Compléments au chapitre III
(« Analyse modèle-théorique »)

Aperçu du chapitre. La logique révèle de puissants *principes de transfert* dans ACF (§ K). Le *théorème d'Arrow* (§ M) apporte une réponse attristante à des problèmes d'agrégation des préférences ; sa démonstration est grandement clarifiée par les ultrafiltres. Les *amalgames* de Fraïssé (§ N) explorent la notion d'extension universelle, et d'objet combinatoire limite. Le *théorème de Lindström* (§ O) caractérise la logique élémentaire.

§ K. Une application : ACF

On démontre en quelques instants le *Nullstellensatz* de Hilbert, le théorème constructible de Chevalley, le principe de transfert de Lefschetz, le théorème de surinjectivité dit « d'Ax-Grothendieck » (§ K.1). Puis on reprend : la catégoricité non dénombrable d'ACF_q semble être au cœur des phénomènes (§ K.2).

Prérequis : §§ 14–18.

§ K.1. De la logique à l'algèbre

Lemme (de va-et-vient)**.**

(i) Deux corps algébriquement clos $\mathbb{K}, \mathbb{L} \models \mathrm{ACF}$ sont 0-isomorphes ssi $\operatorname{car} \mathbb{K} = \operatorname{car} \mathbb{L}$.

(ii) Un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ est ω-saturé ssi $\operatorname{degtr}(\mathbb{K}/\mathbb{K}_0) \geqslant \aleph_0$, où $\mathbb{K}_0$ est le sous-corps premier.

(iii) Les 0-isomorphismes de domaine fini entre corps algébriquement clos ω-saturés sont des ∞-isomorphismes.

Démonstration.

(i) Implicitement on a choisi le langage des anneaux ; la sous-structure $\langle\varnothing\rangle$ est alors le sous-*anneau* premier. Cela suffit pourtant à distinguer la caractéristique : on trouve $\mathbb{F}_p$ en caractéristique $p > 0$ ou $\mathbb{Z}$ en caractéristique nulle. Donc $\mathbb{K} \simeq_0 \mathbb{L}$ ssi $\langle\varnothing\rangle_{\mathbb{K}} \simeq_0 \langle\varnothing\rangle_{\mathbb{L}}$ ssi $\operatorname{car}\mathbb{K} = \operatorname{car}\mathbb{L}$.

(ii) Si $\mathbb{K}$ est ω-saturé, il réalise le n-type « il existe une famille de degré de transcendance n » pour chaque n. La réciproque ne sera complète qu'après le corollaire ; commençons. Si $\mathbb{K}$ a la propriété et que $p(x)$ est un 1-type complet sur $\mathbf{a}$, on peut réaliser p dans une extension élémentaire, disons par $\alpha \in \mathbb{K}^*$ où $\mathbb{K} \preccurlyeq \mathbb{K}^*$. Il y a deux cas :

— α est algébrique sur $\mathbb{K}_0(\mathbf{a})$: alors $\alpha \in \mathbb{K}$ par clôture algébrique ;

— α est transcendant sur $\mathbb{K}_0(\mathbf{a})$: comme $\operatorname{degtr}(\mathbb{K}_0(\mathbf{a})/\mathbb{K}_0) < \aleph_0$ on a $\operatorname{degtr}(\mathbb{K}/\mathbb{K}_0(\mathbf{a}))$ donc il existe déjà une réalisation de p dans $\mathbb{K}$.

Encore faut-il s'être convaincu que ce sont bien là les seules options. Ce sera pleinement rigoureux *après* avoir obtenu l'élimination des quantificateurs.

(iii) On va montrer que c'est le cas *entre modèles de degré de transcendance infini.*

Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{K}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{L}$ des uplets finis 0-isomorphes ; on pose $\mathbb{K}_{\mathbf{a}} = \mathbb{K}_0(\mathbf{a})$ et $\mathbb{L}_{\mathbf{b}} = \mathbb{L}_0(\mathbf{b})$. Par hypothèse, $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ induit $\mathbb{K}_{\mathbf{a}} \simeq \mathbb{L}_{\mathbf{b}}$; notamment $\mathbb{K}_{\mathbf{a}}[X] \simeq \mathbb{L}_{\mathbf{b}}[Y]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, à refléter en un $\beta \in \mathbb{L}$. Il y a deux cas.

— Si α est algébrique sur $\mathbb{K}_{\mathbf{a}}$, alors il y a un polynôme irréductible à coefficients dans $\mathbb{K}_{\mathbf{a}}$ l'annulant, $P^\alpha_{\mathbf{a}}(X)$. Alors $\mathbb{K}_{\mathbf{a},\alpha} \simeq \mathbb{K}_{\mathbf{a}}[X]/(P^\alpha_{\mathbf{a}}(X))$ (corps quotient). Comme $\mathbb{L}$ est algébriquement clos, il existe β annulant $P^\alpha_{\mathbf{b}}(Y)$, le polynôme obtenu en remplaçant les coefficients.

— Si α est transcendant sur $\mathbb{K}_{\mathbf{a}}$, alors $\mathbb{K}_{\mathbf{a},\alpha} \simeq \mathbb{K}_{\mathbf{a}}(X)$. Comme $\operatorname{degtr}(\mathbb{L}/\mathbb{L}_{\mathbf{b}}) \geqslant \aleph_0$, on peut trouver β transcendant sur $\mathbb{L}_{\mathbf{b}}$.

Dans les deux cas on obtient $\mathbb{K}_{\mathbf{a},\alpha} \simeq \mathbb{L}_{\mathbf{b},\beta}$, ce qui montre que tout 0-isomorphisme est un 1-isomorphisme. □

Corollaire. ACF élimine les quantificateurs. Pour $q \in \{0\} \cup \mathcal{P}$, ACF_q est complète.

Démonstration. Appliquer les critères de va-et-vient ω-saturé de § 18.3. □

Remarque. Noter qu'on emploie seulement le va-et-vient entre modèles de degré de transcendance infini. Rétrospectivement l'élimination des quantificateurs entraîne que les types sont bien ceux qu'on croit, et donc que les modèles de degré de transcendance infini sont ω-saturés.

À partir de ces résultats on peut en quelques lignes emporter des phénomènes non triviaux de géométrie algébrique élémentaire.

Corollaire (Nullstellensatz de Hilbert)**.** Soient $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un uplet d'indéterminées, et $I \lhd \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ un idéal propre. Alors il existe $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ annulant I, i.e. vérifiant $(\forall P \in I)(P(\mathbf{a}) = 0)$.

Démonstration. On peut supposer $I = \mathfrak{m}$, idéal maximal. On considère une clôture algébrique du corps quotient, $\mathbb{L} = \overline{\mathbb{K}[\mathbf{X}]/\mathfrak{m}}^{\mathrm{alg}}$. C'est un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{K}$ (car $1 \notin \mathfrak{m}$). Or :

- $\mathbb{L}$ possède une solution à $\mathfrak{m}$ (l'image de $\mathbf{X}$) ;
- l'inclusion $\mathbb{K} \preccurlyeq \mathbb{L}$ est élémentaire (par élimination des quantificateurs) ;
- l'existence d'une solution à $\mathfrak{m}$ est élémentaire à paramètres dans $\mathbb{K}$ (par noethérianité).

Il suit que $\mathbb{K}$ possède une solution. (A posteriori $\mathbb{L} = \mathbb{K}$ par maximalité de $\mathfrak{m}$.) □

Les zéros d'idéaux de polynômes sont fondamentaux en géométrie ; en revanche leur collection n'a pas les propriétés de clôture qu'on peut leur souhaiter. Le remède est l'algèbre constructible.

Définition (fermé affine, ensemble constructible)**.** Soit $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}$.

- Un *fermé affine* de $\mathbb{K}^n$ est un ensemble $V_I = \{\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n : (\forall P \in I)(P(\mathbf{a}) = 0)\}$, pour I un idéal de $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$.
- La collection des *constructibles* de $\mathbb{K}^n$ est l'algèbre booléenne engendrée par les fermés affines.

Corollaire (théorème d'élimination de Chevalley-Tarski)**.** Soit $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}$. Si C est un constructible de $\mathbb{K}^{n+1}$, alors sa projection naturelle sur $\mathbb{K}^n$ est encore constructible.

Démonstration. Un constructible est un ensemble défini par une formule sans quantificateurs. Ainsi $C \subseteq \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}$ est définissable par $\varphi(\mathbf{x}, y, \mathbf{a})$ (sans quantificateurs), et $\pi(C)$ par $(\exists y)\varphi(\mathbf{x}, y, \mathbf{a})$, elle-même équivalente à une formule sans quantificateurs : c'est donc un constructible de $\mathbb{K}^n$. $\square$

On peut aller plus loin.

Corollaire (principe de Lefschetz, et transfert inter-caractéristique)**.** Pour un énoncé $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{ann}}$, il y a équivalence entre :

— il existe un corps $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}_0 \cup \{\varphi\}$;

— $\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$;

— pour tout nombre premier p assez grand il existe un corps $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}_p \cup \{\varphi\}$;

— pour tout nombre premier p assez grand, $\mathrm{ACF}_p \models \varphi$;

— pour une infinité de nombres premiers p il existe un corps $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}_p \cup \{\varphi\}$;

— pour une infinité de nombres premiers p, $\mathrm{ACF}_p \models \varphi$.

Démonstration. Le transfert à caractéristique fixée est par complétude. Il reste donc à montrer : $\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$ ssi ($\mathrm{ACF}_p \models \varphi$ cofiniment souvent) ssi ($\mathrm{ACF}_p \models \varphi$ infiniment souvent).

On suppose que $\mathrm{ACF}_p \models \varphi$ infiniment souvent. Alors $\mathrm{ACF}_0 \cup \{\varphi\}$ est finiment satisfaisable, donc satisfaisable par compacité. Alors par complétude, $\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$. Si non($\mathrm{ACF}_p \models \varphi$ cofiniment souvent), alors par complétude $\mathrm{ACF}_p \models \neg\varphi$ infiniment souvent, et donc $\mathrm{ACF}_0 \models \neg\varphi$ d'après ce qui précède. Ceci montre l'équivalence. $\square$

Corollaire (surinjectivité d'Ax-Grothendieck)**.** Soient $C \subseteq \mathbb{C}^n$ une partie constructible et $f\colon C \to C$ une fonction donnée par des polynômes. Si f est injective, alors elle est surjective.

Démonstration. Par transfert, on se ramène à $\overline{\mathbb{F}_p}$, puis à $\mathbb{F}_q$ pour q assez grand. Voir exercice K.1. $\square$

L'interprétation topologique est la suivante. L'espace de théories $S_0(\mathrm{ACF})$ est naturellement indexé par $\mathcal{P} \cup \{0\}$; les points premiers sont isolés ; 0 est leur point d'accumulation. On vient donc de voir $\mathbb{C}$ comme limite des $\overline{\mathbb{F}_p}$, impression renforcée ci-dessous.

§ K.2. De l'algèbre à la logique

Décrivons les mêmes phénomènes en partant de l'algèbre, supprimant le rôle de la logique.

Fait (Steinitz)**.** Deux corps algébriquement clos de même caractéristique et même degré de transcendance sont isomorphes.

Conséquence modèle-théorique : pour $q \in \mathcal{P} \cup \{0\}$ et $\kappa \geqslant \aleph_1$, la théorie ACF_q est κ-catégorique. (C'est faux en $\aleph_0$.)

Théorème. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers. Alors $\prod_p \overline{\mathbb{F}_p}/\mathcal{U} \simeq \mathbb{C}$.

Démonstration. On rappelle que $\mathbb{C} \models \mathrm{ACF}_0$ est de cardinal continu, i.e. $\operatorname{card}\mathbb{C} = 2^{\aleph_0}$. Soit $\mathbb{K}$ l'ultraproduit. D'après le résultat de Steinitz il suffit de montrer que $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}_0$ et $\operatorname{card}\mathbb{K} = 2^{\aleph_0}$.

Le premier point est clair. D'après le théorème de Łoś, $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}$. En outre à $p_0 \in \mathcal{P}$ fixé, $\{p : \overline{\mathbb{F}_p} \models 1 + \cdots + 1 = 0\} = \{p_0\} \notin \mathcal{U}$ donc encore par le théorème de Łoś, $\mathbb{K} \not\models p_0 = 0$. Il suit $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}_0$.

Le second point est un peu d'arithmétique cardinale ; il suivrait de l'exercice 16.8 mais faisons sans. Oublions tout de la structure algébrique algébrique sous-jacente et montrons que pour tout ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$ on a $\operatorname{card}\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/\mathcal{U} = 2^{\aleph_0}$. Nous invoquerons le théorème de Cantor-Bernstein (§ 1.2). Une inégalité est claire puisque le cardinal de gauche est majoré par $\operatorname{card}\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{N} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$; montrons la réciproque. Dans la n^e copie ne gardons que l'ensemble fini $\{0,1\}^n$; soit $X = \prod_{\mathbb{N}}\{0,1\}^n/\mathcal{U}$. Clairement $\operatorname{card}\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{N}/\mathcal{U} \geqslant \operatorname{card} X$; il suffit ainsi de montrer $\operatorname{card} X \geqslant 2^{\aleph_0}$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des familles cohérentes de suites finies 0 et de 1 :

$$\mathcal{C} = \left\{ (\sigma_n) \in \prod_{\mathbb{N}} \{0,1\}^n : (\forall i \leqslant j)[(\sigma_j)_{|\{0,\ldots,i-1\}} = \sigma_i] \right\} ;$$

c'est l'ensemble des branches dans l'arbre binaire infini, qui a la puissance du continu (§ 1.1).

Reste à montrer que $\mathcal{C}$ s'injecte dans X. Mais si (σ_n) et (τ_n) sont deux suites cohérentes équivalentes modulo $\mathcal{U}$, alors par non-principalité il existe des n arbitrairement grands tels que $\sigma_n = \tau_n$. Par cohérence, on a bien $(\sigma_n) = (\tau_n)$. Donc la fonction naturelle de $\mathcal{C}$ dans X est une injection, ce qui établit enfin :

$$2^{\aleph_0} = \operatorname{card} C \leqslant \operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{N}/\mathcal{U} = \operatorname{card} \mathbb{K}. \qquad \square$$

Remarque. Le fait que la classe d'isomorphisme de $\prod_{\mathcal{P}} \overline{\mathbb{F}_p}/\mathcal{U}$ ne dépende pas de $\mathcal{U}$ est absolument exceptionnel et remarquable ; en général ce type d'isomorphisme, et même la théorie logique, dépend de $\mathcal{U}$. Je ne connais pas de nom à cette propriété.

Corollaire. Transfert dans ACF.

Démonstration. À caractéristique fixée ACF_q est complète, car $\aleph_1$-catégorique (Steinitz). Pour transférer entre caractéristiques, on suppose que $\mathrm{ACF}_p \models \varphi$ infiniment souvent, disons sur l'ensemble $[\![\varphi]\!] = \{p \in \mathcal{P} : \mathrm{ACF}_p \models \varphi\}$. On inclut $[\![\varphi]\!]$ dans un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$. Alors $\mathbb{C} \simeq \prod_{\mathcal{P}} \overline{\mathbb{F}_p}/\mathcal{U} \models \varphi$ d'après le théorème de Łoś. Si réciproquement $[\![\neg\varphi]\!]$ est infini, on choisit $\mathcal{U}$ pour voir $\mathbb{C} \not\models \varphi$. $\square$

Exercices

K.1. Démontrer le principe de surinjectivité « d'Ax-Grothendieck », rappelé ci-dessous.

> Soient $C \subseteq \mathbb{C}^n$ une partie constructible et $f\colon C \to C$ une fonction donnée par des polynômes. Si f est injective, alors elle est surjective.

K.2. Soit G d'ordre p^k agissant polynomialement sur l'ensemble $\mathbb{C}^n$. Montrer que l'action possède un point fixe. (On rappelle qu'un p-groupe fini agissant sur un ensemble d'ordre fini premier à p possède un point fixe.)

K.3 (décomposition de Jordan). Soit $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}$. Alors tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme produit d'un unipotent (I_n+nilpotent) et d'un semi-simple (diagonalisable) qui commutent.

(*) **K.4 (une borne dans le Nullstellensatz).** Tout du long $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

a. (Question de pure algèbre.) Montrer l'énoncé suivant.

> Si $\mathbb{K} \models \mathrm{ACF}$, et $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ sont tels que tout zéro commun aux g_i est aussi zéro de f, alors il existe un entier a et des $h_i \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ tels que $f^a = \sum_i h_i g_i$. $(*)$

Indication : ajouter une variable Y et considérer l'idéal $(1 - Yf, g_1, \ldots, g_m) \trianglelefteq \mathbb{K}[\mathbf{X}, Y]$.

b. (Question de pure algèbre.) Soit $\varphi_{n,d,a}$ l'énoncé suivant.

> Si $f, g_1, \ldots, g_m$ sont des polynômes en n variables de degré $\leqslant d$ tels que tout zéro commun aux g_i est aussi zéro de f, alors $f^a \in (g_1, \ldots, g_m)$.

Montrer que malgré l'absence a priori de borne sur m, $\varphi_{n,d,a}$ équivaut à un énoncé élémentaire.

c. Montrer la version bornée de $(*)$ ci-dessous.

Théorème (Robinson)**.** Pour tous n et d, il existe a tel que $\mathrm{ACF} \models \varphi_{n,d,a}$.

On pourra supposer que c'est faux et choisir des contre-exemples $f_a, g_{a,1}, \dots, g_{a,m} \in \mathbb{K}_a[\mathbf{X}]$ *puis former un ultraproduit.*

K.5 (corps réels clos). On travaille dans $\mathcal{L}_{\text{ann,ord}} = \{<, 0, 1, +, -, \cdot\}$. [Lang, § XI] fournira les prérequis. On admet notamment que tout corps ordonné possède une clôture réelle, unique à isomorphisme près [Lang, Theorem XI.2.2, Theorem XI.2.9].

Définition (RCF)**.** La théorie des corps réels clos RCF (§ 8.1) est donnée par :

- les axiomes de corps commutatif ;
- les axiomes d'un ordre total, compatible avec la structure de corps ;
- l'axiome affirmant que les éléments positifs sont exactement les carrés ;
- pour chaque entier impair, l'axiome affirmant que tout polynôme de degré impair possède une racine.

a. Montrer que tout corps réel clos est de caractéristique nulle, que deux corps réels clos sont toujours 0-isomorphes (au sens de $\mathcal{L}_{\text{ann,ord}}$).

b. La théorie est-elle $2^{\aleph_0}$-, $\aleph_0$-catégorique ?

c. Montrer, ou admettre (c'est purement algébrique), que les 0-isomorphismes de domaine fini entre corps réels clos ω-saturés sont des ∞-isomorphismes.

d. En déduire que RCF est complète et élimine les quantificateurs (dans $\mathcal{L}_{\text{ann,ord}}$). Que se passe-t-il sans $<$?

e. En déduire que toute partie définissable de $\mathbb{R}^1$ est une réunion finie de points et d'intervalles, et que $\mathbb{Z}$ n'est pas définissable.

f. Une partie de $\mathbb{K}^n$ est *semi-algébrique* si elle est dans l'algèbre booléenne engendrée par les $\{\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n : P(\mathbf{a}) = 0\}$ et les $\{\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n : P(\mathbf{a}) > 0\}$.

   Montrer que la collection des parties semi-algébriques est close sous projection.

g. Démontrer le *Nullstellensatz réel* : soient $\mathbb{K}$ un corps réel clos et $I \trianglelefteq \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ un idéal tel que $1 \notin \{P - Q_1^2 - \dots - Q_\ell^2 : P \in I, \ell \in \mathbb{N}, Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]\}$. Alors I possède une solution dans $\mathbb{K}^n$.

h. On admet un point d'algèbre. Un corps est *formellement réel* si aucune somme de carrés non nuls n'y est nulle.

   Lemme ([Lang, Corollary XI.2.3])**.** Tout corps formellement réel $\mathbb{K}$ est ordonnable. Plus finement, si $a \in \mathbb{K}$ n'est *pas* somme de carrés, on peut ordonner $\mathbb{K}$ de sorte que $a < 0$.

   Démontrer que toute fraction rationnelle $f \in \mathbb{R}(\mathbf{X})$ à valeurs positives (hors pôles) est une somme de carrés.

i. On considère la théorie d'un corps ordonné augmentée du schéma : pour chaque formule $\varphi(x, \mathbf{y})$, on met l'axiome $(\forall \mathbf{y})[(\varphi(\cdot, \mathbf{y})$ non vide et majorée$) \to$ (elle a une borne supérieure)]. Montrer que cette axiomatisation et RCF sont équivalentes.

[Lang] : Serge Lang. *Algebra.* third. T. 211. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002, p. xvi+914

Notes conclusives

- **Repères historiques**

  Da das Kontinuum nicht abzählbar ist, so schließt man (§ 23, 6.), daß alle algebraisch abgeschlossenen Körper von der Mächtigkeit des Kontinuums und der Charakteristik 0 *einander isomorph sind.* [Ste10, S. 301]

Corps algébriquement clos. • La catégoricité non dénombrable d'ACF_q est dans le monumental [Ste10, § 23.6 p. 301], point important dans l'histoire de l'algèbre. • La complétude d'ACF_q, l'élimination des quantificateurs, furent annoncées par Tarski en 1948 [Abstracts, résumé 77t p. 64] (« *A decision procedure for* $\mathrm{Th}(L)$ *has been found.* »), qui se penche aussi sur le cas réel clos. On trouve également mention du cas algébriquement clos dans la dernière des *Supplementary Notes* à [**Tarski2**] ; en tous les cas, cela semble avant Robinson [Rob54]. Tarski songeait en priorité au cas réel, et poursuivait des algorithmes d'élimination effectifs ; ce n'est pas le but du présent cours. La version de Chevalley est dans [CC56, Théorème 3], reprise dans [ÉGA.IV.1, Corollaire 1.8.5 p. 239]. Dès [Joy75], Joyal parlait des « théorèmes de Chevalley-Tarski ». • Le principe de Lefschetz, dans son interprétation en logique élémentaire, reste implicite (à ma connaissance) chez Robinson ou Tarski. Mais on peut en avoir une lecture plus ambitieuse, au-delà des seuls énoncés élémentaires. Voir [BE69], dont l'introduction et les remarques historiques sont pleines d'intérêt. • Le théorème « d'Ax-Grothendieck » était connu dès [BR62] mais doit son nom à [Ax68, Theorem C] et indépendamment (mais il faut en reconnaître l'énoncé) [ÉGA.IV.3, Proposition 10.4.11 p. 103]. Dans $\mathbb{C}^n$ il a d'autres preuves comme [Rud95]. • Ex. K.3 : suggéré par Poizat. • Bornes dans les anneaux de polynômes (ex. K.4) : origine [Robinson2].

[Ste10] : Ernst Steinitz. « Algebraische Theorie der Körper ». In : *J. Reine Angew. Math.* 137 (1910), p. 167-309

[Abstracts] : John Green. « The November meeting in Los Angeles ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 55.1 (1949), p. 61-71

[Rob54] : Abraham Robinson. « On predicates in algebraically closed fields ». In : *J. Symbolic Logic* 19 (1954), p. 103-114

[CC56] : Claude Chevalley et Henri Cartan. « Schémas normaux ; morphismes ; ensembles constructibles ». In : *Séminaire Henri Cartan* 8 (1955-1956). talk :7

[ÉGA.IV.1] : Alexander Grothendieck. « Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, première partie ». In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 20 (1964), p. 5-259

[Joy75] : André Joyal. « Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarques sur l'algèbre constructive ». In : *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques* 16.3 (1975). Deuxième colloque sur l'algèbre des catégories, Amiens 1975. Résumés des conférences, p. 217-340

[BE69] : Jon Barwise et Paul Eklof. « Lefschetz's principle ». In : *J. Algebra* 13 (1969), p. 554-570

[BR62] : Andrzej Białynicki-Birula et Maxwell Rosenlicht. « Injective morphisms of real algebraic varieties ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962), p. 200-203

[Ax68] : James Ax. « The elementary theory of finite fields ». In : *Ann. of Math. (2)* 88 (1968), p. 239-271

[ÉGA.IV.3] : Alexander Grothendieck. « Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, troisième partie ». In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 28 (1966), p. 5-255

[Rud95] : Walter Rudin. « Injective polynomial maps are automorphisms ». In : *Amer. Math. Monthly* 102.6 (1995), p. 540-543

[Robinson2] : Abraham Robinson. *Théorie métamathématique des idéaux.* Paris : Gauthier-

Beaucoup plus dans [Schoutens].

Corps réels clos (exercice K.5). • Leur étude doit tout à Emil Artin (père). Même un survol de la notion ne peut faire l'économie du théorème suivant, sorte de réciproque au théorème « de d'Alembert-Gauß ».

Théorème (Artin-Schreier, [AS27, Satz 4])**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. Si l'extension $\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$ est finie (clôture algébrique), alors $\mathbb{K}$ est algébriquement clos ou réel clos.

• On peut faire remonter l'algorithmique pour les corps réels clos à [29] ; Sturm cite explicitement Fourier qui travaillait sur la question. L'intérêt de Tarski pour les corps réels clos remonte au moins à [Tar31a]. Sur le sujet [**Tarski2**] contient à peu près tout, mais le point de vue est très syntaxique et algorithmique. La technique d'élimination de [**Tarski2**] a été améliorée par Seidenberg [Sei54], d'où le nom. (Cohen aussi s'y intéressa, après le forcing, étudiant les corps p-adiques [Coh69].) • Plus sur le sujet : [Dri88]. • Question h. : la solution du 17^e problème de Hilbert [**Hil00a**, Problem 17] est dans [Art27, Satz 4] (pour tout corps réel clos). La preuve modèle-théorique est de Robinson [Rob55b, Theorem 5.2]. Plus sur le 17^{e} problème de Hilbert : [Ben].

• **Sur le théorème de catégoricité de Steinitz.** Il peut aussi se démontrer par la théorie des modèles. D'après [BL71, fin de § 2], une théorie dénombrable est κ-catégorique en tout $\kappa > \aleph_0$ ssi elle est « ω-stable » et « sans paire de Vaught ». On vérifiera donc que ACF a ces deux propriétés modèle-théoriques. C'est évidemment très indirect et bien plus abstrait que la preuve de Steinitz, mais satisfaisant intellectuellement.

• **Un transfert non trivial.** • Soient $\mathbb{K}$ un corps réel clos et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre à division de dimension finie. Alors $\mathbb{K}$ est de dimension $1, 2, 4, 8$. • C'est connu si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (dû à Frobenius). Par complétude de RCF, on peut le transférer à $\mathbb{K}$ quelconque. • On ne connaît apparemment pas de preuve directe

Villars, 1955. 186 p.

[Schoutens] : Hans Schoutens. *The use of ultraproducts in commutative algebra.* T. 1999. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2010, p. x+204

[AS27] : Emil Artin et Otto Schreier. « Algebraische Konstruktion reeller Körper ». In : *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 5.1 (1927), p. 85-99

[29] : « Analyse d'un Mémoire sur la résolution des équations numériques ». In : *Bulletin de Férussac* 11 (1929), p. 419-422

[Tar31a] : Alfred Tarski. « Sur les ensembles définissables de nombres réels I ». In : *Fundam. Math.* 17 (1931), p. 210-239

[Sei54] : Abraham Seidenberg. « A new decision method for elementary algebra ». In : *Ann. of Math. (2)* 60 (1954), p. 365-374

[Coh69] : Paul Cohen. « Decision procedures for real and p-adic fields ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 22 (1969), p. 131-151

[Dri88] : Lou van den Dries. « Alfred Tarski's elimination theory for real closed fields ». In : *J. Symbolic Logic* 53.1 (1988), p. 7-19

[**Hil00a**] : David Hilbert. « Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900 ». In : *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1900), p. 253-297

[Art27] : Emil Artin. « Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate ». In : *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 5.1 (1927), p. 100-115

[Rob55b] : Abraham Robinson. « On ordered fields and definite functions ». In : *Math. Ann.* 130 (1955), p. 275-271

[Ben] : Olivier Benoist. « Writing positive polynomials as sums of (few) squares ». In : *EMS Newsletter* (), p. 8-13

[BL71] : John Baldwin et Alistair Lachlan. « On strongly minimal sets ». In : *J. Symbolic Logic* 36 (1971), p. 79-96

de l'énoncé sans passer par le cas réel. Ceci illustre l'intérêt du transfert : travailler dans un modèle où l'on dispose de plus de structure (ici, la topologie algébrique).

• **Structures algébriques éliminant les quantificateurs.** On peut voir les résultats suivants comme des réciproques à l'étude d'ACF et RCF (exercice K.5).

Théorème ([MMD83, Theorems 1–2])**.**

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps infini dont la $\mathcal{L}_{\text{ann}}$-théorie complète élimine les quantificateurs. Alors $\mathbb{K} \models$ ACF.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné infini dont la $\mathcal{L}_{\text{ann,ord}}$-théorie complète élimine les quantificateurs. Alors $\mathbb{K} \models$ RCF.

L'article contient également des résultats sur les corps valués ; ceux-ci demanderaient quelques notions de plus et nous laissons le sujet.

• **Catégoricité et dimension avant Zilber.** • En § K nous avons donné deux démonstrations modèle-théoriques des mêmes phénomènes. La première emploie les conséquences de l'existence d'une dimension appelée degré de transcendance. La seconde est bâtie sur la propriété de catégoricité. On peut chercher dans quelle mesure ces deux démonstrations n'en sont qu'une. • La question n'est pas celle des liens entre catégoricité et bases de transcendance pour les corps algébriquement clos, liens élucidés par [Ste10]. Il s'agit d'étudier des outils similaires *au-delà du cas des corps*. Peut-on lier le théorème de catégoricité de Morley (§ 15, notes conclusives), à l'existence d'une théorie de la dimension abstraite ? • En effet l'$\aleph_1$-catégoricité reste rare en mathématiques ; les exemples naturels en sont :

– les ensembles sans structures ;
– les espaces vectoriels ;
– les corps algébriquement clos.

Ces trois exemples ont en commun l'existence d'une notion d'indépendance (l'inégalité, la liberté, l'algébrique indépendance) et d'une dimension (le comptage, la dimension linéaire, la dimension transcendante).

Théorème ([Bal73] ; plus ou moins conjecturé en fin de [**Mor65a**])**.** Si T est $\aleph_1$-catégorique, alors il existe une notion de dimension *à valeurs finies* sur les parties définissables.

Cette dimension était employée par Morley dans sa preuve ; les liens avec la géométrie algébrique ne furent entrevus qu'après.

• **Travaux de Zilber ; théorie des modèles et géométrie algébrique.** Zilber a pu donner un sens précis à la conjecture que les ensembles amorphes, les espaces vectoriels, et les corps algébriquement clos sont *essentiellement les seuls exemples* de théories $\aleph_1$-catégoriques, du moins à l'échelle atomique. Le concept de « géométrie » ci-dessous dépasse amplement le cadre d'un premier cours de logique.

Conjecture ([Zil84] ; fausse)**.** Soit T une théorie $\aleph_1$-catégorique. On suppose que dans $\mathbb{M} \models T$, toute partie définissable est finie ou cofinie. Alors on est dans exactement l'un des trois cas suivants :

– $\mathbb{M}$ a une géométrie essentiellement triviale ;
– $\mathbb{M}$ a la même géométrie qu'un espace vectoriel ;
– $\mathbb{M}$ a la même géométrie un corps algébriquement clos.

[MMD83] : Angus Macintyre, Kenneth McKenna et Lou van den Dries. « Elimination of quantifiers in algebraic structures ». In : *Adv. in Math.* 47.1 (1983), p. 74-87
[Bal73] : John Baldwin. « α_T is finite for $\aleph_1$-categorical T ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 181 (1973), p. 37-51
[**Mor65a**] : Michael Morley. « Categoricity in power ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 114 (1965), p. 514-538
[Zil84] : Boris Zilber. « Strongly minimal countably categorical theories II ». In : *Sibirsk. Mat. Zh.* 25.3 (1984), p. 71-88

La conjecture de Zilber est une caractérisation *intrinsèquement modèle-théorique* de la géométrie affine et de la géométrie algébrique. Elle est fausse en son acception littérale [Hru93], mais correcte en une version amendée [HZ93], [Zilber]. • On ne mesure pas l'importance d'une conjecture à sa vérité ou fausseté, mais aux avancées conceptuelles qu'elle a fait naître. La vision de Zilber sur la nature catégorique a déclenché d'autres travaux ; on peut voir comme une conséquence de cette impulsion la démonstration par Hrushovski de la conjecture de Mordell-Lang en toute caractéristique [Hru96]. Une bonne référence est [Bouscaren]. • L'étude de la nature catégorique ne résume pas la théorie des modèles, mais elle en fut un élément rénovateur et fécond. Morley a créé une théorie des modèles adulte ; Zilber l'a réunie à la géométrie.

• ***o*-minimalité.** L'étude modèle-théorique de la géométrie réelle va beaucoup plus loin que la simple description de RCF (exercice K.5) ; on relira la question e..

Définition. Une structure totalement ordonnée $(\mathbb{S}, <, \dots)$ est *o-minimale* si toute partie définissable de $\mathbb{S}^1$ est une réunion finie d'intervalles.

Cette définition de l'*o*-minimalité est la plus simple et non la meilleure ; elle cache entièrement des phénomènes remarquables.

- Les parties définissables de $\mathbb{S}^n$ sont également bien comprises, par un phénomène de « décomposition cellulaire ».
- Si $\mathbb{S}$ est *o*-minimale et $\mathbb{S}' \equiv \mathbb{S}$, alors $\mathbb{S}'$ est encore *o*-minimale : c'est en fait une propriété « forte », i.e. une propriété de $\mathrm{Th}(\mathbb{S})$.

• Dans la lignée des préoccupations de Tarski, l'*o*-minimalité a été introduite par van den Dries [Dri84] puis [van den Dries]. Le nom fut donné par Pillay et Steinhorn [PS86]. • L'*o*-minimalité est parfois présentée comme la réponse des logiciens au vœu d'une « topologie modérée » de l'*Esquisse d'un programme* de Grothendieck. Elle a servi à démontrer des résultats non triviaux de théorie des nombres [Pil11]. • Un jalon important en théorie des modèles est l'*o*-minimalité de $(\mathbb{R}\ ; +, \cdot, \exp)$ [Wil96]. • On

[Hru93] : Ehud Hrushovski. « A new strongly minimal set ». In : t. 62. 2. Stability in model theory, III (Trento, 1991). 1993, p. 147-166

[HZ93] : Ehud Hrushovski et Boris Zilber. « Zariski geometries ». In : *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 28.2 (1993), p. 315-323

[Zilber] : Boris Zilber. *Zariski geometries.* T. 360. London Mathematical Society Lecture Note Series. Geometry from the logician's point of view. Cambridge University Press, Cambridge, 2010, p. xii+212

[Hru96] : Ehud Hrushovski. « The Mordell-Lang conjecture for function fields ». In : *J. Amer. Math. Soc.* 9.3 (1996), p. 667-690

[Bouscaren] : Elisabeth Bouscaren, éd. *Model theory and algebraic geometry.* T. 1696. Lecture Notes in Mathematics. An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture. Springer-Verlag, Berlin, 1998, p. xvi+211

[Dri84] : Laurentius van den Dries. « Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbb{R};, +, \cdot, \exp)$ ». In : *Logic colloquium '82 (Florence, 1982).* T. 112. Stud. Logic Found. Math. North-Holland, Amsterdam, 1984, p. 97-121

[van den Dries] : Laurentius van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures.* T. 248. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1998, p. x+180

[PS86] : Anand Pillay et Charles Steinhorn. « Definable sets in ordered structures I ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 295.2 (1986), p. 565-592

[Pil11] : Jonathan Pila. « *o*-minimality and the André-Oort conjecture for $\mathbb{C}^n$ ». In : *Ann. of Math. (2)* 173.3 (2011), p. 1779-1840

[Wil96] : Alex James Wilkie. « Model completeness results for expansions of the ordered

pourra s'initier dans l'excellent [Wil09].

- **Encore des corps.** Corps différentiellement clos : [Marker-Messmer-Pillay, chap. 2].

§ L. Axiomatisation élémentaire du plan euclidien

Cette courte section présente l'axiomatisation élémentaire de Tarski pour le plan euclidien. La théorie résultante est bi-interprétable avec RCF.

Prérequis : § 13, exercice K.5.

---

§ L.1. Énoncé des axiomes

Langage. Il a deux relations :

— R, ternaire, pour l'alignement ordonné ; intuitivement $R(a, b, c)$ signifie « b est entre a et c » ;

— S, quaternaire, pour l'égalité de deux distances ; intuitivement $S(a, b; c, d)$ signifie « la distance de a à b est celle de c à d ».

Axiomes. Ils forment la liste suivante, où les quantifications universelles évidentes sont omises.

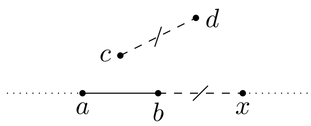
— $R(a, b, a) \to a = b$;

— $S(a, b\,; c, c) \to a = b$;

— $S(a, b\,; b, a)$;

— $S(a_1, b_1\,; a_2, b_2) \wedge S(a_2, b_2\,; a_3, b_3) \to S(a_1, b_1\,; a_3, b_3)$;

— $(\exists x)[R(a, b, x) \wedge S(b, x\,; c, d)]$;



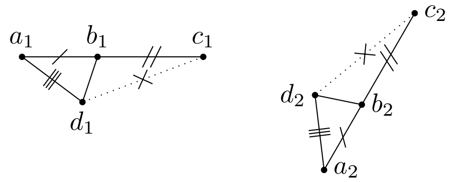
Prolongement

field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function ». In : *J. Amer. Math. Soc.* 9.4 (1996), p. 1051-1094

[Wil09] : Alex Wilkie. « *o*-minimal structures ». In : 326. Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008. 2009, Exp. No. 985, vii, 131-142 (2010)

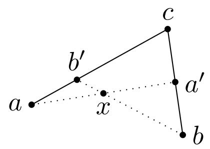
[Marker-Messmer-Pillay] : David Marker, Margit Messmer et Anand Pillay. *Model theory of fields*. T. 5. Lecture Notes in Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1996, p. x+154

— $[a_1 \neq b_1 \wedge R(a_1, b_1, c_1) \wedge R(a_2, b_2, c_2) \wedge S(a_1, b_1 ; a_2, b_2) \wedge S(b_1, c_1 ; b_2, c_2) \wedge S(a_1, d_1 ; a_2, d_2) \wedge S(b_1, d_1 ; b_2, d_2)] \to S(c_1, d_1 ; c_2, d_2)$;



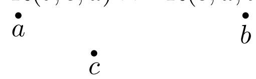
Rigidité

— $[R(a, b', c) \wedge R(b, a', c)] \to (\exists x)(R(a, x, a') \wedge R(b, x, b'))$;



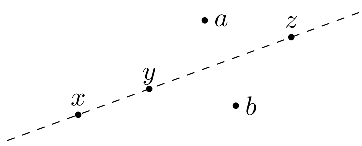
Axiome de Pasch

— $(\exists a)(\exists b)(\exists c)(\neg R(a, b, c) \wedge \neg R(b, c, a) \wedge \neg R(c, a, b))$;



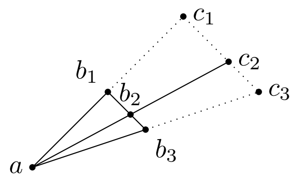
Au moins planarité

— $[(a \neq b) \wedge S(a, x ; b, x) \wedge S(a, y ; b, y) \wedge S(a, z ; b, z)] \to [R(x, y, z) \vee R(y, z, x) \vee R(z, x, y)]$;



Au plus planarité

— $[(a \neq b_2) \wedge R(b_1, b_2, b_3) \wedge R(a, b_2, c_2)] \to (\exists c_1)(\exists c_3)[R(a, b_1, c_1) \wedge R(a, b_3, c_3) \wedge R(c_1, c_2, c_3)]$;



Axiome d'Euclide

— pour toutes les formules $\gamma(x)$ et $\delta(y)$, l'axiome $[(\exists a)(\forall x)(\forall y)(\gamma(x) \wedge \delta(y) \to R(a, x, y))] \to [(\exists b)(\forall x)(\forall y)(\gamma(x) \wedge \delta(y) \to R(x, b, y))]$.

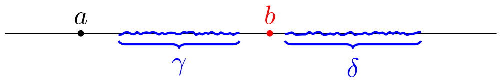


Schéma de continuité/complétude

Remarque. La propriété $R(x, y, z) \to R(z, y, x)$ suit des autres ; ce n'est pas un oubli.

§ L.2. Bi-interprétabilité

Eucl$_2$ On note Eucl$_2$ la théorie résultante.

Théorème. Il y a correspondance entre modèles de Eucl$_2$ et de RCF.

Esquisse de démonstration. Un sens est clair : si $\mathbb{K} \models$ RCF, alors munir $\mathbb{K}^2$ de la relation d'alignement en fait un plan affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$. Ce dernier porte même une relation d'alignement ordonné et une d'équidistance, qui en font un modèle de Eucl$_2$.

Pour la réciproque, soit un modèle $\mathbb{E} \models$ Eucl$_2$. Soit $A(x, y, z)$ la relation d'alignement $R(x, y, z) \vee R(y, z, x) \vee R(z, x, y)$. On montre patiemment que $(\mathbb{E}\,; A)$ est un plan affine vérifiant le théorème de Pappus. D'après [**Hilbert**], $\mathbb{E} \simeq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ (plan affine coordinatisé) pour un corps *commutatif* $\mathbb{K}$. Le schéma de complétude donne enfin $\mathbb{K} \models$ RCF.

Puis on contrôle que cette interprétabilité mutuelle est même une bi-interprétabilité. $\square$

Corollaire. Eucl$_2$ est complète.

Exercices

L.1. Étoffer un peu l'« esquisse de démonstration » supra.

Notes conclusives

Le texte de référence est le massif [Schwabhäuser-Szmielew-Tarski] ; je n'en connais pas d'abrégé car [Tar59] omet les détails.

- **Repères historiques**

  Ou ie vous prie de remarquer en passant, que le scrupule, que faisoient les anciens d'vser des termes de l'Arithmetique en la Geometrie, qui ne pouuoit proceder, que de ce qu'ils ne voyoient pas assés clairement leur rapport, causoit beaucoup d'obscurité, & d'embaras, en la façon dont ils s'expliquoient...

  [Descartes, pp. 305-306]

La logique doit tout à la géométrie : la méthode axiomatique elle-même, la notion d'indépendance d'axiomes, l'interprétation d'une structure dans une autre, le concept de *modèle* (§ 6, notes conclusives), le renouveau axiomatique de la fin du XIX^{e} siècle enfin, qui n'est pas sans lien avec l'émergence de la théorie de la démonstration. Mais ces interactions ne sont pas le présent propos.

Descartes. L'introduction de coordonnées dans le plan euclidien au premier livre de la *Géométrie* permet à Descartes d'interpréter $(\mathbb{A}^2(\mathbb{R})\,;R,S)$ dans $(\mathbb{R}\,;+,\cdot)$.

Hilbert. L'interprétation réciproque d'un corps dans une géométrie d'incidence, plus spécifiquement d'un corps gauche dans un plan desarguésien, vient de [**Hilbert**, § 24]. On rappelle que l'axiomatisation de Hilbert n'est pas élémentaire.

Tarski. Son système remonterait à 1926–1927 ; la publication pâtit des soubresauts du siècle [Szc86]. La première trace semble donc [**Tarski2**, p. 43].

Szmielew. Noter l'élégant analogue hyperbolique [Szm59]. Szmielew, ancienne étudiante de Tarski, mourut avant d'achever la somme [Szmielew], traduite en [Szmielew2].

- **Choix des axiomes.** J'ai suivi [Schwabhäuser-Szmielew-Tarski], aux axiomes mieux affinés que [Tar59]. On peut encore alléger ; p. ex. [Mak13].

[Schwabhäuser-Szmielew-Tarski] : Wolfram Schwabhäuser, Wanda Szmielew et Alfred Tarski. *Metamathematische Methoden in der Geometrie.* Hochschultext. Berlin : Springer-Verlag, 1983, p. viii+482

[Tar59] : Alfred Tarski. « What is elementary geometry ? » In : *Proceedings of an International Symposium held at the Univ. of Calif., Berkeley, Dec. 26, 1957-Jan. 4, 1958.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. The axiomatic method, With special reference to geometry and Physics, Edited by L. Henkin, P. Suppes and A. Tarski. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959, p. 16-29

[Descartes] : René Descartes. *Discours de la méthode.* Leyde : Jan Maire, 1637. 413+xxxii

[Szc86] : Lesław Szczerba. « Tarski and geometry ». In : *J. Symbolic Logic* 51.4 (1986), p. 907-912

[Szm59] : Wanda Szmielew. « Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry ». In : *Proceedings of an International Symposium held at the Univ. of Calif., Berkeley, Dec. 26, 1957-Jan. 4, 1958.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. The axiomatic method, With special reference to geometry and Physics, Edited by L. Henkin, P. Suppes and A. Tarski. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1959, p. 30-52

[Szmielew] : Wanda Szmielew. *Od geometrii afinicznej do euklidesowej.* T. 55. Biblioteka Matematyczna. Varsovie : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1981, p. 172

[Szmielew2] : Wanda Szmielew. *From affine to Euclidean geometry.* An axiomatic approach, Translated from the Polish and with a preface by Maria Moszyńska. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, Mass. ; PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, p. xiii+194

[Mak13] : Timothy Makarios. « A further simplification of Tarski's axioms of geometry ». In : *Note Mat.* 33.2 (2013), p. 123-132

- **Indépendance de l'axiome d'Euclide.** [BBN15] le déduit du théorème de Herbrand (§ J). • On réécrit d'abord, en un langage étendu, les autres axiomes sous forme universelle Θ, et le « postulat des parallèles » φ sous forme $\forall\exists$. Bien sûr $\mathbb{R}^2 \models \varphi$, mais on voit par des arguments métriques simples qu'aucun nombre fini de termes ne suffit dans la vérification. D'après le théorème de Herbrand (ex. J.2), $\Theta \not\models \varphi$. • L'intérêt est que l'argument est mené par simple inspection du modèle standard, sans connaissance des modèles non euclidiens. Il illustre bien l'approche *informatique* de la logique : par considérations non sémantiques, aussi proches du langage donné que possible.

§ M. Le théorème d'Arrow

Un régime électoral cohérent et dont on exigerait une efficacité en toute circonstance, doit être dictatorial. Ce théorème d'économie dû à Arrow est démontré brièvement grâce aux ultrafiltres.

Prérequis : § 16.

Nous parlons ici d'agrégation des préférences : les ultrafiltres y font une apparition remarquée. Les paradoxes de votes sont connus depuis des siècles. Pour un premier traitement mathématique, voter revient à mettre un ordre total *strict* sur un ensemble $\mathcal{C}$ de candidats. Soit I l'ensemble des électeurs.

Définition (vote, scrutin, régime électoral)**.**

- Un *vote* v est un ordre total strict sur $\mathcal{C}$; on note $v \models a > b$ le cas échéant. Soit $\mathcal{V}$ leur ensemble.
- Un *scrutin abstrait* (ou : dépouillement) est une fonction $s\colon I \to \mathcal{V}$. Soit S leur ensemble.
- Un *régime électoral* est une fonction $R\colon S \to \mathcal{V}$.

Notation. Pour $a, b \in \mathcal{C}$ et $s \in S$ soit $[\![a > b]\!]_s$ l'ensemble des électeurs préférant a à b dans le scrutin s :

$$[\![a > b]\!]_s = \{i \in I : s(i) \models a > b\}.$$

Définition (régime électoral acceptable)**.** Un régime électoral est *acceptable* s'il vérifie les deux conditions suivantes.

- *Unanimité.* Soient s un scrutin et $a \neq b$ des candidats. Si $[\![a > b]\!]_s = I$, alors $R(s) \models a > b$.

[BBN15] : Michael Beeson, Pierre Boutry et Julien Narboux. « Herbrand's theorem and non-Euclidean geometry ». In : *Bull. Symb. Log.* 21.2 (2015), p. 111-122

— *Indifférence aux options tierces/aux « alternatives non pertinentes ».* Soient s_1, s_2 deux scrutins et $a \neq b$ deux candidats. Si $[\![a > b]\!]_{s_1} = [\![a > b]\!]_{s_2}$ et $R(s_1) \models a > b$, alors $R(s_2) \models a > b$.

Le théorème « d'impossibilité » d'Arrow affirme que ces conditions ont de fâcheux effets.

Théorème (Arrow)**.** Si $\operatorname{card} C \geqslant 3$, I est fini, et R est acceptable, alors il est dictatorial :

$$(\exists i \in I)(\forall s \in S)(\forall a, b \in \mathcal{C})[R(s) \models a > b \text{ ssi } s(i) \models a > b].$$

Remarques

— On vérifiera qu'un régime dictatorial est acceptable (au sens technique supra).

— La définition exige d'un régime que pour *tout* scrutin on obtienne encore un ordre total. En agrégeant des ordres totaux par un ultraproduit (§ 16.2) cela fonctionnerait ; le théorème d'Arrow exprime que c'est la seule manière.

— Si I est infini, le « dictateur » est un ultrafiltre. Le théorème d'Arrow est donc un avatar de principes comme l'isomorphisme d'un espace de dimension finie et son bidual.

Démonstration. Fixant un tel régime, nous noterons simplement s^* l'ordre $R(s)$. Nous avons besoin pour la démonstration d'une définition.

Définition.

— Un ensemble $J \subseteq I$ *force la victoire de* a *sur* b si :

$$(\forall s \in S)(J \subseteq [\![a > b]\!]_s \Rightarrow s^* \models a > b).$$

— Une *majorité abstraite*, ou *coalition décisive*, est un J forçant la victoire dans chaque paire ordonnée.

Soit $\mathcal{U}$ leur ensemble. On montre que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de $P(I)$.

Étape 1. Soit $J \subseteq I$. Sont équivalents :

(i) $(\exists a \neq b \in \mathcal{C})(\exists s \in S)(J = [\![a > b]\!]_s \text{ et } s^* \models a > b)$;

(ii) $(\exists a \neq b \in \mathcal{C})(\forall s \in S)(J = [\![a > b]\!]_s \Rightarrow s^* \models a > b)$;

(iii) $(\forall a \neq b \in \mathcal{C})(\forall s \in S)(J = [\![a > b]\!]_s \Rightarrow s^* \models a > b)$;

(iv) $(\forall a \neq b \in \mathcal{C})(\forall s \in S)(J \subseteq \llbracket a > b \rrbracket_s \Rightarrow s^* \models a > b)$, i.e. $J \in \mathcal{U}$.

Vérification.
(i)⇒(ii). C'est l'axiome d'indifférence.

(ii)⇒(iii). Soit $c \notin \{a, b\}$; il en existe. On montre qu'on peut remplacer b par c. Soit en effet s tel que $\llbracket a > c \rrbracket_s = J$. On forme un scrutin imaginaire s_0 tel que :

— si $i \in J$, alors $s_0(i) \models a > b > c$;

— si $i \in I \backslash J$, alors $s_0(i) \models b > c > a$.

Par unanimité, $s_0^* \models b > c$. En outre comme $\llbracket a > b \rrbracket_{s_0} = J$, par (ii) on a $s_0^* \models a > b$. Il suit que $s_0^* \models a > c$. Mais $\llbracket a > c \rrbracket_{s_0} = J = \llbracket a > c \rrbracket_s$, donc par indifférence, $s^* \models a > c$. On a donc bien remplacé b par c. Un argument similaire aurait modifié a. On peut ainsi changer (a, b) en n'importe quelle autre paire.

(iii)⇒(iv). On fixe a, b, s tels que $J \subseteq \llbracket a > b \rrbracket_s$. Soient $c \notin \{a, b\}$ et s_0 ayant les propriétés suivantes :

— si $i \in J$, alors $s_0(i) \models a > c > b$;

— si $i \in \llbracket a > b \rrbracket_s \backslash J$, alors $s_0(i) \models a > b > c$;

— si $i \in I \backslash \llbracket a > b \rrbracket_s$, alors $s_0(i) \models b > a > c$.

Par unanimité, $s_0^* \models a > c$. D'autre part $\llbracket c > b \rrbracket_{s_0} = J$ donc par (iii), on a $s_0^* \models c > b$. Ainsi $s_0^* \models a > b$. Mais $\llbracket a > b \rrbracket_{s_0} = \llbracket a > b \rrbracket_s$, donc par indifférence, $s^* \models a > b$, comme désiré. ◇

Il suit notamment que si $\llbracket a > b \rrbracket_{s_0} \subseteq \llbracket a > b \rrbracket_{s_2}$ et $s_0^* \models a > b$, alors $s_2^* \models a > b$. À première vue, l'axiome d'indifférence semblait plus faible.

Étape 2. $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de $P(I)$.

Vérification. Par unanimité, $I \in \mathcal{U}$. En outre on a toujours $I \backslash \llbracket a > b \rrbracket_s = \llbracket b > a \rrbracket_s$, donc $\varnothing \notin \mathcal{U}$. Par définition, il est clair que $\mathcal{U}$ est clos sous agrandisssement. Montrons qu'il l'est sous intersection finie.

Soient $J_1, J_2 \in \mathcal{U}$; soient $a \neq b \in C, s \in S$ tels que $J_1 \cap J_2 \subseteq \llbracket a > b \rrbracket_s$. On montre $s^* \models a > b$. Formons en effet un scrutin s_0 tel que :

— si $i \in J_1 \cap J_2$, alors $s_0(i) \models a > c > b$;

— si $i \in J_1 \backslash J_2$, alors $s_0(i) \models c > b > a$;

— si $i \in J_2 \backslash J_1$, alors $s_0(i) \models b > a > c$;

— si $i \in I \backslash (J_1 \cup J_2)$, alors $s_0(i) \models b > c > a$.

Notons que $[\![c > b]\!]_{s_0} = J_1 \in \mathcal{U}$, donc $s_0^* \models c > b$. En outre $[\![a > c]\!]_{s_0} = J_2 \in \mathcal{U}$, donc $s_0^* \models a > c$. Il suit $s_0^* \models a > b$. Or $[\![a > b]\!]_{s_0} = J_1 \cap J_2$, donc par l'Étape 1, on a bien $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{U}$.

Montrons enfin que c'est un ultrafiltre. Soit $J \subseteq I$. Soient $a \neq b$ dans C. On forme un scrutin s tel que $[\![a > b]\!]_s = J$. Si $s^* \models a > b$, alors par l'Étape 1, on a $J \in \mathcal{U}$. Si en revanche $s^* \models b > a$, alors $I \backslash J = [\![b > a]\!]_s \in \mathcal{U}$. $\diamond$

Puisque I est fini, $\mathcal{U}$ est principal : c'est le théorème d'Arrow. $\square$

Réciproquement, une agrégation par ultraproduit d'ordres totaux fournit un ordre total : c'est le théorème de Łoś.

Exercices

M.1. Soient I ayant au moins trois éléments et $\mathcal{U} \subseteq P(I)$ une famille de parties. On suppose que pour tout $A \subseteq I$, soit $A \in \mathcal{U}$ soit $A^c \in \mathcal{U}$. On suppose en outre que si $A, B, C \in \mathcal{U}$, alors $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre.

M.2. Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de $P(I)$;

(ii) pour chaque $n \geqslant 1$ entier, $\mathcal{U}$ a la *propriété de n-partitionnement* : si $I = \bigsqcup_{k=1}^n X_i$ (où les X_k peuvent être vides), il existe un et un seul k tel que $X_k \in \mathcal{U}$;

(iii) il existe $n \geqslant 3$ tel que $\mathcal{U}$ ait la propriété de n-partitionnement.

Notes conclusives

> *Mais, partant de l'*Arithmétique morale *de Buffon ou de la* Mathématique sociale *de Condorcet, nous ne pouvons suivre une tradition continue jusqu'aux* New Welfare Economics *: une coupure profonde s'est installée dans l'histoire : Cournot et Poisson sont les derniers représentants d'une manière qui, pendant cent ans, sera ignorée ou moquée, tandis que Walras et Pareto, pour ne citer que des héros éponymes, ne se sentent guère héritiers des mathématiciens sociologues de jadis.* [Gui52]

• Si l'agrégation des préférences a ses origines dans les travaux de Condorcet, le théorème d'Arrow fut établi dans [Arr50] et po-

[Gui52] : Georges-Théodule GUILBAUD. « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation ». In : *Économie appliquée* 4.5 (1952), p. 501-551

[Arr50] : Kenneth ARROW. « A Difficulty in the concept of social welfare ». In : 58 (1950), p. 328-346

pularisé par la monographie [Arrow] : on voit la coupure historique dont parle Guilbaud. • La modélisation du choix social par des structures mathématiques modernes commence dans [Gui52] ; selon [EM10, § 4], Guilbaud a délibérément évité le langage des filtres qu'il connaissait pourtant. • Filtres et ultrafiltres sont ouvertement employés en 1967 [Mon69], mais l'idée mit du temps à diffuser et les références connues du public sont plus tardives (par exemple [KS72] inspiré par [Fis70] qui avait remarqué que pour I infini le dictateur n'est pas nécessairement singleton). • Le rôle des filtres en agrégation des préférences semble donc avoir été découvert indépendamment par plusieurs personnes, et l'histoire n'est pas forcément juste. Il est possible que Guilbaud soit progressivement reconnu comme un fondateur du domaine. • Après avoir créé les ultraproduits, Łoś travailla aussi en économie mathématique [Bal+00] ; il semble n'avoir eu aucun rôle dans l'interprétation modèle-théorique du théorème d'Arrow. • Enfin Shelah s'est intéressé à des extensions du phénomène et aux « fonctions de choix » [She05].

§ N. Amalgames de Fraïssé

Les *amalgames de Fraïssé* permettent d'obtenir des objets limites ; on les qualifierait d'universels s'il n'y avait risque de confusion avec les « propriétés universelles » de théorie des catégories. Ils généralisent des objets combinatoires comme le graphe aléatoire ou l'espace d'Urysohn.

Prérequis : § 14.

On rappelle que les $\mathcal{L}$-plongements entre structures sont injectifs, la condition n'étant pas suffisante. La catégorie $\mathbf{Mod}_0(T)$ a ses colimites filtrantes ; elle est sans objet terminal par le théorème (ascendant) de Löwenheim-Skolem. Mais si l'on borne la cardinalité des structures en jeu, la recherche d'universels est envisageable. Les amalgames de Fraïssé en offrent un exemple.

[Arrow] : Kenneth Arrow. *Social Choice and Individual Values.* Cowles Commission Monograph No. 12. John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y. ; Chapman & Hall, Ltd., London, 1951, p. xi+99

[EM10] : Daniel Eckert et Bernard Monjardet. « Guilbaud's 1952 theorem on the logical problem of aggregation ». In : *Math. Sci. Hum. Math. Soc. Sci.* 189 (2010), p. 19-35

[Mon69] : Bernard Monjardet. « Remarques sur une classe de procédures de vote et les théorèmes de possibilité ». In : *La décision. Agrégation et dynamique des ordres de préférence.* Sous la dir. de Théodule Guilbaud. T. 171. Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique. Aix-en-Provence, 3–7 juillet 1967. Paris : Éditions du cnrs, 1969, p. 177-184

[KS72] : Alan Kirman et Dieter Sondermann. « Arrow's theorem, many agents, and invisible dictators ». In : *J. Econom. Theory* 5.2 (1972), p. 267-277

[Fis70] : Peter Fishburn. « Arrow's impossibility theorem : concise proof and infinite voters ». In : *J. Econom. Theory* 2 (1970), p. 103-106

[Bal+00] : Stanisław Balcerzyk et al. « Jerzy Łoś (1920–1998) ». In : *Studia Logica* 65.3 (2000), p. 301-314

[She05] : Saharon Shelah. « On the Arrow property ». In : *Adv. in Appl. Math.* 34.2 (2005), p. 217-251

Nous nous plaçons en langage au plus dénombrable, de sorte que les structures de type fini soient au plus dénombrables.

§ N.1. Classes de structures

Définition.

- Une classe de structures $\mathcal{C}$ de type fini est *héréditaire* si pour $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$ et $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{A}$ de type fini, on a $\mathbb{B} \in \mathcal{C}$.
- La classe $\mathcal{C}$ est *dénombrable (à isomorphisme près)* si la collection des classes d'isomorphismes de membres de $\mathbb{S}$ est un ensemble dénombrable.
- Elle est *dirigée* (on dit aussi qu'elle a la *propriété du plongement commun*) si pour $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \in \mathcal{C}$ existe $\mathbb{B} \in \mathcal{C}$ complétant le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_1 \arrow[dr, tail, dotted] & \\
& \mathbb{B} \\
\mathbb{A}_2 \arrow[ur, tail, dotted] &
\end{tikzcd}$$

(Ce n'est *pas* une propriété universelle ; on ne demande pas d'unicité.)

Exemple. Les ordres finis, les graphes finis, les groupes de type fini, forment des classes héréditaires et dirigées.

Définition. Soit $\mathbb{S}$ une $\mathcal{L}$-structure. Son *squelette* (chez Fraïssé, son *âge*) est la collection des classes d'isomorphismes de ses sous-structures de type fini :

$$\mathcal{C}_{\mathbb{S}} = \{\mathbb{A} \in \mathcal{L}\text{-}\mathbf{Str} : \mathbb{A} \rightarrowtail \mathbb{S} \text{ et } \mathbb{A} \text{ de type fini.}\}$$

Il est clair qu'un squelette est clos sous isomorphisme, héréditaire, et dirigé : si $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \leqslant \mathbb{S}$ sont de type fini, il en est ainsi de $\mathbb{B} = \langle \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \rangle$.

Théorème (Fraïssé)**.** Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures de type fini. Alors sont équivalents :

- il existe $\mathbb{S}$ au plus dénombrable telle que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{S}}$;
- $\mathcal{C}$ est close sous isomorphisme, dénombrable (à isomorphisme près), héréditaire, et dirigée.

Démonstration. Le sens direct est évident : $\mathbb{S}$ étant dénombrable, $\mathcal{C}_{\mathbb{S}}$ est dénombrable à isomorphisme près.

Pour la réciproque, énumérons des représentants de $\mathcal{C}$ en $\{\mathbb{A}_n : n \in \omega\}$.

Construisons par récurrence des structures de $\mathcal{C}$ comme suit. Soit $\mathbb{S}_0 = \mathbb{A}_0$. Au rang n, par plongement commun, soit $\mathbb{S}_{n+1} \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}_{n+1} \arrow[d, tail, dotted] \\ \mathbb{S}_n \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{S}_{n+1} \end{tikzcd}$$

ce qui fournit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_0 \arrow[dr, tail] & & \mathbb{A}_1 \arrow[dr, tail] & & \mathbb{A}_2 \arrow[dr, tail] & & \\ & \mathbb{S}_0 \arrow[rr, tail] & & \mathbb{S}_1 \arrow[rr, tail] & & \mathbb{S}_2 \arrow[r, tail, dotted] & {} \end{tikzcd}$$

Soit enfin $\mathbb{S} = \bigcup_\omega \mathbb{S}_n$ (qui n'est plus dans $\mathcal{C}$). Clairement $\mathbb{S}$ est au plus dénombrable. En outre si $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$, alors $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}_n$ pour un certain n, donc $\mathbb{A} \to \mathbb{S}_{n+1} \leqslant \mathbb{S}$, de sorte que $\mathbb{A} \in \mathcal{C}_\mathbb{S}$. Si réciproquement $\mathbb{A} \in \mathcal{C}_\mathbb{S}$, alors étant de type fini $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{S}_n$ pour n assez grand ; comme $\mathbb{S}_n \in \mathcal{C}$ et que la classe est héréditaire, on a bien $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$, d'où l'égalité $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mathbb{S}$. □

Les travaux de Fraïssé sont plus profonds et demandent quelques notions supplémentaires.

§ N.2. Classes de Fraïssé

Définition. Une classe de structures $\mathcal{C}$ a la *propriété d'amalgamation* si pour tous $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \in \mathcal{C}$ comme suit existe encore $\mathbb{B} \in \mathcal{C}$ complétant le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}_1 \arrow[dr, tail, dotted] & \\ \mathbb{A}_0 \arrow[ur, tail] \arrow[dr, tail] & & \mathbb{B} \\ & \mathbb{A}_2 \arrow[ur, tail, dotted] & \end{tikzcd}$$

Remarques

- Ce n'est pas la même chose que le caractère dirigé. Ce le serait si l'on avait $\varnothing \in \mathbf{Mod}(T)$, ou plus généralement un objet initial dans la catégorie ; c'est notamment le cas dans un langage purement relationnel.
- Ce n'est pas la même chose qu'un coproduit fibré : on ne demande pas d'universalité.

Définition. Une *classe de Fraïssé* (ou : *d'amalgamation*) est une classe de structures de type fini dénombrable (à isomorphisme près), close sous isomorphisme, héréditaire, dirigée, et ayant la propriété d'amalgamation.

Exemple. Les ordres finis, les graphes finis, les espaces métriques finis à distance rationnelle forment de telles classes (seul le dernier point peut demander un instant de réflexion).

Les classes de Fraïssé permettent la recherche d'un objet universel dénombrable.

Définition. Une structure $\mathbb{S}$ est *homogène* (souvent : *ultrahomogène*) si pour tous $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{C}_{\mathbb{S}}$ avec $\mathbb{A}, \mathbb{B} \leqslant \mathbb{S}$ et $\sigma_0 : \mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{S})$ étendant σ_0.

Remarque. Si $\mathbb{S}$ est dénombrable, alors $\mathbb{S}$ est homogène ssi ses 0-automorphismes sont des ∞-automorphismes.

Théorème (Fraïssé)**.** Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures de type fini. Alors sont équivalents :

— $\mathcal{C}$ est une classe de Fraïssé ;

— il existe une structure $\mathbb{U}$ au plus dénombrable, homogène, et telle que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{U}}$.

En outre $\mathbb{U}$ est alors unique à isomorphisme près ; on l'appelle la *limite de Fraïssé* de $\mathcal{C}$.

Démonstration.

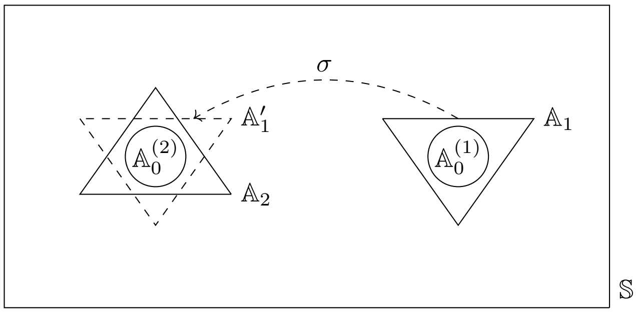
Affirmation 1. Sens réciproque.

Vérification. Montrons que si $\mathbb{U}$ est homogène, alors son squelette a la propriété d'amalgamation. Prenons en effet $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \in \mathcal{C}_{\mathbb{U}}$ formant un diagramme *a priori non commutatif* :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}_1 \arrow[dr, tail, "g_1"] & \\
\mathbb{A}_0 \arrow[ur, tail, "f_1"] \arrow[dr, tail, "f_2"'] & & \mathbb{S} \\
 & \mathbb{A}_2 \arrow[ur, tail, "g_2"'] &
\end{tikzcd} .$$

S'il était commutatif on pourrait prendre $\mathbb{B} = \langle \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \rangle$; tout le problème est de se ramener à un tel diagramme. Il faut en fait penser que $\mathbb{A}_0$ est réalisée deux fois, donc *dupliquée* à l'intérieur de $\mathbb{S}$.

À isomorphisme près on peut supposer que g_1 et g_2 sont des inclusions. Alors $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \leqslant \mathbb{S}$ contiennent chacune leur copie de $\mathbb{A}_0$, disons $\mathbb{A}_0^{(i)}$. Comme $\sigma_0 = f_2 \circ f_1^{-1} \colon \mathbb{A}_0^{(1)} = f_1(\mathbb{A}_0) \simeq f_2(\mathbb{A}_0) = \mathbb{A}_0^{(2)}$ est un isomorphisme entre sous-structures de $\mathbb{S}$, il s'étend par hypothèse en un automorphisme global $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{S})$.



Amalgamer $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ au-dessus de $\mathbb{A}_0$

Soit $\mathbb{A}_1' = \sigma(\mathbb{A}_1) \leqslant \mathbb{S}$. Par construction $\sigma \circ f_1 = \sigma_0 \circ f_1 = f_2$, donc on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}_1 \arrow[r, tail, "\sigma"] & \mathbb{A}_1' \arrow[dr, tail, "\leqslant"] & \\ \mathbb{A}_0 \arrow[ur, tail, "f_1"] \arrow[dr, tail, "f_2"'] & & & \mathbb{S} \\ & \mathbb{A}_2 \arrow[urr, tail, "\leqslant"'] & & \end{tikzcd} .$$

Ainsi $\langle \mathbb{A}_1' \cup \mathbb{A}_2 \rangle$ convient. ◇

Affirmation 2. Unicité.

Vérification. Soient $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ deux limites de Fraïssé. Comme elles sont dénombrables, il suffit d'établir entre elles un va-et-vient sans restriction. La classe des isomorphismes entre sous-structure de type fini convient en effet.

Soient $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{U}$ et $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{V}$ de type fini et isomorphes par $\sigma \colon \mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$; ajoutons $\alpha \in \mathbb{U}$. Soit $\hat{\mathbb{A}} = \langle \mathbb{A}, \alpha \rangle \in \mathcal{C}_{\mathbb{U}} = \mathcal{C}_{\mathbb{V}}$. Le type d'isomorphisme de $\hat{\mathbb{A}}$ est donc réalisé dans $\mathbb{V}$, par disons $\tilde{\mathbb{B}}$ avec $\tau \colon \hat{\mathbb{A}} \simeq \tilde{\mathbb{B}}$.

Mais $\mathbb{B} \simeq \mathbb{A} \simeq \tau(\mathbb{A}) \leqslant \tilde{\mathbb{B}}$ donc $\tilde{\mathbb{B}}$ contient une copie isomorphe de $\mathbb{B}$. Par homogénéité de $\mathbb{V}$, on obtient une autre réalisation $\hat{\mathbb{B}} \leqslant \mathbb{V}$ avec $\tau' \colon \hat{\mathbb{A}} \simeq \hat{\mathbb{B}}$, et $\hat{\mathbb{B}}$ contient $\mathbb{B}$. On a bien étendu σ. ◇

Affirmation 3. Existence.

Vérification. Attention, la méthode naïve suivante ne marche pas.

On suppose $\mathbb{U}_k$ construit. On énumère les diagrammes pertinents à réaliser par :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_{k,\ell} \arrow[r, tail, "f_{k,\ell}"] \arrow[dr, tail, "g_{k,\ell}"'] & \mathbb{U}_k \\ & \mathbb{B}_{k,\ell} \end{tikzcd}$$

On pose $\mathbb{U}_{k,0} = \mathbb{U}_k$. On suppose $\mathbb{U}_{k,\ell}$ construit. Alors :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_{k,\ell} \arrow[r, tail, "f_{k,\ell}"] \arrow[dr, tail, "g_{k,\ell}"'] & \mathbb{U}_k \arrow[r, tail] & \mathbb{U}_{k,\ell} \arrow[dr, tail] & \\ & \mathbb{B}_{k,\ell} \arrow[rr, tail, dotted] & & \mathbb{U}_{k,\ell+1} \end{tikzcd}$$

On pose enfin $\mathbb{U}_{k+1} = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_{k,\ell}$ et $\mathbb{U} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_k$.

Le problème est que $\mathcal{C}$ n'a pas de raison d'être close sous réunion dénombrable : la construction de $\mathbb{U}_{k+1}$ fait sortir de $\mathcal{C}$; *in fine* on aura $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{U}}$ mais pas la réciproque. Il faut donc être un peu plus récursif.

Énumérons des représentants des membres de $\mathcal{C}$ par $(\mathbb{C}_n : n \in \mathbb{N})$. Nous allons construire non pas une, mais $1 + \omega$ suites de structures de $\mathbb{C}$.

Supposons $\mathbb{U}_n \in \mathcal{C}$ construit. Comptons les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & \mathbb{U}_n \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

avec $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{C}$. Les objets sont en quantité dénombrable, et $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ étant fixés et de type fini, il n'y a qu'une quantité dénombrable de flèches. On peut donc énumérer ces diagrammes par :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_{n+1,k} \arrow[r, tail, "f_{n+1,k}"] \arrow[dr, tail, "g_{n+1,k}"'] & \mathbb{U}_n \\ & \mathbb{B}_{n+1,k} \end{tikzcd}$$

avec $k \geqslant n+1$.

Et pour chaque $k \geqslant n+1$, par les diverses amalgamations possibles on complète dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_{n+1,k} \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & \mathbb{U}_n \arrow[dr, tail, dotted] & & \\
& \mathbb{B}_{n+1,k} \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{X} \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{S}_{n+1,k} \\
& & \mathbb{S}_{n,k} \arrow[ur, tail, dotted] &
\end{tikzcd}$$

On trouve enfin $\mathbb{U}_{n+1} \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}_{n+1,n+1} \arrow[dr, tail, dotted] & \\
& \mathbb{U}_{n+1} \\
\mathbb{C}_{n+1} \arrow[ur, tail, dotted] &
\end{tikzcd}$$

et l'on pose $\mathbb{U} = \bigcup_{\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$.

Nous affirmons que $\mathbb{U}$ convient. Il est de type dénombrable, et localement fini. Vu que $\mathbb{C}_{n+1} \to \mathbb{U}_{n+1}$, on a bien $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{U}}$. Si réciproquement $\mathbb{A} \in \mathcal{C}_{\mathbb{U}}$ avec $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{U}$, alors $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{U}_n$ pour un n assez grand ; comme $\mathbb{U}_n \in \mathcal{C}$ et que la classe est héréditaire on a $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$. Il reste à vérifier l'homogénéité. Considérons un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & \mathbb{U} \\
& \mathbb{B}
\end{tikzcd} ;$$

l'image de $\mathbb{A}$ est dans un $\mathbb{U}_n$, donc ce doit être un diagramme rencontré :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_{n+1,k} \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & \mathbb{U}_n \\
& \mathbb{B}_{n+1,k}
\end{tikzcd}$$

avec $k \geqslant n+1$. Or ainsi :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & \mathbb{U}_n \arrow[dr, tail, dotted] & & \\
& \mathbb{B} \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{S}_{n+1,k} \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{S}_{k,k} \leqslant \mathbb{U}_k \leqslant \mathbb{U}.
\end{tikzcd}$$

Donc on a bien :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & \mathbb{U}_n \arrow[dr, tail, dotted] & \\
& \mathbb{B} \arrow[r, tail, dotted] & \mathbb{U}.
\end{tikzcd}$$

Les 0-automorphismes permettent un va-et-vient sans restrictions : on a observé que l'homogénéité de $\mathbb{U}$ s'ensuit. ◇

□

Exemples

- La classe des ensembles finis, de limite de Fraïssé $\aleph_0$.
- La classe des $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels de dimension finie, de limite de Fraïssé $\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{F}_q$.
- La classe des espaces métriques finis à distances rationnelles, de limite l'*espace d'Urysohn rationnel* $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$.

Exercices

N.1. Établir les faits suivants.

a. La classe des ordres totaux finis a pour limite de Fraïssé $(\mathbb{Q}, <)$.

b. La classe des anneaux de Boole finis a pour limite de Fraïssé l'anneau de Boole dénombrable sans atomes.

c. La classe des graphes finis a pour limite de Fraïssé le graphe aléatoire (exercice 2.7).

N.2. Soit $\mathcal{C}$ une classe de Fraïssé de limite $\mathbb{U}$. On suppose la classe *uniformément finie*, i.e. qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que dans cette classe, $\operatorname{card}\langle \mathbf{a} \rangle \leqslant f(n)$, où n est la longueur de $\mathbf{a}$. (Noter que c'est le cas en langage purement relationnel.)

Montrer que $\mathrm{Th}(\mathbb{U})$ est $\aleph_0$-catégorique, puis qu'elle élimine les quantificateurs.

Notes conclusives

> *Étant donnée une relation R, nous désignerons par γ_R la classe des restrictions de R aux parties finies de sa base, et de leurs isomorphes. Autrement dit, $A \in \gamma_R$ équivaut à « $A < R$ et A est de base finie ».*
>
> *Nous désignerons par Γ_R la classe des relations dont toutes les restrictions de bases finies appartiennent à γ_R. Autrement dit, $A \in \Gamma_R$ équivaut à $A \prec R$. On a évidemment $R \in \Gamma_R$.*
>
> *Notons que γ_R n'est autre que la classe des relations de Γ_R dont la base est finie.*
>
> [. . .]
>
> *Une classe K de relations sera dite une Γ, ou une γ, s'il existe une relation R telle que $K = \Gamma_R$, ou telle que $K = \gamma_R$.* [Fra54]

Amalgames. • Le précurseur est bien sûr [Ury25], où l'espace maintenant dit « d'Urysohn » est construit comme complété de $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$. • L'intérêt de Fraïssé pour des formes d'universalité est attesté dès [Fra48], apparemment précédé par des travaux de Lindenbaum. Absente du doctorat [Fra53c], sa construction paraît dans [Fra53b] et [Fra53a] (publications détaillées en [Fra54]) ; l'écriture de Fraïssé est aride. À la même époque Jónsson aussi [Jón56] construisait des amalgames universels. • La méthode aurait pu tomber dans l'oubli si Hrushovski n'en avait pas inventé une variante afin de réfuter les grandes conjectures « $\aleph_1$-catégoriques » de Zilber (§ K, notes conclusives). Pour les amalgames de Hrushovski, une excellente référence est [Zie13]. • En logique continue, voir [Ben15].

Graphe aléatoire. • Il semble exagéré d'en attribuer la paternité à Ackermann comme on lit parfois ; [**Ack37**] interprète une théorie des ensembles finis dans $(\mathbb{N}; +, \cdot)$. L'interprétabilité du graphe aléatoire en découle, mais reste implicite ; v. ex. 21.7 et 25.7. • Il faut attendre Fraïssé pour que l'objet émerge, mais ses travaux sont trop passés inaperçus. • L'approche Erdős-Rényi [ER59] est clairement probabiliste, pas directement de théorie des relations. • Rado [Rad64] ne cite

[Fra54] : Roland FRAÏSSÉ. « Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres ». In : *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)* 71 (1954), p. 363-388

[Ury25] : Paul URYSOHN. « Sur un espace métrique universel ». In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 180 (1925), p. 803-806

[Fra48] : Roland FRAÏSSÉ. « Sur la comparaison des types de relations ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 226 (1948), p. 987-988

[Fra53c] : Roland FRAÏSSÉ. « Sur quelques classifications des systèmes de relations ». Thèse de doct. Université de Paris, 1953. iii+viii+152

[Fra53b] : Roland FRAÏSSÉ. « Sur l'extension aux relations de quelques propriétés connues des ordres ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 237 (1953), p. 508-510

[Fra53a] : Roland FRAÏSSÉ. « Sur certaines relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 237 (1953), p. 540-542

[Jón56] : Bjarni JÓNSSON. « Universal relational systems ». In : *Math. Scand.* 4 (1956), p. 193-208

[Zie13] : Martin ZIEGLER. « An exposition of Hrushovski's new strongly minimal set ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 164.12 (2013), p. 1507-1519

[Ben15] : Itaï BEN YAACOV. « Fraïssé limits of metric structures ». In : *J. Symb. Log.* 80.1 (2015), p. 100-115

[**Ack37**] : Wilhelm ACKERMANN. « Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre ». In : *Math. Ann.* 114.1 (1937), p. 305-315

[ER59] : Paul ERDŐS et Alfréd RÉNYI. « On random graphs I ». In : *Publ. Math. Debrecen* 6 (1959), p. 290-297

[Rad64] : Richard RADO. « Universal graphs and universal functions ». In : *Acta Arith.* 9 (1964), p. 331-340

personne ; son graphe universel est d'origine arithmétique, à la Ackermann. • La paternité dépend ainsi de la formulation : graphe aléatoire probabiliste, graphe universel dans sa classe, graphe limite des graphes finis… • Plus sur le graphe aléatoire : [Cam97].

Pour approfondir sur les structures homogènes, lire le formidable [Mac11b].

§ O. Le théorème de Lindström

Le théorème de Lindström est la clef de voûte de la logique générale. Il caractérise la logique élémentaire parmi les logiques abstraites : elle est maximale pour la propriété de compacité dénombrable et de Löwenheim dénombrable. La preuve est par va-et-vient non standard.

Prérequis : §§ 11, 15, 18.

On a mentionné le caractère optimal de la logique élémentaire (sous-entendu : finitaire), par opposition aux logiques à connecteurs généralisés, à quantificateurs généralisés, ou d'ordre supérieur. Le théorème de caractérisation de Lindström donne un sens précis à cette idée.

Théorème (Lindström)**.** La logique élémentaire est maximale parmi les logiques raisonnables ayant à la fois :

— la propriété de compacité dénombrable : une axiomatisation dénombrable et finiment satisfaisable est satisfaisable ;

— la propriété de Löwenheim dénombrable : tout énoncé satisfaisable possède un modèle au plus dénombrable (i.e. son cardinal de Löwenheim est $\aleph_0$ dans les termes de l'ex. 15.9).

Remarque. La deuxième hypothèse est plus faible que la propriété de *Skolem* dénombrable (toute *axiomatisation* satisfaisable et dénombrable possède un modèle au plus dénombrable), laquelle simplifie considérablement la démonstration.

On rappelle qu'à chaque langage $\mathcal{L}$ sont associées la collection des $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncés (dans un sens abstrait), et une notion de satisfaction $\Vdash_{\Lambda(\mathcal{L})}$, notée simplement $\Vdash$ quand il n'y a pas d'ambiguïté, entre $\mathcal{L}$-structures et $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncés. (La notion de $\mathcal{L}$-structure ne change pas.) Bien sûr Λ doit respecter certaines propriétés de liste naïve et fastidieuse. Sans exhaustivité mentionnons quelques points.

[Cam97] : Peter Cameron. « The random graph ». In : *The mathematics of Paul Erdős II*. T. 14. Algorithms Combin. Berlin : Springer, 1997, p. 333-351

[Mac11b] : Dugald Macpherson. « A survey of homogeneous structures ». In : *Discrete Math.* 311.15 (2011), p. 1599-1634

— La satisfaction est préservée par isomorphisme de $\mathcal{L}$-structures : si $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ en tant que $\mathcal{L}$-structures et $\mathbb{A} \Vdash \varphi$ pour un $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncé φ, alors $\mathbb{B} \Vdash \varphi$.

— La satisfaction est un concept *local*, i.e. la satisfaction $\mathbb{A} \Vdash \varphi$ ne doit dépendre que d'un nombre fini de relations (constantes, fonctions) de φ. Toute logique compacte a ce caractère local. On parle aussi de propriété d'*occurrence finie*.

— La négation et la conjonction sont permises : pour tout énoncé φ il existe un énoncé noté $\neg\varphi$ tel que $\mathbf{Mod}(\neg\varphi)$ est la collection complémentaire de $\mathbf{Mod}(\varphi)$. Définition similaire pour la conjonction.

— On peut *relativiser* les énoncés : si φ est un $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncé, $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure, et $\check{\mathbb{A}} \leqslant \mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-sous-structure $\Lambda(\mathcal{L})$-définissable, il existe un $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncé $\check{\varphi} = \varphi_{|\check{S}}$ tel que $\mathbb{A} \Vdash \check{\varphi}$ ssi $\check{\mathbb{A}} \Vdash \varphi$.

  La logique élémentaire a cette propriété : notant $\chi(x)$ une définition de $\check{\mathbb{A}}$, on remplace dans φ tous les $(\exists x)\psi$ par $(\exists x)(\chi(x) \wedge \psi)$, et les $(\forall x)\psi$ par $(\forall x)(\chi(x) \to \psi)$. On demande ainsi que la logique Λ permette une forme de relativisation, mais sans connaître les moyens de construction.

Exemple. La logique élémentaire $\Lambda_{\omega,\omega}$; les logiques infinitaires $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ et plus généralement $\Lambda_{\kappa,\lambda}$; les logiques à quantificateurs généralisés $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\kappa})$; la logique « du k^{e}-ordre » $\mathbf{\Lambda}^k$, sont toutes des logiques raisonnables en ce sens.

Exemple. Une logique ayant la compacité (sans restriction cardinale) est à satisfaction locale.

En effet si $\varphi \in \Lambda(\mathcal{L})$, alors il existe $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ fini tel que pour deux $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{A}, \mathbb{B}$, si $\mathbb{A} \simeq_{\mathcal{L}_0} \mathbb{B}$ alors ($\mathbb{A} \Vdash \varphi$ ssi $\mathbb{B} \Vdash \varphi$).

Soient deux copies $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$; formons $\Phi = \{(\forall \mathbf{x})(R_A(\mathbf{x}) \leftrightarrow R'_B(\mathbf{x})) : R \in \mathcal{L}\}$ (si $\mathcal{L}$ n'est pas relationnel, ajouter de même les égalités $c_{\mathbb{A}} = c_{\mathbb{B}}$ et $f_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbb{B}}(\mathbf{x})$). Alors $\Phi \Vdash \varphi_{\mathbb{A}} \leftrightarrow \varphi_{\mathbb{B}}$, donc par compacité de Λ, on peut se ramener à $\Phi_0 \subseteq \Phi$ fini, qui n'utilise qu'un langage fini. Celui-ci convient.

§ O.1. Une caractérisation par le va-et-vient

La proposition ci-dessous sera invoquée pour établir le théorème ; en outre sa preuve introduit déjà les techniques pertinentes.

Proposition. On suppose qu'une logique Λ étendant la logique élémentaire a la propriété de Löwenheim dénombrable. Alors deux $\mathcal{L}$-structures ∞-isomorphes satisfont aux mêmes $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncés.

On donne d'abord une preuve sous l'hypothèse plus forte de propriété de *Skolem* dénombrable. En effet l'argument est la matrice commune aux démonstrations de la proposition et du théorème de Lindström.

Démonstration sous l'hypothèse « propriété de Skolem dénombrable ». Soient $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Soit par l'absurde un $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncé φ tel que $\mathbb{A} \Vdash \varphi$ mais $\mathbb{B} \Vdash \neg\varphi$; disons $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ *séparées* par φ. Par caractère local de la satisfaction, on peut supposer que le langage $\mathcal{L}$ est fini, et même relationnel grâce aux moyens usuels.

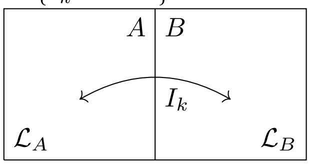
Supposons que l'on puisse se ramener au cas de deux structures *dénombrables* $\mathbb{A}_0$ et $\mathbb{B}_0$ en conservant à la fois :

— la séparation par φ, i.e. $\mathbb{A}_0 \Vdash \varphi$ mais $\mathbb{B}_0 \Vdash \neg\varphi$;

— l'existence d'un ∞-isomorphisme $\mathbb{A}_0 \simeq_\infty \mathbb{B}_0$.

Ce va-et-vient sans restriction entre structures dénombrables entraînera $\mathbb{A}_0 \simeq \mathbb{B}_0$ (Lemme d'$\aleph_0$-catégoricité, voir § 18.2), contre la préservation de la satisfaction par isomorphisme. Il suffit donc de se ramener au cas dénombrable, ce qu'on va faire grâce à la propriété de Skolem dénombrable.

Formaliser l'existence d'une famille de va-et-vient demande une structure « bipartite » (typiquement, $\mathbb{A} \sqcup \mathbb{B}$), et une famille de relations indexée par les longueurs de uplets. Dupliquons $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$; soient A et B deux relations unaires ; soit enfin, pour chaque entier intuitif k, une relation $2k$-aire I_k. On note $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{L}_B \cup \{A, B\} \cup \{I_k : k \in \mathbb{N}\}$.



Univers bi-partite, avec relations de 0-isomorphisme entre k-uplets

Pour la lisibilité notons « $(\forall a_1, \ldots, a_n \in A)\chi(\mathbf{a})$ » au lieu de « $(\forall a_1) \cdots (\forall a_n)[(A(a_1) \wedge \cdots \wedge A(a_n)) \to \chi(\mathbf{a})]$ ». Si $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ est un uplet d'indices, on pose $\mathbf{a_j} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$. Dans le langage $\mathcal{L}^*$, formons la théorie T contenant :

— les relations A et B partitionnent l'univers ;

— pour chaque R de $\mathcal{L}$, les typages $(\forall \mathbf{x})[R_A(\mathbf{x}) \to A(\mathbf{x})]$ (i.e. les variables concernées vérifient A) et $(\forall \mathbf{x})[R_B(\mathbf{x}) \to B(\mathbf{x})]$;

— I_0 ;

— pour chaque n, k et chaque uplet d'indices $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$, l'axiome de uplet extrait :

$$(\forall a_1, \ldots, a_n \in A)(\forall b_1, \ldots, b_n \in B)[I_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to I_k(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_j})];$$

— pour chaque relation n-aire $R \in \mathcal{L}$ dont l'égalité, l'axiome de 0-isomorphisme :

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in A \ \forall b_1, \ldots, b_n \in B \ I_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to (R_A(\mathbf{a}) \leftrightarrow R_B(\mathbf{b}))\,;$$

(on pourrait aussi mettre un axiome par relation et par uplet d'indices)

— pour chaque k, l'axiome de va-et-vient : $(\forall a_1, \ldots, a_k \in A)(\forall b_1, \ldots, b_k \in B)$

$$I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \left(\begin{array}{cccc} & (\forall \alpha \in A) & (\exists \beta \in B) & I_{k+1}(\mathbf{a}\alpha, \mathbf{b}\beta) \\ \wedge & (\forall \beta \in B) & (\exists \alpha \in A) & I_{k+1}(\mathbf{a}\alpha, \mathbf{b}\beta) \end{array} \right);$$

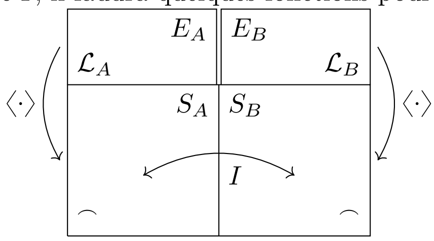
Cette théorie est satisfaite dans la structure bipartite $\mathbb{C} = \mathbb{A} \sqcup \mathbb{B}$ en interprétant A par $\mathbb{A}$, $\mathcal{L}_A$ par $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{A}$, et les I_k par la relation d'∞-isomorphisme entre k-uplets. On a donc $\mathbb{C} \models T$. On ajoute enfin l'énoncé obtenu par relativisation : $\varphi_{|A} \wedge \neg\varphi_{|B}$, vérifié dans $\mathbb{C}$.

Par propriété de Skolem dénombrable, il existe un modèle dénombrable $\mathbb{C}_0 \Vdash T \cup \{\varphi_{|A} \wedge \neg\varphi_{|B}\}$. On pose $\mathbb{A}_0 = A(\mathbb{C}_0)$ et $\mathbb{B}_0 = B(\mathbb{C}_0)$. Littéralement, $\mathbb{A}_0$ est une $\mathcal{L}_A$-structure ; on en fait naturellement une $\mathcal{L}$-structure. Alors φ sépare $\mathbb{A}_0$ et $\mathbb{B}_0$.

L'interprétation des I_k forme alors une famille de va-et-vient sans restrictions $\mathbb{A}_0 \simeq_\infty \mathbb{B}_0$ entre structures dénombrables mais séparées par φ : comme annoncé, c'est une contradiction. □

On note que la théorie T est infinie (dénombrable). Cependant la propriété de Löwenheim dénombrable ne permet d'employer *qu'un seul énoncé* et non une axiomatisation infinie. L'argument général sous l'hypothèse « Löwenheim » demande donc de remplacer la famille des I_k par une relation I unique, et ainsi de formaliser les uplets finis.

Démonstration de la Proposition (cas général). On reprend la démonstration précédente : on a deux structures $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$ en langage relationnel fini, séparées par φ. Pour avoir une relation de va-et-vient commune à toutes les longueurs de uplets, on doit envisager des uplets de longueur non standard. Pour éviter toute confusion, nous appellerons *uplets* les objets intuitifs et *suites* les objets formels. Comme à la démonstration précédente, on va : construire un énoncé convenant (Étape 1), montrer sa satisfaisabilité (Étape 2), puis se ramener au cas dénombrable (Étape 3). Les structures seront quadripartites ; outre la relation ternaire I, il faudra quelques fonctions pour gérer les suites.



E pour les éléments, S pour les suites. Opérations de singleton $\langle\cdot\rangle$ et de concaténation $\frown$.

Étape 1. Un énoncé élémentaire χ formalisant le va-et-vient sans restrictions.

Vérification. Soit $\mathcal{L}^*$ contenant :

— deux copies disjointes $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$ de $\mathcal{L}$; chaque relation $R \in \mathcal{L}$ est donc copiée en R_A et R_B, qui ne s'interpréteront que dans E_A et E_B respectivement ;

— quatre relations unaires E_A, E_B (éléments) et S_A, S_B (suites) ;

— deux fonctions unaires $\langle\cdot\rangle_{\mathbb{A}} : E_A \to S_A$ et $\langle\cdot\rangle_{\mathbb{B}}$ (conversions d'éléments en 1-suites) ; deux fonctions binaires $\frown_{\mathbb{A}} : S_A \times S_A \to S_A$ et $\frown_{\mathbb{B}}$ (concaténations de suites) ; on se réserve de voir au dernier moment ces fonctions comme des relations ;

— une relation binaire $I \subseteq S_A \times S_B$ (famille de va-et-vient).

Pour un uplet $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ on note $\langle \mathbf{a} \rangle = \langle a_1 \rangle^\frown \cdots ^\frown \langle a_n \rangle$. Formons le $\mathcal{L}^*$-énoncé élémentaire χ suivant :

— l'univers est quadripartite ; les relations et fonctions ont le typage attendu ;

— chaque $\frown$ est une fonction associative, ayant un neutre $\varnothing$;

— $I(\varnothing, \varnothing)$;

— pour chaque relation n-aire $R \in \mathcal{L}$ dont l'égalité, l'axiome de 0-isomorphisme :

$$(\forall a_1, \ldots, a_n \in E_A)(\forall b_1, \ldots, b_n \in E_B) \quad [I(\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle) \to (R_A(\mathbf{a}) \leftrightarrow R_B(\mathbf{b}))];$$

— l'axiome de délétion : $(\forall a \in E_A)(\forall x \in S_A)(\forall b \in E_B)(\forall y \in S_B)$

$$I(\langle a\rangle^\frown x, \langle b\rangle^\frown y) \to I(x, y);$$

— l'axiome de répétition : $(\forall a \in E_A)(\forall x \in S_A)(\forall b \in E_B)(\forall y \in S_B)$

$$I(\langle a\rangle^\frown x, \langle b\rangle^\frown y) \to I(\langle a, a\rangle^\frown x, \langle b, b\rangle^\frown y);$$

— l'axiome de transposition : $(\forall a_1, a_2 \in E_A)(\forall x \in S_A)(\forall b_1, b_2 \in E_B)(\forall y \in S_B)$

$$I(\langle a_1, a_2\rangle^\frown x, \langle b_1, b_2\rangle^\frown y) \to I(\langle a_2, a_1\rangle^\frown x, \langle b_2, b_1\rangle^\frown y);$$

— l'axiome de long cycle : $(\forall a \in E_A)(\forall x \in S_A)(\forall b \in E_B)(\forall y \in S_B)$

$$I(\langle a\rangle^\frown x, \langle b\rangle^\frown y) \to I(x^\frown \langle a\rangle, y^\frown \langle b\rangle);$$

— l'axiome de va-et-vient : $(\forall x \in S_A)(\forall y \in S_B)$

$$I(x, y) \to \left(\begin{array}{cccc} & (\forall \alpha \in E_A) & (\exists \beta \in E_B) & I(x^\frown \langle\alpha\rangle, y^\frown \langle\beta\rangle) \\ \wedge & (\forall \beta \in E_B) & (\exists \alpha \in E_A) & I(x^\frown \langle\alpha\rangle, y^\frown \langle\beta\rangle) \end{array}\right).$$

C'est un énoncé élémentaire car $\mathcal{L}$ étant fini, il n'y a qu'un nombre fini d'axiomes de 0-isomorphisme. ◇

Étape 2. Le $\Lambda(\mathcal{L}^*)$-énoncé $\chi \wedge \varphi_{|E_A} \wedge \neg\varphi_{|E_B}$ est satisfaisable.

Vérification. Donnons un modèle. Soit $S_A = \mathbb{A}^{<\omega}$ l'ensemble des suites finies de $\mathbb{A}$; soit $^\frown_{\mathbb{A}}$ la concaténation. Pour éviter toute confusion, nous n'identifions pas $\mathbb{A}$ avec les suites de longueur 1, mais nous le dupliquons en E_A ; il existe une injection naturelle

$$\begin{array}{ccc} E_A & \to & S_A \\ a & \mapsto & \langle a\rangle_{\mathbb{A}}\,. \end{array}$$

On munit E_A d'une $\mathcal{L}_A$-structure en transportant la $\mathcal{L}$-structure de $\mathbb{A}$. On procède de même avec $\mathbb{B}$, et l'on forme enfin $\mathbb{C} = E_A \sqcup S_A \sqcup E_B \sqcup S_B$ dans l'interprétation naturelle. Pour en faire une $\mathcal{L}^*$-structure il reste à interpréter la relation I.

Soit $\mathcal{F}$ une famille attestant $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$; on peut supposer $\mathcal{F}$ close sous les opérations de délétion, répétition, permutation. Dans $\mathbb{C}$ interprétons I

comme l'ensemble des paires $(\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle)$ telles que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{F}$; alors $\mathbb{C} \models \chi$. Puis relativisant $\mathbb{A} \Vdash \varphi$ on a $\mathbb{C} \Vdash \varphi_{|E_A}$; le $\Lambda(\mathcal{L}^*)$-énoncé proposé est satisfaisable. ◇

Étape 3. Un va-et-vient sans restrictions entre structures dénombrables séparées par φ.

Vérification. Par propriété de Löwenheim dénombrable appliquée à l'énoncé précédent, il existe un modèle $\mathbb{C}_0$ (clairement infini) de cardinal dénombrable. Noter que $\mathbb{A}_0 = E_A(\mathbb{C}_0)$ est naturellement une $\mathcal{L}$-structure car c'est une $\mathcal{L}_A$-structure. En outre $\mathbb{C}_0 \Vdash \varphi_{E_A}$ donc par relativisation, $\mathbb{A}_0$ et $\mathbb{B}_0$ sont séparées par φ. Montrons que les $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{A}_0$ et $\mathbb{B}_0$ sont pourtant ∞-isomorphes.

Considérons la famille :

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{A}_0^n \times \mathbb{B}_0^n : \mathbb{C}_0 \models I(\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle)\} .$$

(Noter qu'il s'agit d'une réunion infinie, et qu'en outre la taille des abréviations $\langle \mathbf{a} \rangle$ croît avec n ; mais nous ne demandons pas la définissabilité de $\mathcal{F}_0$.)

Elle est non vide par construction. Nous affirmons que c'est une famille de va-et-vient sans restrictions. Soit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{F}_0$, disons des n-uplets ; il n'y a pas de borne a priori sur n.

— Comme la transposition (12) et le long cycle $(12 \ldots n)$ engendrent le groupe symétrique sur n lettres, pour toute permutation σ on a encore $(\mathbf{a}^\sigma, \mathbf{b}^\sigma) \in \mathcal{F}_0$.

— Soient maintenant $k \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ un uplet d'indices. On notait $\mathbf{a_j} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$. Le point précédent, avec délétion et répétition, montre que $(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_j}) \in \mathcal{F}_0$.

— Soit $R \in \mathcal{L}$ une relation k-aire. Par 0-isomorphisme et relativisation, $\mathbb{A}_0 \models R(\mathbf{a_j})$ ssi $\mathbb{C}_0 \models R_A(\mathbf{a_j})$ ssi $\mathbb{C}_0 \models R_B(\mathbf{b_j})$ ssi $\mathbb{B}_0 \models R(\mathbf{b_j})$: ce qu'on voulait.

— Si en outre $\alpha \in \mathbb{A}$, il existe β tel que $\mathbb{C}_0 \models I(\langle \mathbf{a} \rangle^\frown \langle \alpha \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle^\frown \langle \beta \rangle)$. Par associativité, on a bien $\langle \mathbf{a} \rangle^\frown \langle \alpha \rangle = \langle \mathbf{a}, \alpha \rangle$. Ceci montre le va, et le vient est similaire. ◇

Nous avons établi un ∞-va-et-vient entre deux structures dénombrables, donc isomorphes, mais séparées par φ : contradiction. □

Ceci établit la proposition. Revenons au théorème, par les mêmes techniques.

§ O.2. Démonstration du théorème de Lindström

Démonstration du théorème de Lindström. Soient $\mathcal{L}$ un langage et φ un $\Lambda(\mathcal{L})$-énoncé ; on montre que φ équivaut à un $\mathcal{L}$-énoncé de la logique élémentaire ; supposons que non. On peut supposer $\mathcal{L}$ purement relationnel et fini.

Nous allons construire deux structures ∞-isomorphes mais séparées par φ : ceci contredira la Proposition. Le cœur de la démonstration est d'obtenir cet ∞-va-et-vient grâce à un va-et-vient *de hauteur non standard* via la compacité.

Étape 1. Pour chaque entier intuitif n, il existe $\mathbb{A}_n \Vdash \varphi$ et $\mathbb{B}_n \Vdash \neg\varphi$ qui sont n-isomorphes.

Vérification. Rappelons que nous nous sommes ramenés à $\mathcal{L}$ relationnel fini.

À n fixé, il n'y a qu'un nombre fini de classes de n-isomorphismes de structures, et chacune est donnée par un énoncé *élémentaire* de rang de quantification $\leqslant n$ (récurrence sur n). Il existe donc des énoncés *élémentaires* $\chi_{n,i}$, pour $i = 1 \dots d_n$, caractérisant le n-isomorphisme, i.e. :

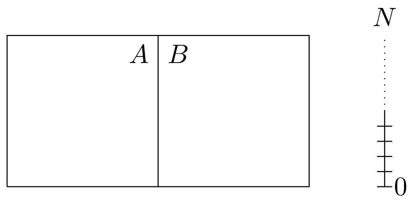
— chaque structure vérifie un unique $\chi_{n,i}$,

— deux structures sont n-isomorphes ssi elles vérifient le même.

Par hypothèse, φ n'équivaut à aucune formule élémentaire, donc $\mathbf{Mod}(\varphi) \neq \mathbf{Mod}(\chi_{n,i})$.

On affirme qu'existent $\mathbb{A}_n \Vdash \varphi$ et $\mathbb{B}_n \Vdash \neg\varphi$ qui sont n-isomorphes. Si ce n'est pas le cas, $\mathbf{Mod}(\varphi)$ doit pour chaque i soit éviter $\mathbf{Mod}(\chi_{n,i})$, soit le contenir. Mais alors $\mathbf{Mod}(\varphi) = \bigsqcup_{j\in J} \mathbf{Mod}(\chi_{n,j})$ pour J l'ensemble (fini) des classes rencontrées, de sorte que φ équivaut dans $\Lambda(\mathcal{L})$ à $\bigvee_{j\in J} \chi_{n,j}$, qui est élémentaire : contradiction. D'où $\mathbb{A}_n$ et $\mathbb{B}_n$ comme voulus. ◇

Pour forcer un va-et-vient non standard entre deux structures rivales, il faut en formaliser la hauteur, et donc le type d'ordre des entiers. Nous allons ainsi bâtir un univers tripartite : un morceau code pour $\mathbb{A}$, un autre pour $\mathbb{B}$, et le troisième pour les entiers, qu'il faut formaliser.



Univers bi-partite, avec échelle de temps

Étape 2. Codage du va-et-vient.

Vérification. C'est une longue suite de constructions.

Langage pour $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$: on copie $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$ disjoints ; on ajoute deux relations unaires A et B.

Langage pour les hauteurs : on ajoute encore une nouvelle relation unaire N, une relation binaire $<$, ainsi qu'une nouvelle constante 0. Soit $\mathcal{L}^*$ le langage résultant.

Tripartition de l'univers : à $T^* = \varnothing$ on ajoute :

— les relations A, B, N partitionnent l'univers ;

— les typages attendus, dont $N(0)$.

Gestion des hauteurs : à T^* on ajoute que $(N\,; 0, <)$ est un ordre à plus petit élément 0 et discret à gauche (tout élément $\nu > 0$ possède un prédécesseur immédiat, noté ν^-).

Relations de va-et-vient : pour chaque entier intuitif k on ajoute à $\mathcal{L}^*$ une relation I_k pour la hauteur d'isomorphisme de k-uplets. Et à T^* on ajoute, toujours pour chaque entier intuitif k :

— $I_k \subseteq A^k \times B^k \times N$

(I_k est une relation entre k-uplets pertinents, indexée par une hauteur entière) ;

— grâce à l'abréviation $\mathbf{a_j} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_\ell})$ pour $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_\ell) \in \{1, \dots, k\}^\ell$,

$$(\forall \mathbf{a} \in A)(\forall \mathbf{b} \in B) \left[I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0) \leftrightarrow \bigwedge_{R \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\mathbf{j} \in \{1,\dots,k\}^\ell} (R_A(\mathbf{a_j}) \leftrightarrow R_B(\mathbf{b_j})) \right]$$

(deux k-uplets de A et B sont 0-isomorphes ssi tous les sous-uplets « pareillement extraits » satisfont aux mêmes relations de base ; c'est exprimable car on s'est ramené à $\mathcal{L}$ fini) ;

— $(\forall \mathbf{a} \in A)(\forall \mathbf{b} \in B)(\forall \nu \in N)$

$$[\nu > 0] \to \left[I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \nu) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc} & (\forall \alpha \in A) & (\exists \beta \in B) & I_{k+1}(\mathbf{a}\alpha, \mathbf{b}\beta, \nu^-) \\ \wedge & (\forall \beta \in B) & (\exists \alpha \in A) & I_{k+1}(\mathbf{a}\alpha, \mathbf{b}\beta, \nu^-) \end{array} \right) \right]$$

(définition du va-et-vient). ◇

Noter que dans la définition du va-et-vient on a *quantifié* sur ν au lieu de se restreindre aux entiers intuitifs : c'est ce qui permettra une hauteur non standard. (Noter aussi qu'on aurait pu forcer davantage de propriétés familières des entiers ; c'est inutile.)

Étape 3. Il existe $\mathbb{A}^* \Vdash \varphi$ et $\mathbb{B}^* \Vdash \neg\varphi$ qui sont ∞-isomorphes.

Vérification. On ajoute enfin à $\mathcal{L}^*$ une dernière constante ν^*, et à T^* les axiomes :

— $N(\nu^*)$;

— pour chaque entier intuitif n, ν^* possède au moins n prédécesseurs ;

— $\varphi_{|A}$ (relativisation de l'énoncé φ, ou plutôt de sa copie $\varphi_{\mathbb{A}}$, à la sous-structure A) ;

— $\neg\varphi_{|\mathbb{B}}$;

— $I_0(\varnothing, \varnothing, \nu^*)$.

Cette axiomatisation est dénombrable. Montrons qu'elle est finiment satisfaisable. Une partie finie se satisfait en prenant :

— pour $(N ; 0, <)$, les vrais entiers ;

— pour ν^*, un entier intuitif n assez grand ;

— $A = \mathbb{A}_n$ et $B = \mathbb{B}_n$ (Étape 1) dans l'interprétation naturelle de $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$;

— pour I_k les vraies relations de va-et-vient finitaire (indexé ici par $N = \mathbb{N}$).

D'après l'Étape 1, les sous-structures $\mathbb{A}_n$ et $\mathbb{B}_n$ sont n-isomorphes, mais séparées par la relativisation de φ. La partie finie est donc satisfaite.

Par compacité dénombrable de Λ, la théorie T^* possède un modèle $(\mathbb{A}^*, \mathbb{B}^*, \mathbb{N}^*)$. Appelons « non standard » un $\mu \in N$ qui possède une infinité de prédécesseurs ; ν^* est un tel élément. Alors la famille de toutes les relations $I_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mu)$ pour k intuitifs *et μ non standard* permet le va-et-vient sans restrictions. Supposons en effet $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mu)$, et qu'on veuille refléter α. Comme $\mu > 0$, par les axiomes de va-et-vient il existe β convenant pour avoir μ^--isomorphisme de $(k+1)$-uplets entre $(\mathbf{a}, \alpha)$ et $(\mathbf{b}, \beta)$; or μ^- reste non standard. $\diamond$

Mais ceci contredit clairement la Proposition. $\square$

Remarques

— En supposant que la logique a même la propriété de *Skolem* dénombrable (voir la Remarque suivant l'énoncé du Théorème), on conclurait sans invoquer la Proposition. En effet $\mathbb{A}^*$ et $\mathbb{B}^*$ peuvent être prises dénombrables ; étant ∞-isomorphes elles sont alors isomorphes bien que séparées par φ, contradiction. Mais sous la seule hypothèse « Löwenheim », la Proposition est requise.

— Comparer la démonstration de la Proposition, où l'on gère un va-et-vient sans restrictions entre uplets de longueur non standard, à celle du Théorème, où l'on manie des hauteurs non standard de va-et-vient entre uplets finis. (On pourrait unifier les arguments au détriment de la pédagogie.)

Exercices

O.1. Montrer que les logiques $\Lambda_{\omega_1,\omega}$ et $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_1})$ sont incomparables.

O.2. Écrire une démonstration directe du théorème de Lindström, sous l'hypothèse Löwenheim, sans passer par la proposition de § O.1. On pourra par exemple introduire une structure à cinq sortes (fastidieux mais formateur).

O.3. Établir les énoncés suivants par va-et-vient non standard.

Lemme (« interpolation » de Craig)**.** Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient φ_1, φ_2 des $\mathcal{L}_i$-formules. On suppose $\varphi_1 \models \varphi_2$. Alors il existe une $\mathcal{L}_\cap$-formule χ telle que $\varphi_1 \models \chi \models \varphi_2$.

Lemme (« cohérence disjointe » de Robinson)**.** Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux langages et $\mathcal{L}_\cap = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Soient T_1, T_2 des $\mathcal{L}_i$-théories. On suppose que $T_1 \cap T_2$ est une $\mathcal{L}_\cap$-théorie complète. Alors $T_1 \cup T_2$ est cohérente.

(Suite à l'exercice 24.6.)

O.4. On a rencontré à l'exercice 17.4 le résultat suivant.

Lemme. Si σ est un plongement partiel élémentaire de $\mathbb{A}$, alors il existe une extension élémentaire $\mathbb{A}^* \succcurlyeq \mathbb{A}$ et $\sigma^* \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^*)$ étendant σ.

Le démontrer par va-et-vient. (Se ramener à $\mathbb{A}$ dénombrable, puis introduire des relations de va-et-vient.)

O.5. Si $\mathcal{L}$ est un langage et $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$-structure, soit $\mathbb{A}^c$ la $\mathcal{L}$-structure obtenue en posant $R[\mathbb{A}^c] = \mathbb{A}^n \backslash R[\mathbb{A}]$, où n est l'arité de R. Soit Λ^c la logique ayant même syntaxe que $\Lambda_{\omega,\omega}$, mais pour laquelle :

$$\mathbb{A} \models \varphi\ [\Lambda^c] \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \mathbb{A} \models \varphi & \text{si } \mathbb{A} \text{ est infini} \\ \mathbb{A}^c \models \varphi & \text{si } \mathbb{A} \text{ est fini} \end{cases} .$$

Montrer que cette logique est compacte, a la propriété de Skolem dénombrable, et n'est pas comparable avec $\Lambda_{\omega,\omega}$.

Notes conclusives

• **Repères historiques**

> *I tried the obvious approach, namely, to look for an alternative proof of Beth's theorem* [...] *— what I did find was a new proof of Robinson's consistency theorem. Unlike previous proofs of this result, the new proof depended only on the very basic Löwenheim-Skolem and (ω-)compactness theorems (plus that part of the FE criterion which is (trivially) true of every extension of EL).* [...]
>
> *But there was something "wrong" with the proof: the full force of the assumption that the relevant structures M and N are L-equivalent was never used; in fact, the conclusion follows from the weaker assumption that M and N are elementarily equivalent. But then the only possible conclusion was that if L is ω-compact and has the Löwenheim-Skolem property, then elementary equivalence implies L-equivalence.* [Ling95, pp. 23–24]

• On peut voir un précurseur en Mostowski : [Mos57, Theorem 8], qui montre la définissabilité d'un quantificateur sous une hypothèse type Löwenheim-Skolem. • Comme narré dans [Lin95], Lindström cherchait les limites du lemme d'interpolation de Craig sous quantificateurs généralisés, et put redémontrer le lemme de cohérence disjointe de Robinson pour des logiques abstraites (d'où l'exercice O.3). Il se rendit compte qu'il avait en fait caractérisé la logique élémentaire ; son théorème est paru dans [**Lin69**, Theorem 2]. • Pour Lindström lui-même, [VW10].

• **Variations ; une conjecture.** • Le résultat possède diverses variantes et généralisations : certaines déjà chez Lindström, d'autres dans [Flu85]. V. aussi [Vää12]. • Sous les autres hypothèses, la perte de com-

[Lin95] : Per Lindström. « Prologue ». In : *Quantifiers : logics, models and computation. Vol. 1. Surveys.* T. 248. Synthese Lib. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, p. 21-24

[Mos57] : Andrzej Mostowski. « On a generalization of quantifiers ». In : *Fund. Math.* 44 (1957), p. 12-36

[**Lin69**] : Per Lindström. « On extensions of elementary logic ». In : *Theoria* 35 (1969), p. 1-11

[VW10] : Jouko Väänänen et Dag Westerståhl. « In Memoriam : Per Lindström ». In : *Theoria* 76 (2010), p. 100-107

[Flu85] : Jörg Flum. « Characterizing logics ». In : *Model-theoretic logics.* Perspect. Math. Logic. Springer, New York, 1985, p. 77-120

[Vää12] : Jouko Väänänen. « Lindström's theorem ». In : *Universal logic : an anthology.* Stud. Univers. Log. Basel : Birkhäuser/Springer Basel AG, 2012, p. 231-235

pacité entraîne la caractérisabilité de la finitude, dans le sens suivant.

Proposition (v. [Flu85, Lemma 1.1.2]). Soit Λ une logique raisonnable (ici : occurrence finie, conjonction, disjonction) étendant strictement la logique élémentaire. On suppose qu'elle a la propriété de Löwenheim dénombrable. Alors pour une relation unaire R, il existe un $\Lambda(R)$-énoncé :

- ayant des modèles de tout cardinal fini ;
- et dont tous les modèles sont de cardinal fini.

• La conjecture suivante (de Friedman ?) est encore ouverte.

Conjecture. Soit Λ une extension de la logique élémentaire vérifiant la compacité dénombrable et le lemme d'interpolation de Craig. Alors Λ est la logique élémentaire.

• **Optimalité du résultat**

- Soit Λ la logique $\Lambda_{\omega,\omega}(\exists_{\geqslant\aleph_0})$, i.e. l'extension de la logique élémentaire par le quantificateur « il existe une infinité ». Cette logique a la propriété de Löwenheim dénombrable (exercice 15.8), mais n'est pas dénombrablement compacte (ex. 11.8).
- Voici une extension compacte stricte de la logique élémentaire [Flu85]. On ajoute *à la logique* un symbole de relation 0-aire φ (il sera donc présent dans tout langage), *valant axiome* (il sera donc présent dans toute théorie) ; les énoncés sont comme attendu. L'interprétation de φ est de ne garder que les structures ayant pour cardinal un successeur (i.e., la classe de structures est restreinte). Ceci donne bien une logique abstraite compacte ; l'axiome φ n'est équivalent à aucune formule élémentaire ; mais la propriété de Löwenheim dénombrable est manifestement en défaut.
- Cet exemple est clairement artificiel ; on demande alors s'il existe une extension compacte de la logique élémentaire qui est stricte *en modèles dénombrables*, i.e. avec un énoncé φ tel qu'aucun énoncé élémentaire χ ne satisfasse : pour toute structure *dénombrable*, $\mathbb{A} \models \varphi$ ssi $\mathbb{A} \models \chi$. (L'exemple précédent s'effondre : φ est $\perp$.) En effet Shelah a construit, par quantificateurs binaires généralisés, des logiques compactes étendant proprement $\Lambda_{\omega,\omega}$; v. § 11, notes conclusives.
- Il existe des logiques autres que $\Lambda_{\omega,\omega}$ dénombrablement compactes ayant Löwenheim dénombrable ; mais elles ne sont pas comparables avec $\Lambda_{\omega,\omega}$. L'exercice O.5 vient de [Flu85, example 1.2.2].

• **Autres logiques.** • Logique modale : il se publie régulièrement des analogues. • Logique restreinte aux structures finies : oui, [Vää03, Theorem 3]. • Logique continue : oui, [Cai17]. • Logique infinitaire : pas d'analogue *stricto sensu* pour $\Lambda_{\kappa,\omega}$ et $\Lambda_{\kappa,\kappa}$, i.e. elles ne sont pas maximales pour les propriétés attendues (remplacer « dénombrable » par κ). En fait *il n'existe même pas d'extension maximale pour ces propriétés* [SV05]. • Il existe toutefois une caractérisation d'inspiration voisine (sous des hypothèses cardinales) [Bar74, Theorem II.3.2]. • Logique positive (sans négation) : pas d'analogue, car pas d'extension maximale de la logique élémentaire (parmi celles ayant compacité dénombrable et Löwenheim dénombrable) [SV20].

[Vää03] : Jouko Väänänen. « Pseudo-finite model theory ». In : t. 24. 8th Workshop on Logic, Language, Informations and Computation—WoLLIC'2001 (Brasília). 2003, p. 169-183
[Cai17] : Xavier Caicedo. « Maximality of continuous logic ». In : *Beyond first order model theory*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2017, p. 105-130
[SV05] : Saharon Shelah et Jouko Väänänen. « A note on extensions of infinitary logic ». In : *Arch. Math. Logic* 44.1 (2005), p. 63-69
[Bar74] : Jon Barwise. « Axioms for abstract model theory ». In : *Ann. Math. Logic* 7 (1974), p. 221-265
[SV20] : Saharon Shelah et Jouko Väänänen. « Positive logics ». Prépublication. 2020

- **Discussion.** • « *Therefore, what is established is not that first order logic is the only possible logic but rather that it is the only possible logic when we in a sense deny reality to the concept of uncountability and require (what seems to be a less debatable condition) that logical proofs be formally checkable (viz. the requirement of axiomatizability or compactness)* » [Wang, IV.2.3, p. 154]. Le refus de l'indénombrable était d'ailleux exactement l'attitude de Skolem, qui développa la logique élémentaire en partie pour attaquer la théorie des ensembles. • Le théorème de Lindström est parfois vu comme la formulation rigoureuse de ce que la logique élémentaire est maximale parmi celles ayant « les bonnes propriétés ». • Or on peut contester que la propriété de Löwenheim dénombrable (ou toute propriété à la Skolem) soit « bonne » : d'un point de vue naïvement fondationnel, tout obstacle à la catégoricité absolue est indésirable. (Cf. sémantique pleine du deuxième ordre ; noter toutefois que la compacité entraîne les phénomènes non standard *ascendants*, donc y fait obstacle aussi.) Dans cette optique le théorème de Lindström ne montrerait pas l'optimalité de la logique élémentaire ; au contraire il soulignerait son défaut principal. • Mais c'est se méprendre sur le rôle de la logique, et se tromper d'attentes, que vouloir s'en servir pour asseoir les mathématiques. *La* logique élémentaire est un outil pertinent pour analyser certaines structures algébriques, en raison même de son incatégoricité qui permet de fonctorialiser l'information définissable. *Les* logiques sont un objet d'étude ; le phénomène de Löwenheim-Skolem est manifestement important car récurrent. La caractérisation de Lindström montre ainsi que la logique élémentaire n'est pas un caprice de notre imagination, mais un objet inévitable.

[Wang] : Hao Wang. *From Mathematics to Philosophy.* Routledge Revivals. Routledge, 174. 444 p.