Compléments au chapitre II (« Éléments de logique »)

Aperçu du chapitre. • Toute théorie élémentaire possède une *axiomatisation logiquement indépendante* (§ E). • La *logique algébrique* (§ F) est une réécriture algébrique des notions logiques par abstraction du comportement des anneaux de formules. • La *logique intuitionniste* (§ G) remet en cause la démonstration par l'absurde $\perp_c$. Elle est complète pour la sémantique appropriée, où les structures s'agrègent en multivers. • La *logique modale* (§ H) modélise « il est possible que » ; ici encore les structures s'agrègent en multivers, avec complétude pour la sémantique appropriée. • Outre la sémantique en multivers relationnels, la logique intuitionniste et la logique modale possèdent une *sémantique topologique* (§ I). • Le *calcul des séquents* (§ J) permet à droite de $\vdash$ un ensemble de formules ; ceci libère des symétries, et invite à la théorie de la démonstration.

§ E. Axiomatisations logiquement indépendantes

Toute théorie élémentaire possède une axiomatisation logiquement indépendante.

Prérequis : §§ 6, 8.

Par abus de notation, on écrit $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ si deux ensembles d'axiomes Σ_1, Σ_2 ont mêmes modèles, i.e. $\Sigma_1 \models \Sigma_2$ et $\Sigma_2 \models \Sigma_1$.

Définition (indépendance logique)**.** Un ensemble d'énoncés Σ est *logiquement indépendant* si pour $\varphi \in \Sigma$, on a $\Sigma \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi$.

Remarques

— La tradition dit « indépendante », mais il y a d'autres notions d'indépendance possibles ; v. notes conclusives.

— L'indépendance de Σ est sa $\subseteq$-minimalité dans sa classe d'équivalence logique $\equiv$.

Théorème (Reznikoff)**.** Toute théorie élémentaire possède une axiomatisation logiquement indépendante.

Remarques

— On n'affirme pas *pas* toute axiomatisation contienne une axiomatisation logiquement indépendante.

— Classique et simple dans le cas dénombrable (exercice E.2), le théorème est plus délicat dans le cas général.

— Il dépasse la logique élémentaire ; v. remarques suivant la démonstration.

Démonstration. Démonstration due à Emil Jeřábek. On peut supposer card $\mathcal{L}$ infini (exercice E.2). En revanche on ne le suppose pas purement relationnel ; v. remarques suivant la preuve. Soit Θ une $\mathcal{L}$-théorie.

Définition. Un symbole $\sigma \in \mathcal{L}$ est *essentiel* à Θ s'il existe une $(\mathcal{L}\backslash\{\sigma\})$-structure avec deux interprétations distinctes de σ, donnant deux $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ avec $\mathbb{A} \not\models \Theta$ et $\mathbb{B} \models \Theta$.

Soit $\mathcal{L}_{\text{ess}}(\Theta) = \{\sigma \in \mathcal{L} : \sigma \text{ est essentiel à } \Theta\}$. En l'absence d'ambiguité on omet Θ.

Lemme. Si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux $\mathcal{L}$-structures étendant la même $\mathcal{L}_{\text{ess}}$-structure, alors $\mathbb{A} \models \Theta$ ssi $\mathbb{B} \models \Theta$.

Démonstration. Supposons $\mathbb{A} \models \Theta$. Soit $\varphi \in \Theta$; on montre $\mathbb{B} \models \varphi$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les symboles inessentiels (i.e. de $\mathcal{L}\backslash\mathcal{L}_{\text{ess}}$) apparaissant dans φ. On définit un chemin fini de $\mathcal{L}$-structures comme suit : $\mathbb{A}_0$ est $\mathbb{A}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $\mathbb{A}_i$ la même $(\mathcal{L}\backslash\{\sigma_i\})$-structure que $\mathbb{A}_{i-1}$, mais avec $\sigma_i[\mathbb{A}_i] = \sigma_i[\mathbb{B}]$. Par définition et récurrence, $\mathbb{A}_i \models \Theta$; en particulier $\mathbb{A}_n \models \varphi$. Mais $\mathbb{A}_n$ et $\mathbb{B}$ ont même interprétation de tous les symboles présents dans φ, donc $\mathbb{B} \models \varphi$. $\square$

Étape 1. On peut supposer $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ess}}(\Theta)$.

Vérification. Soit $\Theta_{\text{ess}} = \Theta \cap \mathcal{L}_{\text{ess}}$-Én ; c'est une $\mathcal{L}_{\text{ess}}$-théorie. On va montrer $\Theta_{\text{ess}} \equiv \Theta$. Quitte à chercher une axiomatisation logiquement indépendante de Θ_{ess}, on pourra donc travailler dans $\mathcal{L}_{\text{ess}}(\Theta)$. Il reste à montrer l'affirmation. On *neutralise* le langage inessentiel par deux constructions, l'une en syntaxe et l'autre en sémantique. Un *choix des inessentiels* dans $\mathbb{A}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{A}$ indexée par les constantes inessentielles et les fonctions inessentielles ; on y pense comme à un uplet infini $\mathbf{a}$.

— Si φ est une $\mathcal{L}$-formule, on note φ' la formule obtenue comme suit. Chaque symbole inessentiel de relation R est remplacé par $\perp$. Chaque symbole inessentiel de constante c ou de fonction f est remplacé par une variable disponible x_c ou x_f, et l'on quantifie universellement.

— Si $\mathbb{A}$ est une $\mathcal{L}_{\text{ess}}$-structure et $\mathbf{a}$ un choix des inessentiels, on note $\mathbb{A}'_{\mathbf{a}}$ la $\mathcal{L}$-structure obtenue comme suit. Chaque relation inessentielle R est interprétée par $\varnothing$. Chaque constante inessentielle c est interprétée par le point associé de $\mathbf{a}$. Chaque fonction inessentielle f est interprétée par la fonction constante valant le point associé de $\mathbf{a}$. (Noter que si $\mathbb{A}$ est déjà une $\mathcal{L}$-structure, alors $\mathbb{A}'_{\mathbf{a}}$ n'en diffère que par interprétation inessentielle.)

Par construction, $\mathbb{A} \models \varphi'$ ssi pour chaque choix des inessentiels, $\mathbb{A}'_{\mathbf{a}} \models \varphi$.

Si $\varphi \in \Theta$, alors $\varphi' \in \Theta_{\text{ess}}$. En effet supposons $\mathbb{A} \models \Theta$. D'après le lemme, pour tout choix des inessentiels $\mathbf{a}$, on a $\mathbb{A}'_{\mathbf{a}} \models \Theta$; notamment $\mathbb{A} \models \varphi'$. Ainsi $\varphi' \in \Theta \cap \mathcal{L}_{\text{ess}}\text{-Én} = \Theta_{\text{ess}}$.

On montre $\Theta_{\text{ess}} \equiv \Theta$. Clairement $\Theta \models \Theta_{\text{ess}}$. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure vérifiant Θ_{ess}. Pour chaque $\varphi \in \Theta$ on a $\varphi' \in \Theta_{\text{ess}}$, donc $\mathbb{A} \models \varphi'$. Ainsi pour chaque $\varphi \in \Theta$ et chaque choix des inessentiels $\mathbf{a}$, on a $\mathbb{A}'_{\mathbf{a}} \models \varphi$. Donc $\mathbb{A}'_{\mathbf{a}} \models \Theta$. Mais $\mathbb{A}'_{\mathbf{a}}$ et $\mathbb{A}$ ne diffèrent que par les symboles inessentiels de Θ. D'après le lemme, $\mathbb{A} \models \Theta$. $\diamond$

Soit $\kappa = \operatorname{card} \mathcal{L}$. On l'a supposé infini.

Étape 2. Il existe des $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{A}_\alpha$ et des énoncés $\varphi_\alpha \in \Theta$, pour $\alpha \in \kappa$, vérifiant :

(i) $\mathbb{A}_\alpha \models \varphi_\beta$ ssi $\alpha \neq \beta$;

(ii) pour $\theta \in \Theta$, l'ensemble $\{\alpha \in \kappa : \mathbb{A}_\alpha \not\models \theta\}$ est fini.

Vérification. Énumérons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ess}} = \{\sigma_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Par définition, pour chaque $\alpha \in \kappa$ il existe $\mathbb{A}_\alpha$ et $\mathbb{B}_\alpha$ ne différant que par l'interprétation de σ_α et tels que $\mathbb{A}_\alpha \not\models \Theta$ mais $\mathbb{B}_\alpha \models \Theta$. Donc il existe $\theta_\alpha \in \Theta$ tel que $\mathbb{A}_\alpha \not\models \theta_\alpha$.

Si $\theta \in \Theta$ et que σ_α n'est pas parmi ses symboles, alors $\mathbb{A}_\alpha$ et $\mathbb{B}_\alpha$ coïncident sur tous les symboles de θ. Comme $\mathbb{B}_\alpha \models \theta$, on a $\mathbb{A}_\alpha \models \theta$. Contraposant, si $\mathbb{A}_\alpha \not\models \theta$, alors θ emploie le symbole σ_α. La formule étant finie, cela ne se produit qu'un nombre fini de fois. Ceci prouve (ii). On peut oublier les

$\mathbb{B}_\alpha$.

On peut supposer les $\mathbb{A}_\alpha$ deux à deux non logiquement équivalents. En effet fixons $\alpha \in \kappa$. Comme $\mathbb{A}_\alpha \not\models \theta_\alpha$, on a $\{\beta \in \kappa : \mathbb{A}_\beta \equiv \mathbb{A}_\alpha\} \subseteq \{\beta \in \kappa : \mathbb{A}_\beta \not\models \theta_\alpha\}$, qui est fini par (ii). La fonction $\alpha \mapsto \mathrm{Th}(\mathbb{A}_\alpha)$ est donc à fibres finies. Retenant un point par fibre, on peut supposer que les $\mathbb{A}_\alpha$ sont deux à deux non équivalents ; l'ensemble d'indexation reste de cardinal κ.

Toujours d'après (ii), à α fixé, l'ensemble $I_\alpha = \{\beta \neq \alpha : \mathbb{A}_\beta \not\models \theta_\alpha\}$ est fini. En outre pour $\beta \in I_\alpha$ on a $\mathbb{A}_\beta \not\equiv \mathbb{A}_\alpha$. Donc il existe une formule $\tau_{\alpha,\beta}$ (pas forcément dans Θ) telle que $\mathbb{A}_\beta \models \tau_{\alpha,\beta}$ mais $\mathbb{A}_\alpha \not\models \tau_{\alpha,\beta}$.

On considère les énoncés :

$$\varphi_\alpha : \quad \theta_\alpha \vee \bigvee_{\beta \in I_\alpha} \tau_{\alpha,\beta}.$$

Montrons qu'ils conviennent pour (i). Comme $\theta_\alpha \models \varphi_\alpha$, on a $\varphi_\alpha \in \Theta$. Par construction, $\mathbb{A}_\alpha \not\models \varphi_\alpha$. Si réciproquement $\mathbb{A}_\beta \not\models \varphi_\alpha$, alors $\mathbb{A}_\beta \not\models \theta_\alpha$. Si en outre $\beta \neq \alpha$, alors $\beta \in I_\alpha$: donc $\mathbb{A}_\beta \models \tau_{\alpha,\beta}$, contradiction. Ainsi $\beta = \alpha$, comme voulu pour (i). ◇

Étape 3. Une axiomatisation logiquement indépendante.

Vérification. Soient les $\mathbb{A}_\alpha$ et φ_α comme dans l'étape 2.

Comme $\operatorname{card}\mathcal{L}$ est infini, on a $\operatorname{card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{card}\Theta \leqslant \operatorname{card}\mathcal{L}\text{-Form} = \operatorname{card}\mathcal{L}$. On énumère $\Theta = \{\chi_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ (noter que les φ_α en forment un sous-ensemble). Pour $\alpha \in \kappa$, soit l'énoncé :

$$\psi_\alpha : \quad \left(\bigwedge_{\beta : \mathbb{A}_\beta \not\models \chi_\alpha} \varphi_\beta\right) \to \chi_\alpha.$$

Il est bien défini par finitude de la conjonction (clause (ii)). Soit $\Sigma = \{\varphi_\alpha \wedge \psi_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. On affirme que Σ convient.

Si $\mathbb{M} \models \Theta$, alors $\mathbb{M}$ vérifie les χ_α et les φ_α, donc aussi les ψ_α : ainsi $\mathbb{M} \models \Sigma$. Si $\mathbb{M} \models \Sigma$, alors $\mathbb{M}$ vérifie les φ_α et les ψ_α, donc aussi les χ_α : ainsi $\mathbb{M} \models \Theta$. Ceci montre $\Sigma \equiv \Theta$.

Enfin Σ est une axiomatisation logiquement indépendante. En effet pour α fixé, $\mathbb{A}_\alpha$ ne vérifie pas φ_α. Si $\beta \neq \alpha$, deux cas se présentent :

— soit $\mathbb{A}_\alpha \models \chi_\beta$, auquel cas $\mathbb{A} \models \psi_\beta$;

— soit $\mathbb{A}_\alpha \not\models \chi_\beta$, auquel cas dans les hypothèses de ψ_β figure φ_α. Mais

$\mathbb{A}_\alpha \not\models \varphi_\alpha$, donc $\mathbb{A}_\alpha \models \psi_\beta$.

Ainsi $\mathbb{A}_\alpha \models \varphi_\beta \wedge \psi_\beta$, donc $\mathbb{A}_\alpha \models \Sigma\backslash\{\varphi_\alpha \wedge \psi_\alpha\}$. Mais $\mathbb{A}_\alpha \not\models \varphi_\alpha$ donc $\mathbb{A}_\alpha \not\models \varphi_\alpha \wedge \psi_\alpha$. Ainsi $\Sigma\backslash\{\varphi_\alpha \wedge \psi_\alpha\} \not\models \Sigma$. C'est l'indépendance logique de Σ. ◇

Ceci achève la démonstration. □

Remarques

— Dans l'étape 1 on peut être tenté de supposer $\mathcal{L}$ purement relationnel en remplaçant les constantes c et fonctions f par des relations R_c et R_f. Mais l'indispensable ajout d'axiomes pour ces relations les rend artificiellement essentielles, et cela sort de l'esprit du théorème.

— L'argument utilise très peu : pas de compacité, pas d'interpolation de Craig, à la différence de la preuve de Reznikoff. Mais il faut le caractère finitaire des formules et un contrôle cardinal du type « card($\mathcal{L}$-Form) = card($\mathcal{L}$) ». En particulier le résultat reste valable en logique d'ordre supérieur, ou à quantificateurs généralisés, mais pas en logique infinitaire.

Exercices

E.1.

a. Montrer que toute axiomatisation finie *contient* une sous-axiomatisation logiquement indépendante, mais que c'est faux pour un ensemble infini.

b. On suppose la logique compacte. Montrer que toute partie logiquement indépendante peut être incluse dans une partie indépendante maximale.

c. Donner une théorie Θ et une partie $A \subseteq \Theta$ logiquement indépendante et maximale en tant que telle, mais avec $A \not\models \Theta$. (*)

Ceci montre l'échec de la stratégie naïve pour le théorème.

E.2. Montrer le théorème si Θ est au plus dénombrable (ce qui est le cas si $\mathcal{L}$ l'est).

E.3. Soit $A \subseteq$ Én ne contenant pas $\top$ (i.e. $\neg\bot$). Un axiome $\alpha \in A$ est *affaiblissable dans A* s'il existe un énoncé $\beta \in$ Én tel que $\alpha \models \beta$, $\beta \not\models \alpha$, et $(A\backslash\{\alpha\}) \cup \{\beta\} \models \alpha$. L'ensemble A est *affaiblissable* s'il possède un élément qui l'est.

a. Montrer que l'inaffaiblissabilité entraîne l'indépendance logique, sans réciproque.

b. Montrer que A est inaffaiblissable ssi pour $\alpha_1 \neq \alpha_2$ dans A, on a $\models \alpha_1 \vee \alpha_2$.

Notes conclusives

Le sujet semble sorti de mode avant épuisement. Dernière synthèse en date [Woj89], qui n'est plus à jour.

• **Repères historiques**

> *Wenn ein System von Sätzen als gültig erkannt ist, so ist es oft nicht erforderlich, alle dem Gedächtnis zu überliefern; es genügt, einige von ihnen auszuwählen, aus denen die andern gefolgert werden können.* [...] *Man kann jedoch fragen, ob die Eigenschaft eines Satzsystems, mehrere Axiomensysteme zu besitzen mit andern bemerkenswerten Eigenschaften zusammenhängt und ob es systematische Verfahren gibt, gegebenenfalls dasjenige Axiomensystem zu finden, das die geringste Zahl von Sätzen enthält.* [Her22]

• L'indépendance d'axiomes est un fil directeur de la préhistoire de la logique moderne : c'est la question du « postulat des parallèles », abondamment étudiée depuis l'Antiquité jusqu'à Saccheri et Lambert, puis clarifiée par la notion sémantique de modèle (§ 6, notes conclusives). • La quête systématique d'axiomatisations indépendantes pour des structures données passionnait le tournant du XX^e siècle. Hertz semble être le premier à avoir pensé le problème de façon générale, et non cas par cas [Her22], [Her23]. V. § 9, notes conclusives pour son influence sur Gentzen, et donc sur toute la théorie de la démonstration. • Ex. E.3 : [Chu25] ; contexte dans [BCV21]. • Le cas dénombrable du théorème (ex. E.2) est présent chez Tarski [Tar30b, Satz 16], mais pourrait être plus ancien. Cas général [Rez65]. Preuve suivie [Jeř22].

• **Généralisations et limites**

Cas récursif. L'énoncé devient faux ; il existe des théories effectives sans axiomatisation logiquement indépendante *effective* [Kre57, non publié], [Jon69]. (Toutefois PA et ZF possèdent des axiomatisations logiquement indépendantes effectives ; attribué à [MT60].)

Logique intuitionniste. Vrai en logique intuitionniste *propositionnelle* dans le cas dénom-

[Woj89] : Piotr Wojtylak. « Independent axiomatizability of sets of sentences ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 44.3 (1989), p. 259-299

[Her23] : Paul Hertz. « Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme II ». In : *Math. Ann.* 89 (1923), p. 76-102

[Chu25] : Alonzo Church. « On irredundant sets of postulates ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 27.3 (1925), p. 318-328

[BCV21] : Bruno Bandeira, Márcia Cerioli et Petrucio Viana. « Notions of Independence : Examples and Properties ». In : *Anais do II Workshop Brasileiro de Lógica.* Evento Online : SBC, 2021, p. 25-32

[Tar30b] : Alfred Tarski. « Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik ». In : *C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III* 23 (1930), p. 22-29

[Rez65] : Iégor Reznikoff. « Tout ensemble de formules de la logique classique est équivalent à un ensemble indépendant ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 260 (1965), p. 2385-2388

[Jeř22] : Emil Jeřábek. *Do second-order theories always have irredundant axiomatizations ?* Message sur MathOverflow. https://mathoverflow.net/questions/418045/do-second-order-theories-always-have-irredundant-axiomatizations. 2022

[Kre57] : Georg Kreisel. « Independent recursive axiomatization ». Communication au congrès de l'*Association for Symbolic Logic* du 27 décembre 1956 à l'Université de Rochester. 1957

[Jon69] : James Jones. « Independent recursive axiomatizability in arithmetic ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 23 (1969), p. 107-113

[MT60] : Richard Montague et Alfred Tarski. *Independent recursive axiomatizability.* Summaries Summer Inst. symbolic Logic, Cornell Univ. 1957. 1960

brable [Rez68], faux dans le cas non dénombrable [Woj89, Proposition 3.3], faux en logique intuitionniste *élémentaire* [Woj89, Proposition 2.15].

Logique infinitaire. Résultats partiels [Cai81]. Liens avec la théorie descriptive des ensembles [HS09]. Il reste des questions ouvertes.

Indépendance booléenne (2e lecture). • La littérature dédiée est redondante. • Par opposition à l'indépendance logique, qui concerne les filtres, la version booléenne est algébrique. Une partie $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$-Én est *booléennement indépendante* (v. ex. 5.5) si pour tout entier n, tous $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$ distincts et tous $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, on a $\bigwedge_i (\neg)^{\varepsilon_i} \varphi_i \not\equiv \bot$. Ceci équivaut à : « dans l'anneau de Boole $\mathcal{L}$-Én, Σ engendre un sous-anneau *libre* » (v. ex. 5.6), ce qui ne capture pas le rôle des quantificateurs. • Toute théorie possède-t-elle une axiomatisation booléennement indépendante ?

- Théorie dénombrable : comportement différent pour les logiques propositionnelle et élémentaire. (Raison : $\Lambda_{\omega,0}$ permet une infinité de « variables propositionnelles » ; $\Lambda_{\omega,\omega}$, selon le langage.) • Vrai en logique propositionnelle [Gry89], [Rez94a]. • En logique élémentaire, faux si le langage est fini [Gry90, pp. 32–34], mais vrai s'il est infini (dénombrable) [Gry90, p. 34], [Rez94a].
- Théorie non dénombrable (donc langage aussi) : pas de différence de comportement, mais il faut une hypothèse de régularité pour que ce soit vrai [Gry95], [Rez94b].

§ F. Logique algébrique

La logique algébrique est la recherche de structures algébriques décrivant les logiques. Dans le cas de la logique élémentaire, les objets pertinents sont les *anneaux de Lindenbaum*, aussi nommés *anneaux polyadiques avec égalité* ou *anneaux cylindriques* (§ F.1). Le calcul des *substitutions* se reformule avec élégance (§ F.2). Puis on passe aux questions de représentations dans les anneaux de Lindenbaum de parties, appelés *anneaux de cylindres.* La compacité (§ F.3) et la complétude (§ F.4) de la logique élémentaire s'interprètent et se

[Rez68] : Iégor Reznikoff. « Axiomatisation independante des ensembles denombrables de formules en logique intuitionniste ». In : *Compos. Math.* 20 (1968), p. 170-187

[Cai81] : Xavier Caicedo. « Independent sets of axioms in $L_{\kappa\alpha}$ ». In : *Canad. Math. Bull.* 24.2 (1981), p. 219-223

[HS09] : Greg Hjorth et Ioannis Souldatos. « Independently axiomatizable $L_{\omega_1,\omega}$ theories ». In : *J. Symbolic Logic* 74.4 (2009), p. 1273-1286

[Gry89] : Joanna Grygiel. « Absolutely independent axiomatizations for countable sets in classical logic ». In : *Stud. Log.* 48.1 (1989), p. 77-84

[Rez94a] : Iégor Reznikoff. « Axiomatisations libres (I) : ensembles dénombrables de formules ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* 318.10 (1994), p. 875-878

[Gry90] : Joanna Grygiel. « Absolutely independent sets of generators of filters in Boolean algebras ». In : *Rep. Math. Logic* 24 (1990), p. 25-35

[Gry95] : Joanna Grygiel. « Freely generated filters in free Boolean algebras ». In : *Stud. Log.* 54.2 (1995), p. 139-147

[Rez94b] : Iégor Reznikoff. « Axiomatisations libres (II) : ensembles non dénombrables de formules ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* 319.4 (1994), p. 311-314

démontrent dans ce cadre.
Prérequis : § 5 et §§ 6–11 ; en option, § 14 et § 16.

La logique algébrique exploite la structure d'anneau plutôt que celle de treillis. En particulier, elle préfère les idéaux aux filtres et considère plus ce qu'on peut réfuter (l'idéal envoyé sur 0) que ce qu'on peut démontrer (le filtre envoyé sur 1). Il faut néanmoins maîtriser les deux points de vue. • On rappelle de § 5.2 que tout anneau de Boole $\mathbb{A}$ porte naturellement la structure de treillis de Boole donnée par :

$$\neg a = 1 + a \;;\qquad a \wedge b = a \cdot b \;;\qquad a \vee b = a + b + a \cdot b \;;\qquad a \leqslant b \text{ ssi } a \cdot b = a.$$

Ce treillis de Boole n'est pas nécessairement complet ; quand elle existe, la borne supérieure d'une partie X est notée $\bigvee X$. • Dans un anneau, Spec désigne l'ensemble des idéaux premiers et $\mathrm{Spm} \subseteq \mathrm{Spec}$ celui des idéaux maximaux (§ 5.1.B). • Tout anneau de Boole $\mathbb{A}$ est de dimension 0, i.e. $\mathrm{Spec}(\mathbb{A}) = \mathrm{Spm}(\mathbb{A})$, et semi-simple au sens de Jacobson (on dit aussi semi-primitif), i.e. $\bigcap_{\mathrm{Spm}(\mathbb{A})} \mathfrak{m} = \{0\}$ (proposition 5.1).

§ F.1. Anneaux de Lindenbaum et leurs idéaux

- **Anneaux de Lindenbaum.** Il faut plusieurs définitions. On formalise d'abord le comportement d'un *quantificateur*, puis d'une famille de quantificateurs qui commutent avec une importante hypothèse de finitude ; enfin on abstrait les *égalités* $x = y$. • L'inspiration est l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules élémentaires modulo équivalence, où deux formules sont équivalentes si chacune entraîne ou démontre l'autre. (La complétude de la logique élémentaire, § 10, affirme que les deux verbes sont synonymes ; ce phénomène est redémontré en § F.4.)

Définition A (quantificateur sur un anneau de Boole)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Un *quantificateur* sur $\mathbb{A}$ est une fonction $\exists\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ vérifiant, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$:

— $\exists 0 = 0$;

— $a \leqslant \exists a$;

— $\exists(a \cdot \exists b) = \exists a \cdot \exists b$.

Var(a)

Définition B (anneau à $\mathcal{V}$-quantification locale, variables d'un élément)**.** Soit $\mathcal{V}$ un ensemble. Un anneau de Boole $\mathbb{A}$ est *à $\mathcal{V}$-quantification locale* s'il est muni de quantificateurs $\{\exists_x : x \in \mathcal{V}\}$ tels que :

— si $x, y \in \mathcal{V}$, alors $\exists_x \circ \exists_y = \exists_y \circ \exists_x$;

— si $a \in \mathbb{A}$, alors $\mathrm{Var}(a) = \{x \in \mathcal{V} : \exists_x a \neq a\}$ est fini.

Définition C (anneau égalitaire)**.** Un anneau de Boole à $\mathcal{V}$-quantification locale $\mathbb{A}$ est *égalitaire* s'il existe une fonction $\delta\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{A}$ vérifiant, pour $x, y, z \in \mathcal{V}$: $\delta_{x,y}$

- $\delta_{x,x} = 1$;
- si $z \notin \{x, y\}$, alors $\delta_{x,y} = \exists_z(\delta_{x,z} \cdot \delta_{y,z})$;
- si $x \neq y$ et $a \in \mathbb{A}$, alors $\exists_x(a \cdot \delta_{x,y}) \cdot \exists_x(\neg a \cdot \delta_{x,y}) = 0$.

Le dernier point de la définition devient clair en termes de *substitutions* (§ F.2).

Définition D (anneau de Lindenbaum)**.** Un *anneau de Lindenbaum* est un anneau de Boole à $\mathcal{V}$-quantification locale et égalitaire, où $\mathcal{V}$ est un ensemble infini dénombrable de référence.

Remarques

- En toute rigueur un anneau de Lindenbaum sur $\mathcal{V} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un anneau de Lindenbaum sur $\mathcal{V}' = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. On néglige cette lourdeur.
- La clause de finitude de $\mathrm{Var}(a)$ est parfois appelée « locale finitude de $\mathbb{A}$ » (en conflit avec la terminologie générale en algèbre). L'abandonner généralise au-delà de la logique élémentaire au prix de grandes complications techniques. V. notes conclusives.

Exemple (fondamental). Soient $\mathcal{L}$ un langage relationnel et Θ une $\mathcal{L}$-théorie. Sur $\mathcal{L}$-Form, soit $\varphi_1 \approx \varphi_2$ la relation d'équivalence : $\Theta \models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$. Puis on munit le quotient $\mathcal{L}$-Form$/\approx$ des opérations suivantes : $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}, \mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(T)$

- $[\varphi_1] + [\varphi_2] = [(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)]$;
- $[\varphi_1] \cdot [\varphi_2] = [\varphi_1 \wedge \varphi_2]$;
- $\exists_x[\varphi] = [(\exists x)\varphi]$, si x n'est pas liée dans φ ;
- $\delta_{x,y} = [x = y]$.

C'est bien défini ; en effet toute formule équivaut à une formule où x n'a pas d'occurrence liée. Cela définit un anneau de Lindenbaum noté $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta)$, ou $\mathrm{Lin}(\Theta)$ s'il n'y a pas ambiguïté sur le langage sous-jacent. La dernière propriété dans la définition C de l'égalité signifie que $\varphi[x := y] \wedge \neg\varphi[x := y]$ est insatisfaisable.

Exemple (variante). Au lieu de $\approx$, soit $\varphi_1 \sim \varphi_2$ la relation : $\Theta \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$. On note $\mathrm{Lin}^{\vdash}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ l'anneau de Lindenbaum obtenu de la même façon. (La complétude de la logique élémentaire affirme que $\approx$ et $\sim$ coïncident, donc $\mathrm{Lin}^{\vdash}_{\mathcal{L}}(\Theta) = \mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta)$. On redémontre ce phénomène en § F.4.)

Remarque. Tout anneau de Lindenbaum est isomorphe à un $\mathrm{Lin}^{\vdash}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ (exercice F.7) ; puis par complétude, à $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta)$.

$\mathrm{Én}(\mathbb{A})$

Lemme (et définition : anneau des énoncés)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. Alors :

(i) chaque $\exists_x$ est idempotent, i.e. $\exists_x^2 = \exists_x$, et croissant, i.e. $a \leqslant b$ entraîne $\exists_x a \leqslant \exists_x b$;

(ii) chaque $\mathrm{Fix}(\exists_x) = \{a \in \mathbb{A} : \exists_x a = a\} = \mathrm{im}\,\exists_x$ est un sous-anneau de Boole ;

(iii) pour $a, b \in \mathbb{A}$, on a $\exists_x(a \vee b) = \exists_x a \vee \exists_x b$;

(iv) si $a \in \mathbb{A}$ et $x \in \mathcal{V}$, alors $x \notin \mathrm{Var}(\exists_x a)$;

(v) $\mathrm{Én}(\mathbb{A}) = \bigcap_{x \in \mathcal{V}} \mathrm{Fix}(\exists_x)$ est un sous-anneau de $\mathbb{A}$, appelé *sous-anneau des énoncés* ;

(vi) si $x, y \in \mathcal{V}$ alors $\delta_{y,x} = \delta_{x,y}$; en outre $\mathrm{Var}(\delta_{x,y}) \subseteq \{x, y\}$ et $\exists_x \delta_{x,y} = 1$.

Remarque. Attention : $\exists_x$ ne préserve ni $+$ ni $\cdot$.

Démonstration. Pour les trois premiers points, on note simplement $\exists = \exists_x$.

(i) Clairement $\exists 1 = 1$. En particulier $\exists^2 a = \exists(\exists a \cdot 1) = \exists a \cdot \exists 1 = \exists a$. Puis si $a \leqslant b$, alors $a \leqslant b \leqslant \exists b$ d'où $\exists a = \exists(a \cdot \exists b) = \exists a \cdot \exists b$, i.e. $\exists a \leqslant \exists b$.

(ii) Soit $\mathbb{A}_0 = \mathrm{Fix}(\exists)$. Par idempotence, $\mathbb{A}_0 = \mathrm{im}\,\exists$. Clairement $0, 1 \in \mathbb{A}_0$. Supposons $a \in \mathbb{A}_0$. Alors $\exists(\neg a) \cdot a = \exists(\neg a) \cdot \exists a = \exists(\neg a \cdot \exists a) = \exists(\neg a \cdot a) = \exists 0 = 0$, d'où $\exists(\neg a) \leqslant \neg a$ et l'égalité suit. Ainsi $\mathbb{A}_0$ est clos sous $\neg$. Si $a, b \in \mathbb{A}_0$, alors $\exists(a \cdot b) = \exists(a \cdot \exists b) = \exists a \cdot \exists b = a \cdot b$, d'où $\mathbb{A}_0$ est clos sous $\cdot$. C'est assez pour être un sous-anneau.

(iii) D'une part $a \leqslant a \vee b$ d'où $\exists a \leqslant \exists(a \vee b)$. De même en b, donc $\exists a \vee \exists b \leqslant \exists(a \vee b)$. D'autre part $a \leqslant \exists a$ et $b \leqslant \exists b$, d'où $a \vee b \leqslant \exists a \vee \exists b$. Par (ii), le membre de droite est dans $\mathrm{Fix}(\exists)$. Ainsi $\exists(a \vee b) \leqslant \exists a \vee \exists b$, et l'égalité suit.

(iv) En effet $\exists_x$ est idempotent, donc $\exists_x^2 a = \exists_x a$.

(v) C'est une intersection de sous-anneaux.

(vi) Par définition des égalités (définition C) :

$$\begin{aligned}\neg\delta_{y,x} \cdot \delta_{x,y} &\leqslant \exists_x(\neg\delta_{y,x} \cdot \delta_{x,y}) = \delta_{y,y} \cdot \exists_x(\neg\delta_{y,x} \cdot \delta_{x,y}) \\ &= \exists_x(\delta_{y,x} \cdot \delta_{x,y}) \cdot \exists_x(\neg\delta_{y,x} \cdot \delta_{x,y}) = 0,\end{aligned}$$

d'où $\delta_{x,y} \leqslant \delta_{y,x}$, et l'égalité suit par symétrie.

Soit $z \notin \{x,y\}$. Encore par définition, $\delta_{x,y} = \exists_z(\delta_{x,z} \cdot \delta_{z,y})$, donc $z \notin \mathrm{Var}(\delta_{x,y})$ d'après (iv).
Enfin $\exists_x \delta_{x,y} = \exists_x(\delta_{y,x} \cdot \delta_{x,y}) = \delta_{y,y} = 1$. $\square$

Les *morphismes de Lindenbaum*, ou *Lin-morphismes*, sont les morphismes d'anneaux préservant en outre les $\exists_x$ et $\delta_{x,y}$. Soit **Lin** la catégorie des anneaux de Lindenbaum munis des Lin-morphismes. Un *plongement* dans **Lin** est un Lin-morphisme injectif. En général le noyau d'un Lin-morphisme est un *idéal de Lindenbaum*. **Lin**

• **Idéaux de Lindenbaum.** Par définition, tous les idéaux sont propres. La notation $I \lhd \mathbb{A}$ désigne un idéal propre. On introduit une classe spéciale d'idéaux.

Définition E (Lin-idéal, Lin-simplicité, Lin-spectre maximal)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. ◄, LinSpm

— Un *idéal de Lindenbaum*, ou *Lin-idéal*, noté $I \blacktriangleleft \mathbb{A}$, est un idéal d'anneau $I \lhd \mathbb{A}$ également clos sous les quantificateurs, i.e. vérifiant : si $x \in \mathcal{V}$ et $a \in I$, alors $\exists_x a \in I$.

— $\mathbb{A}$ est *Lin-simple* si son seul Lin-idéal est $\{0\}$.

— On note LinSpm l'ensemble des Lin-idéaux maximaux en tant que tels.

Remarques

— Un idéal booléen n'est pas nécessairement un Lin-idéal. Notamment un Lin-idéal maximal en tant que tel n'est pas nécessairement un idéal maximal, i.e. LinSpm $\nsubseteq$ Spm.

— Les Lin-idéaux sont exactement les noyaux de morphismes de **Lin**. (Cela revient à montrer l'inégalité $\exists a + \exists b \leqslant \exists(a+b)$.)

— Il y a une notion d'*idéal de Lindenbaum engendré* par une partie $S \subseteq \mathbb{A}$, mais par opposition au cas algébrique, on n'a pas d'expression générale pour ses éléments.

— La primalité compte ici moins que la maximalité. Pour les anneaux *de Boole* on a bien Spec = Spm (proposition 5.1), mais pas pour les anneaux de Lindenbaum. V. F.3.

Proposition. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum.

(i) Les Lin-idéaux de $\mathbb{A}$ sont en bijection naturelle avec les idéaux de $\mathrm{Én}(\mathbb{A})$. Cette bijection échange $\mathrm{LinSpm}(\mathbb{A})$ et $\mathrm{Spm}(\mathrm{Én}(\mathbb{A}))$.

(ii) $\mathbb{A}$ est Lin-simple ssi $\mathrm{Én}(\mathbb{A}) = \{0,1\}$. Dans ce cas, tout sous-anneau de Lindenbaum est Lin-simple.

(iii) $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{LinSpm}(\mathbb{A})} \mathfrak{m} = \{0\}$.

Le dernier point est la *semi-simplicité* des anneaux de Lindenbaum.

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{A}$, soit $\exists_{(\mathcal{V})}(a) = (\prod_{x \in \mathcal{V}} \exists_x) \cdot a = \left(\prod_{x \in \mathrm{Var}(a)} \exists_x\right) \cdot a$, qui est bien défini par finitude de $\mathrm{Var}(a)$ et commutation des quantificateurs. C'est encore un quantificateur, et $\mathrm{im}\, \exists_{(\mathcal{V})} = \mathrm{Fix}\, \exists_{(\mathcal{V})} = \mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{A})$. On est ainsi ramené au cas d'un seul quantificateur, noté simplement $\exists$. Soit $\mathbb{A}_0 = \mathrm{Fix}(\exists)$.

(i) À $I \blacktriangleleft \mathbb{A}$ on associe $I \cap \mathbb{A}_0$, qui est un idéal de $\mathbb{A}_0$.
À $J \lhd \mathbb{A}_0$, on associe $I = \exists^{-1}(J) = \{a \in \mathbb{A} : \exists a \in J\}$. On affirme $I \blacktriangleleft \mathbb{A}$. Soient en effet $a, b \in \mathbb{A}$. Si $a, b \in I$, alors $\exists(a+b) \leqslant \exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$ d'après le lemme, (iii). Or $\exists a$ et $\exists b$ sont dans J, qui est un idéal de $\mathbb{A}_0$, d'où $\exists(a+b) \in J$ et $a + b \in I$. Si $a \in I$ mais b est quelconque, on a $\exists(a \cdot b) \leqslant \exists(\exists a \cdot b) = \exists a \cdot \exists b$. Ces éléments sont dans $\mathbb{A}_0$, et le premier est dans $J \lhd \mathbb{A}_0$, d'où $\exists(a \cdot b) \in J$ et $a \cdot b \in I$. Enfin I est clairement clos sous $\exists$.
Ces constructions sont réciproques l'une de l'autre. D'une part, si $I \blacktriangleleft \mathbb{A}$, alors $\exists^{-1}(I \cap \mathbb{A}_0) = \{a \in \mathbb{A} : \exists a \in I \cap \mathbb{A}_0\} = \{a \in \mathbb{A} : \exists a \in I\} = I$. D'autre part, si $J \lhd \mathbb{A}_0$, alors $\exists^{-1}(J) \cap \mathbb{A}_0 = \{a \in \mathbb{A}_0 : \exists a \in J\} = J$. La correspondance préserve l'inclusion, donc la maximalité.

(ii) D'après (i), $\mathbb{A}$ est Lin-simple ssi $\mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{A})$ est simple. Or un anneau de Boole est simple ssi isomorphe à $\{0,1\}$, d'où l'équivalence.
Si $\mathbb{A}$ est Lin-simple et $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{A}$ [**Lin**], alors $\mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{B}) \leqslant \mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{A}) = \{0,1\}$, d'où $\mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{B}) = \{0,1\}$ et $\mathbb{B}$ est Lin-simple.

(iii) Soit $a \in \mathbb{A} \backslash \{0\}$. Soit $a_0 = \exists a \in \mathbb{A}_0 \backslash \{0\}$. Par semi-simplicité booléenne (proposition 5.1), $\bigcap \mathrm{Spm}(\mathbb{A}_0) = \{0\}$. Il existe donc $\mathfrak{n} \in \mathrm{Spm}(\mathbb{A}_0)$ évitant a_0. Alors $\mathfrak{m} = \exists^{-1}(\mathfrak{n}) \in \mathrm{LinSpm}(\mathbb{A})$ évite a_0, donc aussi a. □

Remarques (les théories comme Lin-idéaux)

— Les Lin-idéaux de $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$ correspondent aux $\mathcal{L}$-théories. En effet pour $\mathbb{A} = \mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$, l'anneau $\mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{A})$ est l'image de $\mathcal{L}$-Én, et par correspondance idéaux-filtres (§ 5.2) :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Lin-idéaux de } \mathbb{A}\} & \leftrightarrow & \{\text{idéaux de } \mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{A})\} \\ & & \updownarrow \\ \{\mathcal{L}\text{-théories}\} & \leftrightarrow & \{\text{filtres de } \mathrm{\acute{E}n}(\mathbb{A})\}. \end{array}$$

En outre un Lin-idéal de $\mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$ est maximal en tant que tel ssi la théorie associée est maximale, i.e. complète.

— En termes concrets, le caractère *Lin-idéal* des théories vient de ce que si Θ est formée d'énoncés et que $\Theta \models \varphi(\mathbf{x})$, alors $\Theta \models \forall \mathbf{x}\ \varphi$. En termes de l'idéal de réfutabilité $I_\Theta = \{[\neg\varphi] : \Theta \models \varphi\}$, on a : si $[\neg\varphi] \in I_\Theta$, alors $[(\exists \mathbf{x})(\neg\varphi)] \in I_\Theta$. Donc I_Θ est clos sous quantification existentielle.

§ F.2. Substitutions

§ F.3 est indépendante de cette sous-section ; on peut s'y rendre directement.

On algébrise à présent les substitutions (§ 9.2), et même les substitutions simultanées.

Notation. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum sur l'ensemble des variables $\mathcal{V}$. $\mathbf{x} := \mathbf{y}$

— Soit $\mathrm{End}(\mathcal{V}) = \mathrm{End}(\mathcal{V} \colon \mathbf{Ens})$ le monoïde, pour la composition, des fonctions de $\mathcal{V}$ dans lui-même. Soit $\mathrm{End}(\mathbb{A}) = \mathrm{End}(\mathbb{A} \colon \mathbf{Ann})$ le monoïde, pour la composition, des endomorphismes d'anneau de $\mathbb{A}$. Il s'agit bien d'endomorphismes d'*anneau*, et non d'anneau de Lindenbaum.

— Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un uplet injectif (i.e. sans répétitions) de variables et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ un uplet de même longueur, on note $\mathbf{x} := \mathbf{y}$ la fonction qui diffère de $\mathrm{Id}_\mathcal{V}$ par $f(x_i) = y_i$.
Attention : $\mathbf{x} := \mathbf{y}$ n'est pas en général $(x_2 := y_2) \circ (x_1 := y_1)$; par exemple quand $y_1 = x_2$.

Un *morphisme de monoïdes* doit vérifier $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$ et $S(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$. On notera S_f plutôt que $S(f)$.

Proposition A (et définition : opérateurs de substitutions)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. Alors il existe un unique morphisme de monoïdes $S \colon \mathrm{End}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathbb{A})$ tel que pour tout $a \in \mathbb{A}$: $S_{x:=y}$

— si $x \neq y \in \mathcal{V}$, alors $S_{x:=y}(a) = \exists_x (a \cdot \delta_{x,y})$;

— si $f, g \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ coïncident sur $\mathrm{Var}(a)$, alors $S_f(a) = S_g(a)$.

Remarque. Dans le cas d'un anneau $\mathrm{Lin}_\mathcal{L}(\Theta)$ ou $\mathrm{Lin}^{\vdash}_\mathcal{L}(\Theta)$, ces opérateurs abstraits de substitution sont définis partout (cf. § 9.2). Par exemple, $S_{x:=y}$ envoie $[(\exists x)\varphi_1(x,y) \wedge (\exists y)\varphi_2(x,y)]$ sur $[(\exists x)\varphi_1(x,y) \wedge (\exists t)\varphi_2(y,t)]$.

En termes de substitutions *concrètes*, cela tient à ce que chaque formule φ est $\vdash$- et $\models$-équivalente à une φ' avec $x \notin \mathrm{VarLi\acute{e}}(\varphi')$.

Démonstration. Soit $\check{F}(\mathcal{V}) = \big\langle (x := y) : (x,y) \in \mathcal{V}^2 \big\rangle$ le sous-monoïde engendré par les fonctions de la forme $x := y$.

Étape 1. Si $f \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ et $J \subseteq \mathcal{V}$ est fini, alors il existe $g \in \check{F}(\mathcal{V})$ telle que $f_{|J} = g_{|J}$. En particulier :

— on a unicité de S ;

— il suffit de vérifier l'existence de S et ses propriétés sur $\check{F}(\mathcal{V})$.

Vérification. Disons $J = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soient n variables distinctes $t_1, \dots, t_n$ hors de $J \cup f(J)$. Soit :

$$g = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i := f(x_i)\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i := t_i\right) \in \check{F}(\mathcal{V}).$$

Chacun des produits est commutatif, mais les produits ne commutent pas entre eux. On a $g_{|J} = f_{|J}$.

L'unicité de S sur $\check{F}(\mathcal{V})$ est claire. Supposons que $S_1, S_2\colon \mathrm{End}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathbb{A})$ conviennent tous deux. Soient $f \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ puis $a \in \mathbb{A}$. Soit $g \in \check{F}(\mathcal{V})$ coïncidant avec f sur $\mathrm{Var}(a)$. Alors par unicité sur $\check{F}(\mathcal{V})$:

$$S_1(f)(a) = S_1(g)(a) = S_2(g)(a) = S_2(f)(a),$$

donc $S_1(f) = S_2(f)$ comme endomorphismes de $\mathbb{A}$, puis $S_1 = S_2$ comme morphismes de monoïdes.

Supposons enfin $\check{S}$ défini sur $\check{F}(\mathcal{V})$ et convenant. On l'étend en $S\colon \mathrm{End}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathbb{A})$ comme suit. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$. Pour $a \in \mathbb{A}$, il existe $g \in \check{F}(\mathcal{V})$ coïncidant avec f sur $\mathrm{Var}(a)$. On pose $S_f(a) = \check{S}_g(a)$. Par l'hypothèse que $\check{S}$ convient, ceci ne dépend pas du choix de g, et définit S_f partout ; en outre S_f reste un endomorphisme d'anneau. Ceci définit S sur $\mathrm{End}(\mathcal{V})$; c'est encore un morphisme de monoïdes, avec les propriétés voulues. ◇

On travaille donc sur $\check{F}(\mathcal{V})$. Pour $x \neq y$, on pose $S_{x:=y}(a) = \exists_x(a \cdot \delta_{x,y})$; on pose aussi $S_{x:=x} = \mathrm{Id}$. Définir les $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}$ demande une formule préparatoire.

Étape 2. Soient $a \in \mathbb{A}$ et x, y, t trois variables avec $t \notin \mathrm{Var}(a)$. Alors $(S_{t:=y} \circ S_{x:=t})(a) = S_{x:=y}(a)$.

Vérification. Si $t \in \{x, y\}$, c'est évident ; on suppose donc $t \notin \{x, y\}$.

Supposons $x = y$. D'une part, grâce au Lemme F.1 (vi),

$$\begin{aligned}(S_{t:=x} \circ S_{x:=t})(a) &= \exists_t(\delta_{t,x} \cdot \exists_x(\delta_{t,x} \cdot a)) \\ &\geqslant \exists_t(\delta_{t,x}^2 \cdot a) = \exists_t(\delta_{t,x} \cdot \exists_t a) \\ &= \exists_t(\delta_{t,x}) \cdot \exists_t a = a.\end{aligned}$$

Par idempotence, $\exists_x S_{x:=t}(a) = S_{x:=t}(a)$, donc par définition des égalités (définition F.1.C) :

$$\begin{aligned}\neg a \cdot \delta_{x,t} \cdot S_{x:=t}(a) &\leqslant \exists_x(\neg a \cdot \delta_{x,t} \cdot S_{x:=t}(a)) \\ &= \exists_x(\neg a \cdot \delta_{x,t} \cdot \exists_x S_{x:=t}(a)) \\ &= \exists_x(\neg a \cdot \delta_{x,t}) \cdot \exists_x S_{x:=t}(a) \\ &= \exists_x(\neg a \cdot \delta_{x,t}) \cdot \exists_x(a \cdot \delta_{x,t}) = 0.\end{aligned}$$

Il suit $\delta_{x,t} \cdot S_{x:=t}(a) \leqslant a$, puis $S_{t:=x}(S_{x:=t}(a)) \leqslant \exists_t a = a$. Ceci montre l'égalité quand $x = y$.

On suppose enfin x, y, et t distincts, toujours avec $t \notin \mathrm{Var}(a)$. D'après le Lemme F.1 (vi), on a $x \notin \mathrm{Var}(\delta_{y,t})$, d'où :

$$\begin{aligned}(S_{t:=y} \circ S_{x:=t})(a) &= \exists_t\left(\delta_{y,t} \cdot \exists_x(\delta_{x,t} \cdot a)\right) = \exists_t\left(\exists_x \delta_{y,t} \cdot \exists_x(\delta_{x,t} \cdot a)\right) \\ &= \exists_t \exists_x(\delta_{y,t} \cdot \delta_{x,t} \cdot a) = \exists_x \exists_t(\delta_{y,t} \cdot \delta_{x,t} \cdot a) \\ &= \exists_x \exists_t(\delta_{y,t} \cdot \delta_{x,t} \cdot \exists_t a) = \exists_x\left(\exists_t(\delta_{y,t} \cdot \delta_{x,t}) \cdot \exists_t a\right) \\ &= \exists_x(\delta_{x,y} \cdot a) = S_{x:=y}(a).\end{aligned}$$

Ceci montre l'affirmation dans tous les cas. ◇

On définit alors les $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}$ comme suit :

— si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ sont *disjoints*, on pose $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}} = \prod_{i=1}^n S_{x_i:=y_i}$;

— sinon, pour $a \in \mathbb{A}$, on prend $\mathbf{t}$ un uplet injectif et disjoint de $\mathrm{Var}(a) \cup \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ et l'on pose $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}(a) = (S_{\mathbf{t}:=\mathbf{y}} \circ S_{\mathbf{x}:=\mathbf{t}})(a)$.

Étape 3. C'est bien défini.

Vérification. Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont disjoints, le produit $\prod_{i=1}^n S_{x_i:=y_i}$ est bien défini car les opérateurs commutent. Il suffit de le voir pour deux termes. Supposons (x_1, x_2) et (y_1, y_2) disjoints. On a $x_1 \neq x_2$ car le uplet $\mathbf{x}$ est injectif.

Alors $x_1 \notin \mathrm{Var}(\delta_{x_2,y_2})$ donc :

$$\begin{aligned}(S_{x_2:=y_2} \circ S_{x_1:=y_1})(a) &= \exists_{x_2}(\delta_{x_2,y_2} \cdot \exists_{x_1}(\delta_{x_1,y_1} \cdot a)) \\ &= \exists_{x_2}(\exists_{x_1}\delta_{x_2,y_2} \cdot \exists_{x_1}(\delta_{x_1,y_1} \cdot a)) \\ &= \exists_{x_2}\exists_{x_1}(\delta_{x_2,y_2} \cdot \delta_{x_1,y_1} \cdot a) \\ &= \exists_{x_1}\exists_{x_2}(\delta_{x_1,y_1} \cdot \delta_{x_2,y_2} \cdot a) \\ &= (S_{x_1:=y_1} \circ S_{x_2:=y_2})(a).\end{aligned}$$

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ne sont pas disjoints, on montre que la composée $(S_{\mathbf{t}:=\mathbf{y}} \circ S_{\mathbf{x}:=\mathbf{t}})(a)$ ne dépend pas du choix de $\mathbf{t}$. Soit $\mathbf{t}'$ un autre uplet injectif disjoint de $\mathrm{Var}(a) \cup \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$.

— Si $\mathbf{t}'$ est même disjoint de $\mathbf{t}$, alors en itérant l'étape 2 on a $(S_{\mathbf{t}':=\mathbf{y}} \circ S_{\mathbf{x}:=\mathbf{t}'})(a) = (S_{\mathbf{t}:=\mathbf{y}} \circ S_{\mathbf{x}:=\mathbf{t}})(a)$.

— Sinon soit $\mathbf{t}''$ disjoint de toutes les variables en jeu. D'après ce qui précède :

$$(S_{\mathbf{t}:=\mathbf{y}} \circ S_{\mathbf{x}:=\mathbf{t}})(a) = (S_{\mathbf{t}'':=\mathbf{y}} \circ S_{\mathbf{x}:=\mathbf{t}''})(a) = (S_{\mathbf{t}':=\mathbf{y}} \circ S_{\mathbf{x}:=\mathbf{t}'})(a).$$

Il suit que $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}$ est bien défini. ◇

Étape 4. Les $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}$ sont des endomorphismes d'anneau.

Vérification. Par composition, il suffit de le montrer pour un $S_{x:=y}$, noté simplement S. On peut supposer $x \neq y$. Clairement $S(0) = 0$ et $S(1) = 1$. Soient $a, b \in \mathbb{A}$. D'après le lemme F.1.(iii), $\exists_x$ préserve $\vee$, donc :

$$S(a \vee b) = \exists_x((a \cdot \delta_{x,y}) \vee (b \cdot \delta_{x,y})) = \exists_x(a \cdot \delta_{x,y}) \vee \exists_x(b \cdot \delta_{x,y}) = S(a) \vee S(b).$$

Il suit que S préserve $\vee$. Or par définition des égalités (définition F.1.C, dernière propriété), $S(a) \cdot S(\neg a) = 0$. Par préservation de $\vee$, on a $S(a) \vee S(\neg a) = S(1) = 1$. Ainsi $S(\neg a) = \neg S(a)$, et S préserve $\neg$. Donc S est un endomorphisme d'anneau. ◇

Les endomorphismes $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}$ ont les propriétés voulues ; on a défini $\check{S} \colon \check{F}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathbb{A})$ comme demandé. D'après l'étape 1, on peut l'étendre naturellement en $S \colon \mathrm{End}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathbb{A})$ convenant. □

Proposition B (propriétés des substitutions)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. Alors pour $a \in \mathbb{A}$ et $x, y, z, t \in \mathcal{V}$:

(i) si $t \notin \mathrm{Var}(a)$, alors $\exists_x a = \exists_t S_{x:=t}(a)$; si $t \notin \{x, y\}$, alors $\exists_t \circ S_{x:=y} = S_{x:=y} \circ \exists_t$;

(ii) $\delta_{y,z} \cdot S_{x:=y}(a) = \delta_{y,z} \cdot S_{x:=z}(a)$;

(iii)
$$\exists_x a = \bigvee_{y \in \mathcal{V}} S_{x:=y}(a).$$

Démonstration.

(i) Si $t \notin \mathrm{Var}(a)$, alors :

$$\exists_t S_{x:=t}(a) = \exists_t \exists_x(\delta_{t,x} \cdot a) = \exists_x \exists_t(\delta_{t,x} \cdot \exists_t a) = \exists_x(\exists_t \delta_{t,x} \cdot \exists_t a) = \exists_x a.$$

Si $t \notin \{x, y\}$, alors :

$$\begin{aligned}\exists_t S_{x:=y}(a) &= \exists_t \exists_x(\delta_{x,y} \cdot a) = \exists_x \exists_t(\exists_t \delta_{x,y} \cdot a) \\ &= \exists_x(\exists_t \delta_{x,y} \cdot \exists_t a) = \exists_x(\delta_{x,y} \cdot \exists_t a) = S_{x:=y}(\exists_t a).\end{aligned}$$

(ii) On peut supposer $y \neq z$.
Si $x \neq z$, alors les S_f étant des morphismes :

$$\begin{aligned}\delta_{y,z} \cdot S_{x:=y}(a) &= S_{x:=y}(\delta_{x,z}) \cdot S_{x:=y}(a) = S_{x:=y}(\delta_{x,z} \cdot a) \\ &\leqslant S_{x:=y}(\exists_x(\delta_{x,z} \cdot a)) = S_{x:=y}(S_{x:=z}(a)) \\ &= S_{x:=z}(a),\end{aligned}$$

d'où $\delta_{y,z} \cdot S_{x:=y}(a) \leqslant \delta_{y,z} \cdot S_{x:=z}(a)$. En particulier si $x \notin \{y, z\}$, on a l'égalité voulue.
Si $x = y$, alors $x \neq z$ donc on a la première inégalité. D'autre part :

$$\delta_{y,z} \cdot \neg a \cdot S_{y:=z}(a) \leqslant \exists_y(\delta_{y,z} \cdot \neg a) \cdot S_{y:=z}(a) = S_{y:=z}(\neg a) \cdot S_{y:=z}(a) = 0,$$

d'où :

$$\delta_{y,z} \cdot S_{x:=z}(a) = \delta_{y,z} \cdot S_{y:=z}(a) \leqslant \delta_{y,z} \cdot a = \delta_{y,z} \cdot S_{x:=y}(a),$$

et l'égalité voulue suit encore. Le cas $x = z$ est similaire.

(iii) Comme $a \geqslant \delta_{x,y} \cdot a$, on a $\exists_x a \geqslant \exists_x(\delta_{x,y} \cdot a) = S_{x:=y}(a)$. Soit réciproquement $b \in \mathbb{A}$ majorant tous les $S_{x:=y}(a)$. Soit $y \notin \mathrm{Var}(a) \cup \mathrm{Var}(b)$. Alors d'après (i) :
$$b = \exists_y b \geqslant \exists_y S_{x:=y}(a) = \exists_x a.$$

Donc la borne supérieure de $\{S_{x:=y}(a) : y \in \mathcal{V}\}$ existe et vaut $\exists_x a$. $\square$

On peut généraliser ; voir exercice F.2.

§ F.3. Représentations cylindriques ; compacité

Cette sous-section n'utilise pas § F.2.

On définit les anneaux de Lindenbaum *concrets*, appelés *anneaux de cylindres*. Pour M un ensemble non vide, $M^{\mathcal{V}}$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{V} \to M$. Si $x \in \mathcal{V}$ et $f : \mathcal{V} \to M$, on note $f_{|x^c}$ la restriction de f à $\mathcal{V} \backslash \{x\}$.

Cyl(M)

Définition A (partie cylindrique ; support)**.** Soit M un ensemble non vide.

— Pour $C \subseteq M^{\mathcal{V}}$ et $x \in \mathcal{V}$, soit :

$$\exists_x C = \{g \in M^{\mathcal{V}} : (\exists f \in C)(f_{|x^c} = g_{|x^c})\}.$$

— Soit $\delta_{x,y} = \{f \in M^{\mathcal{V}} : f(x) = f(y)\}$.

— Une partie $C \subseteq M^{\mathcal{V}}$ est *cylindrique* s'il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ tel que si $f \in C$ et $g \in \mathcal{M}^{\mathcal{V}}$ coïncident sur $\mathcal{V}_0$, alors $g \in C$.

On appelle *support* de C toute partie $\mathcal{V}_0$ ayant cette propriété.

— Soit Cyl(M) l'ensemble de toutes les parties cylindriques de $M^{\mathcal{V}}$, avec sa structure d'anneau de parties, les quantificateurs $\exists_x$ et les égalités $\delta_{x,y}$.

La notation tend à laisser $\mathcal{V}$ implicite. On peut donner une description plus géométrique des parties cylindriques ; v. exercice **??**.

Lemme. Cyl(M) est un anneau de Lindenbaum simple. Pour $C \in$ Cyl(M), Var(C) est le plus petit support de C.

Démonstration. On sait que $(P(M^{\mathcal{V}})\,;\triangle,\cap)$ est un anneau de Boole. Les opérateurs $\exists_x$ sont des quantificateurs (définition F.1.A) qui commutent, et les $\delta_{x,y}$ des égalités (définition F.1.C). Cependant pour D arbitraire, Var(D) n'est pas nécessairement fini.

Pour $D \subseteq M^{\mathcal{V}}$, on appelle *support* de D tout sous-ensemble $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ tel que si $f \in D$ et $g : \mathcal{V} \to M$ coïncident sur $\mathcal{V}_0$, alors $g \in D$. Par définition toute partie cylindrique possède un support fini. En outre une intersection finie de supports est encore un support. Donc toute partie cylindrique C possède un plus petit support (encore fini), appelé *le* support de C et noté supp(C).

Les parties $\varnothing$, $M^{\mathcal{V}}$, et $\delta_{x,y}$ sont cylindriques. Si C est cylindrique, alors $\neg C = M^{\mathcal{V}} \backslash C$ est encore cylindrique (avec supp($\neg C$) $\subseteq$ supp(C) d'où l'égalité). De même si C_1 et C_2 sont cylindriques, alors $C_1 \cap C_2$ l'est aussi (et $\mathrm{supp}(C_1 \cap C_2) \subseteq \mathrm{supp}(C_1) \cup \mathrm{supp}(C_2)$). Enfin $\exists_x C$ reste cylindrique (avec $\mathrm{supp}(\exists_x C) \subseteq \mathrm{supp}(C)\backslash\{x\}$). Donc $\mathrm{Cyl}(M)$ forme un anneau de Lindenbaum (définition F.1.D). On voit alors que $\mathrm{supp}(C) = \mathrm{Var}(C)$.

Enfin si C est cylindrique non vide et $\mathrm{Var}(C) = \varnothing$, soient $f \in C$ et $g \in M^{\mathcal{V}}$. Alors f et g coïncident sur $\varnothing$, donc $g \in C$: ainsi $C = M^{\mathcal{V}}$. Ceci montre $\mathrm{\acute{E}n}(\mathrm{Cyl}(M)) = \{0, 1\}$. D'après la proposition F.1.(ii), $\mathrm{Cyl}(M)$ est Lin-simple. $\square$

Définition B (anneau de cylindres, représentation cylindrique)**.**

— Un *anneau de cylindres* est un sous-anneau d'un $\mathrm{Cyl}(M)$.

— Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. Une *représentation cylindrique* de $\mathbb{A}$ est un morphisme $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathrm{Cyl}(M)$ [**Lin**] pour un ensemble M. Elle est *fidèle* si φ est injectif.

La compacité de la logique élémentaire se reformule en termes algébriques.

Théorème (compacité)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. On suppose qu'il existe une famille de sous-anneaux de Lindenbaum $\mathbb{B}_i \leqslant \mathbb{A}$ [**Lin**] indexée par un ensemble I et telle que :

— $\mathbb{A} = \bigcup_{i \in I} \mathbb{B}_i$;

— la famille est *dirigée*, i.e. si $i, j \in I$, alors il existe k tel que $\mathbb{B}_i \leqslant \mathbb{B}_k$ et $\mathbb{B}_j \leqslant \mathbb{B}_k$;

— chaque $\mathbb{B}_i$ est fidèlement cylindriquement représentable.

Alors $\mathbb{A}$ est fidèlement cylindriquement représentable.

Remarque. En langage catégorique (v. § 14), *une limite inductive d'anneaux de Lindenbaum fidèlement cylindriquement représentables reste fidèlement cylindriquement représentable.*

Soit $\{\mathbb{B}_i : i \in I\}$ un système dirigé d'anneaux de Lindenbaum. Soit $\mathbb{A}$ sa limite inductive. C'est un anneau de Lindenbaum ; à isomorphisme près, on peut supposer $\mathbb{B}_i \leqslant \mathbb{A}$ [**Lin**]. Le théorème donne la représentabilité de $\mathbb{A}$.

Démonstration. C'est une algébrisation de la construction d'un ultraproduit, mais la maîtrise de § 16 n'est pas requise. Celle de § 5.2 l'est.

Rappels sur les variables

— Si $C \in \mathrm{Cyl}(M)$, alors $\mathrm{Var}(C)$ est le plus petit support de C.

— Si $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ [**Lin**] et $a \in \mathbb{A}$, alors $\mathrm{Var}(\varphi(a)) \subseteq \mathrm{Var}(a)$.

Formation d'un ultrafiltre (double emploi avec § 16.1). L'ensemble I est naturellement ordonné par la relation $\mathbb{B}_i \leqslant \mathbb{B}_j$. Par hypothèse, cet ordre est dirigé. Chaque intersection finie $I_{\geqslant i_1} \cap \cdots \cap I_{\geqslant i_n}$ est donc non vide. Soit $\mathcal{B} = \{I_{\geqslant i} : i \in I\}$; cette famille a la propriété des intersections finies. Alors $\mathcal{F} = \{Y \subseteq I : (\exists n \in \mathbb{N})(\exists X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{B})(X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq Y)\}$ est un filtre de $P(I)$. Par argument de maximalité (§ 2.1), il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ de $P(I)$ contenant $\mathcal{F}$. Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés *parties $\mathcal{U}$-génériques* de I. Toute partie de I ou son complémentaire est générique.

Représentation fidèle des $\mathbb{B}_i$. Pour $i \in I$, soient M_i un ensemble non vide et $\varphi_i : \mathbb{B}_i \hookrightarrow \mathrm{Cyl}(M_i)$ [**Lin**] une représentation cylindrique fidèle.

Formation d'un ultraproduit. Les éléments de $\prod_I M_i$ sont des I-suites $(m_i : i \in I)$. On omet dorénavant l'indication « $i \in I$ ». Sur $\prod_I M_i$, soit $(m_i) \sim (n_i)$ la relation : $\{i \in I : m_i = n_i\} \in \mathcal{U}$. C'est une relation d'équivalence. On note $[(m_i)]$ la $\sim$-classe de (m_i).

Soit $M^* = (\prod_I M_i)/\sim$ l'ensemble quotient.

Fonction étoile associée à une famille. Grâce à la bijection naturelle $\prod_I (M_i^{\mathcal{V}}) \simeq (\prod_I M_i)^{\mathcal{V}}$ [**Ens**], à $\mathbf{f} = (f_i) \in \prod_I (M_i^{\mathcal{V}})$, on associe $f^* : \mathcal{V} \to M^*$ en posant :

$$f^*(x) = [(f_i(x))].$$

On dit que (f_i) *relève* f^*. (Attention : deux familles (f_i) et (g_i) peuvent relever la même f^* sans que l'ensemble $\{i \in I : f_i = g_i\}$ soit dans $\mathcal{U}$; cf. vérification de l'étape 1.)

Soit $a \in \mathbb{A}$. Pour $\mathbf{f} = (f_i) \in \prod_I (M_i^{\mathcal{V}})$, soit :

$$I_{\mathbf{f},a} = \{i \in I : a \in \operatorname{dom} \varphi_i \wedge f_i \in \varphi_i(a)\}.$$

Étape 1. Soient $\mathbf{f} = (f_i)$ et $\mathbf{g} = (g_i)$ telles que f^* et g^* coïncident sur $\mathrm{Var}(a)$. Alors $I_{\mathbf{f},a} \in \mathcal{U}$ ssi $I_{\mathbf{g},a} \in \mathcal{U}$.

Vérification. Pour $x \in \mathcal{V}$, soit $I_x = \{i \in I : f_i(x) = g_i(x)\}$. Soit $J_a = \bigcap_{x \in \mathrm{Var}(a)} I_x$. Par hypothèse, pour $x \in \mathrm{Var}(a)$, on a $f^*(x) = g^*(x)$, donc $I_x \in \mathcal{U}$. Par intersection finie, $J_a \in \mathcal{U}$ (on n'affirme pas que $\{i \in I : f_i = g_i\}$ soit dans $\mathcal{U}$).

On montre $I_{\mathbf{f},a} \cap J_a = I_{\mathbf{g},a} \cap J_a$. En effet supposons $a \in \operatorname{dom} \varphi_i$ avec $f_i \in \varphi_i(a)$ et $f_{i|\,\mathrm{Var}(a)} = g_{i|\,\mathrm{Var}(a)}$. Comme $\varphi_i(a)$ est cylindrique avec $\mathrm{Var}(\varphi_i(a)) \subseteq \mathrm{Var}(a)$, on a $g_i \in \varphi_i(a)$. Ceci montre $I_{\mathbf{f},a} \cap J_a \subseteq I_{\mathbf{g},a} \cap J_a$, et l'on conclut par symétrie.

On en déduit : $I_{\mathbf{f},a} \in \mathcal{U}$ ssi $I_{\mathbf{g},a} \in \mathcal{U}$. En effet si $I_{\mathbf{f},a} \in \mathcal{U}$, alors $I_{\mathbf{f},a} \cap J_a \in \mathcal{U}$. L'inclusion $I_{\mathbf{f},a} \cap J_a = I_{\mathbf{g},a} \cap J_a \subseteq I_{\mathbf{g},a}$ entraîne alors $I_{\mathbf{g},a} \in \mathcal{U}$. La réciproque est similaire. ◇

Soit $C_a^* = \{f^* \in (M^*)^{\mathcal{V}} : I_{\mathbf{f},a} \in \mathcal{U}\}$.

Étape 2. C_a^* est bien définie et cylindrique.

Vérification. Si (f_i) et (g_i) relèvent la même f^*, alors d'après l'étape 1, $I_{\mathbf{f},a} \in \mathcal{U}$ ssi $I_{\mathbf{g},a} \in \mathcal{U}$, donc C_a^* est bien défini.

Si $f^*, g^* \in (M^*)^{\mathcal{V}}$ coïncident sur $\mathrm{Var}(a)$ et que $f^* \in C_a^*$, on les relève en $\mathbf{f} = (f_i)$ et $\mathbf{g} = (g_i)$. Encore par l'étape 1, $I_{\mathbf{g},a} \in \mathcal{U}$ donc $g^* \in C_a^*$. Ainsi C_a^* est cylindrique avec $\mathrm{Var}(C_a^*) \subseteq \mathrm{Var}(a)$. ◇

Soit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & \mathbb{A} & \to & \mathrm{Cyl}(M^*) \\ & a & \mapsto & C_a^*. \end{array}$$

Étape 3. φ^* est un Lin-morphisme injectif.

Vérification. Clairement $\varphi^*(0) = \varnothing$ et $\varphi^*(1) = (M^*)^{\mathcal{V}}$. Soient $x, y \in \mathcal{V}$; soit $i \in I$. Alors $\delta_{x,y} \in \operatorname{dom} \varphi_i$, et $\varphi_i(\delta_{x,y}) = \{f \in M_i^{\mathcal{V}} : f_i(x) = f_i(y)\}$. Pour $f^* \in (M^*)^{\mathcal{V}}$ relevée par $\mathbf{f} = (f_i)$, on a donc :

$$\begin{aligned} f^* \in C^*_{\delta_{x,y}} \ &\text{ssi } I_{\mathbf{f},\delta_{x,y}} \in \mathcal{U} \\ &\text{ssi } \{i \in I : f_i(x) = f_i(y)\} \in \mathcal{U} \\ &\text{ssi } f^*(x) = f^*(y). \end{aligned}$$

Ceci montre $\varphi^*(\delta_{x,y}) = C^*_{\delta_{x,y}} = \delta_{x,y}$.

Soit $a \in \mathbb{A}$. Notons $[\![a]\!] = \{i \in I : a \in \operatorname{dom} \varphi_i\}$. Par hypothèse, $\mathbb{A} = \bigcup_I \mathbb{B}_i$, donc il existe $i \in [\![a]\!]$. Mais alors $I_{\geqslant i} \subseteq [\![a]\!]$; comme le premier est dans $\mathcal{U}$, le second aussi. En outre $[\![\neg a]\!] = [\![a]\!]$. Enfin, pour tout $J \subseteq I$, on a $[\![a]\!] = ([\![a]\!] \cap J) \sqcup ([\![a]\!] \cap J^c) \in \mathcal{U}$, d'où exactement un des termes est dans

$\mathcal{U}$. Pour $f^* \in (M^*)^{\mathcal{V}}$ on a donc :

$$\begin{aligned} f^* \in C^*_{\neg a} &\text{ ssi } \{i \in [\![\neg a]\!] : f_i \in \varphi_i(\neg a)\} \in \mathcal{U} \\ &\text{ ssi } \{i \in [\![a]\!] : f_i \in \varphi_i(a)^c\} \in \mathcal{U} \\ &\text{ ssi } \{i \in [\![a]\!] : f_i \notin \varphi_i(a)\} \in \mathcal{U} \\ &\text{ ssi } f^* \in (C^*_a)^c. \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi^*(\neg a) = C^*_{\neg a} = (C^*_a)^c = \neg\varphi^*(a)$. On vérifie de même que φ^* préserve $\wedge$ et les $\exists_x$.

Soit $a \in \ker \varphi^*$, i.e. $C^*_a = \varnothing$. Mais $[\![a]\!] \in \mathcal{U}$, donc $\mathcal{U}$-génériquement, $a \in \operatorname{dom}\varphi_i$ et $\varphi_i(a) = \varnothing$. Une partie générique est non vide ; soit i en témoignant. Comme φ_i est injectif, $a \in \ker \varphi_i = \{0\}$. Donc $a = 0$ et φ^* est injectif. ◇

Ceci achève la démonstration. □

Remarque. La méthode illustre que la formation d'ultraproduits (§ 16) est indépendante du langage : si $M^* = \int_I M_i \, d\mathcal{U}_i$ et que l'on munit a posteriori les M_i de $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{M}_i$, alors M^* porte *naturellement* une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{M}^*$.

§ F.4. Théorème de représentabilité

Cette sous-section emploie § F.2 et § F.3.

D'après le lemme F.3 et la proposition F.1.(ii), tout sous-anneau de Lindenbaum d'un $\mathrm{Cyl}(M)$ est Lin-simple. On ne peut donc représenter fidèlement un anneau de Lindenbaum général comme anneau de cylindres. Au mieux on peut espérer le représenter comme produit d'anneaux de cylindres, i.e. sous-anneau de Lindenbaum d'un produit $\prod_I \mathrm{Cyl}(M_i)$. C'est le cas.

Théorème (représentabilité)**.** Tout anneau de Lindenbaum se plonge en tant que tel dans un produit d'anneaux de cylindres.

Démonstration. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. On cherche une famille $(M_i : i \in I)$, pour I assez grand, telle que $\mathbb{A} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Cyl}(M_i)$ [**Lin**].

Étape 1. On peut supposer $\mathbb{A}$ Lin-simple.

Vérification. C'est une conséquence de la semi-simplicité des anneaux de Lindenbaum, proposition F.1.(iii). En effet $\bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{LinSpm}(\mathbb{A})} \mathfrak{m} = 0$, donc $\mathbb{A} \hookrightarrow \prod_{\mathrm{LinSpm}(\mathbb{A})} \mathbb{A}/\mathfrak{m}$ [**Lin**], et chacun des termes est Lin-simple. Il suffit donc de représenter les facteurs Lin-simples de $\mathbb{A}$. ◇

Étape 2. On peut supposer $\mathbb{A}$ Lin-simple et dénombrable.

Vérification. C'est une conséquence de la compacité, théorème F.3. Soit $\mathcal{D}$ la collection de tous les sous-anneaux de Lindenbaum dénombrables de $\mathbb{A}$. Ces sous-anneaux restent Lin-simples d'après la proposition F.1.(ii).

Toute famille dénombrable S d'un anneau de Lindenbaum engendre un sous-anneau de Lindenbaum dénombrable. En effet soit $\mathbb{C}_0$ le sous-anneau booléen engendré par S, puis $\mathbb{C}_{n+1}$ celui engendré par $\{\exists_x c : (x, c) \in \mathcal{V} \times \mathbb{C}_n\}$. Le plus petit sous-anneau *de Lindenbaum* contenant S est alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}_n$, qui est dénombrable.

Il suit que $\mathcal{D}$ est dirigée par inclusion, et que $\mathbb{A} = \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{D}} \mathbb{B}$. Notamment $\mathbb{A}$ est isomorphe à la limite inductive du système dirigé $\mathcal{D}$. Chaque membre de $\mathcal{D}$ est dénombrable et Lin-simple. Par compacité il suffit de savoir traiter leur cas. ◇

On suppose dorénavant $\mathbb{A}$ Lin-simple et dénombrable, et l'on procède à une réécriture de la méthode de Rasiowa-Sikorski (v. § SÉ2).

Définition. Un idéal booléen $I \lhd \mathbb{A}$ est *de Rasiowa-Sikorski* s'il vérifie :

> pour $x \in \mathcal{V}$ et $a \in \mathbb{A}$, si $\exists_x a \notin I$, alors il existe $y \in \mathcal{V}$ telle que $S_{x:=y}(a) \notin I$.

Attention : *on ne demande pas que I soit un Lin-idéal.* La condition est surtout utile dans le cas d'idéaux maximaux. Pour la retenir, penser à I comme à un idéal de *réfutation.*

On rappelle que malgré leur égalité, l'ensemble des idéaux *maximaux* $\mathrm{Spm}(\mathbb{A})$ est ici plus naturel que celui des idéaux premiers $\mathrm{Spec}(\mathbb{A})$.

Étape 3. Si $\mathbb{A}$ est dénombrable, alors il existe dans $\mathrm{Spm}(\mathbb{A})$ des idéaux de Rasiowa-Sikorski.

Vérification. On munit $\mathrm{Spm}(\mathbb{A})$ de sa topologie profinie, engendrée par les ouverts $O_a = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(\mathbb{A}) : a \notin \mathfrak{m}\}$ pour $a \in \mathbb{A}$ (§ 5.1.B). Tout ouvert est même réunion de ces ouverts générateurs, car leur famille est close sous intersection finie.

On rappelle que $a \leqslant b$ ssi $O_a \subseteq O_b$. C'est conséquence de l'isomorphisme de Stone $\mathbb{A} \simeq \mathrm{Ferv}(\mathrm{Spec}(\mathbb{A}))$ [**Bool**] envoyant a sur O_a (§ 5.3) ; on le redémontre pour l'autonomie. Si $a \leqslant b$, alors tout idéal contenant b contient

$ab = a$. Réciproquement supposons $O_a \subseteq O_b$. Soit $c = a(1 + b)$; supposons $c \neq 0$. Par semi-simplicité de $\mathbb{A}$ (proposition 5.1), il existe $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(\mathbb{A})$ évitant c. Alors $\mathfrak{m}$ évite a et $1 + b$. Donc il évite b, mais étant maximal il contient b, absurde. Ceci montre $c = 0$ i.e. $a(1 + b) = 0$ et donc $a \cdot b = a$, ce qu'on voulait.

On montre que si $a = \bigvee_I b_i$, alors $O_{\neg a} \cup \bigcup_I O_{b_i}$ est dense dans $\mathrm{Spm}(\mathbb{A})$. Il suffit de montrer $\square(O_a \cap \bigcap_I O_{\neg b_i}) = 0$, où $\square$ désigne l'intérieur topologique. Donc il suffit de montrer que $O_a \cap \bigcap_I O_{\neg b_i}$ ne contient aucun ouvert de base O_c. Mais si $O_c \subseteq \bigcap_I O_{\neg b_i}$, alors $\bigcup_I O_{b_i} \subseteq O_{\neg c}$, donc pour chaque indice, $b_i \leqslant \neg c$. Ainsi $a \leqslant \neg c$, puis $c \leqslant \neg a$ et $O_c \subseteq O_{\neg a}$. Ceci montre l'affirmation.

Soient $a \in \mathbb{A}$ et $x \in \mathcal{V}$. D'après la Proposition F.2.B.(iii), $\exists_x a = \bigvee_{y \in \mathcal{V}} S_{x:=y}(a)$. Mais la condition de Rasiowa-Sikorski en $\exists_x a$ définit dans $\mathrm{Spm}(\mathbb{A})$ l'ouvert $E_{x,a} = O_{\neg \exists_x a} \cup \bigcup_{y \in \mathcal{V}} O_{S_{x:=y}(a)}$. Le paragraphe précédent montre que cet ouvert est dense dans $\mathrm{Spm}(\mathbb{A})$.

Comme $\mathcal{V}$ et $\mathbb{A}$ sont dénombrables, il y a un nombre dénombrable de conditions de Rasiowa-Sikorski. D'après le théorème de Baire, l'intersection des $E_{x,a}$ est dense dans $\mathrm{Spm}(\mathbb{A})$, et donc non vide. Un élément de cette intersection est un idéal maximal et de Rasiowa-Sikorski. ◇

On munit $\mathcal{V}$ d'un ordre total. Ceci permet d'ordonner uniformément ses parties finies. Pour $a \in \mathbb{A}$, soit $\mathbf{x}_a = \mathrm{Var}(a)$ en tant que uplet ordonné.

Notation.

— Sur $\mathcal{V}$, soit $x \sim y$ la relation : $\delta_{x,y} \notin \mathfrak{m}$.

— Entre uplets de même longueur, soit $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ la relation : pour chaque indice, $x_i \sim y_i$.

— Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de même longueur, soit $\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \prod_{i=1}^n \delta_{x_i,y_i}$.

Étape 4. Les $\sim$ sont des relations d'équivalence. En outre $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ ssi $\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \notin \mathfrak{m}$.

Vérification. La réflexivité de $\sim$ est évidente car $\mathfrak{m}$ est propre et $\delta_{x,x} = 1$. Sa symétrie est claire car $\delta_{y,x} = \delta_{x,y}$ (lemme F.1.(vi)). La transitivité est par primalité de $\mathfrak{m}$ et grâce à $\delta_{x,y}\delta_{y,z} \leqslant \exists_y(\delta_{x,y}\delta_{y,z}) = \delta_{x,z}$. L'extension aux n-uplets est encore par primalité de $\mathfrak{m}$. ◇

Soit $M = \mathcal{V}/{\sim}$ l'ensemble quotient.

Étape 5. Poser $C_a = \{f \in M^{\mathcal{V}} : S_{\mathbf{x}_a := f(\mathbf{x}_a)}(a) \notin \mathfrak{m}\}$ est bien défini. La partie C_a est cylindrique avec $\mathrm{supp}(C_a) \subseteq \mathrm{Var}(a)$. En outre $a \mapsto C_a$ est un Lin-morphisme injectif.

Vérification. Si $f : \mathcal{V} \to M$, alors $f(\mathbf{x}_a)$ est un uplet de *classes d'équivalence de variables* et non pas un uplet de variables. En particulier « $S_{\mathbf{x}_a := f(\mathbf{x}_a)}$ » n'a pas de sens en tant qu'élément de $\mathbb{A}$.

En revanche si $f(\mathbf{x}_a) = [\mathbf{y}]$, alors la condition « $S_{\mathbf{x}_a:=\mathbf{y}}(a) \in \mathfrak{m}$ » ne dépend pas du uplet représentant. En effet d'après la proposition F.2.B.(ii), $\delta_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \cdot S_{\mathbf{x}_a:=\mathbf{y}}(a) = \delta_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \cdot S_{\mathbf{x}_a:=\mathbf{z}}(a)$. Si $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$, alors $\delta_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \notin \mathfrak{m}$, donc $S_{\mathbf{x}_a:=\mathbf{y}}(a) \in \mathfrak{m}$ ssi $S_{\mathbf{x}_a:=\mathbf{z}}(a) \in \mathfrak{m}$. Donc la condition « $S_{\mathbf{x}_a:=f(\mathbf{x}_a)}(a) \in \mathfrak{m}$ » est bien définie, ainsi que C_a. En outre C_a est cylindrique avec $\mathrm{supp}(C_a) \subseteq \mathrm{Var}(a)$.

On montre que $a \mapsto C_a$ est un Lin-morphisme. Les cas propositionnels et des égalités sont sans difficulté ; montrons la préservation des quantificateurs. On fixe $a \in \mathbb{A}$ et $x \in \mathcal{V}$. Si $x \notin \mathrm{Var}(a)$, alors $x \notin \mathrm{supp}\, C_a$, d'où $\exists_x C_a = C_a = C_{\exists_x a}$. On suppose donc $x \in \mathrm{Var}(a)$. Écrivons $\mathbf{x}_a = (\mathbf{x}', x)$ avec $x \notin \mathbf{x}'$ (en toute rigueur x peut apparaître au milieu du uplet $\mathbf{x}_a$, mais on allège ainsi la notation). Soit $f \in M^{\mathcal{V}}$. On note $\mathbf{y}' = f(\mathbf{x}')$.

- On suppose $f \in C_{\exists_x a}$, i.e. $S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(\exists_x a) \notin \mathfrak{m}$. Soit t une variable étrangère aux données. Alors grâce à la Proposition F.2.B.(i) :

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(\exists_x a) &= S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(\exists_t S_{x:=t}(a)) = \exists_t S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(S_{x:=t}(a)) \\ &= \exists_t S_{\substack{\mathbf{x}':=\mathbf{y}' \\ x:=t}}(a), \end{aligned}$$

  et ce point n'est pas dans $\mathfrak{m}$. Par définition d'un idéal de Rasiowa-Sikorski, il existe y telle que :

$$S_{t:=y}\left(S_{\substack{\mathbf{x}':=\mathbf{y}' \\ x:=t}}(a)\right) = S_{\substack{\mathbf{x}':=\mathbf{y}' \\ x:=y}}(a) \notin \mathfrak{m}.$$

  Soit g la fonction coïncidant avec f sauf en x, où elle vaut $[y]$. Alors $g \in C_a$, et $f \in \exists_x C_a$.
- On suppose $f \in \exists_x C_a$. Il existe alors une fonction $g \in C_a$ coïncidant avec f partout, sauf en x où elle vaut $[y]$. Ainsi $S_{\substack{\mathbf{x}':=\mathbf{y}' \\ x:=y}}(a) \notin \mathfrak{m}$. Introduisant une variable étrangère t, la proposition F.2.B.(i) et (iii)

donne :

$$S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(\exists_x a) = S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(\exists_t S_{x:=t}(a)) = \exists_t S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(S_{x:=t}(a))$$
$$\geqslant (S_{t:=y} S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'} S_{x:=t})(a) = S_{\substack{\mathbf{x}':=\mathbf{y}' \\ x:=y}}(a).$$

Le membre de droite n'est pas dans $\mathfrak{m}$, donc celui de gauche non plus : ainsi $f \in C_{\exists_x a}$.

Donc $a \mapsto C_a$ est un Lin-morphisme. Il est injectif par Lin-simplicité de $\mathbb{A}$. ◇

Ceci démontre le théorème de représentation. □

Remarques

— On n'a pas déduit la compacité de la complétude. On a d'abord montré la compacité par ultraproduits (§ F.3 algébrise § 16), puis la complétude dénombrable à la Rasiowa-Sikorski (§ F.4 algébrise la partie associée de § SÉ2).

— On peut aussi procéder à la Henkin (v. § 10), mais c'est plus laborieux.

— Il faut d'abord formaliser la notion de « nouvelle constante ». Un élément c d'un anneau de Lindenbaum est *une constante en* x si $\exists_x c = 1$ et que pour $y \neq x$ on a $c \cdot S_{x:=y}(c) \leqslant \delta_{x,y}$.

— Un idéal $I \lhd \mathbb{A}$ est *de Henkin*, ou *attesté*, si chaque fois que $\neg\exists_x a \in I$, il existe une constante en x telle que $\neg(c \cdot a) \in I$.

— Le lemme-clef est de montrer que si $I \lhd \mathbb{A}$, alors il existe un anneau de Lindenbaum $\hat{\mathbb{A}} \geqslant \mathbb{A}$ et un idéal maximal et de Henkin $\hat{I} \geqslant I$. Puis on conclut comme en § 10.

Noter qu'un idéal de Rasiowa-Sikorski est de Henkin, mais sans passer à un $\hat{\mathbb{A}}$ pour avoir de nouvelles constantes. Un idéal maximal et de Henkin correspond à un modèle ; mais un idéal maximal et de Rasiowa-Sikorski correspond à un modèle *de domaine un quotient des constantes.*

Corollaire (complétude de la logique élémentaire)**.** Soit Θ une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire cohérente. Alors Θ est satisfaisable.

Démonstration. On peut supposer $\mathcal{L}$ purement relationnel. Soient $\hat{\mathbb{A}} = \mathrm{Lin}^{\vdash}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$ et $J = \{\neg[\varphi] : \varphi \in \Theta\}$. Par cohérence, J est un idéal (propre) de $\mathrm{\acute{E}n}(\hat{\mathbb{A}})$. D'après la proposition F.1, il existe un Lin-idéal propre $I \blacktriangleleft \hat{\mathbb{A}}$ tel que $I \cap \mathrm{\acute{E}n}(\hat{\mathbb{A}}) = J$. Soient $\mathfrak{m} \geqslant I$ un Lin-idéal maximal et $\mathbb{A} = \hat{\mathbb{A}}/\mathfrak{m}$, qui est Lin-simple. Par représentation, il existe un plongement $C\colon \mathbb{A} \hookrightarrow \mathrm{Cyl}(M)$ **[Lin]**, envoyant a sur C_a.

Bien que l'idée intuitive soit claire, il reste des détails techniques étonnamment laborieux. En effet une structure cylindrique n'est pas littéralement une $\mathcal{L}$-structure.

Pour $R \in \mathcal{L}$, disons d'arité n_R, l'interprétation $R[\mathbb{M}]$ doit être une partie de M^{n_R}, sans référence à des variables. On procède comme suit. Soit $\mathbf{x}_R$ un n_R-uplet de variables de référence. On pose :

$$R[\mathbb{M}] = \{f(\mathbf{x}_R) : f \in C_{[R(\mathbf{x}_R)]}\} \subseteq M^{n_R}.$$

Ceci munit M d'une $\mathcal{L}$-structure notée $\mathbb{M}$.

Lemme. Soient $\varphi(\mathbf{y})$ une formule à variables $\subseteq \mathbf{y}$ et $\mathbf{m}$ un uplet de points de M. Soit $\mu_{\mathbf{y}}$ le choix de paramètres $(\mathbf{y} := \mathbf{m})$. Alors $\mathbb{M} \models \varphi(\mu_{\mathbf{y}})$ ssi $\mu_{\mathbf{y}} \in C_{[\varphi(\mathbf{y})]}$.

Il convient de distinguer le *uplet* $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in M^k$ des *paramètres* $\mu_{\mathbf{y}}$, qui sont une fonction.

Démonstration. C'est une algébrisation de l'effet sémantique des substitutions (§ 9.3). On procède par une récurrence où l'amorce est non triviale. Si C est une partie cylindrique à support $\subseteq \mathbf{y}$, alors « $\mu_{\mathbf{y}} \in C$ » a un sens, indépendamment de la complétion de $\mu_{\mathbf{y}}$ en fonction totale.

Soit $\mathbf{x} \subseteq \mathcal{V}$ un uplet injectif. On note $S = S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}$. Sur $M^{\mathcal{V}}$ soit S^* la fonction $f \mapsto f \circ (\mathbf{x} := \mathbf{y})$. Dans $\mathrm{Cyl}(M)$, l'opérateur S a un sens :

$$S(C) = \exists_{\mathbf{x}}(\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cdot C) = \{g \in M^{\mathcal{V}} : (\exists h \in \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cdot C)(g_{|\mathbf{x}^c} = h_{|\mathbf{x}^c})\}.$$

On affirme que si $C \in \mathrm{Cyl}(M)$ vérifie $\mathrm{Var}(C) \subseteq \mathbf{x}$, alors $f \in S(C)$ ssi $S^*(f) \in C$. Si $f \in S(C)$, alors il existe $h \in \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cap C$ coïncidant avec f hors de $\mathbf{x}$. Alors $S^*(f) = f \circ (\mathbf{x} := \mathbf{y})$ coïncide avec f, donc avec h, hors de $\mathbf{x}$. Comme C est cylindrique à support $\subseteq \mathbf{x}$, on a $S^*(f) \in C$. Supposons $S^*(f) \in C$. Par construction, $S^*(f)(\mathbf{x}) = S^*(f)(\mathbf{y})$, donc $S^*(f) \in \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cap C$. Mais f coïncide avec $S^*(f)$ hors de $\mathbf{x}$, donc $f \in S(C)$.

On procède à la récurrence sur φ.

— On suppose φ de la forme $R(\mathbf{y})$, où $\mathbf{y}$ n'est pas nécessairement le uplet de référence $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$. Ainsi φ est $R(\mathbf{x})[\mathbf{x} := \mathbf{y}]$, mieux notée $S_{\mathbf{x}:=\mathbf{y}}(R(\mathbf{x}))$. Noter que $S^*(\mu_{\mathbf{y}}) = \mu_{\mathbf{y}} \circ (\mathbf{x} := \mathbf{y})$ étend $\mu_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} := \mathbf{m})$. En outre comme C est un morphisme, $S(C_{[R(\mathbf{x}_R)]}) = C_{S([R(\mathbf{x}_R)])} = C_{[R(\mathbf{y})]} = C_{[\varphi(\mathbf{y})]}$.
Alors $\mathbb{M} \models \varphi(\mu_{\mathbf{y}})$ ssi $\mathbf{m} \in R[\mathbb{M}]$ ssi $\mu_{\mathbf{x}} \in C_{[R(\mathbf{x}_R)]}$ ssi $S^*(\mu_{\mathbf{y}}) \in C_{[R(\mathbf{x}_R)]}$

ssi $\mu_{\mathbf{y}} \in S(C_{[R(\mathbf{x}_R)]})$ ssi $\mu_{\mathbf{y}} \in C_{[R(\mathbf{y})]}$.

— La récurrence elle-même est sans heurts. □

En particulier, pour un énoncé φ, on a bien $\mathbb{M} \models \varphi$ ssi $C_{[\varphi]} = 1$ ssi $[\varphi] = 1$ ssi $[\varphi] \notin \mathfrak{m}$. C'est notamment le cas sitôt que $\varphi \in \Theta$. Ainsi $\mathbb{M} \models \Theta$. □

Remarque. Envisager une $\mathcal{L}$-structure comme une structure cylindrique est un changement de point de vue par rapport à § 6.2. L'approche cylindrique à la notion de structure algébrique est extrinsèque puisque l'ensemble $\mathcal{V}$ apparaît. Plus intrinsèque est la notion de structure définissable.

On peut inversement déduire la représentabilité de la complétude : voir exercice F.7 Le théorème F.4 démontre ainsi autant que la complétude de la logique élémentaire (§ 10). L'étude des anneaux de Lindenbaum est ainsi une *algébrisation* de $\Lambda_{\omega,\omega}$, pas une *généralisation.*

Exercices

F.1. Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole, et $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ ayant les propriétés suivantes : – pour $a \in \mathbb{A}$, $a \leqslant f(a)$; – f est croissante ; – f est idempotente ; – $\mathrm{Fix}(f)$ est un sous-anneau de $\mathbb{A}$. Montrer que f est un quantificateur. [Écrire $a = (a \cdot f(b)) \vee (a \cdot \neg f(b))$.]

F.2. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum.

a. Montrer que $\mathrm{Var}(a) = \{x \in \mathcal{V} : (\exists y \in \mathcal{V})(S_{x:=y}(a) \neq a)\}$.

b. Montrer que si $\mathbf{x}'$ est un uplet injectif, $\mathbf{y}'$ un uplet de même longueur, $x \notin \mathbf{x}'$, et $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ est infini, alors pour tout $a \in \mathbb{A}$:

$$S_{\mathbf{x}':=\mathbf{y}'}(\exists_x a) = \bigvee_{y \in \mathcal{V}_0} S_{\substack{\mathbf{x}':=\mathbf{y}' \\ x:=y}}(a).$$

F.3. On a manié LinSpm et non l'ensemble LinSpec des Lin-idéaux premiers ($ab \in I$ entraîne $a \in I$ ou $b \in I$). Montrer qu'un Lin-idéal premier est Lin-maximal mais que la réciproque est fausse.

F.4. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

> Soit Θ une $\mathcal{L}$-théorie finiment satisfaisable. Soit $I \blacktriangleleft \mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$ le Lin-idéal associé. Toute partie finie $X \subseteq I$ correspond à une sous-théorie finie de Θ, donc engendre un Lin-idéal propre. Il suit que I est propre, i.e. $\Theta \not\models \perp$. Donc Θ est satisfaisable.

F.5 (parties uniformément cylindriques). Soient $(M_i : i \in I)$ une famille d'ensembles non vides, et $\Pi = \prod_I \mathrm{Cyl}(M_i)$. Une famille $\mathcal{C} = (C_i) \in \Pi$ est *uniformément cylindrique* s'il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ contenant tous les $\mathrm{Var}(C_i)$. On note $\check{\Pi} = \check{\prod}_I \mathrm{Cyl}(M_i)$ l'anneau de Lindenbaum des familles uniformément cylindriques.

a. Soient $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $P(I)$ et $\sim$ l'égalité $\mathcal{U}$-presque partout sur $\prod_I M_i$. Soit $M^* = (\prod_I M_i)/\!\sim$ l'ensemble quotient. Former un Lin-morphisme $\check{\Pi} \to \mathrm{Cyl}(M^*)$.

b. En observant qu'on peut se contenter de familles uniformément cylindriques *génériquement données*, retrouver le théorème de compacité F.3.

F.6 (anneaux de cylindres $\varnothing$-définissables). On travaille en logique élémentaire. Soit $\mathbb{A} = (A;\mathcal{L})$ une structure relationnelle. Pour $\varphi \in \mathcal{L}$-Form, soit $\varphi[\![\mathbb{A}]\!] = \{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\mathcal{V}} : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\} \subseteq \mathbb{A}^{\mathcal{V}}$. Soit $\mathrm{Cyl}(\mathbb{A}) = \{\varphi[\![\mathbb{A}]\!] : \varphi \in \mathcal{L}\text{-Form}\}$.

a. Vérifier que Cyl($\mathbb{A}$) est un anneau de Lindenbaum.

b. Soit $\mathbb{B} = (B\,;\mathcal{L})$ une structure de même langage. Montrer que $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ $[\mathcal{L}]$ ssi $\varphi[\![\mathbb{A}]\!] \mapsto \varphi[\![\mathbb{B}]\!]$ définit un isomorphisme $\mathrm{Cyl}(\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Cyl}(\mathbb{B})$ [**Lin**]. Donner deux $\mathcal{L}$-structures non élémentairement équivalentes malgré un Lin-isomorphisme $\mathrm{Cyl}(\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Cyl}(\mathbb{B})$ [**Lin**].

c. Soit $\mathbb{A}' = (A\,;\mathcal{L}')$ une structure de même domaine mais dans un autre langage. On dit que $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$ sont *$\varnothing$-interdéfinissables* si pour tout symbole $\sigma \in \mathcal{L}$, l'ensemble $\sigma[\mathbb{A}]$ est $\varnothing$-définissable dans $\mathbb{A}'$, et réciproquement.
Montrer que $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$ sont $\varnothing$-interdéfinissables ssi $\mathrm{Cyl}(\mathbb{A}) = \mathrm{Cyl}(\mathbb{A}')$.

d. En déduire que pour $\mathbb{A} = (A;\mathcal{L})$ et $\mathbb{B}' = (B;\mathcal{L}')$, on a $\mathrm{Cyl}(\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Cyl}(\mathbb{B}')$ [**Lin**] ss'il existe $\mathbb{B} = (B\,;\mathcal{L})$ tel que $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ et que $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ soient $\varnothing$-interdéfinissables.

F.7 (théorème de représentation syntaxique). Suite de l'exercice 6.9.

Théorème. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Lindenbaum. Alors il existe un langage purement relationnel $\mathcal{L}$ et une $\mathcal{L}$-théorie Θ tels que $\mathbb{A} \simeq \mathrm{Lin}^{\vdash}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ [**Lin**].

– On fixe un ordre total sur $\mathcal{V}$. Les parties finies de $\mathcal{V}$ deviennent des uplets ordonnés.
– Pour $a \in \mathbb{A}$, soient $\mathbf{x}_a = \mathrm{Var}(a)$, puis $n_a = \mathrm{card}\,\mathbf{x}_a$ et R_a une relation n_a-aire.
– Soit $\mathcal{L} = \{R_a : a \in \mathbb{A}\}$. Soit $f\colon \mathcal{L}\text{-Form} \twoheadrightarrow \mathbb{A}$ définie comme suit :
$f(\bot) = 0$; $f(x = y) = \delta_{x,y}$; $f(R_a(\mathbf{x})) = S_{\mathbf{x}_a := \mathbf{x}}(a)$; $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$; $f(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = f(\varphi_1) \cdot f(\varphi_2)$; $f(\varphi_1 \vee \varphi_2) = f(\varphi_1) \vee f(\varphi_2)$; $f(\varphi_1 \to \varphi_2) = \neg f(\varphi_1) \vee f(\varphi_2)$; $f(\exists x\ \varphi) = \exists_x f(\varphi)$; $f(\forall x\ \varphi) = \neg\exists_x \neg f(\varphi)$.
– Pour $\Phi \subseteq \mathcal{L}$-Form un sous-ensemble fini, soit $f(\Phi) = \prod_{\varphi\in\Phi} f(\varphi)$.

a. Montrer que si $x \notin \mathrm{VarLib}(\varphi)$, alors $x \notin \mathrm{Var}(f(\varphi))$. Montrer que si y est substituable à x dans φ, alors $f(\varphi[x := y]) = S_{x:=y}(f(\varphi))$.

b. Montrer que si $\Phi \vdash \chi$ dans $\mathcal{L}$-Form avec Φ fini, alors $f(\Phi) \leqslant f(\chi)$. En déduire que f passe au quotient en un isomorphisme $\overline{f}\colon \mathrm{Lin}_{\mathcal{L}}(\Theta) \simeq \mathbb{A}$ [**Lin**] pour une théorie Θ.

c. En invoquant la complétude de la logique élémentaire, retrouver le théorème F.4.

d. Axiomatiser Θ. (*)

Les exercices F.8 et F.9 demandent plusieurs définitions supplémentaires.

Définition (anneau à $\mathcal{V}$-substitutions, anneau polyadique, anneau polyadique égalitaire)**.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole.

– $\mathbb{A}$ est *à $\mathcal{V}$-substitutions* s'il est muni d'un morphisme de monoïdes $S\colon \mathrm{End}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathbb{A})$.
– $\mathbb{A}$ est *polyadique* s'il est à $\mathcal{V}$-quantification locale (définition B) et à $\mathcal{V}$-substitutions avec les compatibilités suivantes, où $\exists_J = \prod_{x\in J} \exists_x$ pour J fini :
  – si $f_{|J^c} = g_{|J^c}$, alors $S(f) \circ \exists_J = S(g) \circ \exists_J$;
  – si la restriction $f\colon f^{-1}(J) \to J$ est bijective, alors $\exists_J \circ S(f) = S(f) \circ \exists_{f^{-1}(J)}$.

– $\mathbb{A}$ est *polyadique égalitaire* s'il est polyadique et qu'il existe une fonction $\delta\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{A}$ vérifiant pour toutes variables $x, y \in \mathcal{V}$, toute fonction $f \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, et tout $a \in \mathbb{A}$:
  – $\delta_{x,x} = 1$;
  – $S(f)(\delta_{x,y}) = \delta_{f(x),f(y)}$;
  – $a \cdot \delta_{x,y} \leqslant S_{x:=y}(a)$.

Remarque. En conjonction avec des hypothèses de localité, il suffit que S soit défini sur le sous-monoïde $\{f\colon \in F(\mathcal{V}) : \text{il existe } W \subseteq \mathcal{V} \text{ cofinie telle que } f_{|W} = \mathrm{Id}_W\}$.

F.8 (équivalence Lindenbaum ↔ polyadique égalitaire).

a. Montrer qu'un anneau de Lindenbaum est polyadique égalitaire.

b. Soit $\mathbb{A}$ un anneau polyadique. Montrer que $\mathbb{A}$ vérifie $S_{x:=y}(\exists_x a) = \exists_x a$ et $\exists_x a = \bigvee_{y\in\mathcal{V}} S_{x:=y}(a)$.

c. Déduire que $\mathbb{A}$ est de Lindenbaum. [Commencer par $S_{x:=y}(a) = \exists_x(a \cdot \delta_{x,y})$.]

(*) **F.9.** Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole à $\mathcal{V}$-substitutions. On suppose que pour tout $a \in \mathbb{A}$:

– l'ensemble $\mathrm{Var}(a) = \{x \in \mathcal{V} : (\exists y \in \mathcal{V})(S_{x:=y}(a) \neq a)\}$ est fini ;
– pour tout $x \in \mathcal{V}$, l'ensemble $\{S_{x:=y}(a) : y \in \mathcal{V}\}$ possède une borne supérieure, notée $\exists_x a$;
– pour toutes $u, v \in \mathcal{V}$, le morphisme $S_{u:=v}$ commute avec ce $\bigvee$, i.e. :

$$S_{u:=v}(\exists_x a) = \bigvee_{y\in\mathcal{V}} (S_{u:=v} \circ S_{x:=y})(a).$$

Montrer que $\mathbb{A}$ est un anneau à $\mathcal{V}$-quantification locale. [Invoquer l'exercice F.1.]

Notes conclusives

Le sujet est sorti de mode ; avis contraire dans [Say05].

- **Repères historiques.**

  Contrairement à ce que M. L'Abbé semble penser, les algébristes se sont occupés d'algèbres cylindriques dès 1938 ([1], [3]), du moins dans le cas particulier, où l'algèbre de Boole sous-jacente est complète. Il s'agissait, d'ailleurs, surtout d'algèbres cylindriques concrètes, quoique (du moins dans le travail cité [1] de 1938) l'algèbre abstraite correspondante ait été envisagée sans être définie explicitement. Ces études n'ont pas été motivées par des préoccupations logiques, mais avaient comme but principal une très large généralisation abstraite de la théorie de Galois. [Kra58]

[1] est [Kra38]. Krasner critique [LAb58] paru dans le même numéro du même journal, texte au demeurant lucide malgré l'excessive importance accordée à l'école américaine.

[Say05] : Tarek Sayed Ahmed. « Algebraic logic, where does it stand today ? » In : *Bull. Symbolic Logic* 11.4 (2005), p. 465-516
[Kra58] : Marc Krasner. « Les algèbres cylindriques ». In : *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958), p. 315-319
[Kra38] : Marc Krasner. « Une généralisation de la notion de corps ». In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 17 (1938), p. 367-385
[LAb58] : Maurice L'Abbé. « Structures algébriques suggérées par la logique mathématique ». In : *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958), p. 299-314

Précurseurs. • Boole algébrisa la logique propositionnelle classique [**Boole**]. Ses continuateurs de l'école algébrique tels Peirce et Schröder annoncent surtout les « algèbres de relations » (v. infra). • Un précurseur incontestable est Weyl ; [**Wey10**] tente de cerner la notion zermelienne de « relation définissable » (v. § 13, notes conclusives, *La querelle du definit*, et § 21, notes conclusives). • Le rôle central de Lindenbaum, communément admis parmi l'école polonaise, a été contesté par Tarski (v. *Terminologie* infra).

Krasner. • Le cas de Krasner est singulier : il travaille directement au niveau définissable, sans le langage de la logique. Ses travaux se rapprochent de ceux de Galois, de Klein, et de Mautner (§ 6, notes conclusives et § 7, notes conclusives). • Krasner ne s'occupe pas de formules logiques/expressions en les variables, mais de formes logiques/fonctions sur la structure : il manie les parties définissables plutôt que les parties cylindriques. Ce point de vue est plus algébrique et plus intrinsèque, car sans référence à des variables. • Une sélection de travaux de Krasner a été rééditée [Krasner].

Tarski et son école de Berkeley. • Tarski eut un intérêt de toujours pour une algébrisation de la logique, voire des mathématiques (v. *Algèbres de relations* infra). • L'anneau des cylindres en deux dimensions, i.e. avec seulement deux quantificateurs, est appelé *cylindric algebra* dès [JT51, p. 936]. • Passage à une infinité de variables dans [Tar52, p. 708], pour algébriser la définissabilité. Cette part de [Tar52] est en commun avec Louise Chin (aussi nommée Louise Lim, qui venait de finir son doctorat dirigé par Tarski) et Frederick Thompson (encore étudiant de Tarski). • La définition abstraite d'une « *cylindric algebra* » semble venir de [Abstracts2, résumés 85 et 86] (le 85 est en commun avec F. Thompson). • Aucune publication ne paraît suivre avant [Hen55] et [HT61], qui envisagent déjà le cas Var(a) infini. • Outre la généralité, l'abandon de cette clause de finitude est justifiable par son caractère non élémentaire. À cause d'elle, les anneaux de Lindenbaum ne sont pas axiomatisables en logique élémentaire. Si l'on cherche une théorie *élémentaire* dont les anneaux de Lindenbaum soient modèles, il faut renoncer au caractère local de la quantification. Mais cela complique le sujet. • Références [Henkin-Monk-Tarski1] et [Henkin-Monk-Tarski2] ; on ne peut pas les recommander.

[**Boole**] : George Boole. *The Mathematical analysis of logic, Being an essay towards a calculus of deductive reasoning.* Cambridge : Macmillan, Barclay & Macmillan, 1847. 82 p.

[**Wey10**] : Hermann Weyl. « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ». In : *Math. naturw. Bl.* 7 (1910), p. 93-95, 109-113

[Krasner] : Marc Krasner. *Œuvres choisises de Marc Krasner.* Sous la dir. de Luc Bélair et Bruno Poizat. Paris : L'Harmattan, 2019. 546 p.

[Tar52] : Alfred Tarski. « Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952, p. 705-720

[Abstracts2] : William Puckett. « The December meeting in Pasadena ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 58.1 (1952), p. 62-71

[Hen55] : Leon Henkin. « The representation theorem for cylindrical algebras ». In : *Mathematical interpretation of formal systems.* North-Holland, Amsterdam, 1955, p. 85-97

[HT61] : Leon Henkin et Alfred Tarski. « Cylindric algebras ». In : *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. II.* Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1961, p. 83-113

[Henkin-Monk-Tarski1] : Leon Henkin, Donald Monk et Alfred Tarski. *Cylindric algebras. Part I.* T. 64. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam-London : North-Holland, 1971, p. vi+508

[Henkin-Monk-Tarski2] : Leon Henkin, Donald Monk et Alfred Tarski. *Cylindric algebras. Part II.* T. 115. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam : North-Holland, 1985, p. ix+302

Halmos et son école. • Halmos s'est concentré sur les anneaux avec quantificateurs et substitutions mais sans égalités, i.e. les *anneaux polyadiques.* • Ses travaux, collectés dans [Halmos], sont légèrement postérieurs à ceux de l'école de Berkeley, mais indépendants faute de publication par Tarski et ses élèves. On peut les trouver plus lisibles. Lire le sympathique [Hal00]. • L'école de Halmos a même généralisé les anneaux à $\mathcal{V}$-substitutions [LeB61].

L'école polonaise d'après-guerre. • Elle ne s'est pas occupée des généralisations à la Tarski. Mostowski a certainement joué un rôle dans l'algébrisation des substitutions (§ F.2), qui a débouché sur l'approche Rasiowa-Sikorski. Les années 1950 ont décliné les applications de cette méthode : théorèmes de complétude [**RS50**], de Löwenheim-Skolem dénombrable [RS51], de compacité dénombrable [Ras52], de Herbrand [ŁMR56] et Gentzen [RS59] (v. § J). • Par la suite les travaux de Rasiowa notamment ont proposé des algébrisations de logiques non classiques (surtout propositionnelles) [Rasiowa] ; ce n'est pas la logique algébrique au sens de Tarski-Halmos.

Les résultats. • Théorème de représentabilité (§ F.4) : [Hen55, § 3]. L'école de Tarski employait la « méthode de Henkin » (v. remarque suivant la démonstration du théorème). La preuve suivie pour $\mathbb{A}$ dénombrable est évidemment [**RS50**]. L'idée d'en tirer le cas général par compacité ne semble pas répandue avant [Pot71] et [AN75]. On peut recommander le second. • Théorème de représentation syntaxique (ex. F.7) : [HT61, Theorem 1.1] (peut-être plus ancien). • Ex. F.8 : [Gal57], mais certainement de folklore. Ex. F.9 : [Fle93], même remarque.

La logique algébrique aujourd'hui. • On a tenté de faire la théorie des modèles des années 1960 en termes de logique algébrique ; p. ex. [Dai64]. La théorie des modèles a évolué depuis, et l'essai n'a pas été répété. • À

[Halmos] : Paul Halmos. *Algebraic logic.* New York : Chelsea Publishing Co., 1962, p. 271

[Hal00] : Paul Halmos. « An autobiography of polyadic algebras ». In : *Log. J. IGPL* 8.4 (2000), p. 383-392

[LeB61] : Léon LeBlanc. « Transformation algebras ». In : *Canadian J. Math.* 13 (1961), p. 602-613

[**RS50**] : Helena Rasiowa et Roman Sikorski. « A proof of the completeness theorem of Gödel ». In : *Fund. Math.* 37 (1950), p. 193-200

[RS51] : Helena Rasiowa et Roman Sikorski. « A proof of the Skolem-Löwenheim theorem ». In : *Fund. Math.* 38 (1951), p. 230-232

[Ras52] : Helena Rasiowa. « A proof of the compactness theorem for arithmetical classes ». In : *Fund. Math.* 39 (1952), 8-14 (1953)

[ŁMR56] : Jerzy Łoś, Andrzej Mostowski et Helena Rasiowa. « A proof of Herbrand's theorem ». In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 35 (1956), p. 19-24

[RS59] : Helena Rasiowa et Roman Sikorski. « On the Gentzen theorem ». In : *Fundamenta Mathematicae* 48 (1959), p. 59-69

[Rasiowa] : Helena Rasiowa. *An algebraic approach to non-classical logics.* T. 78. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam-London : North-Holland, 1974, p. xv+403

[Pot71] : Klaus Potthoff. « Representation of locally finite polyadic algebras and ultrapowers ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 17 (1971), p. 91-96

[AN75] : Hajnal Andréka et István Németi. « A simple, purely algebraic proof of the completeness of some first order logics ». In : *Algebra Universalis* 5 (1975), p. 8-15

[Gal57] : Bernard Galler. « Cylindric and polyadic algebras ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 (1957), p. 176-183

[Fle93] : Isidore Fleischer. « The polyadic completion of a transformation algebra ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 117.2 (1993), p. 511-514

[Dai64] : Aubert Daigneault. « On automorphisms of polyadic algebras ». In : *Trans. Amer.*

force de généralisations, la logique algébrique a pris des airs d'algèbre universelle. Elle survit sous une forme abstraite, très spécialisée [FJP03]. • Fondée par Lawvere, la *logique catégorique* peut être vue comme la tentative contemporaine d'algébrisation de la logique. Au lieu de structures, on emploie des catégories ; l'ambition est la même. Il ne s'agit pas de plonger la théorie des ensembles dans la théorie des catégories ; les concepts logiques eux-mêmes sont reformulés en termes catégoriques. Par exemple la complétude de la logique élémentaire (§ 10) devient le *théorème de Deligne-Gödel* : les topoi cohérents ont assez de points. Livre de référence [Mac Lane-Moerdijk] ; [Rey77] est mieux proportionné, et [Car79] bien écrit.

- **Terminologie.** • Les « anneaux de Lindenbaum » (définition F.1.D) correspondent aux *locally finite cylindric algebras of dimension ω* de l'école de Tarski, et les « anneaux de cylindres » (définition F.3.B) aux *set cylindric algebras*. • L'école polonaise a toujours dit « algèbre de Lindenbaum » pour la classe des formules modulo une théorie. Tarski a revendiqué la paternité. La première trace écrite semble en effet [Tar35b], sans attribution ; mais Tarski n'aimait pas honorer ses devanciers. (Lindenbaum n'était pas l'étudiant de Tarski, mais de Sierpiński.) • Le ton est progressivement monté : [RS58, note 1], [HT61, note 4 p. 85], [**Rasiowa-Sikorski**, note p. 245, VI.§ 10], [Henkin-Monk-Tarski1, note p. 169]. Le débat étant révolu [Sur82], on risque une citation.

> MOSTOWSKI — *You know, the name Lindenbaum Algebras, I think I am partly responsible for that. Lindenbaum wrote a paper in which he showed that if you have a system of propositional logic, then you can find a matrix which is satisfied precisely by the theorems of this propositional logic. So, after the war, when Rasiowa and Sikorski wrote their book (Rasiowa & Sikorski [63]) and they wrote their papers and they asked how they should call the algebras built of propositions, we decided in joint conversations that because the first idea that an algebra might be an algebra constructed out of propositions was Lindenbaum's, they should be called Lindenbaum algebras. But Tarski had made*

Math. Soc. 112 (1964), p. 84-130

[FJP03] : Josep Maria FONT, Ramón JANSANA et Don PIGOZZI. « A survey of abstract algebraic logic ». In : t. 74. 1-2. Abstract algebraic logic, Part II (Barcelona, 1997). 2003, p. 13-97

[Mac Lane-Moerdijk] : Saunders MAC LANE et Ieke MOERDIJK. *Sheaves in geometry and logic.* Universitext. A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition. New York : Springer-Verlag, 1994, p. xii+629

[Rey77] : Gonzalo REYES. « Sheaves and concepts : a model-theoretic interpretation of Grothendieck topoi ». In : *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* 18.2 (1977), p. 105-137

[Car79] : Pierre CARTIER. « Logique, catégories et faisceaux [d'après F. Lawvere et M. Tierney] ». In : *Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78).* T. 710. Lecture Notes in Math. Berlin : Springer, 1979, Exp. No. 513, pp. 123-146

[Tar35b] : Alfred TARSKI. « Grundzüge des Systemenkalküls I ». In : *Fundam. Math.* 25 (1935), p. 503-526

[RS58] : Helena RASIOWA et Roman SIKORSKI. « On the isomorphism of Lindenbaum algebras with fields of sets ». In : *Colloq. Math.* 5 (1958), p. 143-158

[**Rasiowa-Sikorski**] : Helena RASIOWA et Roman SIKORSKI. *The mathematics of metamathematics.* T. 41. Monografie Matematyczne. Warsaw : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963, p. 522

[Sur82] : Stanisław SURMA. « On the origin and subsequent applications of the concept of the Lindenbaum algebra ». In : *Logic, methodology and philosophy of science VI (Hannover, 1979).* T. 104. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam-New York : North-Holland, 1982, p. 719-734

an algebra built of propositions. For every theory built on the usual propositional logic he had constructed explicitly a Boolean algebra of these propositions, so he claims that it was his algebra because it was really the Boolean algebra as constructed by him. But I think the general idea as far as I understand was first conceived by Lindenbaum because Lindenbaum was the first who had this matrix. You know you should have asked Tarski. Maybe the Lindenbaum construction was suggested to him by Tarski... that should be known. We only knew that it was Lindenbaum's theorem. [**Cro75**, pp. 26-27]

[63] est [**Rasiowa-Sikorski**].

- **Variations**

Logique algébrique avec termes. • La gestion de fonctions et de termes complique le sujet sans gain mathématique. Les fonctions, utiles en informatique, donnent un point de vue plus génératif que descriptif. • Des aménagements pour inclure les termes sont possibles, mais laborieux ; p. ex. [Halmos, VI]. Le sujet semble éteint.

Logique algébrique infinitaire. • Abandonner l'hypothèse de localité, i.e. de finitude des $\mathrm{Var}(a)$, débouche sur des anneaux à $\mathcal{V}$-quantification non locale. Ils décrivent une logique à connecteurs finitaires, mais où les relations de base tolèrent une infinité de variables. • Si $\mathcal{V}$ est infini, tout anneau à $\mathcal{V}$-quantification se plonge encore dans un produit d'anneaux à quantification $P(M_i^{\mathcal{V}})$ (sans clause de finitude des supports). La preuve est plus difficile que pour le théorème F.4 [Mon61a], [DM63]. • Ceci permet de retrouver la complétude de la logique à relations infinitaires de Keisler, qui s'obtient aussi par des moyens conventionnels ; v. § 7, notes conclusives et § 10, notes conclusives.

Logique algébrique à variables finies. • La question du comportement des anneaux à $\mathcal{V}$-quantification *pour $\mathcal{V}$ fini*, lancée par Henkin [Henkin], n'est pas illégitime en informatique ou en algorithmique. • On note $\Lambda^n_{\omega,\omega}$ la logique élémentaire avec seulement n variables distinctes. Soit R une relation binaire. Pour $n \geqslant 4$, il existe un $\{R\}$-énoncé φ_n à 3 variables, tel que $\vdash \varphi_n$ $[\Lambda^n_{\omega,\omega}]$ mais $\nvdash \varphi_n$ $[\Lambda^{n-1}_{\omega,\omega}]$ [HHM02].

Logique algébrique intuitionniste ou modale. • Intuitionniste (§ G si besoin) : [KP66] contient des trivialités syntaxiques, mais pas de théorème de représentation. • Modale (§ H si besoin) : [Fre76] contient un théorème de représentation cylindrique. • Aucun des sujets n'eut de postérité.

- **Algèbres de relations.** • Elles modélisent la logique des seules relations *binaires.* La question n'est pas illégitime : on sait coder toutes les mathématiques existantes à l'intérieur d'une théorie en langage $\{\in\}$. • Le sujet descend de l'école algébrique à

[**Cro75**] : John Crossley. « Reminiscences of logicians ». In : *Algebra and logic (Fourteenth Summer Res. Inst., Austral. Math. Soc., Monash Univ., Clayton, 1974).* 1975, 1-62. Lecture Notes in Math., Vol. 450

[Mon61a] : Donald Monk. « On the representation theory for cylindric algebras ». In : *Pacific J. Math.* 11 (1961), p. 1447-1457

[DM63] : Aubert Daigneault et Donald Monk. « Representation theory for polyadic algebras ». In : *Fund. Math.* 52 (1963), p. 151-176

[Henkin] : Leon Henkin. *Logical systems containing only a finite number of symbols.* T. 21. Séminaire de Mathématiques Supérieures. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, p. 48

[HHM02] : Robin Hirsch, Ian Hodkinson et Roger Maddux. « Provability with finitely many variables ». In : *Bull. Symbolic Logic* 8.3 (2002), p. 348-379

[KP66] : Jerzy Kotas et August Pieczkowski. « On a generalized cylindrical algebra and intuitionistic logic ». In : *Studia Logica* 18 (1966), p. 73-81

[Fre76] : James Freeman. « Algebraic semantics for modal predicate logic ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math* 22.6 (1976), p. 523-552

la Schröder et Löwenheim [**Löw15**, Theorem 6]. • Aux États-Unis, les premiers jalons dans son renouveau semblent [McK40] (sujet proposé par Tarski), suivi de [Tar41] et [CT51]. En même temps Everett et Ulam suggéraient les *algèbres projectives* [EU46], cas partiel des algèbres de relations.

Une relation R sur un ensemble E est assimilée à son graphe $\Gamma_R \subseteq E^2$. L'ensemble $P(E^2)$ de toutes les relations sur E forme un anneau de Boole, muni en outre :

- d'une constante, la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$;
- d'une fonction unaire donnant la relation réciproque : $\Gamma^s = \{(y, x) : (x, y) \in \Gamma\}$;
- d'une fonction binaire donnant la relation composée : $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \{(x, y) : (\exists z)[(x, z) \in \Gamma_1 \wedge (z, y) \in \Gamma_2]\}$.

Une *algèbre de relations concrète* est un sous-anneau d'un $P(E^2)$ clos sous ^{s} et $\circ$.

Définition. Une *algèbre de relations abstraite* est un anneau de Boole muni d'une constante δ, d'une fonction unaire ^{s} et d'une fonction binaire $\circ$, vérifiant les identités :

- $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c)$;
- $a \circ \delta = a$;
- $(a \vee b) \circ c = (a \circ c) \vee (b \circ c)$;
- $a^{ss} = a$;
- $(a \circ b)^s = b^s \circ a^s$;
- $(a \vee b)^s = a^s \vee b^s$;
- $a^s \circ \neg(a \circ b) \leqslant \neg b$.

(Il y a d'autres axiomatisations.) • Une telle algèbre est *représentable* si isomorphe à un produit direct d'algèbres concrètes. Les principaux résultats sont :

- l'existence d'algèbres de relations non représentables [Lyn50] ;
- l'axiomatisabilité de la classe des algèbres représentables, par des énoncés universels [Tar55, Theorem 2.4] (pas d'axiomatisabilité finie [Mon64]).

Le domaine produit de longues monographies [Tarski-Givant], [Maddux].

[**Löw15**] : Leopold Löwenheim. « Über Möglichkeiten im Relativkalkül ». In : *Math. Ann.* 76.4 (1915), p. 447-470

[McK40] : John McKinsey. « Postulates for the calculus of binary relations ». In : *J. Symbolic Logic* 5 (1940), p. 85-97

[Tar41] : Alfred Tarski. « On the calculus of relations ». In : *J. Symbolic Logic* 6 (1941), p. 73-89

[CT51] : Louise Chin et Alfred Tarski. « Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras ». In : *Univ. California Publ. Math. (N.S.)* 1 (1951), p. 341-384

[EU46] : Cornelius Everett et Stanisław Ulam. « Projective algebra I ». In : *Amer. J. Math.* 68 (1946), p. 77-88

[Lyn50] : Roger Lyndon. « The representation of relational algebras ». In : *Ann. of Math. (2)* 51 (1950), p. 707-729

[Tar55] : Alfred Tarski. « Contributions to the theory of models III ». In : *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 58 (1955), 56-64 = Indagationes Math. 17, 56-64 (1955)

[Mon64] : Donald Monk. « On representable relation algebras ». In : *Michigan Math. J.* 11 (1964), p. 207-210

[Tarski-Givant] : Alfred Tarski et Steven Givant. *A formalization of set theory without variables.* T. 41. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987, p. xxii+318

[Maddux] : Roger Maddux. *Relation algebras.* T. 150. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, p. xxvi+731

§ G. Logique intuitionniste

La logique intuitionniste sous-tend l'attitude constructiviste ; on l'étudie depuis les mathématiques classiques. La *déduction intuitionniste* abandonne l'élimination de double négation ; la « sémantique des mondes possibles » agrège les structures en multivers portés par des préordres (§ G.1). (Cette sémantique est simpliste ; d'autres sémantiques sont proposées en § I.) La sémantique de Kripke est adéquate à la déduction intuitionniste (§ G.2). Ceci permet d'établir la non-redondance des connecteurs et le caractère constructif de la logique intuitionniste (§ G.3).

Prérequis : §§ 6–10. Il y a des ressemblances avec § H, de lecture facultative.

L'*intuitionnisme* est une thèse, ou un ensemble de thèses, à caractère épistémologique, induisant en particulier une position particulière face aux preuves. La *logique intuitionniste* formalise cette position.

§ G.1. Syntaxe et sémantique intuitionnistes

La logique intuitionniste ne change pas la notion de formule, mais affaiblit la théorie de la démonstration (refus du tiers-exclus). Par contraste, la logique usuelle est dite *classique*.

Définition A (formules intuitionnistes)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. La notion de formule ne change pas.

$\vdash$ [LI]

Définition B (déduction intuitionniste)**.** La *déduction intuitionniste* est donnée par les règles classiques (§ 9.2) *sauf* $\bot_c$. On la note $\Phi \vdash \chi$ [LI].

Pour alléger la notation, cette section emploie $\Phi \Vdash \chi$ (non conventionnel) au lieu de $\Phi \vdash \chi$ [LI].

Exemples

— On rappelle la présence de $\bot_e$ dans $\Vdash$:

$$\frac{\Phi \Vdash \bot}{\Phi \Vdash \chi}\ \bot_e$$

La *logique minimale* (v. notes conclusives) perdrait cette règle.

— $\Vdash (\varphi \to \bot) \leftrightarrow \neg\varphi$, donc $\neg$ reste une abréviation. En revanche on perd les redondances type « lois de De Morgan ».

— $\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \Vdash \neg\neg\varphi_1$ et $\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \Vdash \neg\varphi_2$.

— $\Vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$, mais en général $\nVdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (non-redondance, § G.3).

— $\forall x\ \neg\varphi \Vdash \neg\exists x\ \varphi$ et $\neg\exists x\ \varphi \Vdash \forall x\ \neg\varphi$.

Remarques

— La négation n'étant pas involutive, les formules modulo $\Vdash$ ne forment pas un anneau de Boole (§ 5.1.A). La structure résultante est un *treillis de Heyting* (§ D.1). C'est un treillis, pas un anneau.

— En général $\nVdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (§ G.3). La logique intuitionniste est donc moins forte que la logique classique. Elle n'est pourtant pas moins fine, car elle en code une image : voir exercice G.3.

La sémantique intuitionniste la plus accessible pédagogiquement est celle de Kripke pour les *multivers intuitionnistes en préordres*. Elle est complète, mais simpliste, et prépare mal aux sémantiques topologiques ou en préfaisceaux (§ I). Il faut prévoir de s'en défaire.

Définition C (multivers intuitionniste de Kripke)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Un *$\mathcal{L}$-multivers intuitionniste de Kripke*, ou *$\mathcal{L}$-multivers intuitionniste en préordre*, est un foncteur d'un préordre dans $\mathcal{L}$-**Str**. C'est donc la donnée $\mathbb{M}$:

— d'un préordre $\mathbb{P} = (P; \leqslant)$ (relation réflexive et transitive) ;

— pour chaque $\mathfrak{p} \in P$, d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$;

— pour chaque paire $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in P^2$ telle que $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}$, d'une fonction $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}} : \mathbb{A}_\mathfrak{p} \to \mathbb{A}_\mathfrak{q}$ compatible avec l'interprétation, i.e. :

  — $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}(c[\mathbb{A}_\mathfrak{p}]) = c[\mathbb{A}_\mathfrak{q}]$;

  — si $\mathbf{a} \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{p}]$, alors $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{q}]$;

  — $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}} \circ g[\mathbb{A}_\mathfrak{p}] = g[\mathbb{A}_\mathfrak{q}] \circ f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$;

— avec les clauses : $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{p}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_\mathfrak{p}}$, et si $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{r}$, alors $f_{\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{r}} \circ f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}} = f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{r}}$.

Remarques

— Les $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ emploient la vraie égalité. Il est permis d'ajouter au langage une relation d'équivalence modélisant l'« égalité intuitionniste » selon les thèses épistémologiques. On néglige ces subtilités.

— À la différence des multivers en logique modale (définition C), les $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ doivent préserver l'interprétation. Ce sont des *$\mathcal{L}$-morphismes* au sens de § 14.1.

— En revanche on ne demande pas que ce soient des *$\mathcal{L}$-plongements* au sens de § 14.2 : $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{q}]$ n'entraîne pas $\mathbf{a} \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{p}]$. Notamment l'injectivité n'est pas exigée.

— Le domaine de $\mathbb{P}$ n'est pas nécessairement un ensemble au sens de ZF.

La satisfaction en logique intuitionniste est *doublement relative*, comme en logique modale. Déjà relative au multivers, $\models$ devient en outre une donnée *locale*, i.e. relative au monde. On introduit une relation $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi(\mathbf{a})$, à lire par exemple « $\mathbb{M}$ en $\mathfrak{p}$ vérifie $\varphi(\mathbf{a})$ ».

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}$ est un uplet de paramètres et $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}$, alors $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ est uniquement déterminée, donc les paramètres $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}(\mathbf{a}) \in \mathbb{A}_\mathfrak{q}$ aussi. On écrit encore $\mathbf{a}$ pour $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}(\mathbf{a})$; il n'y a pas d'ambiguité.

Définition D (satisfaction intuitionniste de Kripke)**.** Soit $\mathbb{M} = (\mathbb{P}, (\mathbb{A}_\mathfrak{p}), (f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}))$ un multivers intuitionniste en préordre. On définit la satisfaction $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi(\mathbf{a})$ d'une formule à paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}$ par la récurrence suivante :

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models R(\mathbf{t})(\mathbf{a})$ ssi $\mathbf{t}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{p}]$;
ceci inclut les cas $\perp$ et $=$ (mais pas $\neq$) ;

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models (\neg\varphi)(\mathbf{a})$ ssi pour chaque $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \varphi(\mathbf{a})$;

— $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ et $\varphi_1 \vee \varphi_2$: définition classique ;

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models (\varphi_1 \to \varphi_2)(\mathbf{a})$ ssi pour chaque $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ tel que $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi_1(\mathbf{a})$, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi_2(\mathbf{a})$;

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models (\forall x\ \varphi)(\mathbf{a})$ ssi pour chaque $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ et chaque $\mathbf{a}' \in \mathbb{A}_\mathfrak{q}$ coïncidant avec $\mathbf{a}$ sur x^c, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi(\mathbf{a}')$;

— $(\exists x\ \varphi)$: définition classique.

Remarques

— On n'a jamais $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi(\mathbf{a})$ et $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models (\neg\varphi)(\mathbf{a})$; mais on n'a pas toujours $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi(\mathbf{a})$ ou $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models (\neg\varphi)(\mathbf{a})$: voir § G.3.

— Dans un éventuel monde « final » (i.e. indexé par un élément maximal de $\mathbb{P}$), la satisfaction est classique. Il peut ne pas en exister.

— La formule $x \neq y$ est l'abréviation $\neg(x = y)$, et non une relation de base. En particulier si $a \neq b \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}$, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \not\models (a = b)$ mais on ignore si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models a \neq b$.

— On a encore $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models (\forall x)(\neg\varphi)(\mathbf{a})$ ssi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \neg(\exists x)\varphi(\mathbf{a})$.

— Dans $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \forall x\varphi$, la variable x parcourt tout nouveau monde $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$.

— On peut se figurer un savoir irrévocable s'accroissant dans le temps $\mathbb{P}$. Ce qu'on sait reste acquis : si $R(\mathbf{a})$ au temps $\mathfrak{p}$, alors cela reste vrai par la suite. Si $\neg\varphi$ au temps $\mathfrak{p}$, alors φ est exclu même à l'avenir. Si $\varphi_1 \to \varphi_2$ ou $(\forall x\ \varphi)$ au temps $\mathfrak{p}$, alors cela reste vrai dans les cas de figure imprévus. L'éventuelle non-surjectivité des $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ signifie qu'avec le temps croissent l'information *et* l'espace de travail.

— Attention : la « définition classique » de $\exists$ est le point où la satisfaction de Kripke diffère de celle, plus fine, de Joyal. Pour les multivers en préordres on ne perçoit pas de différence mais cela prépare mal l'intuition. V. § I.

Le point suivant contraste avec la logique modale S_4 (§ H.3).

Lemme (de persistance)**.** Soit $\mathbb{M}$ un multivers intuitionniste en préordre.

(i) Si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi(\mathbf{a})$ et $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}$, alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi(\mathbf{a})$.

(ii) $\mathbb{M}$ passe au quotient en un multivers intuitionniste sur un *ordre*, avec la même notion de satisfaction.

Démonstration.

(i) Récurrence immédiate.

(ii) Soit $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$ la relation d'équivalence $(\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}) \wedge (\mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{p})$. Alors $O = P/\sim$ est naturellement muni d'une structure d'ordre $\mathbb{O} = (O; \leqslant)$. À l'intérieur d'une classe, les $f_{\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}}$ sont des isomorphismes, et par persistance la satisfaction reste constante. Donc $\mathbb{O}$ porte une structure de multivers bien définie. $\square$

Les préordres partiels ne capturent donc pas plus de vérité intuitionniste que les ordres partiels ; les seconds suffisent.

Définition E (conséquence sémantique intuitionniste)**.** Soient Φ un ensemble de $\mathcal{L}$-formules et χ une $\mathcal{L}$-formule. On note $\Phi \models \chi$ [LI] la relation : pour tout préordre $\mathbb{P}$, tout $\mathcal{L}$-multivers intuitionniste $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, tout monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ et tout choix de paramètres $\mathbf{a}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi(\mathbf{a})$, alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi(\mathbf{a})$. $\models$ [LI]

Remarque. La définition n'est pas « pour tout multivers, si partout $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi$, alors partout $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi$ ». En logique intuitionniste ces deux notions coïncident (exercice G.4), mais c'est faux en logique modale.

Pour alléger la notation, cette section emploie $\Phi \Vdash \chi$ (non conventionnel) au lieu de $\Phi \models \chi$ [LI].

§ G.2. Adéquation

On emploie la déduction et la conséquence intuitionnistes de § G.1 (définitions G.1.B et G.1.E), notées respectivement $\Vdash$ et $\Vdash$. La logique intuitionniste est complète, i.e. ces notions coïncident. On peut omettre (iii) en première lecture. Un préordre est *enraciné* s'il a un plus petit élément (non nécessairement unique).

Théorème (complétude de la logique intuitionniste)**.** Soient $\mathcal{L}$ un langage relationnel, $\Phi \subseteq \mathcal{L}$-Form et $\chi \in \mathcal{L}$-Form. Alors sont équivalents :

(i) $\Phi \Vdash\!\vdash \chi$;

(ii) $\Phi \Vdash\!\models \chi$;

(iii) pour tout préordre $\mathbb{P}$ *enraciné et de cardinal* $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$, tout multivers $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$ *dont tous les mondes sont de cardinal* $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$, tout monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ et tout choix de paramètres $\mathbf{a}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi(\mathbf{a})$, alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi(\mathbf{a})$.

Remarque. On peut même se ramener à des *arbres* enracinés (avec contrôle des cardinaux) en § I.3, théorème 10.

Démonstration. (i)⇒(ii) est la correction de la déduction intuitionniste pour la sémantique de Kripke. C'est une récurrence sur la déduction. Supposons que la déduction ait pour dernière étape :

$$\frac{\Phi \cup \{\chi\} \Vdash\!\vdash \bot}{\Phi \Vdash\!\vdash \neg\chi}\ \neg_i$$

On montre $\Phi \models \neg\chi$. Soient $\mathbb{P}$ un préordre, $\mathbb{M}$ un multivers intuitionniste sur $\mathbb{P}$, et $\mathfrak{p} \in \mathbb{M}$ tels que $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi$ (les éventuels paramètres restent implicites). Soit $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$. Par persistance $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \Phi$. Si $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi$, alors par récurrence $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \bot$, ce qui est impossible. Donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \chi$. Ceci vaut pour tout $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$, donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models (\neg\chi)$. Ainsi $\Phi \models \neg\chi$. Les autres cas sont similaires.

(ii)⇒(iii) est évident.

On montre (iii)⇒(i). La démonstration s'inspire du cas classique (§ 10) ; il n'est pas indispensable de connaître son adaptation modale (§ H.2). Comme dans le cas classique (ou modal), on peut supposer qu'on ne manie que des énoncés. À la différence du cas classique (ou modal), il ne suffit pas de montrer que toute ensemble cohérent d'énoncés est satisfaisable. En effet le « lemme sémantique » de § 10, étape 1 emploie la règle $\bot_c$. Mais on peut se ramener au cas d'énoncés. Il faut ici *éviter* un énoncé, et abandonner la maximalité pour la primalité (définie dans la démonstration). Comme dans le cas classique (ou modal), la méthode de Henkin se charge des témoins existentiels ; les universels ne posent aucune difficulté.

Les mots « cohérence » et « théorie » sont au sens de la $\Vdash\!\vdash$-déduction. Comme dans le cas classique (ou modal), la cohérence est préservée par augmentation du langage (§ 10, étape 2).

Définition (théorie première)**.** Une $\mathcal{L}$-théorie Θ est *première* si pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$-Én, on a : $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \Theta$ entraîne $[\varphi_1 \in \Theta$ ou $\varphi_2 \in \Theta]$.

Remarques

— C'est un cas particulier de filtre premier ; v. § 5.2. (1. Les théories sont des filtres d'un type particulier, rendant compte de la quantification ; 2. le langage des filtres est inévitable car on a perdu la structure d'anneau de Boole.)

— On peut avoir deux $\mathcal{L}$-théories premières avec $\Theta_1 \subsetneq \Theta_2$.

— Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ sont deux langages et Θ' est une $\mathcal{L}'$-théorie première, alors $\mathcal{L}$-Én $\cap\, \Theta'$ est un $\mathcal{L}$-théorie première.

Étape 1 (Lindenbaum intuitionniste ; cf. § 10, étape 4)**.** Soient Θ une $\mathcal{L}$-théorie et φ un $\mathcal{L}$-énoncé tels que $\varphi \notin \Theta$. Alors il existe une $\mathcal{L}$-théorie première contenant Θ mais pas φ.

Vérification. Soit Δ l'ensemble des $\mathcal{L}$-énoncés de la forme $\chi_1 \vee \chi_2$. Une théorie Σ *décide* $\chi_1 \vee \chi_2$ si $\Sigma \nVdash \chi_1 \vee \chi_2$ ou $\Sigma \Vdash \chi_1$ ou $\Sigma \Vdash \chi_2$.

Par comptage ordinal, on énumère $\Delta = \{\delta_k : k < \alpha\}$ par un ordinal α. L'argument se simplifierait avec une énumération telle que :

$$(\forall \delta \in \Delta)(\forall k_0 < \alpha)(\exists k < \alpha)(k \geqslant k_0 \wedge \delta = \delta_k).$$

Il en existe, mais cela requiert un peu d'habitude ordinale. Pour procéder sans, on imbrique des récurrences.

On forme une suite doublement indexée croissante de théories « décidant de plus en plus » et vérifiant toujours $\Theta_{k,\ell} \nVdash \varphi$. Garder à l'esprit le caractère finitaire de $\Vdash$. Soit $\Theta'_0 = \Theta$. Aux limites on prendra la réunion. Supposons Θ'_k construit. On forme Θ'_{k+1} comme suit.

— Soit $\Theta_{k,0} = \Theta'_k$. Aux limites on prendra la réunion.

— Supposons $\Theta_{k,\ell}$ construit. On forme $\Theta'_{k,\ell+1}$ comme suit. Par définition, δ_ℓ est de la forme $\chi_1 \vee \chi_2$. Si $\Theta_{k,\ell} \nVdash \delta_\ell$, ou $\Theta_{k,\ell} \Vdash \chi_1$, ou $\Theta_{k,\ell} \Vdash \chi_2$, soit $\Theta_{k,\ell+1} = \Theta_{k,\ell}$. Sinon, il y a deux cas de figure :

  — si $\Theta_{k,\ell} \cup \{\chi_1\} \nVdash \varphi$, soit $\Theta_{k,\ell+1}$ la théorie engendrée par $\Theta_{k,\ell} \cup \{\chi_1\}$;

  — sinon, alors $\Theta_{k,\ell} \cup \{\chi_1\} \Vdash \varphi$ et $\Theta_{k,\ell} \Vdash \chi_1 \vee \chi_2$ mais $\Theta_{k,\ell} \nVdash \varphi$. D'après $\vee_e$, on a $\Theta_{k,\ell} \cup \{\chi_2\} \nVdash \varphi$; soit $\Theta_{k,\ell+1}$ la théorie engendrée par $\Theta_{k,\ell} \cup \{\chi_2\}$.

  Dans chaque cas, $\Theta_{k,\ell+1} \nVdash \varphi$, et $\Theta_{k,\ell+1}$ décide δ_ℓ.

— Soit $\Theta'_{k+1} = \bigcup_{\ell<\alpha} \Theta_{k,\ell}$.

Alors $\Theta'_{k+1} \not\Vdash \varphi$.

Soit $\Theta'' = \bigcup_{\ell<\alpha} \Theta'_k$. On affirme que Θ'' convient. C'est une $\mathcal{L}$-théorie. On a encore $\Theta'' \not\Vdash \varphi$. Il reste à montrer que Θ'' est première. Supposons $\Theta'' \Vdash \chi_1 \vee \chi_2$. Ceci est un membre de Δ, disons δ_ℓ. Par ailleurs, il existe $k < \alpha$ tel que $\Theta'_k \Vdash \delta_\ell$. Mais alors, $\Theta_{k,\ell} \Vdash \delta_\ell$. Par construction $\Theta_{k,\ell+1}$ décide δ_ℓ, donc Θ'' aussi. ◇

Étape 2. Soient Θ une $\mathcal{L}$-théorie et $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ des $\mathcal{L}$-énoncés.

(i) $\neg\varphi \in \Theta$ ssi pour toute $\mathcal{L}$-théorie première Σ contenant Θ, on a $\varphi \notin \Sigma$.

(ii) $\varphi_1 \to \varphi_2 \in \Theta$ ssi pour toute $\mathcal{L}$-théorie première Σ contenant $\Theta \cup \{\varphi_1\}$, on a $\varphi_2 \in \Sigma$.

(iii) $(\forall x)\varphi \in \Theta$ ssi pour tout langage $\mathcal{L}'$ contenant $\mathcal{L}$, toute $\mathcal{L}'$-théorie première Σ contenant Θ, et toute constante $c \in \mathcal{L}'$, on a $\varphi[x := c] \in \Sigma$.

Noter l'augmentation du langage dans (iii) (v. discussion similaire dans le cas modal, § H.2).

Vérification

(i) Si $\neg\varphi \in \Theta$ et $\Theta \subseteq \Sigma$, par cohérence on n'a pas $\varphi \in \Sigma$. Supposons réciproquement $\neg\varphi \notin \Theta$, i.e. $\Theta \not\Vdash \neg\varphi$. Si $\Theta \cup \{\varphi\} \Vdash \neg\varphi$, alors $\Theta \cup \{\varphi\} \Vdash \bot$ donc $\Theta \Vdash \neg\varphi$, absurde. Ainsi $\Theta \cup \{\varphi\} \not\Vdash \neg\varphi$. D'après l'étape 1, il existe une $\mathcal{L}$-théorie première Σ contenant $\Theta \cup \{\varphi\}$ et évitant $\neg\varphi$.
(C'est un cas particulier de (ii), car $\neg\varphi$ reste $\Vdash$-équivalente à $\varphi \to \bot$.)

(ii) Le sens direct est évident. Si réciproquement $\Theta \not\Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$, alors $\Theta \cup \{\varphi_1\} \not\Vdash \varphi_2$, donc par l'étape 1 il existe une théorie première contenant $\Theta \cup \{\varphi_1\}$ mais pas φ_2.

(iii) Ici encore le sens direct est évident. Supposons $(\forall x\ \varphi) \notin \Theta$. Soient c un nouveau symbole de constante et $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$. Si $\Theta \Vdash \varphi[x := c]$ dans $\mathcal{L}'$, alors comme dans le cas classique (§ 10, étape 3), on a $\Theta \Vdash \forall x\ \varphi$; contradiction. Ainsi $\Theta \not\Vdash \varphi[x := c]$. Il existe donc une $\mathcal{L}'$-théorie première Σ contenant Θ mais pas $\varphi[x := c]$. ◇

Informellement on voudrait prendre *toutes* les théories de Henkin premières dans *tous* les langages, ordonnés par inclusion. Formellement on procède comme suit.

Notation ($\mathcal{L}$-multivers)**.**

— Pour tout langage $\mathcal{L}$ on choisit un langage henkinisé $\mathcal{L}^*$, obtenu :

— en partant de $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$,

— en ajoutant une nouvelle constante $c_{(x,\varphi)}$ par $\mathcal{L}^{(n)}$-énoncé $\exists x\ \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}^{(n)}$-Form et x est une variable, ce qui forme $\mathcal{L}^{(n+1)}$;

— puis en réitérant ω fois.

Les $\mathcal{L}^*$-axiomes de Henkin sont les énoncés $(\exists x\ \varphi) \to \varphi[x := c_{(x,\varphi)}]$. Les détails de la formation de $\mathcal{L}^*$ n'interviennent plus.

— Soient $\mathcal{L}_0$ le henkinisé du langage de départ, $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n^*$, puis $\hat{\mathcal{L}} = \bigcup_n \mathcal{L}_n$.

— Soit $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des $\mathcal{L}_n$-théories premières et contenant les $\mathcal{L}_n$-axiomes de Henkin, ordonné par inclusion.

— Soit $\mathbb{P} = \bigcup_n \mathbb{P}_n$, encore ordonné. Chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ est une théorie formulée dans un langage $\mathcal{L}_\mathfrak{p}$, qui est l'un des $\mathcal{L}_n$.

— Soit $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$ l'ensemble des constantes de $\mathcal{L}_\mathfrak{p}$. Sur $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$, soit $c_1 \sim_\mathfrak{p} c_2$ la relation $(c_1 = c_2) \in \mathfrak{p}$. C'est une relation d'équivalence, qui s'étend aux uplets.

— On munit $\mathbb{A}_\mathfrak{p} = \mathcal{C}_\mathfrak{p}/{\sim_\mathfrak{p}}$ d'une $\mathcal{L}_\mathfrak{p}$-structure en posant, pour chaque relation $R \in \mathcal{L}_\mathfrak{p}$: $R[\mathbb{A}_\mathfrak{p}] = \{[(\mathbf{c})]_\mathfrak{p} : R(\mathbf{c}) \in \mathfrak{p}\}$; de même pour les fonctions. C'est bien défini.

— Soit $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}} \colon \mathbb{A}_\mathfrak{p} \to \mathbb{A}_\mathfrak{q}$ qui envoie $[c]_\mathfrak{p}$ sur $[c]_\mathfrak{q}$. C'est bien défini car si $(c_1 = c_2) \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, alors $(c_1 = c_2) \in \mathfrak{q}$. Les $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ préservent l'interprétation. Le caractère fonctoriel (i.e. les compatibilités type $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{r}} = f_{\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{r}} \circ f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$) est évident.

— Soit $\mathbb{M} = (\mathbb{P}, (\mathbb{A}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}}, (f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}})$.

Remarque. A priori les fonctions $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ ne sont ni injectives ni surjectives.

Étape 3 (lemme de vérité)**.** Pour tout $\hat{\mathcal{L}}$-énoncé φ et tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ tels que $\varphi \in \mathcal{L}_\mathfrak{p}$-Én, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $\varphi \in \mathfrak{p}$.

Vérification. Récurrence sur φ.

— Le cas de base est par construction.

— Supposons φ de la forme $\neg\chi$.

— Supposons $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$. Soit $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ de même langage, i.e. tel que $\mathcal{L}_\mathfrak{q} = \mathcal{L}_\mathfrak{p}$. Par hypothèse, $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \chi$, donc par récurrence $\chi \notin \mathfrak{q}$. D'après l'étape 2, $\neg\chi \in \mathfrak{p}$.

— Supposons $\varphi \in \mathfrak{p}$. Alors pour tout $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ on a $\varphi \in \mathfrak{q}$, donc $\chi \notin \mathfrak{q}$, et par récurrence $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \chi$. Ainsi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \neg\chi$.

- Le cas de $\wedge$ est évident.
- Le cas de $\vee$ est par définition d'une théorie première.
- Supposons φ de la forme $\chi_1 \to \chi_2$.
  - Supposons $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$. Soit $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ de même langage, et tel que $\chi_1 \in \mathfrak{q}$. Par récurrence, $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi_1$. Donc par définition $\chi_2 \in \mathfrak{q}$. D'après l'étape 2, $\chi_1 \to \chi_2 \in \mathfrak{p}$.
  - Supposons $\varphi \in \mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ tel que $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi_1$. Par récurrence, $\chi_1 \in \mathfrak{q}$. Comme $\chi_1 \to \chi_2 \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, on a $\chi_2 \in \mathfrak{q}$, et par récurrence $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi_2$. Ainsi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$.
- Le cas de $\exists$ est comme pour l'argument classique (§ 10, étape 6).
- Supposons φ de la forme $\forall x\ \chi$.
  - Supposons $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$. En inspectant la démonstration de l'étape 2, on voit qu'il suffit de vérifier que $\chi[x := c] \in \Sigma$ pour toute $\mathcal{L}^*_{\mathfrak{p}}$-théorie première Σ et toute constante $c \in \mathcal{L}^*_{\mathfrak{p}} \backslash \mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$. C'est le cas. En effet si $\mathfrak{q}$ étend $\mathfrak{p}$ et $c \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \backslash \mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$, alors par définition $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi[x := c]$ donc par récurrence $\chi[x := c] \in \mathfrak{q}$.
  - La réciproque est évidente. $\diamond$

Étape 4. Vérification de (iii)$\Rightarrow$(i).

Vérification. Supposons $\Phi \not\Vdash \chi$. On peut supposer qu'il s'agit d'énoncés. Soient $\mathcal{L}^*$ le langage de Henkin de $\mathcal{L}$, et $H_{\mathcal{L}^*}$ l'ensemble des $\mathcal{L}^*$-axiomes de Henkin. Comme dans le cas classique, on a encore $\Phi \cup H_{\mathcal{L}^*} \not\Vdash \chi$ dans $\mathcal{L}^*$. D'après l'étape 1, il existe une $\mathcal{L}^*$-théorie première $\mathfrak{p}_0$ contenant $\Phi \cup H_{\mathcal{L}^*}$ mais pas χ. Par le lemme de vérité, $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}_0) \models \Phi$ mais $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}_0) \not\models \chi$. Ainsi $\Phi \not\models \chi$. Il reste à contrôler le multivers.

Noter que $\mathbb{P}$ est un ordre. En outre par construction, chaque $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ est de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}^*\text{-Form} = \operatorname{card} \mathcal{L}\text{-Form}$. On cherche un sous-ordre $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ enraciné en $\mathfrak{p}_0$ et convenant.

Soit $\mathbb{P}'_0 = \{\mathfrak{p}_0\}$. On suppose $\mathbb{P}'_n$ formé. Soient $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}'_n$ et φ une formule à paramètres implicites dans $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ telle que $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \not\models \varphi$.

- Si φ est de la forme $\neg\chi$, alors il existe $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ tel que $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi$.
- Si φ est de la forme $\chi_1 \to \chi_2$, alors il existe $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ tel que $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi_1$ mais $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \chi_2$.
- Si φ est de la forme $(\forall x\ \chi)$, alors il existe $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ et un choix de paramètres tels que $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \chi(b)$.

Dans les trois cas, on choisit un tel $\mathfrak{q}$; on fait un tel choix pour chaque paire $(\mathfrak{p}, \varphi) \in \mathbb{P}'_n \times \mathcal{L}(\mathbb{A}_\mathfrak{p})$-Form concernée. Ajoutant chaque $\mathfrak{q}$ ainsi choisi à $\mathbb{P}'_n$, on obtient $\mathbb{P}'_{n+1}$, de cardinal encore $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$-Form. On réitère ω fois. Soit $\mathbb{P}' = \bigcup_n \mathbb{P}'_n$ comme sous-ordre de $\mathbb{P}$. Soit $\mathbb{M}'$ le sous-multivers sur $\mathbb{P}'$ obtenu en posant $\mathbb{A}'_\mathfrak{p} = \mathbb{A}_\mathfrak{p}$.

Par construction, pour $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}'$ et φ à paramètres implicites dans $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$, on a $(\mathbb{M}', \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$. Donc le multivers $\mathbb{M}'$ sur $\mathbb{P}'$ et le point $\mathfrak{p}_0$ répondent au problème. ◇

Ceci achève la démonstration. □

Remarques

— Noter l'emploi libéral de raisonnement par l'absurde au sein de la démonstration, qui est classique. V. notes conclusives.

— Le préordre $\mathbb{P}$ et le multivers $\mathbb{M}$ ne dépendent ni de Φ ni de χ (mais $\mathfrak{p}_0$, $\mathbb{P}'$ et $\mathbb{M}'$ en dépendent). L'équivalent classique serait de considérer toutes les théories maximales et contenant les axiomes de Henkin, sans flèches entre elles, puis d'en prendre une contenant $\Phi \cup \{\neg\chi\}$.

— Dans la démonstration du lemme de vérité (étape 3), les divers cas ne sont pas redondants, car les symboles logiques ont cessé de l'être.

— Dans la même, $\forall$ ne vient *pas* d'un « axiome de Henkin dual » $\alpha : \varphi[x := d] \to (\forall x\ \varphi)$, où d serait une « constante de Henkin duale ». En fait si Φ est $\Vdash$-cohérente et ne mentionne pas d, $\Phi \cup \{\alpha\}$ n'est pas nécessairement $\vdash$-cohérente ; voir exercice G.5.

La complétude entraîne la compacité, qui peut également s'obtenir par des ultraproduits (exercice G.6).

Corollaire (compacité)**.** Mêmes conventions que dans le théorème de complétude. Alors $\Phi \models \chi$ ss'il existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ fini tel que $\Phi_0 \models \chi$.

§ G.3. Conséquences de l'adéquation

Proposition (non-redondance ; caractère constructif)**.**

(i) En général $\nVdash \varphi \vee \neg\varphi$ et $\nVdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

(ii) Soient φ_1 et φ_2 deux formules. Alors $\Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ ssi $\Vdash \varphi_1$ ou $\Vdash \varphi_2$.

(iii) Soit φ une formule. Alors $\Vdash \exists x\ \varphi$ ss'il existe un terme t sans variables tel que $\Vdash \varphi[x := t]$.

Remarques

— Il existe cependant des φ pour lesquelles (i) est correct ; par exemple si φ est une négation $\neg\chi$, alors $\Vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

— Dans (ii), les prémisses doivent rester vides : la propriété n'est *pas* « $\Phi \Vdash \chi_1 \vee \chi_2$ entraîne $\Phi \Vdash \chi_1$ ou $\Phi \Vdash \chi_2$ ». Un contre-exemple est $\Phi = \{\chi_1 \vee \chi_2\}$. Même remarque pour (iii).

— Le caractère constructif peut également être obtenu par des méthodes de théorie de la démonstration ; voir § J.

Démonstration.

(i) Le tiers-exclu et l'élimination de la double négation peuvent faire défaut même pour une formule de base. Dans le langage $\mathcal{L} = (c, R)$ où R est unaire, on prend deux modèles $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ singletons, en imposant $c[\mathbb{A}_1] \notin R[\mathbb{A}_1]$ mais $c[\mathbb{A}_2] \in R[\mathbb{A}_2]$ (on l'« apprend » au temps $\mathfrak{q} = 2$). L'unique fonction $f \colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ fait de $(\{1,2\}, \leqslant, (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2), \{\mathrm{Id}_1, \mathrm{Id}_2, f\})$ un multivers. Soit φ l'énoncé $R(c)$. Alors :

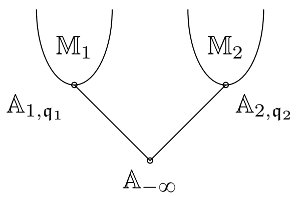
— $(\mathbb{M}, 1) \not\models \varphi$ et $(\mathbb{M}, 2) \models \varphi$;

— $(\mathbb{M}, 1) \not\models \neg\varphi$ (car sinon $(\mathbb{M}, 2) \models \neg\varphi$), d'où $(\mathbb{M}, 1) \not\models \varphi \vee \neg\varphi$;

— $(\mathbb{M}, 2) \not\models \neg\varphi$, donc $(\mathbb{M}, 1) \models \neg\neg\varphi$, et $(\mathbb{M}, 1) \not\models \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Ainsi $\not\Vdash \varphi \vee \neg\varphi$ et $\not\Vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$. On conclut par correction.

(ii) Supposons $\not\Vdash \varphi_1$ et $\not\Vdash \varphi_2$: par complétude il existe des multivers $\mathbb{M}_1 = (\mathbb{A}_{1,\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}_1}$ et $\mathbb{M}_2 = (\mathbb{A}_{2,\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}_2}$ et des mondes *initiaux* $\mathfrak{q}_1 \in \mathbb{P}_1$ et $\mathfrak{q}_2 \in \mathbb{P}_2$ vérifiant $(\mathbb{M}_1, \mathfrak{q}_1) \not\models \varphi_1$ et $(\mathbb{M}_2, \mathfrak{q}_2) \not\models \varphi_2$. Soit $\hat{\mathbb{P}}$ le pré-ordre $\mathbb{P}_1 \sqcup \mathbb{P}_2 \sqcup \{-\infty\}$, où $-\infty$ minore tout $\mathbb{P}_1$ et tout $\mathbb{P}_2$, sans liens entre $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. On ne met aucune information (i.e. aucune relation) sur $\mathbb{A}_{-\infty}$, qui est l'ensemble des $\mathcal{L}$-termes sans variables libres. On a bien des flèches $\mathbb{A}_{-\infty} \to \mathbb{A}_{1,\mathfrak{p}}$ et $\mathbb{A}_{-\infty} \to \mathbb{A}_{2,\mathfrak{p}}$ pour tous les $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$. Ceci définit un multivers $\hat{\mathbb{M}}$.



Recollement de multivers sur un monde amorphe commun

Pour tout énoncé χ et tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ on a $(\hat{\mathbb{M}}, \mathfrak{p}) \models \chi$ ssi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi$. Donc $(\hat{\mathbb{M}}, \mathfrak{q}_1) \not\models \varphi_1$ et $(\hat{\mathbb{M}}, \mathfrak{q}_2) \not\models \varphi_2$.

Supposons $(\hat{\mathbb{M}}, -\infty) \models \varphi_1 \vee \varphi_2$. Par définition de la satisfaction intuitionniste, on peut supposer $(\hat{\mathbb{M}}, -\infty) \models \varphi_1$. Par persistance (lemme G.1), $(\hat{\mathbb{M}}, \mathfrak{q}_1) \models \varphi_1$: contradiction. Ainsi $(\hat{\mathbb{M}}, -\infty) \not\models \varphi_1 \vee \varphi_2$, et par correction $\not\Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$.

(iii) Supposons $\not\Vdash \varphi[x := t]$ pour chaque terme t sans variables. Par complétude il existe des multivers $\mathbb{M}_t = (\mathbb{A}_{t,p})_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_t}$ et des mondes *initiaux* $\mathfrak{q}_t \in \mathbb{P}_t$ vérifiant $(\mathbb{M}_t, \mathfrak{q}_t) \not\models \varphi[x := t]$. Le même procédé de recollement sur un prédécesseur commun amorphe donne $(\hat{\mathbb{M}}, -\infty) \not\models \exists x\ \varphi$. □

Ceci justifie l'*interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov*, selon laquelle *une preuve formelle est une construction explicite*. Ainsi, une déduction de $(\exists x)\varphi$, c'est un t explicite et une déduction de $\varphi[x := t]$.

Exercices

$\Vdash$ désigne la déduction intuitionniste et $\Vvdash$ la conséquence intuitionniste.

G.1. Les démonstrations demandées sont syntaxiques.

a. Montrer que $\Vdash \neg\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$, et que $\Vdash (\forall x\ \neg\varphi) \leftrightarrow (\neg\exists x\ \varphi)$.

b. Montrer que les trois pseudo-règles suivantes sont équivalentes modulo $\Vdash$:

- $\bot_c$
- tiers-exclu :
$$\frac{\Phi \cup \{\chi\} \vdash \psi \quad \Phi \cup \{\neg\chi\} \vdash \psi}{\Phi \vdash \psi}$$
- décontraposition :
$$\frac{\Phi \vdash \neg\chi_2 \to \neg\chi_1}{\Phi \vdash \chi_1 \to \chi_2}$$

G.2 (axiomes d'égalité). On considère deux axiomes :

- $\mathrm{Axeq}_\vee$: $(\forall x_1)(\forall x_2)[(x_1 = x_2) \vee \neg(x_1 = x_2)]$;
- $\mathrm{Axeq}_\neg$: $(\forall x_1)(\forall x_2)[\neg\neg(x_1 = x_2) \to (x_1 = x_2)]$.

a. Montrer que $\mathrm{Axeq}_\vee \Vdash \mathrm{Axeq}_\neg$, sans réciproque.

b. Soit $\mathbb{M}$ un multivers. Montrer que $[(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \mathrm{Axeq}_\vee$ partout$]$ ssi [les $f_{\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}}$ sont injectives].

c. En déduire que $\Phi \cup \{\mathrm{Axeq}_\vee\} \Vdash \chi$ ssi pour tout multivers *à $f_{\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}}$ injectives*, tout monde vérifiant Φ vérifie χ.

G.3 (traduction de Kolmogorov-Glivenko-Gödel). La logique classique se plonge dans la logique intuitionniste. On suit les notations de l'ex. G.2.

Théorème (Kolmogorov-Glivenko-Gödel)**.** Soient $\vdash$ la déduction classique et $\Vdash$ la déduction intuitionniste. Il existe une traduction ^{i} : $\mathcal{L}$-Form $\to$ $\mathcal{L}$-Form telle que $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi^i \cup \{\mathrm{Axeq}_\vee\} \Vdash \chi^i$.

La *traduction intuitionniste* ^{i} des $\mathcal{L}$-formules est définie par :
$\bot^i$ est $\bot$; $(R(\mathbf{t}))^i$ est $\neg\neg R(\mathbf{t})$ (dont $=$, d'où l'emploi des Axeq) ; $(\neg\varphi)^i$ est $\neg\varphi^i$; $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^i$ est $\varphi_1^i \wedge \varphi_2^i$; $(\varphi_1 \vee \varphi_2)^i$ est $\neg\neg(\varphi_1^i \vee \varphi_2^i)$; $(\varphi_1 \to \varphi_2)^i$ est $\varphi_1^i \to \varphi_2^i$; $(\forall x\ \varphi)^i$ est $\forall x\ \varphi^i$; $(\exists x\ \varphi)^i$ est $\neg\neg\exists x\ \varphi^i$.

Montrer que $\Phi \vdash \chi$ ssi $\Phi^i \cup \{\mathrm{Axeq}_\neg\} \Vdash \chi^i$ ssi $\Phi^i \cup \{\mathrm{Axeq}_\vee\} \Vdash \chi^i$.

G.4. Soit $\mathbb{M}$ un multivers intuitionniste sur le préordre $\mathbb{P}$. Pour $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, montrer que $\mathbb{P}_{\geqslant\mathfrak{p}}$ indexe naturellement un multivers $\mathbb{M}_{\geqslant\mathfrak{p}}$, et qu'on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $(\mathbb{M}_{\geqslant\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}) \models \varphi$. En déduire que $\Phi \Vdash \chi$ équivaut à : « pour tout multivers, si pour tout $\mathfrak{p}$ on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi$, alors pour tout $\mathfrak{p}$ on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi$ ». (La coïncidence est fâcheuse, car l'analogue est faux en logique modale.)

G.5. Donner un théorie $\Vdash$-cohérente qui ne l'est pas quand on ajoute $\alpha : \varphi[x := d] \to (\forall x\ \varphi)$, où d est une nouvelle constante.

G.6 (compacité intuitionniste par ultraproduits). (Prérequis : § 16.) Montrer la compacité de la conséquence intuitionniste par ultraproduits de multivers.

G.7. (Prérequis : exercice D.1.) Suite de l'exercice 6.9. Pour un langage relationnel $\mathcal{L}$ et une $\mathcal{L}$-théorie élémentaire Θ, on note $\mathrm{Heyt}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ l'ensemble des énoncés modulo la relation d'équivalence $\Theta \Vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

a. Montrer que $\mathrm{Heyt}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ est un treillis de Heyting pour une structure à préciser.

(*) b. Soit $\mathbb{H}$ un treillis de Heyting. Montrer qu'il existe un langage $\mathcal{L}$ et une $\mathcal{L}$-théorie sans quantificateurs Θ tels que $\mathbb{H} \simeq \mathrm{Heyt}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ en tant que treillis de Heyting.

Notes conclusives

La référence est [Heyting], non dénuée d'humour.

> *Die intuitionistische Mathematik ist eine Denktätigkeit, und jede Sprache, auch die formalistische, ist für sie nur Hilfsmittel zur Mitteilung. Es ist prinzipiell unmöglich, ein System von Formeln aufzustellen, das mit der intuitionistischen Mathematik gleichwertig wäre, denn die Möglichkeiten des Denkens lassen sich nicht auf eine endliche Zahl von im voraus aufstellbaren Regeln zurückführen.* [...]
>
> *Zum Aufbau der Mathematik ist die Aufstellung allgemeingültiger logischer Gesetze nicht notwendig; diese Gesetze werden in jedem einzelnen Fall gleichsam von neuem entdeckt als gültig für das eben betrachtete mathematische System.* **[Hey30]**

• Repères historiques

Intuitionnisme et logique intuitionniste. Ne pas confondre *intuitionnisme* (positions épistémologiques de Brouwer) et *logique intuitionniste* (calcul déductif introduit par Heyting, pour donner corps à certaines idées de Brouwer).

Précurseurs (?) • Shatunovski aurait douté du tiers-exclu ; selon [Bak66], suite à des réflexions sur la complexité de l'invariant de

[Heyting] : Arend Heyting. *Intuitionism : An introduction.* 2e éd. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966, p. ix+137
[**Hey30**] : Arend Heyting. « Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik I ». In: *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* 1930 (1930), S. 42–56
[Bak66] : È. Ya. Bakhmoutskaïa. « Les premières recherches de S. .O. Chatounovski sur les fondements des mathématiques ». In : (1966)

Dehn [Sch03a, p. 507]. Ce point n'est pas clair, et Shatunovski reste peu connu hors du monde russe. • Les « semi-intuitionnistes français » (Baire, Borel, Lebesgue ; l'expression est de Heyting) annoncent l'embarras devant les méthodes non effectives. [Had05] part d'un débat sur la preuve par Zermelo du principe de comptage modulo l'axiome du choix (v. § 23, notes conclusives), mais s'oriente vers le sens d'une existence non effective. L'attitude de Borel est une forme de constructivisme. Lebesgue risque même : « *Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas démontrée.* » [Had05, p. 269] ; il pourrait toutefois ne pas s'agir de tiers-exclu, mais d'imprécision sur le sens de *fini* et d'*infini*. • Poincaré est moins facile à cerner. Si son attitude devant la logique fut beaucoup de moquerie pour le logicisme de Russell, il tenait naturellement Hilbert en haute estime. Il n'est pas absurde d'appeler *prédicativisme* sa position, qui revient au refus, pour définir un ensemble, de quantifier sur les ensembles (v. § 12.2). Mais ce n'est pas de l'intuitionnisme. [Mooij] fait référence.

Intuitionnisme. • Doctrine de Brouwer. • La première attaque en règle est [**Broo8**] ; trad. [Van+14]. Le ton est déjà épistémologique, voire ésotérique, plus que mathématique.

> *De vraag naar de geldigheid van het principium tertii exclusi is dus aequivalent met de vraag naar de* mogelijkheid van onoplosbare wiskundige problemen. *Voor de wel eens uitgesproken overtuiging, dat onoplosbare wiskundige problemen niet bestaan, is geen aanwijzing van een bewijs aanwezig.* [**Broo8**]

(Par la suite, Brouwer prétendit avoir de longue date entrevu les incomplétudes révélées par Gödel.) • Le « *Grundlagenstreit* » n'est pas la « crise des fondements » mais la polémique opposant Hilbert à Brouwer [Dal90]. Le point de vue du second séduisit brièvement Weyl, qui perdit son pari contre Pólya [Pól72]. • Texte enlevé mentionnant Brouwer, son rapport à Hilbert, et Weyl : [Smo88]. • L'intuitionnisme est l'une des formes (voire chapelles) du constructivisme. • *Réception* de l'intuitionnisme : v. l'admirable [Hesseling].

Calcul déductif intuitionniste. • Déduction (à la Hilbert) pour la logique propositionnelle intuitionniste [**Hey30**], rapidement appelée « calcul de Heyting » par analogie avec le « calcul de Lewis » pour la logique modale

[Sch03a] : Samuil SCHATUNOVSKY. « Über den Rauminhalt der Polyeder ». In : *Math. Ann.* 57 (1903), p. 496-508

[Had05] : Jacques HADAMARD. « Cinq lettres sur la théorie des ensembles ». In : *Bull. Soc. Math. France* 33 (1905), p. 261-273

[Mooij] : Jan MOOIJ. *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré.* T. No. 20. Collection de Logique Mathématique, Sér. A. Gauthier-Villars, Paris ; E. Nauwelaerts, Louvain, 1966, p. v175

[**Broo8**] : Luitzen BROUWER. « De onbetrouwbaarheid der logische principes ». In : *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* 2 (1908), p. 152-158

[Van+14] : Mark VAN ATTEN et al. « « Que les principes de la logique ne sont pas fiables » : nouvelle traduction française annotée et commentée de l'article de 1908 de L. E. J. Brouwer ». In : *Rev. Hist. Sci.* 67.2 (2014), p. 257-281

[Dal90] : Dirk van DALEN. « The war of the frogs and the mice, or the crisis of the Mathematische Annalen ». In : *Math. Intelligencer* 12.4 (1990), p. 17-31

[Pól72] : George PÓLYA. « Eine Erinnerung an Hermann Weyl ». In : *Math. Z.* 126 (1972), p. 296-298

[Smo88] : Craig SMORYŃSKI. « Hilbert's programme ». In : *CWI Quarterly* 1.4 (1988), p. 3-59

[Hesseling] : Dennis HESSELING. *Gnomes in the fog.* T. 28. Science Networks. Historical Studies. The reception of Brouwer's intuitionism in the 1920s. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003, p. xxiv+448

(v. § H, notes conclusives). • Cependant Kolmogorov avait déjà proposé un tel calcul [**Kol25**] (trad. anglaise dans [**Heijenoort**]), avec traitement partiel des quantificateurs. V. [Coq04b]. • Interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov (§ G.3) : [Kol32], qui remplace *énoncé* par *problème* (Aufgabe) et *preuve* par *solution* (Lösung). (Malgré seulement deux articles, Kolmogorov dut garder quelque intérêt pour la logique : il est remercié dans [**Mal36**].) • La *logique minimale*, qui perd également $\perp_e$, est implicite dès [**Kol25**] mais explicite dans [Joh37]. (Un peu de contexte dans [Mol16], non publié.) • Histoire de cette période : [Tro90].

Traduction de Kolmogorov-Glivenko-Gödel (ex. G.3). • Idée [**Kol25**] ; première étude complète en logique propositionnelle [Gli29] ; en logique élémentaire [Göd33b]. • Gentzen avait atteint la même idée, mais informé de [Göd33b] retira son article soumis en 1933. [Gen74] parut de manière posthume. • De nombreuses autres traductions peuvent être proposées, moins gourmandes en négations. • Ne pas confondre avec la traduction de Gödel-McKinsey-Tarski qui plonge la logique intuitionniste dans la logique modale S_4 (ex. H.3).

Sémantiques. • Elles sont postérieures au calcul de Heyting, et plus encore aux thèses de Brouwer. • Une forme de sémantique complète due à Mostowski [Mos48] est d'inspiration *algébrique* : les valeurs de vérité sont dans un treillis de Heyting. Antérieure aux multivers, elle essaimera en logique modale, et donnera également naissance aux *sémantiques topologiques* (§ I). • Multivers en préordre et théorème de complétude : [Kri65], issu d'une analyse similaire en *logique modale* (§ H). On peut voir en Beth un précurseur des sémantiques « branchantes » [Bet56]. • Preuve de complétude

[**Kol25**] : Andreï Kolmogorov. « Sur le principe tertium non datur ». In : *Rec. Math. Moscou* 32.4 (1925), p. 646-667

[**Heijenoort**] : Jean van Heijenoort. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967, xi+660 pp. (1 plate)

[Coq04b] : Thierry Coquand. « La contribution de Kolmogorov en logique intuitionniste ». In : *L'héritage de Kolmogorov.* Sous la dir. de Éric Charpentier, Annick Lesne et Nikolaï Nikolski. Échelles. Paris : Belin, 2004, p. 31-54

[Kol32] : Andreï Kolmogoroff. « Zur Deutung der intuitionistischen Logik ». In : *Math. Z.* 35.1 (1932), p. 58-65

[**Mal36**] : Anatoly Maltsev. « Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik ». In : *Rec. Math. Moscou, n. Ser.* 1 (1936), p. 323-336

[Joh37] : Ingebrigt Johansson. « Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus ». In : *Compositio Math.* 4 (1937), p. 119-136

[Mol16] : Tim van der Molen. « The Johansson/Heyting letters and the birth of minimal logic ». ILLC Publications, Technical Notes Series. 2016

[Tro90] : Anne Troelstra. « On the early history of intuitionistic logic ». In : *Mathematical logic.* Plenum, New York, 1990, p. 3-17

[Gli29] : Valery Glivenko. « Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. » In : *Bull. Cl. Sci., V. Sér., Acad. R. Belg.* 15 (1929), p. 183-188

[Göd33b] : Kurt Gödel. « Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie ». In : *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.* T. 4. Wien, 1933, p. 34-38

[Gen74] : Gerhard Gentzen. « Über das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Arithmetik ». In : *Arch. Math. Logik Grundlag.* 16 (1974), p. 119-132

[Mos48] : Andrzej Mostowski. « Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus ». In : *J. Symbolic Logic* 13 (1948), p. 204-207

[Kri65] : Saul Kripke. « Semantical analysis of intuitionistic logic I ». In : *Formal Systems and Recursive Functions (Proc. Eighth Logic Colloq., Oxford, 1963).* North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 92-130

[Bet56] : Evert Beth. « Semantic construction of intuitionistic logic ». In : *Med. Nederl.*

par un ensemble de théories remarquables (ici, de Henkin et premières) : technique originaire de logique modale, trouvée par Bayart [Cre15] et indépendamment Scott, [Kap66, p. 121–122].

- **L'entre-deux : *logiques intermédiaires.*** • On appelle logique *intermédiaire* ou *superintuitionniste* toute notion abstraite de conséquence contenue entre $\Vdash$ et $\vDash$. • Ces logiques sont trop nombreuses pour être classifiables [Yan68]. • On peut chercher lesquelles correspondent à des classes naturelles de multivers : la logique classique est celle des multivers ponctuels, l'intuitionniste est celle des multivers portés en préordres, et celle des multivers en ordres (théorème G.2). Entre les deux, on a par exemple la logique des multivers en ordres *totaux*, etc. • Leur étude est un courant marginal [Ono73].

- **Complétude vue depuis l'intuitionnisme.** • La démonstration de § G.2 est classique. En fait on ne peut pas démontrer le théorème de complétude de LI dans LI. • Plus précisément, la complétude de LI entraîne, dans LI, toute une famille d'éliminations de la double négation non démontrables dans LI ; [Kre62, Theorem 1, attribué à Gödel], autre preuve très lisible [McC94]. • En revanche on peut altérer la notion de modèle pour obtenir une variante intuitionniste de la complétude de LI [Vel76].

- **Point de vue intuitionniste.** • § G est *classique* : on n'a pas interdit le raisonnement par l'absurde pour décrire une logique le refusant. La même section écrite du point de vue intuitionniste aurait été bien différente. • L'intuitionnisme aurait même écarté l'égalité des *règles* de déduction et l'aurait traitée comme une relation binaire générale, dont on mettrait ou non les schémas d'axiomes dans les théories considérées. • Considérer l'égalité comme une évidence, c'est enterrer les réflexions menant à l'axiome d'univalence. Des objets sont peuvent être *tardivement* démontrés égaux : il est fréquent de conjecturer une égalité, et que celle-ci reste un problème ouvert pendant longtemps. • Le point de vue intuitionniste est proche de l'épistémologie, avec parfois une coloration quasi-mystique. L'épistémologie fait partie de la culture indispensable aux mathématiques, sans en être une branche. On laisse le sujet.

§ H. Logique modale

La logique modale introduit un opérateur $\Box$ pour la nécessité, avec des règles de déduction spécifiques. La *sémantique des mondes possibles* propose d'in-

Akad. Wet., Afd. Lett. 19.11 (1956), p. 357-388

[Cre15] : Maxwell Cresswell. « Arnould Bayart's modal completeness theorems : translated with an introduction and commentary ». In : *Log. Anal. (N.S.)* 58.229 (2015), p. 89-142

[Kap66] : David Kaplan. « Review : S. Kripke, Semantical analysis of modal logic I ». In : *J. Symbolic Logic* 31.1 (1966), p. 120-122

[Yan68] : Vadim Yankov. « Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi ». In : *Sov. Math., Dokl.* 9 (1968), p. 806-807

[Ono73] : Hiroakira Ono. « A study of intermediate predicate logics ». In : *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 8 (1973), p. 619-649

[Kre62] : Georg Kreisel. « On weak completeness of intuitionistic predicate logic ». In : *J. Symbolic Logic* 27 (1962), p. 139-158

[McC94] : Charles McCarty. « On theorems of Gödel and Kreisel : completeness and Markov's principle ». In : *Notre Dame J. Formal Logic* 35.1 (1994), p. 99-107

[Vel76] : Wim Veldman. « An intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic ». In : *J. Symbolic Logic* 41.1 (1976), p. 159-166

terpréter cette logique dans des multivers portés par des relations binaires (§ H.1). Cette sémantique est entièrement reflétée par la déduction (§ H.2). On mentionne enfin l'extension S_4, logique des multivers portés par des préordres partiels (§ H.3).

Prérequis : §§ 6–10. Il y a des ressemblances avec § G, de lecture facultative.

La logique modale tente de formaliser les *modalités* comme « il est possible que… ». Cette branche a priori légitime des mathématiques appliquées vire souvent au catalogue. Mais l'appareil technique de la logique modale peut clarifier les phénomènes d'incomplétude de § 20.

Remarques

- L'exposé se concentre sur l'unique opérateur modal $\Box$ de nécessité : $\Box\varphi$ est à interpréter comme « φ est nécessaire ».
- La quantification est souvent accusée d'apporter une difficulté conceptuelle ; du point de vue mathématique, l'accusation ne tient pas.

§ H.1. Syntaxe et sémantique modales

La logique modale étend la notion de formule par un opérateur, avec des règles de déduction supplémentaires. Par contraste, la logique usuelle est dite *classique*.

$\mathrm{Form}_\Box$, $\mathcal{L}$-$\mathrm{Form}_\Box$

Définition A (formules modales)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Les *$\mathcal{L}$-formules modales* forment la plus petite collection $\mathcal{L}$-$\mathrm{Form}_\Box$ telle que :

- toute formule de base $R(\mathbf{t})$ est dans $\mathcal{L}$-$\mathrm{Form}_\Box$; ceci inclut $\bot$ et les égalités ;
- si $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}$-$\mathrm{Form}_\Box$ et x est une variable, alors $\neg\varphi, \varphi \wedge \varphi', \varphi \vee \varphi', \varphi \to \varphi', (\forall x)\varphi, (\exists x)\varphi$ sont dans $\mathcal{L}$-$\mathrm{Form}_\Box$;
- si $\varphi \in \mathcal{L}$-$\mathrm{Form}_\Box$, alors $\Box\varphi \in \mathcal{L}$-$\mathrm{Form}_\Box$.

En outre $\mathrm{VarLib}(\Box\varphi) = \mathrm{VarLib}\,\varphi$ et $\mathrm{VarLié}(\Box\varphi) = \mathrm{VarLié}\,\varphi$. La notation $\mathcal{L}$-$\mathrm{Én}_\Box$ est claire.

Si Φ est un ensemble de formules modales, on note $\Box\Phi = \{\Box\varphi : \varphi \in \Phi\}$.

$\vdash$

Définition B (déduction modale)**.** La *déduction modale* est donnée par les règles classiques (§ 9.2), avec en outre :

$$\frac{\Phi \vdash \chi}{\Box\Phi \vdash \Box\chi}\,\scriptstyle{\mathrm{N}} \qquad \Bigg| \qquad \frac{\Phi \vdash \chi_1 \to \chi_2}{\Box\Phi \vdash \Box\chi_1 \to \Box\chi_2}\,\scriptstyle{\mathrm{K}}$$

On la note toujours $\vdash$, car en contexte il n'y a pas d'ambiguïté.

La déduction reste finitaire.

Remarques

— On peut affaiblir ces règles en :

$$\dfrac{\vdash \chi}{\vdash \Box\chi}\ \mathrm{N}' \qquad \Bigg| \qquad \dfrac{\vdash \Box(\chi_1 \to \chi_2)}{\vdash \Box\chi_1 \to \Box\chi_2}\ \mathrm{K}'$$

en conservant la même déduction.

— Attention : la règle N n'est pas le schéma d'axiomes $\vdash \chi \to \Box\chi$ (qui trivialiserait le calcul modal). En revanche la règle K peut se réécrire comme le schéma $\Box(\chi_1 \to \chi_2) \to (\Box\chi_1 \to \Box\chi_2)$. V. exercice H.1.

— N est une forme de $\Box_i$. Il n'y a pas de $\Box_e$ donc on ne poursuit pas l'analogie.

— Diverses extensions de cette déduction gonflent la littérature, qui contient plus de définitions que d'énoncés. On donne une extension mathématiquement pertinente en § H.3.

Exemples

— $\vdash (x = y) \to \Box(x = y)$. En effet :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash x = x}\ {=_i}}{\vdash \Box(x = x)}\ \mathrm{N} \qquad \dfrac{}{x = y \vdash \Box(x = x) \to \Box(x = y)}\ {=_e}}{x = y \vdash \Box(x = y)}\ {\to_e}$$

— $\vdash (\Box\forall x\ \varphi) \to (\forall x\ \ \Box\,\varphi)$. En effet :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\ \varphi \vdash \forall x\ \varphi}\ \mathrm{Ax}}{\forall x\ \varphi \vdash \varphi}\ \forall_e}{\Box\forall x\ \varphi \vdash \Box\varphi}\ \mathrm{N}}{\Box\forall x\ \varphi \vdash \forall x\ \ \Box\,\varphi}\ \forall_i$$

Ces faits peuvent poser problème en philosophie, mais pas en mathématiques ; v. notes conclusives.

La sémantique modale la plus accessible pédagogiquement est celle de Kripke pour les *multivers modaux en relations*. Elle est complète, mais simpliste, et prépare mal aux sémantiques topologiques (§ I). Il faut prévoir de s'en défaire.

Définition C (multivers modal de Kripke ; sémantique des mondes possibles ; relation d'accessibilité)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Un *$\mathcal{L}$-multivers modal de Kripke*, ou *$\mathcal{L}$-multivers modal en relation*, est la donnée $\mathbb{M}$:

— d'un ensemble non vide $\mathbb{P}$ muni d'une relation binaire R ;
— pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$;
— pour chaque paire $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in \mathbb{P}^2$ telle que $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$, d'une fonction $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}} : \mathbb{A}_\mathfrak{p} \to \mathbb{A}_\mathfrak{q}$.

$\mathbb{P}$ est l'ensemble des *mondes possibles*, ou *états* ; R est la *relation d'accessibilité* et les $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}$ les *fonctions d'accès*.

Remarque. À la différence des multivers en logique intuitionniste (définition G.1.C),
— on ne demande pas que $\mathbb{P}$ soit un préordre partiel ;
— on ne demande pas que les $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}$ soient des $\mathcal{L}$-morphismes.

Étant des fonctions, les $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}$ préservent l'égalité. Ce point est réputé litigieux en philosophie. Il est pourtant permis d'introduire une relation d'équivalence pour l'égalité « contingente », non préservée par les fonctions d'accès. On néglige ces subtilités.

La satisfaction en logique modale est *doublement relative*, comme en logique intuitionniste. Déjà relative au multivers, $\models$ devient en outre une donnée *locale*, i.e. relative au monde. On introduit une relation $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi(\mathbf{a})$, à lire par exemple « $\mathbb{M}$ en $\mathfrak{p}$ vérifie $\varphi(\mathbf{a})$ ».

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}$ est un uplet de paramètres et $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$, alors $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}$ est uniquement déterminée, donc les paramètres $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}(\mathbf{a}) \in \mathbb{A}_\mathfrak{q}$ aussi. On écrit encore $\mathbf{a}$ pour $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}(\mathbf{a})$; il n'y a pas d'ambiguité.

Définition D (satisfaction modale de Kripke)**.** Soit $\mathbb{M} = (\mathbb{P}, (\mathbb{A}_\mathfrak{p}), (f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}}))$ un multivers modal en relation. On définit la satisfaction $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi(\mathbf{a})$ d'une formule modale à paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}$ par la récurrence suivante :
— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models R(\mathbf{t})(\mathbf{a})$ ssi $t[\mathbb{A}_\mathfrak{p}](\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{p}]$;
ceci inclut les cas $\perp$ et $=$;
— connecteurs propositionnels : définition classique ;
— quantificateurs : définition classique, avec quantification dans $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$;
— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\varphi(\mathbf{a})$ ssi pour tout $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}$ tel que $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi(\mathbf{a})$.

Ainsi le monde $\mathfrak{p}$ juge $\varphi(\mathbf{a})$ nécessaire exactement quand tous les mondes imaginables depuis $\mathfrak{p}$ vérifient $\varphi(\mathbf{a})$.

Remarque (caractère classique)*.* Comme dans le cas classique (et par opposition au cas intuitionniste), on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$ ou $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \neg\varphi$.

Remarque (égalité)*.* Toute égalité est nécessaire : $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models a = b$ entraîne $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box(a = b)$. Cette conséquence de la définition est parfois tenue peu conforme à l'« intuition philosophique a priori » de la logique modale. On peut y remédier de deux façons :

— passer dans des logiques hétérodoxes, qui traitent différemment les termes et la quantification (« logiques libres ») ;

— admettre que $=$ désigne une égalité nécessaire et absolue, et introduire dans $\mathcal{L}$ une relation d'équivalence $\approx$ pour l'égalité accidentelle. Deux points $\approx$-équivalents en $\mathfrak{p}$ peuvent cesser de l'être en $\mathfrak{q}$, car les fonctions d'accès ne sont pas nécessairement des $\approx$-morphismes.

La pratique mathématique préfère la seconde option et se détourne du problème philosophique.

Définition E (conséquence modale)**.** Soient Φ un ensemble de $\mathcal{L}$-formules modales et χ une $\mathcal{L}$-formule modale. On note $\Phi \models \chi$ la relation : pour toute relation binaire $\mathbb{P}$, tout $\mathcal{L}$-multivers modal $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, tout monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ et tout choix de paramètres $\mathbf{a}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi(\mathbf{a})$, alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi(\mathbf{a})$. $\Vdash$

La conséquence modale s'interprète en : « partout et dans tout monde, Φ entraîne χ ».

Remarque. La définition n'est pas « pour tout multivers, si partout $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi$, alors partout $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi$ ». (La distinction s'aplanissait en logique intuitionniste, v. exercice G.4.) V. notes conclusives, *Logiques modales incomplètes.*

§ H.2. Adéquation

On emploie la déduction et la conséquence modales de § H.1 (définitions H.1.B et H.1.E). La logique modale est complète, i.e. ces notions coïncident. On peut omettre (iii) en première lecture.

Théorème (complétude de la logique modale)**.** Soient $\mathcal{L}$ un langage relationnel, $\Phi \subseteq \mathcal{L}$-Form et $\chi \in \mathcal{L}$-Form. Alors sont équivalents :

(i) $\Phi \vdash \chi$;

(ii) $\Phi \models \chi$;

(iii) pour toute relation binaire $\mathbb{P}$ *de cardinal* $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$, tout multivers $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$ *dont tous les mondes sont de cardinal* $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$, tout monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ et tout choix de paramètres $\mathbf{a}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi(\mathbf{a})$, alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi(\mathbf{a})$.

Démonstration. (i)⇒(ii) est la correction de la déduction modale pour la sémantique de Kripke. C'est une récurrence sur la déduction. Les cas usuels sont connus. Supposons que la déduction ait pour dernière étape :

$$\frac{\Phi \vdash \chi}{\Box\Phi \vdash \Box\chi}\ \text{N}$$

On montre $\Box\Phi \models \Box\chi$. Soient $\mathbb{P}$ une relation binaire, $\mathbb{M}$ un multivers modal sur $\mathbb{P}$, et $\mathfrak{p} \in \mathbb{M}$ tels que $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\Phi$ (les éventuels paramètres restent implicites). Soit $\mathfrak{q} \in \mathbb{M}$ tel que $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$. Alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \Phi$. Par récurrence, $\Phi \models \chi$, donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \chi$. Ceci vaut pour tout $\mathfrak{q}$ accessible depuis $\mathfrak{p}$, donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\chi$. Ainsi $\Box\Phi \models \Box\chi$. Le cas de la règle K est similaire.

(ii)⇒(iii) est évident.

On montre (iii)⇒(i). La démonstration s'inspire du cas classique (§ 10) ; il n'est pas indispensable de connaître son adaptation intuitionniste (§ G.2). Comme dans le cas classique (et à la différence du cas intuitionniste), il suffit de montrer que tout ensemble cohérent d'énoncés est satisfaisable, avec contrôle des cardinaux ; v. § 10, étape 1. Comme dans le cas classique (ou intuitionniste), la méthode de Henkin se charge des témoins existentiels.

Les mots « cohérence » et « théorie » sont au sens de la déduction modale. Comme dans le cas classique (ou intuitionniste), la cohérence est préservée par augmentation du langage (§ 10, étape 2). Informellement on voudrait prendre *toutes* les théories de Henkin maximales dans *tous* les langages, ordonnés par inclusion. Formellement on procède comme suit.

Langages et axiomes de Henkin. Pour tout langage $\mathcal{L}$ on choisit un langage henkinisé $\mathcal{L}^*$, obtenu :

- en partant de $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$,
- en ajoutant une nouvelle constante $c_{(x,\varphi)}$ par $\mathcal{L}^{(n)}$-énoncé $\exists x\ \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}^{(n)}$-Form$_\Box$ et x est une variable, ce qui forme $\mathcal{L}^{(n+1)}$;
- puis en réitérant ω fois.

Les $\mathcal{L}^*$-axiomes de Henkin sont les énoncés $(\exists x\ \varphi) \to \varphi[x := c_{(x,\varphi)}]$. Les détails de la formation de $\mathcal{L}^*$ n'interviennent plus.

Langage global. Soient $\mathcal{L}_0$ le henkinisé du langage de départ, $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n^*$, puis $\hat{\mathcal{L}} = \bigcup_n \mathcal{L}_n$. Cela ne stationne pas car par construction, les constantes ajoutées sont toujours nouvelles.

Support de la relation. Soit $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des $\mathcal{L}_n$-théories maximales et contenant les $\mathcal{L}_n$-axiomes de Henkin. Soit $\mathbb{P} = \bigcup_n \mathbb{P}_n$, encore ordonné. Chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ est une théorie formulée dans un langage $\mathcal{L}_\mathfrak{p}$, qui est l'un des $\mathcal{L}_n$.

Ensembles de nécessité. Pour $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, soit $N_\mathfrak{p} = \{\varphi \in \mathcal{L}_\mathfrak{p}\text{-Form}_\Box : \Box\varphi \in \mathfrak{p}\}$ l'ensemble des formules « jugées nécessaires par $\mathfrak{p}$ ».

Relation d'accessibilité. Sur $\mathbb{P}$, soit $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$ la relation $N_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$.

Structure en chaque monde. Soit $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$ l'ensemble des constantes de $\mathcal{L}_\mathfrak{p}$. Sur $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$ soit $c_1 \sim_\mathfrak{p} c_2$ la relation $(c_1 = c_2) \in \mathfrak{p}$. C'est une relation d'équivalence, qui s'étend aux uplets. On munit $\mathbb{A}_\mathfrak{p} = \mathcal{C}_\mathfrak{p}/\sim_\mathfrak{p}$ d'une $\mathcal{L}_\mathfrak{p}$-structure en posant, pour chaque relation $S \in \mathcal{L}_\mathfrak{p}$ (la lettre R est déjà prise) : $S[\mathbb{A}_\mathfrak{p}] = \{[(\mathbf{c})]_\mathfrak{p} : S(\mathbf{c}) \in \mathfrak{p}\}$; de même pour les fonctions. C'est bien défini.

Fonctions d'accès. Pour $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$, soit $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}} \colon \mathbb{A}_\mathfrak{p} \to \mathbb{A}_\mathfrak{q}$ qui envoie $[c]_\mathfrak{p}$ sur $[c]_\mathfrak{q}$. C'est bien défini car si $(c_1 = c_2) \in \mathfrak{p}_p$, alors $\Box(c_1 = c_2) \in \mathfrak{p}$ par déduction modale (voir exemples H.1). Ainsi $(c_1 = c_2) \in N_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, i.e. $c_1 \sim_\mathfrak{q} c_2$.

Soit $\mathbb{M} = (\mathbb{P}, (\mathbb{A}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}}, (f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}})$.

Lemme (lemme de vérité)**.** Pour tout $\hat{\mathcal{L}}$-énoncé φ et tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ tels que $\varphi \in \mathcal{L}_\mathfrak{p}$-Én, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $\varphi \in \mathfrak{p}$.

Démonstration. Récurrence sur φ. Les cas classiques sont comme en § 10, étape 6. Il reste à traiter le passage à $\Box\varphi$.

— Supposons $\Box\varphi \in \mathfrak{p}$. Alors $\varphi \in N_\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$, on a $\varphi \in N_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, d'où $\varphi \in \mathfrak{q}$; par récurrence $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi$. Ceci montre $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\varphi$.

— Supposons $\Box\varphi \notin \mathfrak{p}$. On affirme que $N_\mathfrak{p} \cup \{\neg\varphi\}$ est cohérent. Sinon, $N_\mathfrak{p} \vdash \varphi$; donc $\Box N_\mathfrak{p} \vdash \Box\varphi$. Mais par définition $\Box N_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$, absurde. Comme dans le cas classique, $N_\mathfrak{p} \cup \{\neg\varphi\}$ est incluse dans une théorie cohérente, maximale, et contenant les $\mathcal{L}^*_\mathfrak{p}$-axiomes de Henkin $\mathfrak{q}$ (mais $\mathcal{L}_\mathfrak{p} \subsetneq \mathcal{L}_\mathfrak{q}$: voir remarque après la démonstration). Par définition, $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$. Par récurrence, $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \varphi$. Donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \not\models \Box\varphi$. □

On montre (iii)⇒(i). Il suffit de montrer que toute théorie cohérente est satisfaisable, avec contrôle cardinal. Supposons Θ cohérente. Soient $\mathcal{L}^*$ le langage de Henkin de $\mathcal{L}$, et $H_{\mathcal{L}^*}$ l'ensemble des $\mathcal{L}^*$-axiomes de Henkin. Comme dans le cas classique, $\Theta \cup H_{\mathcal{L}^*}$ est cohérente dans $\mathcal{L}^*$ (§ 10, étape 3). L'existence de théories cohérentes maximales est comme dans le cas classique (§ 10, étape 4). Il existe donc une $\mathcal{L}^*$-théorie maximale $\mathfrak{p}_0$ contenant $\Theta \cup H_{\mathcal{L}^*}$. Par le lemme de vérité, $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}_0) \models \Theta$. Il reste à contrôler le multivers.

Par construction, chaque $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ est de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}^*$-Form $= \operatorname{card} \mathcal{L}$-Form. On cherche une sous-relation $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ convenant.

Soit $\mathbb{P}'_0 = \{\mathfrak{p}_0\}$. On suppose $\mathbb{P}'_n$ formé. Soient $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}'_n$ et φ une formule à paramètres implicites dans $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ telle que $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \not\models \Box\varphi$. Alors il existe $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}$ tel que $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$ et $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \varphi$. On choisit un tel $\mathfrak{q}$ pour chaque paire $(\mathfrak{p}, \varphi) \in \mathbb{P}'_n \times \mathcal{L}(\mathbb{A}_\mathfrak{p})$-Form concernée. Ajoutant chaque $\mathfrak{q}$ ainsi choisi à $\mathbb{P}'_n$, on obtient $\mathbb{P}'_{n+1}$, de cardinal encore $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$-Form. On réitère ω fois. Soit $\mathbb{P}' = \bigcup_n \mathbb{P}'_n$ comme sous-relation de $\mathbb{P}$. Soit $\mathbb{M}'$ le sous-multivers sur $\mathbb{P}'$ obtenu en posant

$\mathbb{A}'_{\mathfrak{p}} = \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$.

Par construction, pour $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}'$ et φ à paramètres implicites dans $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, on a $(\mathbb{M}', \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$. Donc le multivers $\mathbb{M}'$ sur $\mathbb{P}'$ et le point $\mathfrak{p}_0$ répondent au problème. □

Remarques

— La relation $\mathbb{P}$ et le multivers $\mathbb{M}$ ne dépendent ni de Φ ni de χ (mais $\mathfrak{p}_0$, $\mathbb{P}'$ et $\mathbb{M}'$ en dépendent). L'équivalent classique serait de considérer toutes les théories maximales et contenant les axiomes de Henkin, sans fonctions d'accès entre elles, puis d'en prendre une contenant $\Phi \cup \{\neg\chi\}$.

— On a travaillé à domaines croissants. Une tentative à domaines constants, i.e. sans passer de $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$ à $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$, est vouée à l'échec.
Soit $\mathfrak{p}$ contenant $\Box(\exists x)\varphi$ et toutes les instances $\Box\neg\varphi[c]$ pour $c \in \mathcal{L}$, de sorte que $N_{\mathfrak{p}}$ contient $(\exists x)\varphi$ et les $\neg\varphi[c]$. Cet ensemble devient incohérent si on lui ajoute un axiome à la Henkin *avec une constante de $\mathcal{L}$*. Pourtant, $\mathfrak{p}$ est satisfaisable : un multivers singleton, sans arête, porte un modèle. Par correction, $\mathfrak{p}$ est cohérente.

La complétude entraîne la compacité, qui peut également s'obtenir par des ultraproduits (exercice H.2).

Corollaire (compacité)**.** Mêmes conventions que dans le théorème de complétude. Alors $\Phi \models \chi$ ss'il existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ fini tel que $\Phi_0 \models \chi$.

§ H.3. Un cas particulier : S_4

On présente une extension remarquable de la logique modale de base. Un préordre est une relation réflexive et transitive. On ne demande pas la totalité.

S_4

Définition (logique modale S_4 ; multivers S_4)**.**

— La *déduction modale S_4* est le renforcement par les règles :

$$\frac{\Phi \vdash \Box\chi}{\Phi \vdash \chi}\ \mathrm{T} \qquad \Bigg| \qquad \frac{\Phi \vdash \Box\chi}{\Phi \vdash \Box\Box\chi}\ 4$$

— Un *multivers modal S_4 en préordre* est la donnée d'un préordre $(\mathbb{P}; \leqslant)$ et d'un multivers modal sur $\mathbb{P}$ où les fonctions $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ vérifient $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{p}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}}$ et $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{r}} = f_{\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{r}} \circ f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ partout où défini.
C'est donc un foncteur $\mathbb{P} \to$ **Ens** dont les objets sont à valeurs dans **Str**.

Remarques

- Par opposition aux règles K ou N, les hypothèses Φ ne changent pas.
- Par opposition à N, on peut présenter les règles T et 4 comme les schémas d'axiomes :

$$\Box\varphi \to \varphi \qquad \text{et} \qquad \Box\,\varphi \to \Box\,\Box\,\varphi.$$

Lemme. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbb{P}$ est un préordre (relation réflexive et transitive) ;

(ii) pour tout multivers S_4 $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, et toute formule modale φ (à paramètres implicites) on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\varphi \to (\varphi \wedge \Box\,\Box\,\varphi)$.

Remarques

- La logique modale *propositionnelle* suffit dans ce critère.
- Pour le sens réciproque, on prend la définition de multivers S_4 *supra* au sens littéral, sans supposer que $\mathbb{P}$ est un préordre.

Démonstration.

(i)⇒(ii). Supposons que $\mathbb{P}$ est un préordre ; sa relation est notée $\leqslant$. Soient $\mathbb{M}$ et $\mathfrak{p}$ comme indiqué. Supposons $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\varphi$. Par réflexivité, $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{p}$, donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$. Soit maintenant $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}$ tel que $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}$. Soit aussi $\mathfrak{r} \in \mathbb{P}$ tel que $\mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{r}$. Par transitivité, $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{r}$, donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{r}) \models \varphi$. Ceci vaut pour tout $\mathfrak{r} \geqslant \mathfrak{q}$, donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \Box\varphi$. Ceci vaut pour tout $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$, donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\Box\varphi$.

(ii)⇒(i). Soit α n'importe quel énoncé non modal que l'on peut rendre vrai ou faux dans une $\mathcal{L}$-structure ; il en existe. La construction suivante est indifférente aux fonctions d'accès choisies.

Supposons R non réflexive. Il existe alors $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ tel que $\neg(\mathfrak{p}R\mathfrak{p})$. En tout (éventuel) $\mathfrak{q}$ tel que $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$ on met une structure $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ qui vérifie α, mais en $\mathfrak{p}$ on en met une vérifiant $\neg\alpha$. C'est possible par hypothèse. Alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\alpha$, mais $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \not\models \alpha$.

Supposons R non transitive. Alors il existe $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \in \mathbb{P}$ tels que $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}R\mathfrak{r}$ mais $\neg(\mathfrak{p}R\mathfrak{r})$. En tout $\mathfrak{q}'$ tel que $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}'$ on met α ; en $\mathfrak{r}$ on met $\neg\alpha$. C'est possible par hypothèse. Alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\varphi$ mais $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\models \Box\alpha$ donc $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \not\models \Box\,\Box\,\alpha$. □

Remarque. À la différence de la logique intuitionniste (lemme de persistance G.1), on ne peut pas en général factoriser les préordres en ordres. Soient deux mondes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ qui se voient l'un l'autre, avec α en $\mathfrak{p}$ et $\neg\alpha$ en $\mathfrak{q}$. Le multivers associé ne se contracte pas en un multivers singleton. (Noter que $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont tous deux un plus petit élément.)

Théorème. S_4 est complète pour la sémantique des multivers en préordres, i.e. dans $\mathcal{L}$-Form$_\Box$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\Phi \vdash \chi\ [S_4]$;

(ii) pour tout préordre $\mathbb{P}$, tout multivers S_4 $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, et tout monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi$ alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi$.

(iii) pour tout préordre $\mathbb{P}$ *enraciné de cardinal* $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$, tout multivers $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$ *dont tous les mondes sont de cardinal* $\leqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$, et tout monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi$ alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi$.

On devine que la logique modale S_4 a au moins la complexité de la logique intuitionniste : voir exercice H.3.

Démonstration. (i)⇒(ii) suit du lemme, qui garantit qu'un multivers en préordre valide les axiomes supplémentaires de S_4.

(ii)⇒(iii) est évident.

On montre (iii)⇒(i). Il suffit de montrer que toute théorie cohérente possède un modèle aux cardinaux contrôlés. On reprend la démonstration du théorème de complétude (§ H.2). Soit maintenant $\mathbb{P}$ l'ensemble des théories S_4-maximales et de Henkin (cet ensemble reste non vide par les arguments de maximalité usuels). On affirme que c'est un préordre. Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$. Alors $\mathfrak{p}$ contient toutes les formules du type $\Box\varphi \to (\varphi \wedge \Box\Box\varphi)$. En particulier :

— si $\Box\varphi \in \mathfrak{p}$, alors $\varphi \in \mathfrak{p}$. Donc $N_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p} R \mathfrak{p}$: c'est la réflexivité ;

— si $\mathfrak{p} R \mathfrak{q} R \mathfrak{r}$, et que $\varphi \in N_\mathfrak{p}$, alors $\Box\varphi \in \mathfrak{p}$, donc $\Box\Box\varphi \in \mathfrak{p}$. Ainsi $\Box\varphi \in N_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ et $\varphi \in N_\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{r}$, d'où $N_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r}$, i.e. $\mathfrak{p} R \mathfrak{r}$: c'est la transitivité.

Soit $\mathbb{M}$ le multivers S_4 obtenu en suivant le reste de la démonstration. Le lemme de vérité reste correct. Toute théorie S_4-cohérente est donc satisfaisable dans un monde de $\mathbb{M}$. Le contrôle cardinal se fait comme en § H.2. Par construction, $\mathfrak{p}_0$ est alors un plus petit élément : donc $\mathbb{P}'$ est enraciné. □

Remarques

— On peut se ramener à des *ordres*, mais à la différence du cas intuitionniste (lemme de persistance G.1) il y a quelque chose à faire. V. exercice H.4. On peut même se ramener à des *arbres* enracinés (avec contrôle des cardinaux) en § I.3, théorème 10.

— La logique modale S_4 possède une sémantique topologique naturelle, décrite en § I.

La littérature a de nombreuses variantes de S_4 ; l'intérêt mathématique de la plupart est discutable. Une exception est la *logique de Gödel-Löb* (§ P).

Exercices

H.1. On considère la déduction modale de base.

a. Vérifier que la restriction de N et K à l'ensemble vide d'hypothèses suffisent à retrouver ces règles, et que l'on peut remplacer K par le schéma d'axiomes $\vdash \Box(\chi_1 \to \chi_2) \to (\Box\chi_1 \to \Box\chi_2)$. Pourquoi n'est-ce pas le cas avec N ?

b. Montrer que $\vdash \Box(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\Box\varphi_1 \wedge \Box\varphi_2)$.

c. Montrer que si Φ et χ ne contiennent *pas* de modalité, alors $\Phi \vdash \chi$ en logique modale ssi $\Phi \vdash \chi$ en logique élémentaire. (Ceci contraste avec le cas intuitionniste.)

H.2 (compacité modale par ultraproduits). (Prérequis : § 16.) Montrer la compacité de la conséquence modale par ultraproduits de multivers. Déduire la compacité de S_4.

H.3 (traduction de Gödel-McKinsey-Tarski). (Prérequis : § G). La logique intuitionniste se plonge dans la logique modale S_4. On note $[S_4]$ (resp. [LI]) la satisfaction modale de Kripke (resp. intuitionniste de Kripke).

Théorème (Gödel-McKinsey-Tarski)**.** Soient $\vdash$ [LI] la déduction intuitionniste et $\vdash [S_4]$ la déduction modale S_4. Il existe une traduction $^m : \mathcal{L}\text{-Form} \to \mathcal{L}\text{-Form}_\Box$ telle que $\Phi \vdash \chi$ [LI] ssi $\Phi^m \vdash \chi^m$ $[S_4]$.

La *traduction modale* ^{m} des $\mathcal{L}$-formules est définie par : $\bot^m$ est $\bot$; $(R(\mathbf{t}))^m$ est $\Box R(\mathbf{t})$ (dont $=$) ; $(\neg\varphi)^m$ est $\Box\neg\varphi^m$; $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^m$ est $\varphi_1^m \wedge \varphi_2^m$; $(\varphi_1 \vee \varphi_2)^m$ est $\varphi_1^m \vee \varphi_2^m$; $(\varphi_1 \to \varphi_2)^m$ est $\Box(\varphi_1^m \to \varphi_2^m)$; $(\forall x\ \varphi)^m$ est $\Box(\forall x)\varphi^m$; $(\exists x\ \varphi)^m$ est $(\exists x)\varphi^m$.

Soit $(\mathbb{P}; \leqslant)$ un préordre.

a. Soit $\mathbb{M}$ un $\mathbb{P}$-multivers intuitionniste de Kripke $\mathbb{M}$. Il induit un $\mathbb{P}$-multivers modal S_4 $\mathrm{Mod}(\mathbb{M})$ en conservant les mêmes $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$. Montrer que $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $(\mathrm{Mod}(\mathbb{M}), \mathfrak{p}) \models \varphi^m$.

b. Soit $\mathbb{N}$ un $\mathbb{P}$-multivers intuitionniste de Kripke $\mathbb{N}$. Il induit un $\mathbb{P}$-multivers modal S_4 $\mathrm{Mod}(\mathbb{N})$ comme suit : si R est une relation de base, $R[\mathbb{A}'_\mathfrak{p}] = \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_\mathfrak{p} : (\mathbb{N}, \mathfrak{p}) \models \Box R(\mathbf{a})\}$. Montrer que c'est bien défini et que $(\mathrm{Int}(\mathbb{N}), \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $(\mathbb{N}, \mathfrak{p}) \models \varphi^m$.

c. En déduire que $\Phi \models \chi$ [LI] ssi $\Phi^m \models \varphi^m$ $[S_4]$, puis que la logique classique se plonge dans la logique S_4.

d. Inventer d'autres traductions. (*)

H.4. Montrer l'équivalence entre : (i) $\Phi \vdash \chi$ $[S_4]$; (ii) pour tout *ordre partiel* $(\mathbb{P}; \leqslant)$, tout multivers modal S_4 $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, tout monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ et tout choix de paramètres $\mathbf{a}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Phi(\mathbf{a})$ alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \chi(\mathbf{a})$. [Déployer un préordre en répétant à l'infini des nœuds $\leqslant$-équivalents.] (*)

H.5. Soient $(\mathbb{P}; R)$ une relation binaire et $X(\varphi)$ un schéma de formules (des exemples suivent). On dit que $\mathbb{P}$ *valide* X si pour tout multivers $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, et toute formule modale φ, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models X(\varphi)$. Montrer que :

a. $\mathbb{P}$ valide $\Box\varphi \to \varphi$ ssi R est réflexive ;

b. $\mathbb{P}$ valide $\Box\varphi \to \Box\,\Box\,\varphi$ ssi R est transitive ;

c. $\mathbb{P}$ valide $\Box\,\Box\,\varphi \to \Box\varphi$ ssi $\mathbb{P} \models (\forall\mathfrak{p})(\forall\mathfrak{q})(\exists\mathfrak{r})(\mathfrak{p}R\mathfrak{r} \wedge \mathfrak{r}R\mathfrak{q})$;

d. $\mathbb{P}$ valide $\neg\,\Box\,\varphi \to \Box\neg\varphi$ ssi R est le graphe d'une fonction partielle ;

e. $\mathbb{P}$ valide $\neg\,\Box\,\varphi \leftrightarrow \Box\neg\varphi$ ssi R est le graphe d'une fonction totale ;

f. $\mathbb{P}$ valide $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ ssi R est transitive et *anti-bien fondée*, i.e. toute partie $Q \subseteq \mathbb{P}$ non vide possède un point maximal (sans R-successeur dans Q). (*)

Analogue topologique à l'ex. I.2. Le dernier schéma décrit la *logique modale de Gödel-Löb* (§ P).

(*) **H.6 (bisimulations et théorème de van Benthem).** (Prérequis : § 17.) • Soient Λ la logique classique et $\Lambda^{\square}$ la logique modale. • On commence en logique propositionnelle, sur un langage $\mathcal{L}$ formé de relations 0-aires (« variables propositionnelles »). Pour chaque $\alpha \in \mathcal{L}$, soit α^d une relation unaire. Soit $\mathcal{L}^d = \{\alpha^d : \alpha \in \mathcal{L}\} \cup \{R\}$.

- La *démodalisation* $\mathcal{L}\text{-Form}_{\square} \to \mathcal{L}^d\text{-Form}$ est définie par :
  $\bot^d$ est $\bot$; α^d est $\alpha^d(y)$; $(\neg\varphi)^d$ est $\neg\varphi^d$; $(\varphi_1 \boxdot \varphi_2)^d$ est $\varphi_1^d \boxdot \varphi_2^d$; $(\square\varphi)^d$ est $(\forall z)(yRz \to \varphi^d[y := z])$, où z est la première variable disponible.
- Si $\mathbb{M}$ est un $\mathcal{L}$-multivers sur $\mathbb{P}$, on note $\mathbb{M}^d$ la $\mathcal{L}^d$-structure « démodalisée » sur $\mathbb{P}$, obtenue en posant $\alpha^d[\mathbb{M}^d] = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P} : (\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \alpha\}$ pour $\alpha \in \mathcal{L}$.
- Une *bisimulation* entre $\mathcal{L}$-multivers $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ est une famille $\varnothing \neq \mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ vérifiant :
  - si $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathcal{B}$, alors pour tout $\alpha \in \mathcal{L}$, on a $(\mathbb{M}_1, \mathfrak{p}_1) \models \alpha$ ssi $(\mathbb{M}_2, \mathfrak{p}_2) \models \alpha$;
  - si $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathcal{B}$ et $\mathbb{P}_1 \models \mathfrak{p}_1 R \mathfrak{q}_1$, alors il existe $\mathfrak{q}_2$ tel que $\mathbb{P}_2 \models \mathfrak{p}_2 R \mathfrak{q}_2$ et $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) \in \mathcal{B}$;
  - condition analogue de vient.

a. Dans ces notations, vérifier $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$ $[\Lambda^{\square}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{M}^d \models \varphi^d(\mathfrak{p})$ $[\Lambda(\mathcal{L}^d)]$.

b. On suppose $\mathbb{M}_1^d$ et $\mathbb{M}_2^d$ ω-saturées. Montrer que $\mathcal{B} = \{(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 : \text{si } \varphi \in \mathcal{L}\text{-Form}_{\square}, \text{ alors } (\mathbb{M}_1, \mathfrak{p}_1) \models \varphi \text{ ssi } (\mathbb{M}_2, \mathfrak{p}_2) \models \varphi\}$ est vide ou forme une bisimulation.

c. Déduire que si $\Phi(y)$ est une $\mathcal{L}^d$-formule, alors $\Phi(y)$ équivaut à la traduction φ^d d'une $\Lambda^{\square}(\mathcal{L})$-formule ssi la satisfaction de $\Phi(y)$ est invariante par bisimulation. [Théorème 17.2.]

(**) d. Généraliser en logique élémentaire.

Notes conclusives

Le domaine produit de nombreux traités délayés, à prendre avec prudence. On peut fréquenter [Blackburn-de Rijke-Venema].

- **Repères historiques**

  C'est une théorie de ce genre que nous nous proposons de développer dans le présent article en nous inspirant de la définition Leibnizienne du nécessaire, comme étant ce qui est vrai dans tous les mondes possibles.

  Ce n'est, pas, à notre sens, la tâche du logicien d'examiner la valeur de cette métaphysique Leibnizienne. Nous pouvons nous borner à constater qu'en se laissant inspirer par cette métaphysique on peut formuler pour la logique modale S_5 une théorie sémantique analogue à la théorie sémantique formulée traditionnellement pour la logique non modale.

  [Bay58]

  The basis of the informal analysis which motivated these definitions is that a proposition is necessary if and only if it is true in all "possible worlds."

  [**Kri59**, p. 2]

[Blackburn-de Rijke-Venema] : Patrick Blackburn, Maarten de Rijke et Yde Venema. *Modal logic.* T. 53. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge : Cambridge University Press, 2001, p. xxii+554

[Bay58] : Arnould Bayart. « Correction de la logique modale du premier et du second ordre S_5 ». In : *Logique et Analyse* 1.1 (1958), p. 28-45

[**Kri59**] : Saul Kripke. « A completeness theorem in modal logic ». In : *J. Symb. Logic* 24 (1959), p. 1-14

Histoire générale. [Golo3], bien qu'il omette Rasiowa et Sikorski.

Logique modale formelle. On fait abstraction d'Aristote et Leibniz. Après un précurseur en MacColl, le sujet naquit des considérations de Lewis sur implication et nécessité. [Lew12] distinguait l'« implication matérielle », mathématique, de l'« implication stricte », qui porte une notion de pertinence. Dès [Lewis-Langford, Appendix II], la logique modale prenait un air d'entomologie. Elle restait propositionnelle. • La logique modale élémentaire semble envisagée pour la première fois dans [Bar46], avec des axiomes mal justifiables. Quantification et logique modale furent longtemps tenues incompatibles [Qui47]. Les arguments n'étaient pas mathématiques mais l'approche de Quine reste influente : primat des *a priori*, justifications linguistiques quand elles servent leur auteur, refus d'une réalité propre aux mathématiques.

Sémantique algébrique. Vite éclipsée par les relations d'accessibilité, une sémantique algébrique fut proposée par Rasiowa [Ras51]. (Rasiowa avait fait son doctorat sous la direction de Mostowski, introducteur d'une sémantique algébrique pour la logique intuitionniste ; v. § G, notes conclusives.) Cette sémantique algébrique a débouché sur la sémantique topologique modale de § I.

Sémantique relationnelle « des mondes possibles ». Souvent attribuée au seul Kripke [**Kri59**] alors lycéen, génie dûment salué par Curry. En fait elle eut plusieurs inventeurs dont Hintikka et Arnould Bayart dont on sait peu de choses [Cre15, § 1]. Dans les trois cas le progrès fut de *relativiser la nécessité*, qui elle aussi devient locale. V. [Cop02] ou [Golo3, § 4].

Traduction de Gödel-McKinsey-Tarski (ex. H.3). Annonce [**Göd33a**], première preuve [MT48, § 5]. Ne pas confondre avec la traduction de Kolmogorov-Glivenko-Gödel (ex. G.3). La traduction KGG plonge la logique classique dans la logique intuitionniste. La traduction GMT plonge la logique intuitionniste dans la logique modale S_4. Elle aurait donné l'idée à Kripke d'étendre sa sémantique, à l'origine modale, à la logique intuitionniste [Kri65].

Complétude* en ordres *de* S_4 *(ex. H.4) : présente dans [Segerberg, II.1, Theorem 1.1 p. 80], certainement connue avant. V. aussi *universalité* en § I.3.

Théorème de van Benthem (ex. H.6). [Ben76,

[Golo3] : Robert GOLDBLATT. « Mathematical modal logic : a view of its evolution ». In : *J. Appl. Log.* 1.5-6 (2003), p. 309-392
[Lew12] : Clarence LEWIS. « Implication and algebra of logic ». In : *Mind, New Ser.* 21.84 (1912), p. 522-531
[Lewis-Langford] : Clarence LEWIS et Cooper LANGFORD. *Symbolic logic.* The Century Philosophy Series. New York & London : The Century Co., 1932, p. x+506
[Bar46] : Ruth BARCAN. « A functional calculus of first order based on strict implication ». In : *J. Symbolic Logic* 11 (1946), p. 1-16
[Qui47] : Willard QUINE. « The problem of interpreting modal logic ». In : *J. Symbolic Logic* 12 (1947), p. 43-48
[Ras51] : Helena RASIOWA. « Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis ». In : *Fund. Math.* 38 (1951), p. 99-126
[Cop02] : Jack COPELAND. « The genesis of possible worlds semantics ». In : *J. Philos. Logic* 31.2 (2002), p. 99-137
[**Göd33a**] : Kurt GÖDEL. « Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls ». In : *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.* 4. Wien, 1933, p. 39-40
[MT48] : John MCKINSEY et Alfred TARSKI. « Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting ». In : *J. Symbolic Logic* 13 (1948), p. 1-15
[Segerberg] : Krister SEGERBERG. *An essay in classical modal logic.* T. 13. Filosofiska Studier. Uppsala : Filosofiska Föreningen och Filosofiska Institutionen vid Uppsala Universitet, 1971. 250 p.

Theorem 1.9], doctorat sous la direction de Löb et publié en [van Benthem, Theorem 3.9].

• **Terminologie, notation.** • La notation des divers systèmes de règles possibles est un héritage de Lewis. Au lieu de *logique modale* S_4, il faudrait dire *logique modale de l'intérieur topologique.* • Dans [Lewis], Lewis employait $\sim$ pour désigner l'impossibilité ; puis « $\diamond$ *first occurs in Lewis and Langford [1932]. The first published use of* $\Box$ *is in Barcan [1946], but the symbol itself was devised shortly before that by F. B. Fitch to provide a necessity symbol in the same typographical style as Lewis' diamond. (We are grateful to Professor Barcan Marcus and Professor Fitch for supplying us with this information by letter.)* » [Hugues-Cresswell, note 425 p. 347] (Lewis and Langford [1932] est [Lewis-Langford] ; Barcan [1946] est [Bar46]). • La sémantique de Kripke pourrait être appelée *des mondes accessibles*, mais on perdrait la référence à Leibniz.

• **Autour de Gödel-McKinsey-Tarski**

Logiques intermédiaires. En « logiques intermédiaires » (v. § G, notes conclusives), on peut fixer une déduction $\Vdash$ comprise entre $\vdash$ [LI] et $\vdash$ [LC] puis se demander s'il existe une logique modale dans laquelle elle se plonge. C'est la théorie des *compagnes modales* [CZ92].

Image de la traduction. On peut chercher quelles formules modales propositionnelles sont essentiellement dans l'image, i.e. équivalentes à une traduite φ^m [Min12, Theorem 2] ; ne se généralise pas en logique élémentaire.

Traduction réciproque. [FF86] démontre le théorème de Gödel-McKinsey-Tarski via une *traduction réciproque de* S_4 *vers* LI. La traduction proposée vérifie : « si $\vdash \varphi$ [S_4], alors $\vdash \varphi^i$ [LI] », mais pas la réciproque [Ino92]. En logique propositionnelle, il existe cependant des traductions vérifiant l'équivalence [GT19]. La chose est moins claire en logique élémentaire ; il n'est pas clair non plus qu'on puisse autoriser des prémisses infinies. Le sujet n'est pas clos.

• **Des logiques modales à l'infini.** • Le sujet se décline en logiques aléthiques, déontiques, épistémiques, temporelles, suivant l'interprétation intuitive de l'opérateur $\Box$. Puis on peut dans chaque cas discuter sans fin des axiomes. • Les spécialistes promettent des applications en automatique, en linguistique, en droit, en théologie (v. *infra*)... Rien

[Ben76] : Johan van Benthem. « Modal Correspondence Theory ». Thèse de doct. Universiteit van Amsterdam, 1976

[van Benthem] : Johan van Benthem. *Modal logic and classical logic.* T. 3. Monographs in Philosophical Logic and Formal Linguistics. Napoli : Bibliopolis, 1985, p. 235

[Lewis] : Clarence Lewis. *A Survey of Symbolic Logic.* Berkeley : University of California Press, 1918. iv + 406

[Hugues-Cresswell] : George Hughes et Maxwell Cresswell. *An introduction to modal logic.* London : Methuen & Co., Ltd., 1968, p. xii+388

[CZ92] : Alexander Chagrov et Michael Zakharyashchev. « Modal companions of intermediate propositional logics ». In : *Studia Logica* 51.1 (1992), p. 49-82

[Min12] : Grigori Mints. « The Gödel-Tarski Translations of Intuitionistic Propositional Formulas ». In : *Correct Reasoning – Essays on Logic-Based AI in Honour of Vladimir Lifschitz.* Sous la dir. d'Esra Erdem et al. T. 7265. Lecture Notes in Computer Science. Springer, jan. 2012, p. 487-491

[FF86] : Robert Flagg et Harvey Friedman. « Epistemic and intuitionistic formal systems ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 32.1 (1986), p. 53-60

[Ino92] : Takao Inoué. « Flagg and Friedman's translation is not faithful ». In : *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 38.5-6 (1992), p. 551-554

[GT19] : Rajeev Goré et Jimmy Thomson. « A correct polynomial translation of S4 into intuitionistic logic ». In : *J. Symb. Log.* 84.2 (2019), p. 439-451

de mal à ce qu'il y ait autant de modélisations que d'applications visées. En revanche la littérature semble souvent mathématiquement superficielle ; peut-être parce que la logique modale fut longtemps rattachée à la philosophie. • Déjà pertinentes en mathématiques : la logique de Gödel-Löb (§ P), et l'interprétation du forcing comme modalité [HL08].

- **Théologie formelle.** • Il est nécessaire de mentionner l'« argument ontologique de Gödel » [Gödel III, p. 403]. • La variante de Scott est cohérente, mais trivialise la modalité (i.e. $\vdash \varphi \leftrightarrow \Box\varphi$) [Sob87, Theorem 6]. Bonne référence [Sobel, chapitre IV]. • La version d'origine est incohérente [Ben14]. C'est un terrain choisi, et scruté du grand public, pour les assistants de preuve (v. § J, notes conclusives) [BW16].

- **Quantification élémentaire en logique modale.** Le sujet a fait couler beaucoup d'encre, et même de la meilleure [Kripke] (le titre anglais imite un texte de Carnap). Certaines discussions diluées sont moins recommandables [Gar01]. • Les critiques philosophiques contre $a = b \models \Box(a = b)$ portent d'ailleurs plus sur la *nomination* que sur la quantification. • Au début du XXI^e siècle, de nombreux textes restent en logique propositionnelle.

- **Formule de Barcan, multivers « à domaine constant ».** Discussion pour se préparer aux pires textes de logique modale. • Ceux-ci nomment « formule de Barcan directe » le schéma de formules $(\forall x \;\; \Box\, \varphi) \rightarrow (\Box\forall x\; \varphi)$, et « formule de Barcan réciproque » celui $\Box(\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x) \Box\, \varphi$. • La déduction modale de § H.1 démontre les formules de Barcan réciproques, et la sémantique l'approuve. Les formules de Barcan directes caractérisent les multivers « à domaine constant », i.e. ceux où les fonctions d'accès sont surjectives. • Dans l'opposition « domaines variables » contre « domaine constant », les mathématiques optent sans hésiter pour les domaines variables. Elles ne statuent pas sur les questions « philosophiques », mais offrent des modélisations, puis en mènent l'étude mathématique. Libre aux sciences humaines de ne pas invoquer l'outil mathématique.

- **Logiques modales « incomplètes ».** • Bien relire la définition H.1.E. Soit Θ une

[HL08] : Joel David HAMKINS et Benedikt LÖWE. « The modal logic of forcing ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 360.4 (2008), p. 1793-1817

[Gödel III] : Kurt GÖDEL. *Collected works. Vol. III.* Sous la dir. de Solomon FEFERMAN et al. Unpublished essays and lectures, With a preface by Solomon Feferman. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995, p. xx+532

[Sob87] : Jordan SOBEL. « Gödel's Ontological Proof ». In : *On Being and Saying : Essays for Richard Cartwright.* Sous la dir. de J. THOMSON. Cambridge, MA : MIT Press, 1987, p. 241-61

[Sobel] : Jordan SOBEL. *Logic and Theism.* New York : Cambridge University Press, 2004. xix+652

[Ben14] : Bruno BENZMÜLLER CHRISTOPH Woltzenlogel Paleo. « Automating Gödel's Ontological Proof of God's Existence with Higher-order Automated Theorem Provers ». In : *ECAI 2014.* Sous la dir. de Torsten SCHAUB, Gerhard FRIEDRICH et Barry O'SULLIVAN. T. 263. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. IOS Press, 2014, p. 93-98

[BW16] : Christoph BENZMÜLLER et Bruno WOLTZENLOGEL PALEO. « The Inconsistency in Gödel's Ontological Argument : A Success Story for AI in Metaphysics ». In : *IJCAI 2016, 25th International Joint Conference on Artificial Intelligence.* Sous la dir. de Subbarao KAMBHAMPATI. T. 1–3. AAAI Press, 2016, p. 936-942

[Kripke] : Saul KRIPKE. *Naming and Necessity.* Cambridge (Massachusetts) : Harvard University Press, 1980. 172 p.

[Gar01] : James GARSON. « Quantification in modal logic ». In : *Handbook of philosophical logic, Vol. 3.* Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2001, p. 267-323

théorie modale. • Soit $\Phi \vdash_\Theta \chi$ la relation $\Phi \cup \Theta \vdash \chi$. Appelons Θ-*multivers* les multivers $\mathbb{M}$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{M}$, on ait $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Theta$. Soit $\Phi \models_\Theta \chi$ la relation : dans tout Θ-multivers, tout monde vérifiant Φ vérifie χ. Cette relation n'est a priori pas la même que $\Phi \vdash_\Theta \chi$. • Et en effet, il existe des théories Θ telles que les relations diffèrent ; on peut donner un énoncé χ tel que $\nvdash_\Theta \chi$ mais $\models_\Theta \chi$. Les spécialistes disent que Θ est « *incomplète* ». • Premiers exemples historiques [Tho74] et [Fin74]. Ces constructions sont pénibles ; il n'y a pas d'exposition simple. La moins ardue peut être [BS85]. • Ce jeu revient à se tromper de définition de conséquence sémantique ; pas étonnant qu'on ait des phénomènes négatifs.

• **Complexité de la logique modale.** • La satisfaction modale propositionnelle permet de formuler des propriétés de la relation d'accessibilité R : par exemple le schéma S_4 axiomatise les préordres (lemme H.3). On peut même détecter des propriétés *non élémentaires* de R (v. ex. H.5 et § P). • Résultat technique : la logique monadique du deuxième ordre d'une relation binaire R se plonge dans la logique modale propositionnelle [Tho75]. • Comme la complexité de la théorie monadique d'une relation binaire ne connaît pas de borne (v. § 12, notes conclusives), celle de la satisfaction en logique modale, même propositionnelle, non plus. Ceci explique le caractère anarchique de « la logique modale » en tant que discipline.

§ I. Sémantiques topologiques

La logique intuitionniste de § G et la logique modale S_4 de § H.3 ont été présentées via les multivers de Kripke, portés par des préordres. Elles ont aussi une *sémantique topologique*, où les multivers sont portés par des espaces topologiques. On les expose respectivement en § I.1 et § I.2 ; rétrospectivement les multivers de Kripke ont pour support des topologies d'Alexandroff. Après avoir harmonisé la notation on passe aux questions d'*universalité* de certains préordres ou espaces (§ I.3). Le cas intuitionniste possède une variante moderne due à Joyal (§ I.4, optionnelle).

Prérequis : exercice 2.9 ; § D, §§ G–H.

Rappels de § G et § H. • En logique intuitionniste, la notion de $\mathcal{L}$-formule ne change pas ; en logique modale, elle est étendue pour permettre la modalité $\square$. • Un *multivers de Kripke* (définitions G.1.C et H.1.C) est la donnée $\mathbb{M}$ d'une relation binaire $(\mathbb{P} ; R)$, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$, et pour toute paire $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}$ d'une fonction $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}} \colon \mathbb{A}_\mathfrak{p} \to \mathbb{A}_\mathfrak{q}$. En outre :

— dans le cas modal général (§ H.1), il n'y a pas de clause supplémentaire ;

— dans le cas modal S_4 (§ H.3), R doit être un préordre et l'on demande la fonctorialité, i.e. $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{p}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_\mathfrak{p}}$ et $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{r}} = f_{\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{r}} \circ f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ partout où défini ;

[Tho74] : Steven Thomason. « An incompleteness theorem in modal logic ». In : *Theoria* 40.1 (1974), p. 30-34
[Fin74] : Kit Fine. « An incomplete logic containing *S*4 ». In : *Theoria* 40.1 (1974), p. 23-29
[BS85] : George Boolos et Giovanni Sambin. « An incomplete system of modal logic ». In : *J. Philos. Logic* 14.4 (1985), p. 351-358
[Tho75] : Steven Thomason. « Reduction of second-order logic to modal logic ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 21 (1975), p. 107-114

— dans le cas intuitionniste (§ G.1), R doit être un préordre, on demande la fonctorialité, et chaque $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ doit être un $\mathcal{L}$-morphisme (positif, pas forcément un $\mathcal{L}$-plongement ; v. § 14.1).

• La *satisfaction de Kripke* (définitions G.1.D et H.1.D) est relative à un monde ; on la note ici $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models_K \varphi(\mathbf{a})$. • La *conséquence de Kripke* (définitions G.1.E et H.1.E) $\Phi \models_K \chi$ est la relation : « pour tout préordre $\mathbb{P}$, tout multivers de Kripke $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, et tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models_K \Phi$ alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models_K \chi$ ».

La simplicité d'exposition de la sémantique de Kripke garantit sa survivance. Pourtant la présence de flèches $f_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}}$ entre états en fait une sémantique des mondes accessibles plutôt que des mondes possibles. Pour modéliser la possibilité sans accessibilité, on va donner une interprétation topologique des formules. On présente séparément les cas intuitionniste et modal S_4, introduisant par pédagogie des notations d'abord distinctes puis harmonisées. Les §§ I.1 et I.2 peuvent être lues dans n'importe quel ordre.

— Un traitement unifié naïf est impossible car la logique intuitionniste *modifie* l'interprétation classique, alors que la logique modale S_4 l'*étend*.

— Pour le cas intuitionniste, les valeurs de vérité sont dans le treillis de Heyting des ouverts de $\mathcal{E}$; pour le cas modal S_4, dans l'anneau de Boole modal $P_\square(\mathcal{E})$.

— Un traitement unifié demanderait ainsi des *treillis de Heyting modaux*, structures algébriques trop exotiques.

On note ^{c} le complémentaire et $^\circ$ l'intérieur topologique.

§ I.1. Sémantique de Rasiowa intuitionniste

Cette sous-section peut être lue indépendamment de § I.2.

Le cas intuitionniste agrège des structures ; la sémantique est non classique, i.e. change l'interprétation de symboles usuels. Les ensembles-valeurs d'existence ou de vérité des éléments et des formules sont des ouverts de l'espace topologique ; notamment la valeur d'une théorie n'est pas l'intersection des valeurs des axiomes.

Définition A (multivers intuitionniste de Rasiowa)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Un *$\mathcal{L}$-multivers intuitionniste de Rasiowa*, ou *$\mathcal{L}$-multivers intuitionniste topologique*, est une famille semi-continue de $\mathcal{L}$-structures sur un espace topologique.

C'est donc la donnée $\mathbb{M}$ d'un espace topologique $\mathcal{E}$ et d'une famille de $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$ vérifiant :

— si $a \in \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathcal{E}} \mathbb{A}_\mathfrak{p}$, alors $\llparenthesis a \rrparenthesis_\mathbb{M} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : a \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}\}$ est ouvert dans $\mathcal{E}$; on note $\llparenthesis \mathbf{a} \rrparenthesis_\mathbb{M}$ pour un uplet ;

— si $R(\mathbf{a})$ est une relation de base à paramètres, alors $(\!(R(\mathbf{a}))\!)_{\mathbb{M}} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : \mathbf{a} \in R[\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}]\}$ est un ouvert de $\mathcal{E}$.
Noter que $(\!(\perp)\!)_{\mathbb{M}} = \varnothing$ et $(\!(a = a)\!)_{\mathbb{M}} = (\!(a)\!)_{\mathbb{M}}$.

S'il n'y a pas ambiguité, on omet l'indice $\mathcal{E}$.

Remarques

— La clause d'ouverture de $(\!(a)\!)$ et de $(\!(R(\mathbf{a}))\!)$ signifie que les formules gardent le même sens localement.

— On parle de *semi-continuité* ou de *continuité positive*, car $\{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : \mathbf{a} \notin R[\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}]\}$ n'est pas tenu d'être ouvert.

— Par opposition au cas modal S_4, la variation des $\mathcal{L}$-*structures* (i.e. domaines *et* relations) est semi-continue.

Définition B (satisfaction intuitionniste de Rasiowa)**.** Soit $\mathbb{M}$ un multivers intuitionniste sur l'espace topologique $\mathcal{E}$. On définit la satisfaction $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R \varphi(\mathbf{a})$ d'une formule à paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ par la récurrence suivante :

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R R(\mathbf{t})(\mathbf{a})$ si $\mathbf{t}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}]$;

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R \neg\varphi(\mathbf{a})$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{p} \in \mathcal{V} \subseteq (\!(\mathbf{a})\!)$ tel que pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{V}$ on ait $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \not\Vdash_R \varphi(\mathbf{a})$;

— $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ et $\varphi_1 \vee \varphi_2$: définition classique ;

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R (\varphi_1 \to \varphi_2)(\mathbf{a})$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{p} \in \mathcal{V} \subseteq (\!(\mathbf{a})\!)$ tel que pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{V}$, si $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \Vdash_R \varphi_1(\mathbf{a})$, alors $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \Vdash_R \varphi_2(\mathbf{a})$.

— $\exists x\varphi$: définition classique ;

— $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R (\forall x\ \varphi)(\mathbf{a})$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{p} \in \mathcal{V} \subseteq (\!(\mathbf{a})\!)$ tel que pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{V}$ et tout $b \in \mathbb{A}_{\mathfrak{q}}$, on ait $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \Vdash_R \varphi(\mathbf{a}, b)$.

$(\!(\varphi)\!)$ **Notation.** Pour φ une formule (éventuellement à paramètres), on note $(\!(\varphi)\!) = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : (\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R \varphi\}$.

Remarque. Chaque $(\!(\varphi)\!)$ est ouvert. En effet par traduction immédiate de la définition et notant $D = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathcal{E}} \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, on a les égalités (où certains $(\!(\mathbf{a})\!)$ sont redondants) :

— $(\!(\neg\varphi(\mathbf{a}))\!) = (\!(\mathbf{a})\!) \cap (\!(\varphi(\mathbf{a}))\!)^{c\circ}$;

— $(\!((\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\mathbf{a}))\!) = (\!(\mathbf{a})\!) \cap (\!(\varphi_1(\mathbf{a}))\!) \cap (\!(\varphi_2(\mathbf{a}))\!)$;

— $(\!((\varphi_1 \vee \varphi_2)(\mathbf{a}))\!) = (\!(\mathbf{a})\!) \cap (\!(\varphi_1(\mathbf{a}))\!) \cup (\!(\varphi_2(\mathbf{a}))\!)$;

— $(\!((\varphi_1 \to \varphi_2)(\mathbf{a}))\!) = (\!(\mathbf{a})\!) \cap \left((\!(\varphi_1(\mathbf{a}))\!)^c \cup (\!(\varphi_2(\mathbf{a}))\!)\right)^\circ$;

— $(\!((\exists x\ \varphi)(\mathbf{a}))\!) = (\!(\mathbf{a})\!) \cap \bigcup_{b \in D}\left((\!(b)\!) \cap (\!(\varphi(\mathbf{a}, b))\!)\right)$;

— $\llbracket(\forall x\ \varphi)(\mathbf{a})\rrbracket = \llbracket\mathbf{a}\rrbracket \cap \left(\bigcap_{b\in D}(\llbracket b\rrbracket^c \cup \llbracket\varphi(\mathbf{a},b)\rrbracket)\right)^\circ$.

Ainsi $\llbracket\cdot\rrbracket$ est un morphisme du treillis de Heyting des formules dans le treillis d'ouverts $\mathcal{O}(\mathcal{E})$. Ce morphisme possède également une bonne compatibilité pour $\exists$ et $\forall$.

Tout multivers de Kripke peut être vu comme un multivers de Rasiowa (lemme I.3.A) ; la réciproque est fausse car il y a plus d'espaces topologiques que de topologies d'Aexandroff.

§ I.2. Sémantique de Rasiowa modale S_4

Cette sous-section peut être lue indépendamment de § I.1.

Le cas modal S_4 agrège des ensembles, qui sont par ailleurs munis de structure ; la sémantique est extra-classique, i.e. ajoute une interprétation pour la modalité. Seuls les ensembles-valeurs d'existence des éléments sont tenus d'être ouverts, les ensembles-valeurs de vérité des formules étant des parties quelconques de l'espace topologique ; la valeur d'une théorie est l'intersection des valeurs des axiomes.

Définition A (multivers modal S_4 de Rasiowa)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Un *$\mathcal{L}$-multivers modal S_4 de Rasiowa*, ou *$\mathcal{L}$-multivers modal S_4 topologique*, est une famille semi-continue d'ensembles sur un espace topologique, chacun muni d'une $\mathcal{L}$-structure.

C'est donc la donnée $\mathbb{M}$ d'un espace topologique $\mathcal{E}$ et d'une famille d'ensembles $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$ vérifiant :

- si $a \in \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathcal{E}} \mathbb{A}_\mathfrak{p}$, alors $\{\!\!\{a\}\!\!\}_\mathbb{M} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : a \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}\}$ est ouvert dans $\mathcal{E}$; on note $\{\!\!\{\mathbf{a}\}\!\!\}_\mathbb{M}$ pour un uplet ;
- chaque $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ est une $\mathcal{L}$-structure. Si $R(\mathbf{a})$ est une relation de base à paramètres, on note $\{\!\!\{R(\mathbf{a})\}\!\!\}_\mathbb{M} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : \mathbf{a} \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{p}]$, sans demander son caractère ouvert.

  Noter que $\{\!\!\{\bot\}\!\!\}_\mathbb{M} = \varnothing$ et $\{\!\!\{a = a\}\!\!\}_\mathbb{M} = \{\!\!\{a\}\!\!\}_\mathbb{M}$.

S'il n'y a pas ambiguité, on omet l'indice $\mathcal{E}$.

Remarques

- La clause d'ouverture de $\{\!\!\{a\}\!\!\}$ mais pas de $\{\!\!\{R(\mathbf{a})\}\!\!\}$ signifie que les formules gardent un sens localement, mais que ce sens peut changer.
- On parle de *semi-continuité* ou de *continuité positive*, car $\{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : a \notin \mathbb{A}_\mathfrak{p}\}$ n'est pas tenu d'être ouvert.
- Par opposition au cas intuitionniste, la variation des *domaines* (mais pas des relations) est semi-continue.

Définition B (satisfaction modale S_4 de Rasiowa)**.** Soit $\mathbb{M}$ un multivers modal S_4 sur l'espace topologique $\mathcal{E}$. On définit la satisfaction $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R \varphi(\mathbf{a})$ d'une formule à paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_\mathfrak{p}$ par la récurrence suivante :

- — $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R R(\mathbf{t})(\mathbf{a})$ si $\mathbf{t}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_\mathfrak{p}]$;
- — connecteurs propositionnels et quantificateurs : définition classique ;
- — $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R \Box\varphi(\mathbf{a})$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{p} \in \mathcal{V} \subseteq \{\!\!\{\mathbf{a}\}\!\!\}$ tel que pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{V}$, on ait $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \Vdash_R \varphi(\mathbf{a})$.

$\{\!\!\{\varphi\}\!\!\}$

Notation. Pour φ une formule (éventuellement à paramètres), on note $\{\!\!\{\varphi\}\!\!\} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{E} : (\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \Vdash_R \varphi\}$.

Remarques

- — Par opposition au cas intuitionniste, les $\{\!\!\{\varphi\}\!\!\}$ ne sont pas nécessairement ouverts. Noter que $\{\!\!\{ \Box \varphi\}\!\!\} = \{\!\!\{\varphi\}\!\!\}^\circ$.
- — Par construction, $\{\!\!\{ \cdot \}\!\!\}$ est un morphisme de l'anneau de Boole modal des formules dans $P_\Box(\mathcal{E})$.
- — L'ensemble $\{\!\!\{\exists x\varphi\}\!\!\}$ s'interprète comme une réunion de type $\bigcup \{\!\!\{\varphi(a)\}\!\!\}$. Le théorème de McKinsey-Tarski (§ D.3) ne donne pas d'information sur la réunion infinitaire dans $P_\Box(\mathcal{E})$, ce qui limite le théorème 11 infra au cas intuitionniste.

Tout multivers de Kripke peut être vu comme un multivers de Rasiowa (lemme I.3.A) ; la réciproque est fausse car il y a plus d'espaces topologiques que de topologies d'Aexandroff.

§ I.3. Complétude et universalité

Λ^i désigne la logique intuitionniste et Λ° la logique modale S_4. On note $[\![\dots]\!]$ l'ensemble de vérité d'une formule ou d'un ensemble de formules ; la définition n'est pas la même pour Λ^i et Λ°.

Définition (conséquence de Rasiowa)**.** Soient Λ' la logique Λ^i ou Λ°, et $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Soient $\Phi \subseteq \Lambda'(\mathcal{L})$-Form et $\chi \in \Lambda'(\mathcal{L})$-Form. On note $\Phi \models_R \varphi$ la relation : pour tout multivers topologique, on a $[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\chi]\!]$.

Si l'on manie des formules, une quantification universelle sur les choix de paramètres est implicite dans cette définition ; ce qui ramène à des énoncés. La sémantique de Rasiowa est complète dans le sens suivant.

Théorème 9 (complétude)**.** Soient Λ' la logique Λ^i ou Λ°, et $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Soient $\Phi \subseteq \Lambda'(\mathcal{L})$-Form et $\chi \in \Lambda'(\mathcal{L})$-Form. Alors sont équivalents :

(i) $\Phi \vdash \chi \ [\Lambda']$;
(ii) $\Phi \models_K \chi \ [\Lambda']$;
(iii) $\Phi \models_R \chi \ [\Lambda']$.

Remarque. On peut même se restreindre aux préordres enracinés de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \Lambda'(\mathcal{L})$-Form.

Démonstration. L'équivalence (i)⇔(ii) est connue (théorèmes G.2 et H.2, respectivement). L'implication (i)⇒(iii) est la correction de la sémantique de Rasiowa, qui s'obtient par récurrence sur la déduction. L'implication (iii)⇒(ii) demande un lemme.

Lemme A. Soient $\mathbb{P}$ un préordre et $\mathbb{M}$ un multivers (intuitionniste ou modal S_4) sur $\mathbb{P}$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie d'Alexandroff sur $\mathbb{P}$, dont les ouverts sont les parties closes supérieurement. On note $\mathbb{M}'$ le multivers sur $(\mathbb{P} ; \mathcal{T})$ donné par $\mathbb{A}'_{\mathfrak{p}} = \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$. C'est bien défini, et pour toute formule φ, on a $(\mathbb{M}', \mathfrak{p}) \models_R \varphi$ ssi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models_K \varphi$.

Démonstration. Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, il existe un plus petit ouvert de $\mathcal{T}$ contenant $\mathfrak{p}$; c'est $\mathbb{P}_{\geqslant \mathfrak{p}}$.

— Cas modal S_4. Le caractère semi-continu des domaines $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, i.e. le caractère ouvert des $[\![a]\!]$, est clair par définition d'un multivers. Le lemme se démontre alors par récurrence sur φ, en utilisant $\mathbb{P}_{\geqslant \mathfrak{p}}$ aux moments non triviaux.

— Cas intuitionniste. Le caractère semi-continu des structures $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, i.e. le caractère ouvert des $[\![a]\!]$ et des $[\![R(\mathbf{a})]\!]$, est encore par définition. Ici encore le lemme est établi par récurrence. □

On montre (iii)⇒(ii). Supposons $\Phi \not\models_K \chi$. Par définition de $\models_K$, il existe un préordre $\mathbb{P}$, un multivers $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{P}$, et un monde $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ tels que $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models_K \Phi$ mais $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \not\models_K \chi$. Soit $\mathbb{M}'$ donné par le lemme. Alors $\mathfrak{p} \in [\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}'} \setminus [\![\chi]\!]_{\mathbb{M}'}$, d'où $\Phi \not\models_R \chi$. □

Remarque. Ainsi, pour chacune des logiques Λ^i et Λ° :

— si $\mathbb{M}$ est un multivers sur le préordre $\mathbb{P}$ vu comme multivers topologique, alors $[\![\varphi]\!] = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P} : (\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models_R \varphi\}$ coïncide avec $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{P} : (\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models_K \varphi\}$.

— les deux notions $\models_K$ et $\models_R$ coïncident.

On peut chercher quels préordres $\mathbb{P}$ ou espaces topologiques $\mathcal{E}$ suffisent à détecter la conséquence.

Théorème 10. Soient Λ' la logique Λ^i ou Λ°, et $\mathcal{L}$ un langage relationnel *dénombrable.* Alors l'arbre binaire infini $\mathcal{A} = (2^\omega; \sqsubseteq)$ est universel, dans le sens suivant. Soient $\Phi \subseteq \Lambda'(\mathcal{L})$-Form et $\chi \in \Lambda'(\mathcal{L})$-Form. Alors $\Phi \models \chi\ [\Lambda']$ ssi pour tout multivers en préordre *sur* $\mathcal{A}$, on a $[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\chi]\!]$.

Démonstration.

Lemme B (transport de multivers en préordres)**.** Soient $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ deux préordres et $h\colon \mathbb{P} \twoheadrightarrow \mathbb{P}'$ une fonction surjective, ouverte et continue dans la topologie d'Alexandroff. Soit $\mathbb{M}' = (\mathbb{A}'_{\mathfrak{p}'} : \mathfrak{p}' \in \mathbb{P}')$ un multivers porté par $\mathbb{P}'$, avec fonctions d'accès $f'_{\mathfrak{p}'R\mathfrak{q}'}$. Pour $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, soit $\mathbb{A}_\mathfrak{p} = \mathbb{A}'_{h(\mathfrak{p})}$; pour $\mathfrak{p}R\mathfrak{q}'$ dans $\mathbb{P}$, soit $f_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}} = f'_{h(\mathfrak{p})Rh(\mathfrak{q})}$. Soit $\mathbb{M}$ le multivers résultant.

Alors pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ et toute formule φ, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \varphi$ ssi $(\mathbb{M}', h(\mathfrak{p})) \models \varphi$.

Démonstration. D'après le lemme D.2, la continuité signifie que h est un morphisme de préordres, et son caractère ouvert est la propriété : $(\forall \mathfrak{p}) \left[\mathfrak{p} \in \mathbb{P} \to \mathbb{P}'_{\geqslant h(\mathfrak{p})} \subseteq h\left(\mathbb{P}_{\geqslant \mathfrak{p}}\right)\right]$. On procède par récurrence sur φ.

— Cas modal. La seule subtilité est le passage à $\Box\varphi$.
Supposons $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\varphi$. Soit $\mathfrak{q}' \geqslant h(\mathfrak{p})$. Par ouverture de h, on a $\mathbb{P}'_{\geqslant h(\mathfrak{p})} \subseteq h(\mathbb{P}_{\geqslant \mathfrak{p}})$, donc il existe $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}$ tel que $h(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}'$. Par hypothèse $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi$, d'où par récurrence $(\mathbb{M}', \mathfrak{q}') \models \varphi$. Ainsi $(\mathbb{M}', h(\mathfrak{p})) \models \Box\varphi$.
Supposons $(\mathbb{M}', h(\mathfrak{p})) \models \Box\varphi$. Soit $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$. Par continuité de h, on a $h(\mathfrak{q}) \geqslant h(\mathfrak{p})$. Par hypothèse $(\mathbb{M}', h(\mathfrak{q})) \models \varphi$, d'où par récurrence $(\mathbb{M}, \mathfrak{q}) \models \varphi$. Ainsi $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models \Box\varphi$.

— Cas intuitionniste. Ouverture et continuité sont également les points requis pour traiter chaque symbole intuitionniste $\neg, \to, \forall$. □

Montrons le théorème. On suppose $\Phi \not\models \chi\ [\Lambda']$. Par complétude, il existe un préordre $\mathbb{P}'$ dénombrable enraciné et un multivers $\mathbb{M}'$ sur $\mathbb{P}'$ tels que $[\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}'} \nsubseteq [\![\chi]\!]_{\mathbb{M}'}$. Par universalité de l'arbre de Cantor (théorème D.2), il existe $h\colon \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathbb{P}'$ surjective, ouverte, et continue. On transporte la structure de multivers, obtenant un multivers $\mathbb{M}$ sur $\mathcal{A}$. D'après le lemme, pour toute formule, $[\![\varphi]\!]_\mathbb{M} = h^{-1}([\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}'})$. Comme h est surjective, on en déduit $[\![\Phi]\!]_\mathbb{M} = \bigcap_\Phi [\![\varphi]\!]_\mathbb{M} = h^{-1}([\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}'}) \nsubseteq h^{-1}([\![\chi]\!]_{\mathbb{M}'}) = [\![\chi]\!]_\mathbb{M}$. □

La symétrie entre Λ^i et Λ° se perd dans le résultat suivant.

Théorème 11. Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel *dénombrable*. Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique métrisable sans points isolés. Alors $\mathcal{E}$ est universel pour Λ^i, dans le sens suivant. Soient $\Phi \subseteq \Lambda^i(\mathcal{L})$-Form et $\chi \in \Lambda^i(\mathcal{L})$-Form. Alors $\Phi \models \chi\ [\Lambda^i]$ ssi pour tout multivers topologique *sur* $\mathcal{E}$, on a $[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\chi]\!]$.

Démonstration. On rappelle que l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ forme un treillis de Heyting (§ D.1), qui est même $\bigvee$- et $\bigwedge$-complet. La borne supérieure $\bigvee$ est la réunion, mais la borne inférieure $\bigwedge$ est l'intérieur de l'intersection.

Lemme C (transport de Λ^i-multivers topologiques)**.** Soient $\mathcal{E}', \mathcal{E}$ deux espaces topologiques. Soit $h\colon \mathcal{O}(\mathcal{E}') \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{E})$ **[Heyt]** un plongement préservant $\bigvee$ et $\bigwedge$. Soit $\mathbb{M}'$ un Λ^i-multivers topologique sur $\mathcal{E}$. On pose $[\![\mathbf{a}]\!] = h([\![\mathbf{a}]\!]_{\mathbb{M}'})$ et $[\![R(\mathbf{a})]\!] = h([\![R(\mathbf{a})]\!]_{\mathbb{M}'})$. Ceci définit un Λ^i-multivers $\mathbb{M}$, et pour toute formule φ on a $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}} = h([\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}'})$.

Démonstration. Récurrence immédiate grâce aux préservations fortes. □

Montrons le théorème. On suppose $\Phi \not\models \chi\ [\Lambda^i]$. Par complétude, il existe un préordre $\mathbb{P}'$ dénombrable enraciné et un multivers $\mathbb{M}'$ sur $\mathbb{P}'$ tels que $[\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}'} \nsubseteq [\![\chi]\!]_{\mathbb{M}'}$. D'après le lemme A, on peut traiter $\mathbb{M}'$ comme un multivers topologique, sur la topologie d'Alexandroff $\mathcal{E}'$ associée à $\mathbb{P}'$. Par le théorème de McKinsey-Tarski (théorème D.3), il existe un plongement h vérifiant les hypothèses du lemme. On peut donc transporter la structure pour obtenir un multivers topologique $\mathbb{M}$ sur $\mathcal{E}$. Comme h est un plongement, $[\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}'} \nsubseteq [\![\chi]\!]_{\mathbb{M}'}$ entraîne $h([\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}'}) \nsubseteq h([\![\chi]\!]_{\mathbb{M}'}) = [\![\chi]\!]_{\mathbb{M}}$. Mais comme h préserve $\bigwedge$ et que $\mathcal{E}'$ est d'Alexandroff, on a :

$$\begin{aligned} h([\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}'}) &= h\left(\bigcap_{\Phi} [\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}'}\right) = h\left(\bigwedge_{\Phi} [\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}'}\right) = \bigwedge_{\Phi} h([\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}'}) \\ &= \bigwedge_{\Phi} [\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}} = \left(\bigcap_{\Phi} [\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}}\right)^{\circ} \subseteq \bigcap_{\Phi} [\![\varphi]\!]_{\mathbb{M}} = [\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}}, \end{aligned}$$

donc $[\![\Phi]\!]_{\mathbb{M}} \nsubseteq [\![\chi]\!]_{\mathbb{M}}$, et $\mathbb{M}$ a détecté $\Phi \not\Vdash \chi$. □

Remarque. Le lemme C n'est pas valable dans Λ°. En cause, la quantification.

— Analogue pour Λ° du Lemme C avec des hypothèses trop fortes : s'il existe $h\colon P_{\square}(\mathcal{E}') \hookrightarrow P_{\square}(\mathcal{E})$ préservant les réunions et intersections arbitraires, alors on peut transporter un Λ°-multivers sur $\mathcal{E}'$ en un Λ°-multivers sur $\mathcal{E}$.

— En particulier si l'on a $f\colon \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}'$ surjective, ouverte et continue, on peut transporter. En effet $P^*f\colon P_\square(\mathcal{E}') \hookrightarrow P_\square(\mathcal{E})$ convient.

— Retour au théorème 11. D'après le théorème de McKinsey-Tarski (théorème D.3), il existe $h\colon P_\square(\mathbb{P}') \hookrightarrow P_\square(\mathcal{E})$ $[\mathbf{Bool}_\square]$, mais h ne préserve pas les opérations infinitaires. La preuve échoue donc pour Λ°.

— Si l'on ôte la quantification, on a transfert de multivers topologiques pour Λ° *propositionnelle*. Il implique immédiatement l'analogue du théorème 11 pour Λ° *propositionnelle*.

La question de l'universalité des espaces métrisables sans points isolés pour Λ° est encore ouverte ; voir notes conclusives.

§ I.4. Variante intuitionniste : sémantique de Joyal

Cette sous-section optionnelle demande un peu de culture géométrique.

La bonne façon d'agréger de l'information est par (pré-)faisceaux : la donnée *ponctuelle* est remplacée par une donnée *locale*. Si $\mathcal{E}$ est un espace topologique, on note $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ la catégorie de ses ouverts (pour l'inclusion), et $\mathcal{O}^\times(\mathcal{E})$ la sous-catégorie de ses ouverts non vides.

Remarque (émergence naturelle des préfaisceaux). Soit $\mathbb{M}$ un multivers intuitionniste de Kripke sur un préordre $\mathbb{P}$ (définition G.1.C). Comme tout préordre, $(\mathbb{P}; \leqslant)$ est une catégorie. Soit $\mathcal{L}$-**Str** la catégorie des $\mathcal{L}$-structures avec pour flèches les fonctions préservant l'interprétation, i.e. les $\mathcal{L}$-morphismes (v. § 14.1). Alors la correspondance :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \to & \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \mathbb{A}_\mathfrak{p} \end{array}$$

est un morphisme de catégories, i.e. un foncteur.

On emploie souvent l'ordre inverse $\mathbb{P}^{\mathrm{op}} = (\mathbb{P}; \geqslant)$. Alors la correspondance :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{\mathrm{op}} & \to & \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \mathbb{A}_\mathfrak{p} \end{array}$$

est un morphisme contravariant, i.e. un *préfaisceau de structures.* Ici la catégorie de départ $\mathbb{P}^{\mathrm{op}}$ est très particulière car associée à un préordre. La sémantique de Joyal se libère de cette contrainte.

Définition A (multivers intuitionniste en préfaisceau)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel. Un *$\mathcal{L}$-multivers intuitionniste de Joyal*, ou *$\mathcal{L}$-multivers intuitionniste* *en préfaisceau* est un préfaisceau séparé de $\mathcal{L}$-structures sur un espace topologique.

C'est donc la donnée :

- d'un espace topologique $\mathcal{E} = (E\,; \mathcal{T})$;
- pour chaque ouvert non vide $\varnothing \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$, d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathbb{A}_{\mathcal{U}}$;
- pour chaque inclusion $\varnothing \neq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$, d'un $\mathcal{L}$-morphisme $\pi_{\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}} : \mathbb{A}_{\mathcal{U}} \to \mathbb{A}_{\mathcal{V}}$,

de sorte que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i$:

- si $a, b \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ sont tels que pour chaque indice, $\pi_{\mathcal{U}_i\subseteq\mathcal{U}}(a) = \pi_{\mathcal{U}_i\subseteq\mathcal{U}}(b)$, alors $a = b$;
- si $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ est tel que pour chaque indice, $\pi_{\mathcal{U}_i\subseteq\mathcal{U}}(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_{\mathcal{U}_i}]$, alors $\mathbf{a} \in R[\mathbb{A}_{\mathcal{U}}]$.

Remarque (pour géomètres)*.* Ces propriétés locales signifient que les relations, dont l'égalité, sont des sous-faisceaux du préfaisceau ensembliste $(\mathbb{A})$.

Elles sont néanmoins plus faibles qu'exiger un faisceau de structures : on ne demande pas le recollement, i.e. l'existence de sections globales.

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ est un uplet de paramètres et $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, alors $\pi_{\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}}$ est uniquement déterminée, donc les paramètres $\pi_{\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}}(\mathbf{a})$ aussi. On écrit encore $\mathbf{a}$ pour $\pi_{\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}}(\mathbf{a})$; il n'y a pas d'ambiguité.

Définition B (satisfaction intuitionniste de Joyal)**.** Soit $\mathbb{M}$ un multivers en préfaisceau. On définit la satisfaction $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J \varphi(\mathbf{a})$ d'une formule à paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}}$ par la récurrence suivante :

- $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J R(\mathbf{a})$ ssi $(\mathbf{a}) \in R[\mathbb{A}_{\mathcal{U}}]$;
- $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J (\neg\varphi)(\mathbf{a})$ ssi pour tout $\varnothing \neq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, on a $(\mathbb{M}, \mathcal{V}) \not\models_J \varphi(\mathbf{a})$;
- $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\mathbf{a})$ ssi $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J \varphi_1(\mathbf{a})$ et $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J \varphi_2(\mathbf{a})$;
- $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J (\varphi_1 \vee \varphi_2)(\mathbf{a})$ ss'il existe un recouvrement $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ tel que $(\mathbb{M}, \mathcal{U}_1) \models_J \varphi_1(\mathbf{a})$ et $(\mathbb{M}, \mathcal{U}_2) \models_J \varphi_2(\mathbf{a})$;
- $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J (\varphi_1 \to \varphi_2)(\mathbf{a})$ ssi pour tout $\varnothing \neq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tel que $(\mathbb{M}, \mathcal{V}) \models_J \varphi_1(\mathbf{a})$, on a $(\mathbb{M}, \mathcal{V}) \models_J \varphi_2(\mathbf{a})$;
- $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J (\exists x\ \varphi)(\mathbf{a})$ ss'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i$ et des $b_i \in \mathbb{A}_{\mathcal{U}_i}$ tels que pour tout indice, $(\mathbb{M}, \mathcal{U}_i) \models_J \varphi(\mathbf{a}, b_i)$;
- $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J (\forall x\ \varphi)(\mathbf{a})$ ssi pour tout $\varnothing \neq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ et tout $b \in \mathbb{A}_{\mathcal{V}}$, on a $(\mathbb{M}, \mathcal{V}) \models_J \varphi(\mathbf{a}, b)$.

Remarques

- On peut réécrire la clause en $\vee$ avec un recouvrement ouvert quelconque, mais il se ramène à deux termes.
- Persistance : si $(\mathbb{M},\mathcal{U}) \models_J \varphi(\mathbf{a})$ et $\varnothing \neq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, alors $(\mathbb{M},\mathcal{V}) \models_J \varphi(\mathbf{a})$.
- Recollement de la satisfaction : si $\mathcal{U} = \bigcup_I \mathcal{U}_i$ est un recouvrement ouvert, alors $(\mathbb{M},\mathcal{U}) \models_J \varphi(\mathbf{a})$ ssi pour chaque indice, $(\mathbb{M},\mathcal{U}_i) \models_J \varphi(\mathbf{a})$.
- La *donnée* d'un multivers en préfaisceau sur l'espace topologique $\mathcal{E}$ est la même que pour un multivers de Kripke sur le préordre $\mathcal{O}^\times(\mathcal{E})$, mais la *satisfaction* est différente. Bien noter la différence de clause pour $\exists$. Voir exercice I.7.

On montre sans difficulté que cette version de la sémantique de Joyal se ramène à celle de Rasiowa (exercice I.6). En revanche elle se généralise mieux au contexte catégorique. Il n'y a pas vraiment d'analogue pour la logique modale S_4 car la donnée structurelle est insuffisamment régulière.

Exercices

Soient Λ^i la logique intuitionniste et Λ° la logique modale S_4 ; on note Λ' l'une ou l'autre.

I.1.

a. Vérifier la correction de la sémantique de Rasiowa pour Λ^i et Λ°.
b. Vérifier la correction de la sémantique de Joyal pour Λ^i.

I.2. Analogue de l'ex. H.5. Soient $\mathcal{E}$ un espace topologique et $X(\varphi)$ un schéma de formules (des exemples suivent). On dit que $\mathcal{E}$ *valide* X si pour tout multivers $\mathbb{M}$ modal fibré sur $\mathcal{E}$, tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$, et toute formule modale φ, on a $(\mathbb{M}, \mathfrak{p}) \models X(\varphi)$. Montrer que :

a. $\mathcal{E}$ valide $\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ ssi tout fermé est ouvert ;
b. $\mathcal{E}$ valide $\neg\Box\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ ssi $\mathcal{E}$ est *extrémalement discontinu*, i.e. l'adhérence de tout ouvert est un fervert.

I.3. On se place en logique intuitionniste.

a. Montrer que $\Phi \vdash \chi$ ssi pour tout Λ^i-multivers topologique, $(\!(\Phi)\!)^\circ \subseteq (\!(\chi)\!)$.
b. Donner un Λ^i-multivers topologique $\mathbb{M}$, une théorie Φ, et un point $\mathfrak{p} \in (\!(\Phi)\!) \setminus (\!(\Phi)\!)^\circ$.
c. Est-ce paradoxal ?

(*) **I.4.** Un espace topologique $\mathcal{E}$ est *universel* pour Λ' s'il vérifie : $\Phi \models \chi$ $[\Lambda']$ ssi pour tout multivers sur $\mathcal{E}$, on a $[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\varphi]\!]$. Montrer que si $\mathcal{E}$ est universel pour Λ°, alors il l'est pour Λ^i. [GMT.]

I.5 (sur le théorème 11 pour Λ°).

a. Soit φ l'énoncé : $\neg\Box(\exists x)[R(x) \wedge \neg\Box\neg\Box\neg R(x)]$. Montrer $\not\models \varphi$ $[\Lambda^\circ]$. [Prendre $\mathcal{E} = \mathbb{A}_\mathfrak{p} = \mathbb{Q}$.]
(*) b. Soit $\mathbb{M}$ un Λ°-multivers sur $\mathbb{R}$ *à domaine global dénombrable*, i.e. tel que $\bigcup_\mathbb{R} \mathbb{A}_\mathfrak{p}$ soit dénombrable. Montrer que $[\![\varphi]\!] = \mathbb{R}$. [L'ensemble $[\![R(a) \wedge \neg\Box\neg\Box\neg R(a)]\!]$ est « nulle part dense », i.e. vérifie $\overline{X}^\circ = \varnothing$.]

c. Soit χ l'énoncé : $[(\forall x)(\Box R(x)) \wedge \Box(\forall x)(\Box R(x) \vee \Box\neg R(x))] \to \Box(\forall x)R(x)$. Montrer $\not\models \chi\ [\Lambda^\circ]$.

d. Soit $\mathbb{M}$ un Λ°-multivers sur $\mathbb{R}$ *à domaine constant*, i.e. tel que les $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ aient même ensemble sous-jacent. Montrer que $[\![\chi]\!] = \mathbb{R}$. [$\mathbb{R}$ est localement connexe.] (*)

Un analogue du théorème 11 pour Λ° dans $\mathbb{R}$ demanderait de travailler à domaines variables, de réunion non dénombrable.

I.6. On se place en logique intuitionniste.

a. Soit $\mathbb{M}$ un multivers de Rasiowa. Lui associer naturellement un multivers en préfaisceau $\mathrm{Joy}(\mathbb{M})$. [Produit direct.] Vérifier que pour tout ouvert $\mathcal{U} \neq \varnothing$ et toute formule, $\mathcal{U} \subseteq [\![\varphi]\!]$ ssi $(\mathrm{Joy}(\mathbb{M}), \mathcal{U}) \models_J \varphi$.

b. Soit $\mathbb{N}$ un multivers de Joyal. Lui associer naturellement un multivers topologique $\mathrm{Ras}(\mathbb{N})$. [Limite inductive le long des voisinages.] Vérifier que pour tout ouvert $\mathcal{U} \neq \varnothing$ et toute formule, $(\mathbb{N}, \mathcal{U}) \models_J \mathcal{U}$ ssi $\mathcal{U} \subseteq [\![\varphi]\!]$.

c. En déduire que la conséquence de Joyal coïncide avec la conséquence de Rasiowa.

I.7. On considère l'énoncé suivant. (*)

> Soient $\mathcal{E}$ un espace topologique et $\mathbb{M}$ un multivers intuitionniste en préfaisceau sur $\mathcal{E}$. Soient $\mathbb{P}$ le treillis $\mathcal{O}^\times(\mathcal{E})^{\mathrm{op}}$ et $\mathbb{M}'$ le multivers intuitionniste naturel sur le préordre $\mathbb{P}$. Alors pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}$ et tout énoncé φ, on a $(\mathbb{M}, \mathcal{U}) \models_J \varphi$ ssi $(\mathbb{M}', \mathcal{U}) \models_K \varphi$.

Donner un contre-exemple.

Notes conclusives

On note encore Λ^i la logique intuitionniste et Λ° la logique modale S_4. L'indice $_0$ signifie « propositionnelle ».

• Repères historiques

> *Widać stąd, że interpretacja, którą proponujemy, związana jest z „wielowartościowością“ logik nieklasycznych. W miejsce przestrzeni V, zawierającej tylko dwa podzbiory V i Λ (które interpretować możemy jako wartości „prawda“ i „fałsz“), występuje w przypadku logik nieklasycznych nieskończona przestrzeń X, której podzbiory interpretujemy jako różne wartości logiczne.*
>
> [. . .]
>
> *Dla oszczędności miejsca zajmujemy się tylko jednym systemem nieklasycznym, mianowicie systemem Heytinga, który nazywamy logiką konstruktywną. Wyniki nasze dają się jednak przenieść bez trudności na inne systemy nieklasyczne, np. te, które opisane są w pracy Rasiowa-Sikorski [1].* [RM53]

[1] est [RS53] (v. infra).

Sémantiques topologiques propositionnelles. • Sémantique topologique pour Λ^i_0 : [Tar38a]. • L'interprétation topologique de Λ°_0 a pour précurseur [Tan38] : quelques trivialités formelles, mais pas de sémantique topologique au sens contemporain. Celle-ci ap-

---

[RM53] : Helena Rasiowa et Andrzej Mostowski. « O geometrycznej interpretacji wyrażeń logicznych ». In : *Stud. Log.* 1 (1953), p. 254-275
[RS53] : Helena Rasiowa et Roman Sikorski. « Algebraic treatment of the notion of satisfiability ». In : *Fund. Math.* 40 (1953), p. 62-95
[Tan38] : Tsao-Chen Tang. « Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calculus of strict implication ». In : *Bull. Am. Math. Soc.* 44 (1938), p. 737-744

paraît vraiment dans [MT48]. • Le passage à une logique quantifiée prit du temps, et un détour par les sémantiques algébriques.

Harmonisation des sémantiques* algébriques *élémentaires. • En logique élémentaire, Mostowski pour Λ^i [Mos48] puis Rasiowa pour Λ° [Ras51] avaient déjà proposé une sémantique d'inspiration algébrique. Les valeurs étaient dans les structures algébriques associables à des espaces topologiques (i.e. $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ et $P_\square(\mathcal{E})$), sans faire le lien. • [RS53] propose une sémantique algébrique harmonisée pour le « calcul de Lewis » (logique modale ; v. § H, notes conclusives) et le « calcul de Heyting » (logique intuitionniste ; v. § G, notes conclusives), puis réalise les structures algébriques concernées dans celles d'espaces topologiques [RS53, §§ 10–11]. Cette harmonisation est trop souvent omise dans la littérature. • Il s'agit d'*harmonisation* et non d'*unification* : une unification complète demanderait des treillis de Heyting modaux, et l'on évite le sujet.

Sémantiques topologiques élémentaires. • Garder à l'esprit que les sémantiques topologiques sont *antérieures* aux multivers de Kripke (§ G, notes conclusives, § H, notes conclusives). • Il est difficile de dater le passage d'une interprétation algébrique à une interprétation topologique, implicite dès [RS53]. A posteriori la différence apparaît ténue ; pas à l'époque. • L'interprétation topologique au sens moderne peut apparaître dans [RM53] de Rasiowa-Mostowski (auteurs nommés dans cet ordre), qui donne les détails seulement pour Λ^i mais couvre aussi Λ°. L'article cite [Tar38a] mais ni [Tan38], ni [McK41], ni [MT48]. • La sémantique topologique a gagné en visibilité après [**Rasiowa-Sikorski**] ; même ce texte est insuffisamment cité. Les départements de philosophie préfèrent toujours la sémantique de Kripke, plus simple et pourtant moins souple. On peut y voir un progrès pédagogique mais une régression mathématique. Elle revient à se restreindre aux espaces d'Alexandroff dans l'étude des liens entre logique et algèbre topologique. • Dans le cadre général, les nombreux articles autour de [Kis10] ne changent pas fondamentalement la donne. La mode est davantage aux interprétations en théorie de la mesure, i.e. dans l'algèbre des mesurables modulo presque partout [Lin66].

Complétude, universalité. • Relire § D, notes conclusives. Les travaux dédiés tendent à appeler « théorème de McKinsey-Tarski » la forme d'universalité spécifique à leur logique, sans parler du théorème D.3 en algèbre topologique. • Λ^i_0 : [Tar38a, zweiter Hauptsatz] démontre la complétude en sémantique topologique, et l'universalité (faibles, i.e. avec $\Phi = \varnothing$) de toute une classe d'espaces topologiques. • Λ°_0 : complétude en sémantique topologique dans [McK41, Theorem 15]. Toujours pour Λ°_0, la recherche d'espaces universels commence avec [**MT44**, Theorem 5.10] ($\mathbb{R}^n$), généralisé dans [**Rasiowa-Sikorski**, XI.11.1] qui homogénéise le sujet et passe en logique élémentaire. • Théorème 10 pour Λ^i : [Kri65]. L'analogue pour Λ° est à chercher dans les travaux antérieurs de Kripke. • Théorème 11 (Λ^i seule) : [Moe82]. • On n'a pas encore d'analogue pour Λ° ; v. *Logique d'un espace* infra.

Sémantique de Joyal. Son attribution ne fait pas de doute, mais on n'a pas de première trace [BJ81]. Un jalon important pour la communauté logique est [FS79]. Cette sémantique est « la bonne » si l'on n'a pas peur de l'abstraction. Déformant la notion

[Kis10] : Kohei Kishida. « Generalized topological semantics for first-order modal logic ». Thèse de doct. University of Pittsburgh, 2010. 294 p.

[Lin66] : Per Lindström. « First order predicate logic with generalized quantifiers ». In : *Theoria* 32 (1966), p. 186-195

[BJ81] : André Boileau et André Joyal. « La logique des topos ». In : *J. Symbolic Logic* 46.1 (1981), p. 6-16

[FS79] : Michael Fourman et Dana Scott. « Sheaves and logic ». In : *Applications of sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).* T. 753. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1979, p. 302-401 d'espace topologique en *site*, on arrive en logique catégorique.

- **Terminologie.** • L'expression « sémantique de Kripke-Joyal » rend hommage à deux grandes figures, mais entretient la confusion. Celle de Kripke ne concerne que les relations binaires, mais pour les logiques intuitionniste et modales : c'est la sémantique des mondes accessibles. Celle de Joyal concerne tous les espaces topologiques (voire les sites), mais pour la seule logique intuitionniste. • L'expression « sémantique de Rasiowa » n'est pas conventionnelle ; elle est introduite pour l'importance considérable de Rasiowa dans le sujet.

- **« Logique d'un espace ».** Soit $\mathcal{E} = (E\,;\,\mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle parfois « logique de $\mathcal{E}$ » l'ensemble des énoncés φ (intuitionnistes, resp. modaux) tels que $[\![\varphi]\!] = \mathcal{E}$. • Déterminer « la logique de $\mathcal{E}$ » revient donc à tenter de décrire certains filtres de treillis de Heyting ou d'anneaux de Boole modaux. Variante : avec une classe d'espaces topologiques. • Le théorème 11 signifie qu'en langage dénombrable, « la logique » intuitionniste d'un espace métrisable sans points isolés est l'ensemble des théorèmes de $\Lambda^i(\mathcal{L})$. On ne connaît pas de caractérisation topologique des espaces ayant cette universalité, donc le sujet n'est pas entièrement clos. L'intérêt mathématique d'opérer avec des $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ de domaine constant [Kre19] n'est pas évident. • Le sujet est plus délicat dans Λ°, faute d'analogue du théorème 11. Référence en logique modale *propositionnelle* [BB07]. La littérature spécialisée est souvent délayée ; bien que [Moe82] couvre le cas de Λ°_0, l'article n'est pas toujours cité. • Résultat moins trivial : il existe un espace Λ°_0-universel et *normal* ss'il existe un cardinal mesurable (§ SÉ5) [Bez+21]. • Logique élémentaire Λ° : $\mathbb{Q}$ est universel [Kre14]. C'est actuellement tout ce qu'on sait [Kre19, p. 407]. • Ex. I.5 : questions a.–b. Rasiowa-Sikorski, inspirés par Kuratowski [**Rasiowa-Sikorski**, p. 487] ; questions c.–d. [Kre14, Theorem 3.4].

- **Espaces à environs.** • En raison des propriétés de l'opération $\circ X$, seuls les anneaux intérieurs (§ D.1 et ex. D.3) admettent des représentations topologiques. Pour étendre aux anneaux modaux quelconques, il faut généraliser la notion d'intérieur, i.e. de voisinage. • Une opération $i\colon P(E) \to P(E)$ correspond à une fonction $\mathcal{V}\colon E \to P(P(E))$. Un *espace à environs* est un ensemble muni d'une fonction $i\colon P(E) \to P(E)$, ou de manière équivalente $\mathcal{V}\colon E \to P(P(E))$. Cette notion étend à la fois :

  – la notion d'espace topologique,
  – la notion de graphe d'accessibilité.

• Les sémantiques de Kripke et de Rasiowa sont ainsi des cas particuliers d'une sémantique « à environs ». Celle-ci est souvent attribuée à Montague [Mon70, p. 147] et Scott [Sco70, p. 160], indépendamment : « *According to Scott the idea of neighborhood semantics is implicit in older work of McKinsey and Tarski who therefore would be regarded as the true creditors. However that is, it seems that the importance of this kind of semantics was realized first by Montague and*

[Kre19] : Philip Kremer. « Quantified intuitionistic logic over metrizable spaces ». In : *Rev. Symb. Log.* 12.3 (2019), p. 405-425
[BB07] : Johan van Benthem et Guram Bezhanishvili. « Modal logics of space ». In : *Handbook of spatial logics.* Springer, Dordrecht, 2007, p. 217-298
[Bez+21] : Guram Bezhanishvili et al. « Characterizing existence of a measurable cardinal via modal logic ». In : *J. Symb. Log.* 86.1 (2021), p. 162-177
[Kre14] : Philip Kremer. « Quantified modal logic on the rational line ». In : *Rev. Symb. Log.* 7.3 (2014), p. 439-454
[Mon70] : Richard Montague. « Pragmatics and Intensional Logic ». In : *Synthese* 22.1/2 (1970), p. 68-94
[Sco70] : Dana Scott. « Advice on modal logic ». In : *Philosophical Problems in Logic. Some Recent Developments.* Dordrecht : Reidel, 1970, p. 143-173

Scott. » [Segerberg, pp. 72–73] • Cette sémantique à environs permet de transposer un pan de la théorie modale S_4 existante au cadre modal général. Mais l'analogue du théorème 11 fait toujours défaut.

§ J. Calcul des séquents

Invitation à la théorie de la démonstration pure : le *calcul des séquents* libère des symétries pour $\vdash$, et analyse structurellement la déduction sans référence sémantique (§ J.1). L'élimination des coupures est le théorème principal, le « Hauptsatz » (§ J.2) aux nombreuses conséquences (§ J.3). La section n'est qu'un aperçu et ne donne aucune démonstration.

Prérequis : § 9.

Hilbert modélisait la démonstration par axiomes, avec pour seule règle $\to_e$; cette formalisation est artificielle et demande un effort d'interprétation à lecture ou écriture. Gentzen a introduit la déduction naturelle (§ 9), qui formalise de façon convaincante notre activité « hypothético-déductive ». Il est également l'inventeur du *calcul des séquents*. Sans être une transcription immédiate de la pratique mathématique, ce calcul possède d'excellentes propriétés structurelles qui en font la base de la théorie de la démonstration.

La différence entre déduction naturelle et calcul des séquents est une symétrie retrouvée. En déduction naturelle on fait un ensemble d'hypothèses pour montrer une conclusion ; l'interprétation intuitive de l'ensemble d'hypothèses est une conjonction, mais il y a une seule conclusion (ceci reflète notre habitude de démontrer une chose à la fois). En calcul des séquents on fait un ensemble d'hypothèses pour montrer un *ensemble de conclusions* ; l'interprétation intuitive de cet ensemble est une *disjonction*.

Définition (séquent)**.**

— Un *séquent* (général) est une expression $\Phi_g \vdash \Phi_d$ où Φ_g et Φ_d sont des ensembles de formules.

— Un *séquent intuitionniste* est un séquent où Φ_d est au plus singleton.

L'interprétation intuitive de $\Phi_g \vdash \Phi_d$ est : « supposant la conjonction Φ_g, il y a une preuve de la disjonction Φ_d ». Les ensembles peuvent être vides ; notamment $\bot$ n'a plus d'utilité car c'est la disjonction de $\varnothing$. Ainsi $\Phi_g \vdash \varnothing$, noté plus simplement $\Phi_g \vdash$, signifie que Φ_g est contradictoire.

§ J.1. Règles pour les séquents

Chaque règle sauf l'axiome vient en version gauche et droite. En théorie de la démonstration on juxtapose usuellement les formules au lieu d'écrire des accolades. *Contraction* et *permutation* sont mentionnées en remarque ci-dessous. La *coupure* est définie en § J.2.

$$\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\ \mathrm{Ax}$$

$$\dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d}{\Phi_g, \chi \vdash \Phi_d}\ \mathrm{Aff}_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi}\ \mathrm{Aff}_d$$

$$\dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi}{\Phi_g, \neg\chi \vdash \Phi_d}\ \neg_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g, \chi \vdash \Phi_d}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \neg\chi}\ \neg_d$$

$$\dfrac{\Phi_g, \chi_1, \chi_2 \vdash \Phi_d}{\Phi_g, \chi_1 \wedge \chi_2 \vdash \Phi_d}\ \wedge_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1 \quad \Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_2}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1 \wedge \chi_2}\ \wedge_d$$

$$\dfrac{\Phi_g, \chi_1 \vdash \Phi_d \quad \Phi_g, \chi_2 \vdash \Phi_d}{\Phi_g, \chi_1 \vee \chi_2 \vdash \Phi_d}\ \vee_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1, \chi_2}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1 \vee \chi_2}\ \vee_d$$

$$\dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1 \quad \Phi_g, \chi_2 \vdash \Phi_d}{\Phi_g, \chi_1 \to \chi_2 \vdash \Phi_d}\ \to_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g, \chi_1 \vdash \Phi_d, \chi_2}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1 \to \chi_2}\ \to_d$$

$$\dfrac{\Phi_g, \chi[x := t] \vdash \Phi_d}{\Phi_g, \forall x\ \chi \vdash \Phi_d}\ \forall_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \forall x\ \chi}\ \forall_d$$

$$\dfrac{\Phi_g, \chi \vdash \Phi_d}{\Phi_g, \exists x\ \chi \vdash \Phi_d}\ \exists_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi[x := t]}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \exists x\ \chi}\ \exists_d$$

Comme en § 9.2 il y a pour $\forall_g$ et $\exists_d$ une clause de substituabilité ; pour $\forall_d$ et $\exists_g$, une de non-liberté.

Remarques

— La théorie de la démonstration compte parfois le nombre d'occurrences des formules dans Φ_g et Φ_d. Ceux-ci ne sont alors plus des ensembles mais des *multi-ensembles finis*, i.e. suites finies à permutation près.

Pour gérer correctement les répétitions, il faut alors introduire les règles structurelles de *contraction* :

$$\dfrac{\Phi_g, \chi, \chi \vdash \Phi_d}{\Phi_g, \chi \vdash \Phi_d}\ \mathrm{Cont}_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi, \chi}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi}\ \mathrm{Cont}_d$$

— Si l'on décide de formaliser les multi-ensembles par des suites (i.e. de restaurer un ordre), il faut en outre introduire des règles de *permutation* :

$$\dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d}{\Phi_g^\sigma \vdash \Phi_d}\ \mathrm{Aut}_g \quad\Bigg|\quad \dfrac{\Phi_g \vdash \Phi_d}{\Phi_g \vdash \Phi_d^\sigma}\ \mathrm{Aut}_d$$

où σ est une permutation de Φ_g, resp. Φ_d. La *théorie de la démonstration non commutative* emploie des « piles » d'énoncés non permutables.

— Comme Φ_d n'est pas nécessairement singleton, le calcul des séquents ne reflète pas la rédaction naïve où l'on démontre un seul énoncé à la fois).

— On n'élimine pas les symboles, ni les formules. C'est un calcul déductif *sans perte d'information.*

— La symétrie des règles tient à l'automorphisme involutif qui fait $\wedge \leftrightarrow \vee$, $\forall \leftrightarrow \exists$, $\vdash \leftrightarrow \dashv$, et fixe $\neg$.

— Le *calcul des séquents intuitionniste* est la variante où les termes de droite ont au plus une formule. Pour formaliser $\vee_d$, il faut la présenter comme en déduction naturelle :

$$\frac{\Phi \vdash \chi_1}{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2}\ {\scriptstyle \vee_d(1)} \qquad \frac{\Phi \vdash \chi_2}{\Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2}\ {\scriptstyle \vee_d(2)}$$

§ J.2. La règle de coupure, et son élimination

La *coupure* est la « règle » suivante :

$$\frac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi \quad \Phi_g, \chi \vdash \Phi_d}{\Phi_g \vdash \Phi_d}\ {\scriptstyle \text{Coup}}$$

Remarques

— Cela revient à démontrer et utiliser le lemme auxiliaire χ, sans le mentionner dans l'énoncé du théorème final.

— La coupure, i.e. perte de χ, est une *destruction d'information* ; le calcul sans coupure de § J.1 ne permet pas cette destruction.

La théorie de la démonstration est née avec le résultat suivant.

Théorème (Gentzen ; « Hauptsatz », « élimination des coupures »)**.** Si $\Phi_g \vdash \Phi_d$, alors il y a une déduction sans coupure. C'est encore vrai en calcul intuitionniste.

Remarques

— Le théorème se démontre de manière effective au moyen de récurrences judicieuses mais laborieuses ; le coût calculatoire est prohibitif. Il existe aussi des démonstrations sémantiques, étrangères à l'esprit du domaine.

— Il y a une notion de coupure en déduction naturelle, et un résultat d'élimination des coupures ; les énoncés sont plus laborieux. En théorie de la démonstration, le calcul des séquents est plus maniable que la déduction naturelle.

§ J.3. Conséquences de l'élimination

Corollaire A (équivalence des formalismes)**.** En notation évidente :

- $\Phi \vdash \chi$ en déduction naturelle classique ssi $\Phi \vdash \chi$ en calcul des séquents classique ;
- $\Phi \vdash \chi$ en déduction naturelle intuitionniste ssi $\Phi \vdash \chi$ en calcul des séquents intuitionniste (avec des Φ_d au plus singleton).

Démonstration. On montre d'abord que $\Phi \vdash \chi$ en déduction naturelle ssi $\Phi \vdash \chi$ en calcul des séquents *avec coupure*. Les règles gauches correspondent aux éliminations et les règles droites aux introductions. Le résultat est donc corollaire du Hauptsatz. □

On définit la collection des sous-formules de φ de sorte que chaque instance $\varphi[x := t]$ soit sous-formule de $(\Lambda x)\varphi$. Le reste de la définition est clair.

Corollaire B (propriété des sous-formules)**.** Si $\Phi_g \vdash \Phi_d$, alors il existe une dérivation dans laquelle toutes les formules apparaissant sont de la forme $\chi[\mathbf{x} := \mathbf{t}]$, pour des sous-formules χ de $\Phi_g \cup \Phi_d$ et des multitermes $\mathbf{t}$.

Démonstration. C'est le cas pour une dérivation sans coupure car toutes les règles augmentent la complexité d'au moins une formule présente. □

Corollaire C (cohérence)**.** Le calcul des séquents (et donc les logiques classique et intuitionniste) est cohérent : on ne peut pas dériver $\vdash$.

Démonstration. C'est évident par correction de $(\vdash, \vDash)$, mais la théorie de la démonstration raisonne structurellement, sans référence à $\vDash$. L'information croît dans une déduction sans coupures (propriété des sous-formules), donc aucune ne termine en $\vdash$. □

Le résultat suivant a déjà été obtenu par des moyens sémantiques en § G.3. On note $\Vdash$ la déduction en logique intuitionniste.

Corollaire D (caractère constructif de LI)**.** La logique intuitionniste est constructive : si $\Vdash \chi_1 \vee \chi_2$, alors $\Vdash \chi_1$ ou $\Vdash \chi_2$; si $\Vdash \exists x\ \chi$ alors il y a un terme tel que $\Vdash \chi[x := t]$.

Démonstration. Supposons $\Vdash \phi_1 \vee \phi_2$. Par élimination, il existe une déduction sans coupures dans $\Vdash$. À chaque étape elle a au plus un membre à droite. Donc elle a dû finir en $\vee_d$. L'étape immédiatement précédente était donc $\Vdash \chi_1$ ou $\Vdash \chi_2$. Même raisonnement pour l'existentiel. □

Enfin l'élimination a beaucoup clarifié les travaux de Herbrand, qui la précèdent. Il reste un peu de travail pour déduire du Hauptsatz le résultat suivant.

Corollaire E (« Herbrand-Gentzen »)**.** Soit S un séquent dérivable $\Phi_g \vdash \Phi_d$, où toutes les formules sont en forme prénexe (v. ex. 6.3). Alors il existe un séquent S' de forme $\Phi'_g \vdash \Phi'_d$ où toutes les formules sont sans quantificateurs et tel que :

— S' est dérivable ;

— de S' on peut dériver S grâce aux seules règles (structurelles et) de quantificateurs.

Les règles « structurelles » sont l'affaiblissement, la contraction, et les permutations.

Exercices

J.1. On note $\chi_1 \backslash \chi_2$ la formule $\chi_1 \wedge \neg\chi_2$. Dériver les pseudo-règles suivantes :

$$\frac{\Phi_g, \chi_1 \vdash \Phi_d, \chi_2}{\Phi_g, \chi_1 \backslash \chi_2 \vdash \Phi_d} \backslash_g \qquad \Bigg| \qquad . \frac{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1 \quad \Phi_g, \chi_2 \vdash \Phi_d}{\Phi_g \vdash \Phi_d, \chi_1 \backslash \chi_2} \backslash_d$$

J.2.

a. Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ des uplets disjoints de variables. Soit Θ une théorie axiomatisée par des énoncés universels ($\forall \dots \forall$ sans quantificateurs). Soit $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ une formule sans quantificateurs. On suppose que $\Theta \vdash (\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\varphi$. Montrer qu'il existe des multitermes $\mathbf{t}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{x})$ à variables $\subseteq \mathbf{x}$, en nombre fini et tels que :

$$\Theta \vdash (\forall \mathbf{x}) \left(\bigvee_{i=1}^{k} \varphi[\mathbf{x}, \mathbf{t}_i(\mathbf{x})] \right),$$

où la dernière formule désigne bien sûr $\varphi[\mathbf{y} := \mathbf{t}_i]$.

b. Démontrer la constructivité de $\exists$ en logique intuitionniste : si $\Vdash \exists x \chi$, alors il existe un terme t tel que $\Vdash \chi[t]$.

Notes conclusives

Très introductif : [David-Nour-Raffalli, chapitre 5]. Chef-d'œuvre difficile : [Girard].

- **Repères historiques**

  Eine nähere Untersuchung der besonderen Eigenschaften des natürlichen Kalküls führte mich schließlich zu einem sehr allgemeinen Satz, den ich im folgenden „Hauptsatz“ nennen will.

  Der Hauptsatz besagt, daß sich jeder rein logische Beweis auf eine bestimmte, übrigens keineswegs eindeutige, Normalform bringen läßt. Die wesentlichsten Eigenschaften eines solchen Normalbeweises lassen sich etwa so ausdrücken: Er macht keine Umwege. Es werden in ihm keine Begriffe eingeführt, welche nicht in seinem Endergebnis enthalten sind und daher zu dessen Gewinnung notwendig verwendet werden müssen.

  Der Hauptsatz gilt sowohl für die klassische als auch für die intuitionistische Prädikatenlogik.

  Um ihn in bequemer Form aussprechen und beweisen zu können, mußte ich einen besonders dafür passenden logischen Kalkül zugrunde legen. Hierzu erwies sich der natürliche Kalkül nicht als geeignet. [**Gen35a**]

Calcul des séquents. • Comme la déduction naturelle, le calcul des séquents et l'élimination des coupures sont de Gentzen [**Gen35a**], [**Gen35b**] (v. aussi [Gentzen]). Plus dans [Pla12]. • Le renouveau de l'intérêt pour la déduction naturelle date de [Prawitz], qui contient une élimination « native » des coupures pour ce calcul (Gentzen n'en disposait apparemment que pour la déduction naturelle intuitionniste). Notamment, on peut sans référence sémantique établir que la déduction naturelle est cohérente, i.e. ne dérive pas $\vdash\bot$.

Hauptsatz. • [**Gen35a**, p. 195]. • Il a en théorie de la démonstration l'importance du théorème de compacité en théorie des modèles. • On peut démontrer le Hauptsatz par des moyens sémantiques. Cela revient essentiellement à établir la complétude de $\Lambda_{\omega,\omega}$ sans utiliser $\to_e$, i.e. sans l'argument : « si $\varphi_1 \to \varphi_2 \in \Theta$ et $\varphi_1 \in \Theta$, alors $\varphi_2 \in \Theta$ ». [Glu82] (généralisé dans [Tak85]) mène *deux* lemmes de Lindenbaum simultanés en logique positive, dans l'esprit de l'exercice 10.6. • [RS59] pour une preuve en

[David-Nour-Raffalli] : René David, Karim Nour et Christophe Raffalli. *Introduction à la logique.* 2e éd. Sciences sup. 2004. 352 p.

[Girard] : Jean-Yves Girard. *Proof theory and logical complexity.* T. 1. Studies in Proof Theory. Monographs. Bibliopolis, Naples, 1987, p. 505

[**Gen35a**] : Gerhard Gentzen. « Untersuchungen über das logische Schließen I ». In : *Math. Z.* 39.1 (1935), p. 176-210

[**Gen35b**] : Gerhard Gentzen. « Untersuchungen über das logische Schließen II ». In : *Math. Z.* 39.1 (1935), p. 405-431

[Gentzen] : Gerhard Gentzen. *Recherches sur la déduction logique.* T. 5. Philosophie de la matière. Traduction et commentaire par Robert Feys et Jean Ladrière. Paris : Presses Universitaires de France, 1955, p. xi+170

[Pla12] : Jan von Plato. « Gentzen's proof systems: byproducts in a work of genius ». In : *Bull. Symbolic Logic* 18.3 (2012), p. 313-367

[Prawitz] : Dag Prawitz. *Natural deduction. A proof-theoretical study.* T. 3. Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy. Stockholm : Almqvist & Wiksell, 1965, p. 113

[Glu82] : Jürgen-Michael Glubrecht. « Ein Vollständigkeitsbeweis für schnittfreie Kalküle mit der Maximalisierungsmethode von Henkin ». In : *Arch. Math. Logik Grundlag.* 22.3-4 (1982), p. 159-166

[Tak85] : Mitio Takano. « Completeness of a cut-free calculus with equality and function constants ». In : *Arch. Math. Logik Grundlag.* 25.1-2 (1985), p. 37-41

logique algébrique.

Théorème de Herbrand (ex. J.2). • « *Ein wichtiger Spezialfall des Hauptsatzes wurde bereits von Herbrand auf völlig anderem Wege bewiesen.* » [**Gen35a**, p. 177] • [Her30], annoncé dans [Her29a] ; il manque juste la satisfaction en domaine dénombrable (et Skolem savait le faire) pour aboutir au théorème de complétude, comme dans la preuve de Gödel. La vision de Herbrand était très syntaxique. • D'après la préface de Heijenoort au recueil posthume [**Herbrand**], la preuve d'origine est erronée. Dans le même volume signalons la belle notice biographique rédigée par Chevalley et Lautman. • Application amusante : le « postulat des parallèles » n'est pas conséquence des autres axiomes d'Euclide-Tarski (§ L, notes conclusives). • En logique algébrique, le théorème de Herbrand peut se démontrer par la méthode « de Rasiowa-Sikorski » [ŁMR56], corr. en [ŁMR61]. Pour la logique informatique, la preuve Łoś-Mostowski-Rasiowa paraît abstraite, d'où sa relative obscurité. • Plus sur le théorème de Herbrand en logique informatique : [Bus95].

Misc. • On peut démontrer l'interpolation de Craig (§ 8, notes conclusives) grâce aux normalisations de preuve à la Herbrand-Gentzen, ce que faisait [**Cra57a**]. Il est plus simple, mais non instantané, de partir du Hauptsatz et d'en tirer l'interpolation comme corollaire. Détails accessibles dans [Lyndon].

• **En logique modale.** La théorie de la démonstration de la logique modale émerge progressivement. Les variations sur le calul des séquents n'ont pas toutes bonne presse dans les cercles les plus orthodoxes. Aperçu dans [PR12].

• **Incidences de la théorie de la démonstration.** • Au début du XXI^{e} siècle, une forme de théorie de la démonstration, souvent mêlée à l'approche catégorique, vise un rôle dans la pratique des mathématiques « conventionnelles ». • La *démonstration automatique* peut signifier deux activités distinctes :

1. la *certification de preuve*, i.e. la vérification de résultats existants. Parmi les triomphes récents, la certification du théorème de Feit-Thompson (et pourquoi pas l'étude de l'argument ontologique de Gödel ; v. § H, notes conclusives). • Ce thème a des applications économiques via la *correspondance preuve-programme* : car l'industrie veut surtout certifier du code informatique. • Pour tempérer l'enthousiasme, on entend parfois que les vérificateurs de démonstration seront aux mathématiques du XXI^{e} siècle,

[Her30] : Jacques Herbrand. « Recherches sur la théorie de la démonstration ». Thèse de doct. Faculté des Sciences de Paris, 1930, p. 128

[Her29a] : Jacques Herbrand. « Sur quelques proprietes des propositions vraies et leurs applications ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 188 (1929), p. 1076-1078

[**Herbrand**] : Jacques Herbrand. *Écrits logiques.* Paris : Presses Universitaires de France, 1968. 244 p.

[ŁMR61] : Jerzy Łoś, Andrzej Mostowski et Helena Rasiowa. « Addition au travail "A proof of Herbrand's theorem" ». In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 40 (1961), p. 129-134

[Bus95] : Samuel Buss. « On Herbrand's theorem ». In : *Logic and computational complexity (Indianapolis, IN, 1994).* T. 960. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 1995, p. 195-209

[**Cra57a**] : William Craig. « Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem ». In : *J. Symbolic Logic* 22 (1957), p. 250-268

[Lyndon] : Roger Lyndon. *Notes on logic.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 6. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1966, p. vi+97

[PR12] : Francesca Poggiolesi et Greg Restall. « Interpreting and Applying Proof Theories for Modal Logic ». In : *New Waves in Philosophical Logic.* Sous la dir. de Greg Restall et Gillian Russell. London : Palgrave Macmillan UK, 2012, p. 39-62

ce que les logiciels de traitement de texte furent à la fin du XX^e^ : un changement dans l'économie éditoriale (marginal, car la relecture n'est pas rémunérée), un outil quotidien et un nouveau *geste* professionnel, mais pas un changement de paradigme ;

2. l'obtention de nouveaux théorèmes. Le rêve est ancien ; il ne s'est pas réalisé dans les mathématiques conventionnelles bien que certains articles soient par provocation *cosignés avec des ordinateurs*. Part de la communauté cache sa peur d'être remplacée derrière de la goguenardise, et campe sur une lecture excessive des phénomènes de limitation des années 1930, ou reprend l'image des saucisses de Poincaré [Poi05, p. 816].

Quoi qu'il advienne, la théorie de la démonstration est un nouveau terrain pour l'intuition scientifique ; mais elle fait sortir de la logique mathématique au sens du présent ouvrage.

[Poi05] : Henri Poincaré. « Les mathématiques et la logique ». In : *Revue de métaphysique et de morale* 13 (1905), p. 815-835