les morphismes préservent la structure d'anneau et $\square$.

Exemple. Soit $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace topologique. Alors l'ensemble $P_\square(E)$ muni de $\triangle$, $\cap$, et de l'opérateur $\square X = \mathring{X}$ forme un anneau de Boole modal. Noter que $\square$ est ici sous-identitaire ($\square a \leqslant a$) et idempotent ($\square\,\square\, a = \square a$) ; on parle d'*anneau intérieur*.

Remarque. Dans les deux cas (**Heyt** et $\mathbf{Bool}_\square$), un *plongement* est un morphisme injectif.

C'est sans conflit avec la définition plus générale de plongement (§ 14.2). Soit en effet φ un morphisme injectif dans **Heyt**. Si $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$, alors :

$$\varphi(a \to b) = \varphi(a) \to \varphi(b) = 1 = 0 \to 0 = \varphi(0) \to \varphi(0) = \varphi(0 \to 0) = \varphi(1),$$

d'où par injectivité $a \to b = 1$, i.e. $a \leqslant b$.

§ D.2. Universalité de l'arbre binaire infini

— Un *préordre* $\mathbb{P} = (P; \sqsubseteq)$ est un ensemble muni d'une relation réflexive et transitive.

— On peut former sa *topologie de préordre* (ou *d'Alexandroff*, exercice 2.9), dont les ouverts sont les parties closes supérieurement. Alors $\mathcal{O}(\mathbb{P})$ est un treillis de Heyting, et $P_\square(\mathbb{P})$ un anneau de Boole modal.

— Un préordre est *enraciné* s'il possède un plus petit élément ; c'est plus fort qu'un élément minimal. Un préordre peut avoir *plusieurs* plus petits éléments.

L'arbre binaire infini (§ 1, § 2) muni de l'ordre d'extension $(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ possède une forme d'universalité parmi ces objets.

Théorème. Soit $\mathbb{P} = (P; \leqslant)$ un préordre enraciné dénombrable. Alors il existe $h\colon \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathbb{P}$ surjective, ouverte et continue (dans les topologies de préordre).

Démonstration. Le résultat n'est pas étonnant : la complexité de l'arbre 2^ω vaut celle de l'arbre ω^ω, lequel recouvre tout préordre partiel dénombrable enraciné. Les « recouvrements » donnant lieu à des plongements d'anneaux intérieurs sont les surjections continues *et ouvertes* (au sens de la topologie de préordre).

Lemme. Soient $\mathbb{M} = (M; \leqslant)$ et $\mathbb{M}' = (M'; \leqslant')$ deux préordres partiels, munis de la topologie associée $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}'$). On écrit par commodité $\leqslant$ au lieu de $\leqslant'$. Soit $f\colon M \to M'$ une fonction. Alors :

(i) f est continue de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{T}'$ ssi f est un morphisme de préordres ;

(ii) f est ouverte de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{T}'$ ssi : $(\forall a)\left[a \in M \to \mathbb{M}'_{\geqslant f(a)} \subseteq f\left(\mathbb{M}_{\geqslant a}\right)\right]$.

Démonstration. On rappelle que les ouverts sont les parties closes supérieurement.

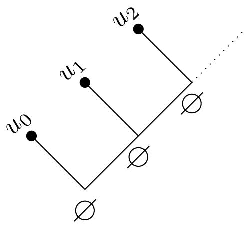
(i) Supposons f continue ; soient $a \leqslant b$ dans $\mathbb{M}$. Soit $V = \mathbb{M}'_{\geqslant f(a)}$, ouvert de $\mathcal{T}'$; alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathcal{T}$ contenant a donc également b : il suit $f(a) \leqslant f(b)$, donc f est bien un morphisme de préordres.
Supposons réciproquement que f est un morphisme de préordres ; soit $V \subseteq \mathbb{M}'$ un ouvert de $\mathcal{T}'$, donc clos supérieurement. Alors $f^{-1}(V)$ est clos supérieurement, donc un ouvert de $\mathcal{T}$; c'est la continuité.

(ii) Supposons f ouverte. Alors $f(\mathbb{M}_{\geqslant a})$ est un ouvert de $\mathcal{T}'$ contenant $f(a)$, donc $\mathbb{M}'_{\geqslant f(a)} \subseteq f(\mathbb{M}_{\geqslant a})$.
Supposons la condition remplie. Soit $U \subseteq \mathbb{M}$ un ouvert. Soient $a' \in f(U)$ et $b' \geqslant a'$. Par hypothèse il existe $a \in U$ tel que $a' = f(a)$. Alors $b' \in \mathbb{M}'_{\geqslant f(a)} \subseteq f(\mathbb{M}_{\geqslant a}) \subseteq f(U)$ donc $f(U)$ est clos supérieurement ; c'est un ouvert. □

Démontrons le théorème. L'ensemble ω^ω des suites finies d'entiers (cas d'exponentielle ordinale, v. § 3.2) est muni de l'ordre d'extension $\sqsubseteq$.

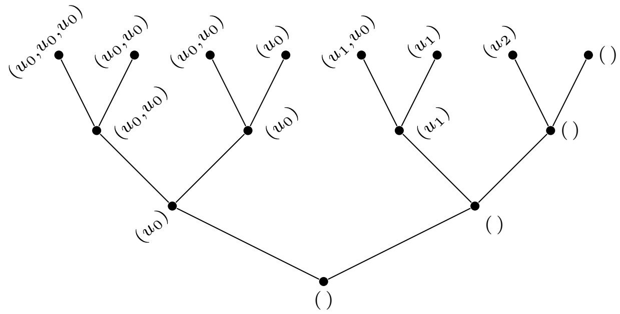
Étape 1. Il existe $f\colon (2^\omega; \sqsubseteq) \twoheadrightarrow (\omega^\omega; \sqsubseteq)$ surjective, ouverte et continue.

Vérification. Soit (u_k) une suite d'entiers vérifiant : $(\forall n)(\forall k)(\exists \ell)(\ell \geqslant k \wedge u_\ell = n)$, par exemple la suite $0\ ;\ 0,1\ ;\ 0,1,2\ ;\ \ldots$ (la double ponctuation sert la lisibilité). On forme alors le « peigne » suivant :



Peigne fondamental

Le recollant à lui-même itérativement, on obtient un arbre binaire étiqueté :



La suite vide est notée $()$. On part de l'origine, où l'on colle une copie du peigne fondamental. On réitère en chaque nouveau point. Les étiquettes s'obtiennent par concaténation.

Au-dessus d'un sommet s d'étiquette $\mathbf{u}$, on ne trouve que des étiquettes étendant $\mathbf{u}$. En outre, on les trouve toutes par propriété de (u_n). D'après le lemme, ceci montre continuité, ouverture et surjectivité de la fonction d'étiquetage $2^\omega \to \omega^\omega$. $\diamond$

Étape 2. Soit $\mathbb{M} = (M\,; R)$ un préordre partiel dénombrable enraciné. Alors il existe $g\colon (\omega^\omega; \sqsubseteq) \twoheadrightarrow \mathbb{M}$ ouverte, continue et surjective.

Vérification. Si $s \in \omega^\omega$ et $k \in \omega$, on note (s, k) la suite étendue par k. Soit $\mathfrak{m}_0$ un plus petit élément du préordre. Pour $\mathfrak{m} \in M$, soit $h_\mathfrak{m}\colon \omega \twoheadrightarrow \mathbb{M}_{\geqslant \mathfrak{m}}$ une surjection. On définit par récurrence $g\colon \omega^\omega \to \mathbb{M}$ en posant :

$$\begin{cases} g(\varnothing) = \mathfrak{m}_0\,; \\ g((s,k)) = h_{g(s)}(k). \end{cases}$$

La racine $\mathfrak{m}_0$ est atteinte. En outre $g((s,k)) = h_{g(s)}(k) \geqslant g(s)$ par choix de

$h_{g(s)}$. Par transitivité de $\leqslant$, g est un morphisme de préordres. D'après le lemme, c'est une fonction continue. Montrons son ouverture ; soit $U \subseteq \omega^\omega$ clos supérieurement. Soient $s \in U$ et $\mathfrak{m} \geqslant g(s)$. Par choix de $h_{g(s)}$, il existe k entier tel que $\mathfrak{m} = h_{g(s)}(k) = g((s,k))$. Or $(s,k) \in U$ donc $\mathfrak{m} \in g(U)$. Ainsi $g(U)$ est clos supérieurement, et g est ouverte. Une fonction ouverte atteignant une racine est surjective. ◇

On prend f (resp. g) comme à l'étape 1 (resp. 2). Soit $h = g \circ f \colon (2^\omega ; \sqsubseteq) \twoheadrightarrow \mathbb{M}$, qui est surjective, ouverte et continue. □

§ D.3. Théorème de McKinsey-Tarski

Soit $\mathbb{P}$ un préordre enraciné dénombrable. Le théorème D.2 permet de réaliser le treillis de Heyting ou l'anneau de Boole modal de $\mathbb{P}$ dans celui de l'espace topologique $\mathcal{A}$. Les topologies d'Alexandroff étant peu naturelles, on peut préférer les réaliser dans ceux d'espaces plus familiers.

Théorème (McKinsey-Tarski)**.** Soit $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ un espace métrisable sans points isolés. Soit $\mathbb{P}$ un préordre enraciné dénombrable. Alors :

(i) $P_\square(\mathbb{P}) \hookrightarrow P_\square(\mathcal{E})$ $[\mathbf{Bool}_\square]$;

(ii) $\mathcal{O}(\mathbb{P}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{E})$ $[\mathbf{Heyt}]$, avec un plongement préservant $\bigvee$ et $\bigwedge$.

Remarques

— On rappelle qu'un morphisme de **Heyt** préserve $\wedge, \vee, \rightarrow$.

— On affirme préserver $\bigvee$ dans $\mathcal{O}(\mathcal{E})$, i.e. l'opérateur de réunion pour des familles d'*ouverts*. On n'affirme pas préserver la réunion de familles de parties quelconques.

— De même on affirme préserver $\bigwedge$ dans $\mathcal{O}(\mathcal{E})$, i.e. l'opérateur « intérieur-d'intersection » pour des familles d'*ouverts*. On n'affirme préserver ni cet opérateur pour des parties quelconques, ni l'opérateur d'intersection pour des familles d'ouverts.

— On a donc un plongement $P_\square(\mathbb{P}) \hookrightarrow P_\square(\mathcal{E})$ $[\mathbf{Bool}_\square]$ qui commute avec $\square$, avec $\bigcup \square$, et avec $\square \bigcap \square$, mais pas forcément avec $\bigcup$, $\square \bigcap$ ou $\bigcap \square$.

— Pas d'unicité du plongement.

Démonstration. On va construire un plongement $P_\square(\mathbb{P}) \hookrightarrow P_\square(\mathcal{E})$ $[\mathbf{Bool}_\square]$ qui préserve les opérateurs « réunion » et « intérieur-d'intersection » pour des familles *d'ouverts*.

Lemme. Soient $\mathcal{E} = (E\,;\mathcal{T})$ et $\mathcal{E}' = (E'\,;\mathcal{T}')$ des espaces topologiques et $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une fonction ouverte et continue. Alors la fonction

$$P^*f\colon \begin{array}{ccc} P_\square(\mathcal{E}') & \to & P_\square(\mathcal{E}) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbf{Bool}_\square$ préservant $\bigcup$ et $\bigcap$. Il est injectif ssi f est surjective.

Démonstration. On sait que c'est un morphisme dans **Bool** préservant les opérations infinitaires, et la condition d'injectivité est connue. Soit $B \subseteq \mathbb{M}'$. Alors $f^{-1}(\square B)$ est un ouvert inclus dans $f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(\square B) \subseteq \square f^{-1}(B)$. En outre f est ouverte, donc $f(\square f^{-1}(B)) \subseteq \square f(f^{-1}(B)) \subseteq \square B$. Ainsi $\square f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\square B)$, et l'égalité suit. □

La démonstration du théorème commence ici.

Étape 1. On peut supposer $\mathbb{P} = \mathcal{A}$.

Vérification. D'après le théorème D.2, il existe $h\colon \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathbb{P}$ surjective, ouverte et continue dans les topologies de préordre. D'après le lemme, $P^*(f)\colon P_\square(\mathbb{P}) \hookrightarrow P_\square(\mathcal{A})$ est un plongement de **Bool** préservant $\square$ et les opérations infinitaires ; il préserve notamment $\bigvee$ et $\bigwedge$. On peut donc supposer $\mathbb{P} = \mathcal{A}$. ◇

Remarque. Les propriétés du plongement $P_\square(\mathbb{P}) \hookrightarrow P_\square(\mathcal{A})$ sont meilleures que dans l'énoncé du théorème, mais la suite de la démonstration ne les conserve pas toutes.

On n'affirme pas l'existence de surjection ouverte et continue $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ « manque de points limites ». Afin de compléter $\mathcal{A}$, prendre un ultrafiltre force la convergence.

Notation.

- Soit $\mathcal{B}$ la réunion disjointe $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est l'espace de Cantor ; on le munit de la topologie engendrée par les $\mathcal{B}_{\sqsupseteq s}$ pour $s \in \mathcal{A}$.
- Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$.
- Pour $S \subseteq \mathcal{A}$ et $\sigma \in \mathcal{C}$, on note $S \to_{\mathcal{U}} \sigma$ si $\{n \in \mathbb{N} : \sigma_{|n} \in S\} \in \mathcal{U}$.
- Pour $S \subseteq \mathcal{A}$ on note $\lim S = \{\sigma \in \mathcal{C} : S \to_{\mathcal{U}} \sigma\}$ et $\mathrm{cl}(S) = S \sqcup \lim(S)$. Évidemment $\mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} = \mathcal{B}_{\sqsupseteq s_0}$.

Étape 2. Dans ces notations, $\mathrm{cl}\colon P_\square(\mathcal{A}) \hookrightarrow P_\square(\mathcal{B})$ [$\mathbf{Bool}_\square$]. En outre si $\{V_i : i \in I\}$ est une famille d'*ouverts* de $\mathcal{A}$, alors $\mathrm{cl}\left(\bigcup V_i\right) = \bigcup \mathrm{cl}(V_i)$ et $\mathrm{cl}\left(\square \bigcap V_i\right) = \square \bigcap \mathrm{cl}(V_i)$.

Vérification. Tout du long S désigne une partie de $\mathcal{A}$.

— Clairement $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$ et $\mathrm{cl}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. En outre $\mathrm{cl}(S) \cap \mathcal{A} = S$, d'où l'injectivité.

— Pour $\sigma \in \mathcal{C}$, on a : $\neg(S \to_{\mathcal{U}} \sigma)$ ssi $\{n \in \mathbb{N} : \sigma_{|n} \in S\} \notin \mathcal{U}$ ssi $\{n \in \mathbb{N} : \sigma_{|n} \in S^c\} \in \mathcal{U}$ ssi $S^c \to_{\mathcal{U}} \sigma$; donc $\lim(S^c) = (\lim S)^c$ dans $\mathcal{C}$, puis $\mathrm{cl}(S^c) = (\mathrm{cl}\, S)^c$ dans $\mathcal{B}$.

— On montre de même le caractère multiplicatif (préservation de l'intersection finie). À ce point, cl est un plongement au sens de **Bool**.

— Montrons la préservation de $\square$. Soit $x \in \square\, \mathrm{cl}(S)$. Par définition, il existe $s_0 \in \mathcal{A}$ tel que $x \in \mathcal{B}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq \mathrm{cl}(S)$. Si $x \in \mathrm{cl}(S) \cap \mathcal{A}$, alors $x \in \mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq S$, donc $x \in \square S \subseteq \mathrm{cl}(\square S)$. Si $x \in \mathrm{cl}(S) \cap \mathcal{C}$, alors $S \to_{\mathcal{U}} x$; mais pour $n \geqslant \ell(s_0)$ on a $x_{|n} \sqsupseteq s_0$ donc $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \to_{\mathcal{U}} x$, de sorte que $x \in \lim \mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq \lim(\square S) \subseteq \mathrm{cl}(\square S)$. Ceci montre $\square\, \mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(\square S)$.
Soit réciproquement $x \in \mathrm{cl}(\square S)$. Si $x \in \mathrm{cl}(\square S) \cap \mathcal{A} = \square S$, alors il existe $s_0 \in \mathcal{A}$ tel que $x \in \mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq S$, d'où $x \in \mathcal{B}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq \mathrm{cl}(S)$, et $x \in \square(\mathrm{cl}\, S)$. Si en revanche $x \in \mathrm{cl}(\square S) \cap \mathcal{C}$, alors $\square S \to_{\mathcal{U}} x$. On cherche $s_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq S$ et $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \to_{\mathcal{U}} x$.

  — Supposons en outre :

$$(\forall n)[n \in \omega \to (\exists t_n)(t_n \in \mathcal{A}_{\sqsupseteq x_{|n}} \wedge t_n \notin S)].$$

  Choisissant de tels t_n, soient $T = \{t_n : n \in \omega\}$ et F la clôture inférieure, i.e. l'adhérence, de T. Alors $S \cap T = \varnothing$ et $F = (\square T^c)^c \subseteq (\square S)^c$. Par construction $F \to_{\mathcal{U}} x$, donc $(\square S)^c \to_{\mathcal{U}} x$. Ceci contredit $\square S \to_{\mathcal{U}} x$.

  — L'hypothèse est donc absurde : il existe ainsi n_0 tel que $(\forall t)(t \in \mathcal{A}_{\sqsupseteq x_{|n_0}} \to t \in S)$. Posons $s_0 = x_{|n_0}$: alors $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq S$ et $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \to x$. Ainsi $x \in \mathcal{B}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq \mathrm{cl}(S)$, d'où $x \in \square\, \mathrm{cl}(S)$.

— Montrons la préservation de la réunion de familles d'ouverts. Soient V_i des ouverts de $\mathcal{A}$; montrons $\bigcup \mathrm{cl}(V_i) = \mathrm{cl}\left(\bigcup V_i\right)$. Une inclusion est claire. Soit réciproquement $\sigma \in \mathrm{cl}\left(\bigcup V_i\right)$. On peut supposer $\sigma \in \mathcal{C}$, i.e. $\sigma \in \lim \bigcup V_i$. Alors $\{n \in \mathbb{N} : \sigma_{|n} \in \bigcup V_i\}$ est dans $\mathcal{U}$, donc n'est pas vide : soit n_0 en témoignant. Il existe ainsi $i_0 \in I$ tel que $\sigma_{|n_0} \in V_{i_0}$.

Mais V_{i_0} est ouvert i.e. clos supérieurement, donc $(\forall n)(n \geqslant n_0 \rightarrow \sigma_{|n} \in V_{i_0})$. La partie cofinie $\mathbb{N}_{\geqslant n_0}$ est dans $\mathcal{U}$, donc $\sigma \in \lim V_{i_0} \subseteq \mathrm{cl}(V_{i_0}) \subseteq \bigcup \mathrm{cl}(V_i)$.

— Montrons la préservation de l'intérieur-d'intersection de familles d'ouverts, i.e. dans les notations précédentes : $\mathrm{cl}\left(\square \bigcap V_i\right) = \square \bigcap \mathrm{cl}(V_i)$. Clairement $\mathrm{cl}\left(\bigcap V_i\right) \subseteq \bigcap \mathrm{cl}(V_i)$, d'où $\square\, \mathrm{cl}\left(\bigcap V_i\right) \subseteq \square \bigcap \mathrm{cl}(V_i)$. Mais cl commute avec $\square$, d'où $\mathrm{cl}\left(\square \bigcap V_i\right) \subseteq \square \bigcap \mathrm{cl}(V_i)$. Soit réciproquement $x \in \square \bigcap \mathrm{cl}(V_i)$. Par définition de la topologie, il existe $s \in \mathcal{A}$ tel que $x \in \mathcal{B}_{\sqsupseteq s} \subseteq \bigcap \mathrm{cl}(V_i)$. Alors $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s} \subseteq \bigcap \mathcal{A} \cap \mathrm{cl}(V_i) = \bigcap V_i$. Ainsi $\mathcal{B}_{\sqsupseteq s} \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcap V_i\right)$ et donc $\mathcal{B}_{\sqsupseteq s} \subseteq \square\, \mathrm{cl}\left(\bigcap V_i\right)$. Comme cl commute avec $\square$, on a $x \in \mathcal{B}_{\sqsupseteq s} \subseteq \mathrm{cl}\left(\square \bigcap V_i\right)$. $\diamond$

On n'affirme pas non plus l'existence de surjection ouverte et continue $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$, car à présent c'est $\mathcal{E}$ qui peut manquer de points limites par rapport à $\mathcal{B}$. On va construire un $\mathcal{A}$-arbre d'ouverts de $\mathcal{E}$ (comme pour établir l'universalité de l'espace de Cantor, théorème 4.3), mais en contrôlant le résidu finement. Un lemme topologique est admis.

Lemme (« ε-dissection » ; admis)**.** Soit $(E; d)$ un espace métrique sans points isolés. Soient $U \subseteq E$ un ouvert non vide de E et $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif. Alors il existe des parties $O_0 = O_0(U, \varepsilon)$, $O_1 = O_1(U, \varepsilon)$ et $R = R(U, \varepsilon)$ telles que :

— O_0 et O_1 sont des ouverts ; O_0, O_1, R ne sont pas vides ;

— $U = O_0 \sqcup O_1 \sqcup R$;

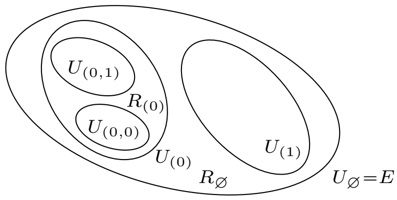
— $\overline{O_0} \backslash O_0 = \overline{O_1} \backslash O_1 = \overline{R} = \overline{U} \backslash (O_0 \cup O_1)$;

— $(\forall x)(x \in U \rightarrow d(x, R) < \varepsilon)$.

Notation. On définit un arbre d'ouverts indexé par $\mathcal{A}$ en posant $U_\varnothing = E$ puis par récurrence :

$$U_{(s,i)} = O_i\left(U_s, \frac{1}{1 + \ell(s)}\right).$$

Pour $s \in \mathcal{A}$, soit $R_s = R\left(U_s, \frac{1}{1+\ell(s)}\right)$. Pour $\sigma \in \mathcal{C}$, soit $I_\sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\sigma_{|n}}$.



Dissection itérée, indexée par $\mathcal{A}$

Remarque. Si $s \sqsubseteq t$ dans $\mathcal{A}$, alors $R_s \subseteq \overline{R_t}$. Il suffit en effet de traiter une extension immédiate, disons $s \sqsubseteq (s, 0)$. Par construction, on a bien :

$$R_s \subseteq \overline{R_s} = \overline{U_{(s,0)}} \backslash U_{(s,0)} \subseteq \overline{U_{(s,0)}} \backslash (U_{(s,0,0)} \cup U_{(s,0,1)}) = \overline{R_{(s,0)}}.$$

Notation. Soit $f \colon E \to \mathcal{B}$ définie comme suit :

— si $x \in R_s$, on pose $f(x) = s$;

— si $x \in I_\sigma$, on pose $f(x) = \sigma$.

Étape 3. Cette fonction est bien définie, continue, et atteint tout $s \in \mathcal{A}$. Si $W \subseteq \mathcal{E}$ est un ouvert de $\mathcal{E}$, alors $f(W) \subseteq \square\,\mathrm{cl}(f(W))$.

Vérification. On montre que les R_s, tous non vides, et ceux des I_σ qui ne sont pas vides, partitionnent E. La disjonction est évidente. Soit $x \in E$ fixé. Alors $\{s \in \mathcal{A} : x \in U_s\}$ est totalement ordonnée et close inférieurement. Il y a deux cas : soit il existe s maximal tel que $x \in U_s$, auquel cas $x \in R_s$, soit l'ensemble d'indices est une branche $\sigma \in \mathcal{C}$, auquel cas $x \in I_\sigma$. On a la partition annoncée, donc f est bien définie. Comme R_s n'est jamais vide, il y a des points d'image s (on ne l'affirme pas des éléments de $\mathcal{C}$). Enfin $f^{-1}(\mathcal{B}_{\sqsupseteq s}) = U_s$ est ouvert, d'où la continuité.

Soient W un ouvert de $\mathcal{E}$, puis $x_0 \in W$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B_0 = B(x_0, \varepsilon) \subseteq W$. Il y a deux cas.

— Si $f(x_0) = s_0 \in \mathcal{A}$, alors par construction de f on a $x_0 \in R_{s_0}$. Soit $t \sqsupseteq s_0$ dans $\mathcal{A}$. On a remarqué $R_{s_0} \subseteq \overline{R_t}$, donc il existe $x_1 \in B_0 \cap R_t$. Alors $t = f(x_1) \in f(B_0) \subseteq f(W)$. Ainsi $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq f(W)$ puis $\mathcal{B}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq \mathrm{cl}(f(W))$ et $\mathcal{B}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq \square\,\mathrm{cl}(f(W))$. Enfin $f(x_0) = s_0 \in \mathcal{B}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq \square\,\mathrm{cl}(f(W))$.

— Si $f(x_0) = \sigma \in \mathcal{C}$, alors par construction $x_0 \in I_\sigma$. Soit n tel que $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $s_0 = \sigma_{|n}$. Par définition, $x_0 \in U_{s_0}$. D'après la clause en ε du lemme de dissection, il existe $x_1 \in R_{s_0}$ tel que $d(x_0, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $t \sqsupseteq s_0$ dans $\mathcal{A}$. Comme $R_{s_0} \subseteq \overline{R_t}$, il existe $x_2 \in R_t$ tel que

$d(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $d(x_0, x_2) < \varepsilon$ et $x_2 \in W$. En outre $t = f(x_2) \in f(W)$. Donc $\mathcal{A}_{\sqsupseteq s_0} \subseteq f(W)$. On conclut comme dans le premier cas $f(x_0) = \sigma \in \square\,\mathrm{cl}(f(W))$.

Ceci montre $f(W) \subseteq \square\,\mathrm{cl}(f(W))$, comme voulu. $\diamond$

Notation. Soit $g = (P^* f) \circ \mathrm{cl}$ qui fait :

$$\begin{array}{rccc} g\colon & P_\square(\mathcal{A}) & \to & P_\square(E) \\ & S & \mapsto & f^{-1}(\mathrm{cl}\, S) \end{array}$$

Étape 4. La fonction g est un plongement au sens de $\mathbf{Bool}_\square$. En outre si $\{V_i : i \in I\}$ est une famille d'ouverts de $\mathcal{A}$, alors $g\left(\bigcup V_i\right) = \bigcup g(V_i)$ et $g\left(\square \bigcap V_i\right) = \square \bigcap g(V_i)$.

Vérification. On n'affirme pas que $P^* f$ soit un plongement au sens de $\mathbf{Bool}_\square$ car la fonction continue $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$:

1. n'est pas nécessairement surjective sur $\mathcal{B}$;
2. n'est pas nécessairement ouverte.

On ne peut donc pas invoquer le lemme du début de la démonstration. Dans la suite, S désigne une partie de $\mathcal{A}$.

— La fonction $P^* f\colon P(\mathcal{B}) \to P(E)$ est un morphisme au sens de **Bool** ; l'opérateur cl l'est aussi d'après l'étape 2, donc g également.

— Si $g(S) = \varnothing$ alors $\mathrm{cl}(S) \cap \mathcal{A} = \varnothing$, donc $S = \varnothing$: le morphisme est injectif.

— On affirme que $\square$ et f^{-1} commutent sur les parties de la forme $\mathrm{cl}\, S$. En effet par continuité de f (étape 3) on a d'une part : $f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, S) \subseteq \square f^{-1}(\mathrm{cl}\, S)$. D'autre part, soit $W = \square f^{-1}(\mathrm{cl}\, S)$. Alors par propriété de f (étape 3) :

$$\begin{aligned} \square f^{-1}(\mathrm{cl}\, S) = W \subseteq f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, f(W)) &= f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, f(\square f^{-1}(\mathrm{cl}\, S))) \\ &\subseteq f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, f(f^{-1}(\mathrm{cl}\, S))) \subseteq f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\, S) = f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, S). \end{aligned}$$

Ceci montre $\square f^{-1}(\mathrm{cl}\, S) = f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, S)$.

— En particulier g préserve $\square$. En effet cl préserve $\square$, donc par la relation précédente :

$$g(\square S) = f^{-1}(\mathrm{cl}\,\square S) = f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, S) = \square f^{-1}(\mathrm{cl}\, S) = \square g(S).$$

— Tant f^{-1} que cl (étape 2) préservent $\bigcup = \bigvee$ pour des ouverts, donc g aussi.

— Soient V_i des ouverts de $\mathcal{A}$. Comme cl commute avec $\bigwedge$ pour des ouverts (étape 2), que f est continue, et que f^{-1} commute avec $\bigcap$, on a :

$$\begin{aligned} g\left(\bigwedge V_i\right) &= f^{-1}\left(\mathrm{cl}\bigwedge V_i\right) = f^{-1}\left(\bigwedge \mathrm{cl}\, V_i\right) = f^{-1}\left(\square\bigcap \mathrm{cl}\, V_i\right) \\ &\subseteq \square f^{-1}\left(\bigcap \mathrm{cl}\, V_i\right) = \square\bigcap f^{-1}(\mathrm{cl}\, V_i) = \bigwedge g(V_i). \end{aligned}$$

D'autre part soit $W = \square f^{-1}\left(\bigcap \mathrm{cl}\, V_i\right) = \square\bigcap f^{-1}(\mathrm{cl}\, V_i) = \bigwedge g(V_i)$, qui est un ouvert de $\mathcal{E}$. Par propriété de f (étape 3), commutation de $\square$ et cl, puis commutation de $\bigwedge$ et cl :

$$\begin{aligned} W &\subseteq f^{-1}(\square\,\mathrm{cl}\, f(W)) = f^{-1}\left(\square\,\mathrm{cl}\, f\left(\square f^{-1}\left(\bigcap \mathrm{cl}\, V_i\right)\right)\right) \\ &\subseteq f^{-1}\left(\square\,\mathrm{cl}\, f\left(f^{-1}\left(\bigcap \mathrm{cl}\, V_i\right)\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\square\,\mathrm{cl}\bigcap \mathrm{cl}\, V_i\right) \\ &= f^{-1}\left(\mathrm{cl}\,\square\bigcap \mathrm{cl}\, V_i\right) = f^{-1}\left(\mathrm{cl}\bigwedge \mathrm{cl}\, V_i\right) = f^{-1}\left(\mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\bigwedge V_i\right) \\ &= f^{-1}\left(\mathrm{cl}\bigwedge V_i\right) = g\left(\bigwedge V_i\right). \end{aligned}$$

Ceci montre l'égalité et les propriétés voulues. ◇

On a formé un plongement g de $\mathbf{Bool}_\square$; sa restriction $\breve{g}$ aux ouverts préserve en particulier l'opération $\to$, et donne un morphisme de **Heyt**. On a vérifié que $\breve{g}\colon \mathcal{O}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{E})$ préserve $\bigvee$ et $\bigwedge$. □

Ces délicates dissections d'espaces topologiques n'interviennent pas en logique classique. Application en § I.

Exercices

D.1 (treillis de Heyting). Soit $\mathbb{H}$ un treillis de Heyting. On appelle *pseudo-complément* de $a \in H$ et l'on note $\neg a$ l'élément $a \to 0$.

a. Montrer les variantes des lois de De Morgan suivantes : (i) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$; (ii) $\neg(x \wedge y) = \neg\neg(\neg x \vee \neg y)$.

b. Montrer l'équivalence entre : (i) $\mathbb{H}$ est un treillis de Boole ; (ii) $(\forall a)(a \vee \neg a = 1)$; (iii) $(\forall a)(\neg\neg a = a)$.

c. En déduire que le quotient de $\mathbb{H}$ par la relation d'équivalence $a \sim b$:si $\neg a = \neg b$ est un anneau de Boole.

d. Soit $\varphi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ un morphisme de treillis de Heyting. Montrer que $\ker\varphi = \{a \in \mathbb{H} : \varphi(a) = 1\}$ est un filtre (v. § 5.2), et que φ est injectif ssi $\ker\varphi = \{1\}$.

e. À un filtre F de $\mathbb{H}$ on associe la relation : $a \sim b$ si $(a \to b \in F$ et $b \to a \in F)$. Montrer qu'il y a une structure de treillis de Heyting sur $\mathbb{H}/\!\sim$ qui fait de $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/\!\sim$ un morphisme.

(*) **D.2 (représentations de treillis de Heyting).** Montrer que tout treillis de Heyting se plonge dans un treillis $\mathcal{O}(\mathcal{E})$. [Un filtre est *premier* si $a \vee b \in \mathcal{F}$ entraîne $a \in \mathcal{F}$ ou $b \in \mathcal{F}$. Topologiser $\operatorname{Spec}\mathbb{H}$. Ne pas oublier la préservation de $\to$.]

D.3 (représentations relationnelles d'anneaux de Boole modaux).

a. Soit $\mathbb{M} = (M\,; R)$ une relation binaire. Sur $P(M)$ on pose $\Box X = (R^{-1}(X^c))^c = \{\mathfrak{p} \in M : (\forall \mathfrak{q})(\mathfrak{p}R\mathfrak{q} \to \mathfrak{q} \in X)\}$. Montrer que $P_\Box(\mathbb{M}) = (P(M)\,; \triangle, \cap, \Box)$ est un anneau de Boole modal.

b. Soit $(\mathbb{A}\,; +, \cdot, \Box)$ un anneau de Boole modal. Montrer qu'il existe une représentation relationnelle fidèle, i.e. une relation binaire $\mathbb{M}$ et un plongement $\mathbb{A} \hookrightarrow P_\Box(\mathbb{M})$ [$\mathbf{Bool}_\Box$]. [Munir $\operatorname{Spec}(\mathbb{A})$ de $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$: $(a \in \mathfrak{q} \to \Box a \in \mathfrak{p})$.]

c. Un anneau de Boole modal est *intérieur* (ou : S_4) s'il vérifie : $(\forall a)[(\Box a \leqslant a) \wedge (\Box\Box a = \Box a)]$. Montrer que si $\mathbb{A}$ est intérieur, on peut en outre supposer $\mathbb{M}$ réflexive et transitive.

D.4 (dualité pour anneaux de Boole modaux). Un *espace profini modal* est un espace profini $\mathcal{E} = (E\,; \mathcal{T})$ muni d'une relation binaire R telle que :

- pour tout point x, l'ensemble $R(x) := \{y \in E : xRy\}$ est fermé ;
- pour tout fervert G, l'ensemble $R^{-1}(G) := \{x \in E : (\exists y)(xRy \wedge y \in G)\}$ est fervert.

Établir une correspondance entre anneaux de Boole modaux et espaces profinis modaux.

D.5. Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique ; ^{c} désigne le complémentaire et $^\circ$ l'intérieur.

a. Montrer que pour tout $X \subseteq \mathcal{E}$, l'orbite de X sous l'action de $\langle c, \circ\rangle$ a au plus 14 éléments.

(*) b. Trouver un $X \subseteq \mathbb{R}$ réalisant ce maximum.

D.6. Soit $(\mathcal{E}\,; \mathcal{T})$ un espace métrisable sans points isolés. Montrer qu'il n'existe pas nécessairement de surjection ouverte et continue $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$. [Baire.]

(*) **D.7.** Montrer directement $P_\Box(\mathcal{A}) \hookrightarrow P_\Box(\mathbb{Q})$ [$\mathbf{Bool}_\Box$]. On pourra construire une surjection $T \twoheadrightarrow \mathcal{A}$, pour une partie $T \subseteq \mathbb{Q}$ judicieusement choisie.

Notes conclusives

- **Repères historiques**

  On montre aisément que les énoncés suivants subsistent :

  I. $\overline{A+B} = \overline{A} + B$ [sic] *;*

  II. $A \subset \overline{A}$ *;*

  III. $\overline{0} = 0$ *;*

  IV. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

  Cette Note est consacrée à l'analyse de ces propositions et de leurs conséquences. Nous procédons par voie axiomatique : nous supposons donnés un ensemble arbitraire 1 *et une fonction* $\overline{A}$ *telle que, pour tout* A *contenu dans* 1, $\overline{A}$ *y est contenu également et remplit les axiomes I–IV. D'ailleurs, quant à l'ensemble* 1*, nous n'aurons récours qu'aux propriétés d'ensembles énoncées dans les axiomes de l'Algèbre de la Lo-*

gique. [Kur22a]

Algèbre topologique. Le sujet naît avec [Kur22a], issu de la thèse de Kuratowski. L'article axiomatise l'adhérence, et considère également la dérivée de Cantor-Bendixson (v. § 4, notes conclusives). L'ex. D.5 vient de [Kur22a, § 5]. Les liens avec la logique sont postérieurs [McK41].

Treillis de Heyting. • Tôt découverts par Skolem [**Sko19**, p. 14], puis à nouveau par Birkhoff (« treillis relativement pseudo-complémentés ») pour modéliser la déduction intuitionniste (§ G). • La plupart des textes emploie « algèbre » au lieu de « treillis ». On pourrait aussi les nommer d'après Brouwer, ou d'après Skolem. • Sur la non-reconnaissance de Skolem : [Pla07, § 4]. • Représentation (ex. D.2) : due à Stone, [Sto38]. V. *Dualité de Stone généralisée* infra.

• **Anneaux de Boole modaux.** Anneaux de Boole avec une abstraction de l'adhérence topologique dans [**MT44**] ; sans remonter à Kuratowski, c'est sans doute plus ancien. Le formalisme équivalent des anneaux intérieurs prime depuis [Blo76]. On n'a cherché ni la première occurrence des anneaux de Boole modaux (qui se rattachent à la théorie générale [JT51]), ni celle des treillis de Heyting modaux (pour lesquels on peut consulter [Sco08, § 11]).

Théorème de McKinsey-Tarski. • La littérature spécialisée sépare mal le résultat d'algèbre topologique de ses (nombreuses) applications à telle ou telle logique. • L'idée et la « dissection » viennent de [Tar38a, § 3] ; première modernisation [**MT44**, Theorem 3.5]. • L'énoncé général pour treillis de Heyting est présent dans [Moe82, Theorem 2.6], également par dissection. • La preuve donnée suit [Kre13]. Il y en a d'autres [Bez+18]. • Le sujet se relit en termes d'*espaces sobres.* Comme les treillis de Heyting permettent de formaliser la « topologie sans points », la sobrification est souvent étudiée depuis la logique catégorique ; approche classique dans [Sün00].

[Kur22a] : Casimir KURATOWSKI. « Sur l'opération $\overline{A}$ de l'analysis situs ». In : *Fundam. Math.* 3 (1922), p. 182-199

[McK41] : John MCKINSEY. « A solution of the decision problem for the Lewis systems S_2 and S_4, with an application to topology ». In : *J. Symbolic Logic* 6 (1941), p. 117-134

[**Sko19**] : Thoralf SKOLEM. *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls.* Kristiania, 1919. 37 p.

[Pla07] : Jan von PLATO. « In the shadows of the Löwenheim-Skolem theorem : early combinatorial analyses of mathematical proofs ». In : *Bull. Symb. Log.* 13.2 (2007), p. 189-225

[Sto38] : Marshall STONE. « Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics ». In : *Čas. Mat. Fys.* 067.1 (1938), p. 1-25

[**MT44**] : John MCKINSEY et Alfred TARSKI. « The algebra of topology ». In : *Ann. of Math. (2)* 45 (1944), p. 141-191

[Blo76] : Willem BLOK. « Varieties of interior algebra ». Thèse de doct. Universiteit van Amsterdam, 1976. xii+251

[JT51] : Bjarni JÓNSSON et Alfred TARSKI. « Boolean algebras with operators. I ». In : *Amer. J. Math.* 73 (1951), p. 891-939

[Tar38a] : Alfred TARSKI. « Der Aussagenkalkül und die Topologie ». In : *Fundam. Math.* 31 (1938), p. 103-134

[Moe82] : Ieke MOERDIJK. « Some topological spaces which are universal for intuitionistic predicate logic ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 44.2 (1982), p. 227-235

[Kre13] : Philip KREMER. « Strong completeness of S_4 for any dense-in-itself metric space ». In : *Rev. Symb. Log.* 6.3 (2013), p. 545-570

[Bez+18] : Guram BEZHANISHVILI et al. « A new proof of the McKinsey-Tarski theorem ». In : *Studia Logica* 106.6 (2018), p. 1291-1311

[Sün00] : Philipp SÜNDERHAUF. « Sobriety in terms of nets ». In : *Appl. Categ. Structures*

- **Dualité de Stone généralisée**

Treillis de Heyting. L'ex. D.2 propose une représentation, pas une dualité. Celle-ci est fournie par les espaces « hybrides » (ou « d'Esakia ») [Esa74]. La donnée topologique pure ne suffit plus ; l'espace porte soit une information liée à l'ordre, soit une seconde topologie. Référence [Gehrke-van Gool].

Anneaux de Boole modaux. L'ex. D.4 est un cas particulier de l'étude des anneaux de Boole avec opérateurs [JT51].

8.4 (2000), p. 649-653

[Esa74] : Leo Esakia. « Topological Kripke models ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 214 (1974), p. 298-301

[Gehrke-van Gool] : Mai Gehrke et Sam van Gool. *Topological Duality for Distributive Lattices : Theory and Applications.* Cambridge University Press, 2023