Compléments au chapitre V (« Une axiomatique pour l'appartenance »)

Aperçu du chapitre. § P revient sur les phénomènes d'incomplétude dans le cadre ensembliste ; ils s'y démontrent plus facilement. § Q expose la théorie de Bernays-Gödel-von Neumann et celle de Kelley-Morse. § R montre que dans la formulation idoine, l'hypothèse du continu généralisée entraîne l'axiome du choix. § S présente la décomposition de la sphère due à Hausdorff-Banach-Tarski. Enfin § T introduit aux nombres surréels.

§ P. Incomplétude dans le cadre ensembliste

Après avoir mené la formalisation des théories élémentaires dans ZF (§ P.1), on démontre sémantiquement : 1. que ZF ne démontre pas la cohérence formelle de sa propre formalisation (§ P.2), et 2. que tout modèle de ZF possède une structure formelle $(m, \varepsilon) \models$ ZF (§ P.3). Ces deux énoncés ne sont *pas* contradictoires. Lever le paradoxe révèle à nouveau les phénomènes non standard inhérents à toute formalisation.

Prérequis : §§ 6, 20, 26.

La syntaxe et la satisfaction pré-existent à l'étude de ZF mais s'y codent aisément. Comme en § 26.1, on internalise dans ZF la syntaxe puis la satisfaction.

— Un *langage relationnel formel* est la formalisation d'un langage relationnel, i.e. un ensemble de relations d'arité formellement finie. Tout vrai langage relationnel induit un langage relationnel formel ; les identifier est alors sans risque.

— Une *structure relationnelle formelle* est une paire etc.
  Nous noterons $\mathbb{m}$ les paires $(m, \mathcal{L})$; ceci allège les notations.

— Soit $\mathcal{L}$-⌜Form⌝ l'ensemble des formules formelles du langage formel $\mathcal{L}$; en pratique on omet souvent de noter $\mathcal{L}$.

— Soit $\ulcorner\models\urcorner$ la relation de satisfaction formalisée (locale) entre structures formelles et formules formelles à paramètres.

Cette dernière est *fidèle* au sens où pour chaque vrai langage $\mathcal{L}$, chaque vrai $\mathcal{L}$-énoncé φ, chaque modèle $\mathbb{M} \models$ ZF, et pour toute structure formelle $\mathbb{m} = (m, \#\mathcal{L})$ objet de $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{m} \models \varphi \text{ ssi } \mathbb{M} \models (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner).$$

Noter l'importance d'avoir un vrai langage et un vrai énoncé pour que la satisfaction de gauche ait un sens. Celle entre parenthèses à droite est purement formelle. Dans le cas où $\mathcal{L} = \{\in\}$ et $\mathbb{m} = (m, \# \in)$, c'est encore équivalent à $\mathbb{M} \models \ulcorner\varphi_{|m}\urcorner$, où $\varphi_{|m}$ est l'énoncé à quantification restreinte à m.

Remarque. En toute rigueur, les objets formels ci-dessus sont des foncteurs définis sur une classe de modèles de ZF. Un cas particulier serait un paramètre (au sens modèle-théorique naïf), présent dans un modèle et toutes ses extensions.

§ P.1. Théories formelles

Définition. Une *théorie formelle* est un sous-ensemble d'un $\mathcal{L}$-⌜Én⌝.

Remarques

— Cette définition crée a posteriori la terminologie *théorie naïve* ; ZF est une théorie intuitive.

— Dans la suite, T désigne une théorie formelle (et non plus intuitive, à quoi l'on réserve Θ).

On internalise les notions logiques du chapitre II. Soit $\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner T$ la relation binaire $(\forall f)(f \in T \to \mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner f)$. Soit $T\ulcorner\vdash\urcorner f$ la relation binaire « il existe un arbre fini de déduction » etc. (étant bien entendu que cet arbre est purement formel). Pour statuer sur ces relations, il faut les évaluer dans un modèle $\mathbb{M} \models$ ZF dont $\mathbb{m}$ et T soient des points.

Définition. Une théorie formelle T est :

— *formellement satisfaisable*, noté ⌜Sat⌝(T), si $(\exists\mathbb{m})(\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner T)$;

— *formellement cohérente*, noté ⌜Coh⌝(T), si $\neg(\exists D)$(« D est un arbre de déduction à feuilles dans T et racine $\ulcorner\perp\urcorner$ »).

Remarques

— Ces notions n'ont pas de sens absolu : seul un modèle de ZF peut décider s'il satisfait ou non à $\ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner(T)$ ou $\ulcorner\mathrm{Coh}\urcorner(T)$.

— En revanche $\ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner(T)$ et $\ulcorner\mathrm{Coh}\urcorner(T)$ sont de *vraies* $\{\in\}$-formules à paramètres T.

Théorème (complétude formalisée)**.**

— ZFC $\models (\forall T)[$« T est une théorie formelle » $\to (\ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner(T) \leftrightarrow \ulcorner\mathrm{Coh}\urcorner(T))]$.

— ZF $\models (\forall T)[$« T est une théorie formelle en langage bien ordonnable » $\to (\ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner(T) \leftrightarrow \ulcorner\mathrm{Coh}\urcorner(T))]$.

Démonstration. Adapter l'une des preuves de § 10 ou § SÉ2. □

Exemple (théorie formelle $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$).

— À une $\{\in\}$-formule formelle f on peut associer la f-instance du schéma de remplacement :

$$(\forall \mathbf{a})(\forall d)[\text{« } f(\cdot,\cdot,\mathbf{a}) \text{ est fonctionnelle »} \to (\exists c)(\forall x)(x \in c \leftrightarrow (\exists y)(y \in d \wedge f(x, y, \mathbf{a}))].$$

La clause entre guillemets est une abréviation licite, obtenue par substitutions formelles de variables formelles.

— Soit $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$ qui à tout modèle associe l'ensemble des énoncés formels suivants : les $\ulcorner\varphi\urcorner$, où φ est l'un des énoncés « extensionnalité », etc., puis toutes les instances formelles du remplacement.

— Dans chaque modèle $\mathbb{M} \models$ ZF, la partie $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner[\mathbb{M}]$ forme un ensemble dénombrable d'énoncés ; celui-ci peut contenir des instances non standard du schéma de remplacement.

— Soit $\ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$ le $\{\in\}$-énoncé intuitif $\ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$.

Remarques

— L'écriture « $\ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner$(ZF) » n'a pas de sens.

— On n'a *pas* introduit d'énoncé noté Sat ZF, qui affirmerait simplement « ZF est satisfaisable », en français. Ce ne serait *pas* un $\{\in\}$-énoncé.

La théorie ZF parle de combinatoire, pas de logique mathématique ; on ne peut lui demander de statuer sur Sat ZF. (De nombreux auteurs entretiennent, sans doute délibérément, la confusion entre l'énoncé français Sat ZF et le vrai $\{\in\}$-énoncé $\ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$.)

— Les §§ 25–27 démontrent mieux que des énoncés du type « si la théorie naïve Θ_1 est satisfaisable, alors Θ_2 l'est ». Leur preuve étant menable dans ZF, on a même : ZF $\models \ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner\ulcorner\Theta_1\urcorner \to \ulcorner\mathrm{Sat}\urcorner\ulcorner\Theta_2\urcorner$.

§ P.2. Preuve de Jech du second théorème d'incomplétude

Lemme. Si $\mathbb{M} \models \mathrm{ZF}$ et $\mathbb{m} = (m, \varepsilon)$ en est une structure formelle tel que $\mathbb{M} \models (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$, alors $\mathbb{m} \models \mathrm{ZF}$.

Démonstration. Pour chaque vrai énoncé φ de ZF, on a $\mathbb{M} \models (\ulcorner\varphi\urcorner \in \ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$, donc $\mathbb{M} \models (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner)$ et par fidélité $\mathbb{m} \models \varphi$. □

La réciproque est très fausse ; la formalisation de ZF en $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$ crée un « décalage ». On y revient au théorème P.3.

Théorème (Gödel)**.** Si ZF est satisfaisable, alors $\mathrm{ZF} \not\models \ulcorner\mathrm{Sat}\,\mathrm{ZF}\urcorner$.

Démonstration « de Jech ».

Notation. Soient $\mathbb{M}_1 = (M_1, \in_1)$ et $\mathbb{M}_2 = (M_2, \in_2)$ deux modèles de ZF. On dit que $\mathbb{M}_1$ *est englobé* par $\mathbb{M}_2$, noté $\mathbb{M}_1 \lhd \mathbb{M}_2$, si $\mathbb{M}_1$ est un objet de $\mathbb{M}_2$, i.e. s'il existe une paire $\mathbb{m}_1 = (m_1, \varepsilon_1)$ de $\mathbb{M}_2$ telle que pour x et y de $\mathbb{M}_2$:

$$\mathbb{M}_1 \models x \in y \text{ ssi } \mathbb{M}_2 \models (x, y) \in \varepsilon_1.$$

Ceci présuppose que tout point de $\mathbb{M}_1$ soit également point de $\mathbb{M}_2$.

Étape 1. La relation $\lhd$ est transitive entre modèles de ZF.

Vérification. Supposons $\mathbb{M}_1 \lhd \mathbb{M}_2 \lhd \mathbb{M}_3$. Fixons des objets $\mathbb{m}_1 = (m_1, \varepsilon_1)$ de $\mathbb{M}_2$ et $\mathbb{m}_2 = (m_2, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{M}_3$ en témoignant. Soit $E_3(x)$ la partie définissable de $\mathbb{M}_3$ définie par : $[x \in m_1^2] \wedge [(x, \varepsilon_1) \in \varepsilon_2]$. Par compréhension, E_3 définit dans $\mathbb{M}_3$ un ensemble η_3. Ainsi (m_1, η_3) est un objet de $\mathbb{M}_3$; on affirme que c'est $\mathbb{M}_1$. En effet pour a, b de $\mathbb{M}_1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \models a \in b &\text{ ssi } \mathbb{M}_2 \models (a, b) \in \varepsilon_1 \\ &\text{ ssi } \mathbb{M}_3 \models ((a, b), \varepsilon_1) \in \varepsilon_2 \\ &\text{ ssi } \mathbb{M}_3 \models E_3(a, b) \\ &\text{ ssi } \mathbb{M}_3 \models (a, b) \in \eta_3. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{M}_1 \lhd \mathbb{M}_3$. ◇

Notation.

— Soit $\delta(f)$ la (vraie) formule : $(f \in \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner) \wedge (\exists \mathbb{m})[(\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner) \wedge \neg(\mathbb{m}\ulcorner\models$

$\urcorner f(f))]$.
(En toute rigueur, écrire $(x \in \ulcorner\mathrm{Form}(x)\urcorner) \wedge \ldots$; on imagine la substitution.)

— Soit γ le (vrai) énoncé $\delta(\delta)$; un puriste écrira $\delta[x := \#\delta]$.

Ainsi :

$$\mathrm{ZF} \models [\gamma \leftrightarrow (\exists \mathbb{m})(\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner) \wedge \neg(\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\gamma\urcorner)]\,.$$

Dorénavant, « modèle » signifie « modèle de ZF », au sens intuitif.

Étape 2. Un modèle est dit *positif* s'il vérifie γ, et *négatif* sinon. Alors :

(i) tout modèle positif englobe un modèle négatif ;

(ii) un modèle négatif n'englobe aucun modèle négatif.

Vérification. Par construction de γ. ◇

Démontrons le théorème. Par hypothèse, $\mathrm{ZF} \models \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$, c'est-à-dire $\mathrm{ZF} \models (\exists\mathbb{m})(\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$. Si donc $\mathbb{M} \models \mathrm{ZF}$, alors il existe un point $\mathbb{m}$ tel que $\mathbb{M} \models (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$. D'après le lemme, $\mathbb{m} \models \mathrm{ZF}$. En conclusion :

(iii) tout modèle englobe un modèle.

Soit $\mathbb{M}$ un modèle. Par (i) on peut le supposer négatif. Par (iii) il englobe un modèle $\mathbb{M}'$; d'après (ii) $\mathbb{M}'$ est positif. Par (i) $\mathbb{M}'$ englobe un modèle $\mathbb{M}''$ négatif. La transitivité entraîne $\mathbb{M}'' \lhd \mathbb{M}$, contre (ii). □

§ P.3. Tout modèle englobe un modèle.

La preuve de Jech ne réfute pas « tout modèle englobe un modèle » : au contraire.

Théorème. Soit $\mathbb{M} \models \mathrm{ZF}$. Alors il existe dans $\mathbb{M}$ une structure formelle $\mathbb{m} = (m, \varepsilon)$ telle que $\mathbb{m} \models \mathrm{ZF}$.

Remarque. Cela ne contredit pas l'incomplétude. En effet $\mathbb{m}$ est modèle de ZF, mais $\mathbb{M}$ pourrait l'ignorer : en notation évidente, on n'a pas nécessairement $\mathbb{M} \models (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$. (Si c'était toujours le cas, on aurait $\mathbb{M} \models \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$ pour tout modèle ; contre l'incomplétude.)

Cette remarque illustre le décalage entre ZF et sa contrepartie formelle $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$. Toute formalisation crée des artefacts non standard ; et l'énoncé formel $\ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$ ne reflète donc pas *exactement* l'énoncé informel « ZF possède un modèle ».

L'inadéquation provient de l'existence de modèles non standard. C'est elle aussi que la preuve exploite.

Démonstration. On rappelle que ω est le foncteur associant à tout modèle son premier ordinal limite. Soit $\mathbb{M} \models \mathrm{ZF}$; notamment ZF est vraiment satisfaisable, et vraiment cohérente. Il y a deux cas, selon que $\omega[\mathbb{M}]$ ne contient que des contreparties formelles d'entiers intuitifs, ou en contient davantage.

Étape 1. On peut supposer que $\omega[\mathbb{M}]$ contient des entiers non standard.

Vérification. Supposons que $\omega[\mathbb{M}]$ ne compte que les (contreparties des) vrais entiers. Un tel modèle démontre la formalisation de la cohérence de ZF. En effet la notion d'entier formel de $\mathbb{M}$ étant la bonne, la notion de déduction formelle aussi. En particulier aucun objet combinatoire de $\mathbb{M}$ n'est une déduction formelle de $\ulcorner\perp\urcorner$ à partir de $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$. Ainsi $\mathbb{M} \models \ulcorner\mathrm{Coh\,ZF}\urcorner$.

Par complétude formalisée, $\mathbb{M} \models \ulcorner\mathrm{Coh\,ZF}\urcorner \to \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$; il suit $\mathbb{M} \models \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$. Donc $\mathbb{M}$ possède un point tel que $\mathbb{M} \models (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$, et $\mathbb{m} \models \mathrm{ZF}$ par fidélité. ◇

Étape 2. Cas non standard.

Vérification. Internalisons la notion de codage ; soit $\ulcorner\#\urcorner\colon \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner \to \omega$ la fonction résultante. Ceci permet d'indexer les axiomes de $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner[\mathbb{M}]$ par $\omega[\mathbb{M}]$. Rappelons enfin de § 23.1 que $\omega[\mathbb{M}]$ vérifie le principe de récurrence pour toutes ses parties définissables dans la structure héritée de $\mathbb{M}$ (ce qui est beaucoup plus fort que la forme « arithmétique » de Peano).

Soit S le point de $\mathbb{M}$ défini par la formule $\varphi(\nu)$ suivante :

$$(\nu \in \omega) \wedge (\exists \mathbb{m})(\forall f)[(f \in \ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner \wedge \ulcorner\#\urcorner f < \nu) \to (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner f)].$$

Noter que le sous-ensemble $S \subseteq \omega[\mathbb{M}]$ est clos inférieurement. En outre S contient toutes les images des *vrais* entiers. Considérons en effet un véritable entier n. Listons les $\mathbb{M}$-axiomes formels de code formel inférieur à $n[\mathbb{M}]$: il y en a un nombre vraiment fini, et ils proviennent de vrais axiomes de ZF, disons $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Par réflexion (exercice 26.8) il existe V_α les vérifiant. Par fidélité, on a bien $\mathbb{M} \models (V_\alpha \vDash \ulcorner\varphi_1\urcorner) \wedge \cdots \wedge (V_\alpha \vDash \ulcorner\varphi_r\urcorner)$. Ainsi $\mathbb{M} \models (\exists)(\forall f)[(f \in \ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner \wedge \ulcorner\#\urcorner f < n) \to (\mathbb{m} \vDash f)]$. Donc pour chaque entier intuitif n, l'entier formel $n[\mathbb{M}]$ est dans S.

Si S ne déborde pas (de l'image) des vrais entiers, ceux-ci sont accidentellement définissables dans $\omega[\mathbb{M}]$. Mais alors $\omega[\mathbb{M}] = S$ est exactement l'image des vrais entiers : contre l'hypothèse. Donc S dépasse les vrais entiers. Soient $\nu \in \omega[\mathbb{M}]$ un entier non standard présent dans S, et $\mathbb{m}$ un témoin.

Pour tout vrai énoncé φ, on a $\mathbb{M} \models \ulcorner\#\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner < \nu$, d'où $\mathbb{M} \models (\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner)$; par fidélité, $\mathbb{m} \models \varphi$. Ainsi $\mathbb{m} \models \mathrm{ZF}$. ◇

Ceci achève la démonstration. □

Remarque. On appelle parfois « ω-modèle » un modèle $\mathbb{M} \models \mathrm{ZF}$ ayant pour entiers les vrais entiers.

Si l'on trouve cette définition (et donc aussi la dichotomie de la démonstration) trop vague, on peut la formaliser dans un $\mathcal{M}$ englobant $\mathbb{M}$. On y gagne en rigueur, mais on y perd en clarté. En intuition aussi peut-être : car les mathématiciens répugnent à considérer « les entiers » comme un foncteur et non comme une réalité objective préexistant à leur étude.

L'étape 1 montre que *si* $\mathbb{M}$ *est un ω-modèle*, alors $\mathbb{M} \models \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$. L'hypothèse, ou une autre du même type, est inévitable par incomplétude. L'analogue arithmétique serait essentiellement $\mathbb{N} \models \ulcorner\mathrm{Coh\,PA}\urcorner$.

Exercices

P.1. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

> ZF démontre la compacité. En outre ZF démontre la satisfaisabilité de toute partie finie de ZF. Donc ZF démontre la satisfaisabilité de ZF ; contradiction.

P.2. On renforce l'exercice 25.2.

a. Montrer que $\mathrm{ZF} \models (V_\omega\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$. Déduire que $\mathrm{ZF} \models \ulcorner\mathrm{Sat}(\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AI}\})\urcorner$.
Attention, $V_\omega \models \mathrm{ZF}$ ne suffit pas ; il faut gérer toutes les instances du remplacement formel.

b. Montrer que $\mathrm{ZF} \cup \{$« il existe un cardinal inaccessible » $\} \models \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner$.

c. Déduire que (si ZF est satisfaisable alors) $\mathrm{ZF} \not\models$« il existe un cardinal inaccessible », et $\mathrm{ZF}\backslash\{\mathrm{AI}\} \not\models \mathrm{AI}$.

d. Soit $\mathrm{ZF}^+ = \mathrm{ZF} \cup \{$« il existe un cardinal inaccessible » $\}$. A-t-on $\mathrm{ZF} \models \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}\urcorner \to \ulcorner\mathrm{Sat\,ZF}^+\urcorner$?

P.3 (incomplétude et réflexion). On suppose ZF satisfaisable. Il faut avoir fait l'exercice 26.8.

a. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

> Soit $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$. Présentons ZF sous la forme d'une suite d'énoncés $\varphi_0 \leftarrow \varphi_1 \leftarrow \dots$ en ajoutant progressivement les instances du remplacement. Par réflexions successives, on construit des V_{α_n} modèles de φ_n. À la limite, $\bigcup_n V_{\alpha_n}$ est modèle de ZF, mais c'est aussi un point. Notamment $\mathrm{ZF} \models \ulcorner\mathrm{Sat(ZF)}\urcorner$, et donc ZF est incohérente.

b. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

> Soit ρ le principe de réflexion. Alors $\mathrm{ZF} \models \rho$, mais d'autre part $\mathrm{ZF} \cup \{\rho\} \models \ulcorner \mathrm{Sat}\,\mathrm{ZF} \urcorner$. Ainsi $\mathrm{ZF} \models \ulcorner \mathrm{Sat}\,\mathrm{ZF} \urcorner$, et par incomplétude, $\mathrm{ZF} \models \perp$.

Plus sur l'incomplétude de ZF en § P.

P.4. On considère les théories suivantes : (i) ZFC+« il existe un cardinal inaccessible » ; (ii) $\mathrm{ZFC}+(\exists\alpha)(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge V_\alpha \ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner)$; (iii) $\mathrm{ZFC}+(\exists m)\left[(\forall x)(\forall y)(x \in y \in m \to x \in m) \wedge ((m, \in_{|m})\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner)\right]$; (iv) $\mathrm{ZFC} + (\exists \mathbb{m})(\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner \wedge \mathbb{m}[\omega] = \omega)$; (v) $\mathrm{ZFC} + (\exists \mathbb{m})(\mathbb{m}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner)$; (vi) ZFC.

a. Montrer que chacune entraîne la suivante.

(**) b. Montrer que (si les théories sont cohérentes) chaque conséquence est stricte.

Notes conclusives

> *Con alivio, con humillación, con terror, comprendió que él también era una apariencia, que otro estaba soñándolo.*
>
> [Bor40]

• Preuve de Jech pour le second théorème d'incomplétude : [Jec94]. • Théorème P.3 : attribué à Suzuki et Wilmers [SW73] (leur Theorem 2.1 fait en effet le cas standard, mais renvoie à « *Cohen and others* »), et à [Sch78, Theorem 3.1, Corollary, p. 196]. Schlipf assure que le résultat était de « folklore ».

§ Q. Théories d'ensembles et de classes

La théorie de Bernays-Gödel-von Neumann décrit ensembles et classes ; elle est finiment axiomatisable (§ Q.1). Relativement aux seuls ensembles, elle n'est pas plus forte que ZF (§ Q.2). L'impossibilité d'internaliser la satisfaction pour les structures de taille classe mène à la notion de *classe de satisfaction* (§ Q.3). On introduit enfin la théorie de Kelley-Morse, beaucoup plus forte que BGN, et qui démontre notamment la cohérence de ZF (§ Q.4).

Prérequis : § 21 ; mais pour §§ Q.3–Q.4, il faut aussi § 26.1.

---

§ Q.1. Axiomes de BGN

Manier BGN oblige à bien distinguer les *classes*, qui deviennent des objets formels, des *collections*, qui conservent le sens modèle-théorique de « parties définissables ». Les premières servent à modéliser le comportement des secondes, au risque de créer des objets formels sans contrepartie intuitive.

[Bor40] : Jorge Luis Borges. « Las ruinas circulares ». En: *Sur* 75 (1940), págs. 100-106

[Jec94] : Thomas Jech. « On Gödel's second incompleteness theorem ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 121.1 (1994), p. 311-313

[SW73] : Yoshindo Suzuki et George Wilmers. « Non-standard models for set theory ». In : *The Proceedings of the Bertrand Russell Memorial Conference (Uldum, 1971)*. Bertrand Russell Memorial Logic Conference, Leeds, 1973, p. 278-314

[Sch78] : John Stewart Schlipf. « Toward model theory through recursive saturation ». In : *J. Symbolic Logic* 43.2 (1978), p. 183-206

La théorie a plusieurs présentations ; la plus élégante est d'introduire la notation des sortes.

Le langage est $\{\in\}$. Soit $\mathrm{Ens}(x)$ la relation $(\exists y)(x \in y)$. On note $(\forall x\colon \mathrm{Ens})$ le préfixe $(\forall x)(\mathrm{Ens}(x) \to \cdot)$, et $(\exists x\colon \mathrm{Ens})$ le préfixe $(\exists x)(\mathrm{Ens}(x) \wedge \cdot)$. Ces opérations restreintes à la collection Ens sont appelées *quantifications ensemblistes* ou *bornées*. L'abréviation $\subseteq$ porte à présent sur les classes, et non sur les seuls ensembles.

Les axiomes viennent en plusieurs groupes.

Extensionnalité : $(\forall x)(\forall y)[(x = y) \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$; noter que cet axiome porte sur tous les objets ; on pourrait borner la quantification en z.

Bloc ensembliste : quatre axiomes au cœur de ZF, *relativisés aux ensembles* :

paire : $(\forall x\colon \mathrm{Ens})(\forall y\colon \mathrm{Ens})(\exists z\colon \mathrm{Ens})(\forall t)(t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$;

cet objet, unique par extensionnalité, est noté $\{x, y\}$; on formalise alors la paire ordonnée (x, y), puis pour chaque n intuitif, le n-uplet $(a_1, (a_2, \ldots, a_n)\cdots)$. On formalise aussi chaque notion intuitive « être formé de n-uplets », ainsi que « être le graphe d'une fonctionnelle »

réunion : $(\forall x\colon \mathrm{Ens})(\exists y\colon \mathrm{Ens})(\forall z\colon \mathrm{Ens})[z \in y \leftrightarrow (\exists t\colon \mathrm{Ens})(z \in t \wedge t \in x)]$;

cet objet, unique, est noté $\bigcup(x)$; la restriction sur z et t est clairement superflue ;

puissance : $(\forall x\colon \mathrm{Ens})(\exists y\colon \mathrm{Ens})(\forall z\colon \mathrm{Ens})[z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$;

noté $P(x)$;

infini : $(\exists x\colon \mathrm{Ens})[\varnothing \in x \wedge (\forall y\colon \mathrm{Ens})(y \in x \to \bigcup(\{y, \{y\}\}) \in x)]$, avec une notation évidente en $\varnothing$.

***Axiome* de remplacement :** $(\forall F)[$« F est une classe de paires donnant une relation fonctionnelle » $\to (\forall d\colon \mathrm{Ens})(\exists c\colon \mathrm{Ens})(\forall y)(y \in c \leftrightarrow (\exists x)(x \in d \wedge (x, y) \in F))]$;

noter que c'est un unique axiome.

Bloc de constructions de classes : les axiomes suivants « font rentrer la logique dans la théorie » en y formalisant directement les opérations de l'algèbre définissable :

graphe de l'appartenance : $(\exists \Gamma)(\forall x\colon \mathrm{Ens})(\forall y\colon \mathrm{Ens})[(x, y) \in \Gamma \leftrightarrow x \in y]$;

complémentaire : $(\forall c)(\exists c')(\forall x\colon \mathrm{Ens})[x \in c' \leftrightarrow x \notin c]$;

intersection : $(\forall c_1)(\forall c_2)(\exists c_\cap)(\forall x)[x \in c_\cap \leftrightarrow (x \in c_1 \wedge x \in c_2)]$;

première projection : $(\forall x)(\exists y)(\forall z\colon \mathrm{Ens})[z \in y \leftrightarrow (\exists t\colon \mathrm{Ens})((z,t) \in x)]$;

produit cartésien binaire : $(\forall c_1)(\forall c_2)(\exists c_\Pi)(\forall x_1\colon \mathrm{Ens})(\forall x_2\colon \mathrm{Ens})[(x_1,x_2) \in c_\Pi \leftrightarrow (x_1 \in c_1 \wedge x_2 \in c_2)]$;

transposition : $(\forall c)(\exists c^\tau)(\forall x_1\colon \mathrm{Ens})(\forall x_2\colon \mathrm{Ens})[(x_1,x_2) \in c^\tau \leftrightarrow (x_2,x_1) \in c]$;

3-cycle : $(\forall c)(\exists c^\gamma)(\forall x\colon \mathrm{Ens})(\forall y\colon \mathrm{Ens})(\forall z\colon \mathrm{Ens})[(x,(y,z)) \in c^\gamma \leftrightarrow (y,(z,x)) \in c]$.

Fondation : vient en deux versions équivalentes a posteriori :

— soit restreinte aux ensembles : $(\forall x\colon \mathrm{Ens})[x \neq \varnothing \to (\exists y)(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)]$,

— soit pour toutes les classes : $(\forall x)[x \neq \varnothing \to (\exists y)(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)]$.

Choix : trois options :

— pas de choix,

— AC (n'importe quel énoncé usuel, mais quantification restreinte aux ensembles),

— choix global CG : $(\exists c)[$« c est le graphe d'une fonctionnelle » $\wedge (\forall x\colon \mathrm{Ens})(x \neq \varnothing \to c(x) \in x)]$.

Remarques

— Bien noter que BGN *est finiment axiomatisable*. L'exposition insistant sur la « compréhension restreinte » (v. démonstration de § Q.2) éclaire l'intuition, mais cache ce caractère fini.

— On peut ou non borner le quantificateur dans la définition de $\mathrm{Ens}(x)$: il suit des autres axiomes que tout ensemble appartient à un ensemble.

— On rencontre diverses variantes : le produit cartésien binaire peut être librement affaibli en « produit par $\mathbb{V}$ » (qui représente une quantification), etc.

— Il est inutile de supposer que le graphe de l'égalité entre ensembles forme une classe. C'est le cas d'après la démonstration du lemme A.

— Dans le remplacement, on ne demande pas $d \subseteq \operatorname{dom} F$. Notamment le remplacement est plus fort que l'axiome $(\forall x\colon \mathrm{Ens})(\forall y)[(\exists F\colon x \twoheadrightarrow y) \to \mathrm{Ens}(y)]$, sauf à tolérer des fonctionnelles partielles dans ce dernier.

— En conséquence l'inclusion est à *caractère standard* : toute sous-classe d'un ensemble est un ensemble. Cela justifie la condition mise sur z dans l'axiome de la puissance : elle ne restreint pas sa force.

— Le choix global équivaut à l'existence d'un bon ordre global sur tous les ensembles ; v. ex. Q.4.

§ Q.2. BGN est une « extension conservative » de ZF.

Pour φ un $\{\in\}$-énoncé, on note $\varphi_{|\mathrm{Ens}}$ l'énoncé relativisé obtenu en bornant les quantifications aux ensembles.

Théorème. Soit φ un $\{\in\}$-énoncé. Alors $\mathrm{ZF} \models \varphi$ ssi $\mathrm{BGN} \models \varphi_{|\mathrm{Ens}}$.

Restreinte aux seuls ensembles, BGN a donc la même force que ZF.

Démonstration. Le sens direct est essentiellement que « BGN est au moins aussi forte que ZF ».

Lemme A. Si $(\mathbb{V}; \in) \models \mathrm{BGN}$, alors la collection $\check{\mathbb{V}} = \mathrm{Ens}[\mathbb{V}]$ est une classe et $(\check{\mathbb{V}}; \in_{|\check{\mathbb{V}}}) \models \mathrm{ZF}$.

Démonstration. Si $\mathrm{Ens}(x)$, alors $\mathrm{Ens}(\{x\})$ et donc $(x, \{x\}) \in \Gamma$; il suit que la *collection* $\check{\mathbb{V}} = \mathrm{Ens}[\mathbb{V}]$ est exactement la *classe* $\pi_1(\Gamma)$.

Étape 1. $\mathbb{V}$ est clos sous les opérations suivantes : complément, intersection binaire, projections d'une classe de uplets (si c est une classe de n-uplets, chacune des projections est une classe), action du groupe symétrique (si c est une classe de n-uplets et $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$, alors $\sigma \cdot c$ est dans $\mathbb{V}$). Elle contient la diagonale de $\check{\mathbb{V}}$, i.e. la collection des paires (x, x) avec $\mathrm{Ens}(x)$.

Vérification. Pour calculer la n^{e} projection au lieu de la première on permute. Il suffit donc d'obtenir les permutations arbitraires ; on n'a pourtant introduit que deux axiomes de groupe symétrique. Mais si c est une classe de n-uplets dans $\mathbb{V}$ et que σ est la transposition $(i\ i+1)$, alors $\sigma \cdot c$ reste dans $\mathbb{V}$. Par récurrence intuitive, cela suffit.

Montrons que le graphe de l'égalité est dans $\mathbb{V}$. Par graphe de l'appartenance et permutation, il existe une classe c_x dont les éléments sont les $(z, (x, y))$ avec $z \in x$, et une classe c'_y dont les éléments sont les $(z, (x, y))$ avec $z \notin y$. Intersectant et projetant, la relation $y \nsubseteq x$ a pour graphe un objet de $\mathbb{V}$. Symétrisant, par extensionnalité, et complémentant, le graphe de l'égalité est un objet de $\mathbb{V}$. ◇

Noter le caractère standard de l'inclusion : si $c \subseteq x$ et $\mathrm{Ens}(x)$, alors $\mathrm{Ens}(c)$. On forme la classe diagonale Δ_c, i.e. celle des paires (a, a) avec $a \in c$. C'est bien une classe, et elle est fonctionnelle ; moralement c'est Id_c. L'ensemble-image de l'ensemble x est c, qui est donc bien un ensemble.

Étape 2 (compréhension restreinte d'ensembles en classes)**.** Soit

$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ une vraie formule *à quantification ensembliste.* Alors BGN $\models (\forall \mathbf{y})(\exists c)(\forall \mathbf{x}\colon \mathrm{Ens})[(x_1, (\ldots, x_n)\cdots) \in c \leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))]$.

Vérification. Récurrence sur φ. Le cas d'une égalité est par propriétés de $\mathbb{V}$; l'appartenance est par définition. La récurrence sur la complexité de la formule est permise par les propriétés de clôture de $\mathbb{V}$. Noter l'importance d'avoir toutes les projections et pas seulement la première. $\diamond$

Remarque. On n'a pas encore vraiment utilisé les axiomes du bloc ensembliste ; seulement la paire. La suite demande évidemment ces axiomes.

Les axiomes de ZF sont vérifiés dans $(\check{\mathbb{V}}; \in_{|\check{\mathbb{V}}})$: seul paraît manquer le schéma de remplacement. Soient d de $\check{\mathbb{V}}$ et $\varphi(x, y, \mathbf{a})$ définisant une relation fonctionnelle dans $\check{\mathbb{V}}$ (notamment les paramètres sont bien de $\check{\mathbb{V}}$) ; celle-ci est, dans $\mathbb{V}$, définie par $\varphi_{|\mathrm{Ens}}$. Soit dans $\mathbb{V}$ la *classe* fonctionnelle associée, obtenue par compréhension restreinte. Par l'axiome de remplacement dans $\mathbb{V}$, l'image de d par φ est un ensemble : elle est ainsi dans $\mathrm{Ens}[\mathbb{V}] = \check{\mathbb{V}}$. La φ-instance du remplacement est donc vérifiée dans $\check{\mathbb{V}}$, comme voulu. $\square$

Le sens réciproque repose sur une observation simple.

Lemme B. Tout modèle $(\mathbb{V}; \in) \models$ ZF s'étend canoniquement en un modèle $(\hat{\mathbb{V}}\,; \hat{\in}) \models$ BGN, *à ensembles constants*, i.e. avec $(\mathrm{Ens}[\hat{\mathbb{V}}], \hat{\in}_{|\mathrm{Ens}[\hat{\mathbb{V}}]}) = (\mathbb{V}, \in)$.

Démonstration. Soit en effet $\mathbb{V} \models$ ZF. On considère la famille des collections définissables (avec paramètres) de $\mathbb{V}$, que l'on appelle *classes* ; les axiomes de BGN sont alors vérifiés. On obtient ainsi un modèle de $\hat{\mathbb{V}} \models$ BGN, *dont les ensembles sont exactement la collection* $\mathbb{V}$. En outre la relation d'appartenance restreinte aux seuls ensembles, est bien celle de $\mathbb{V}$. $\square$

Il peut cependant exister des modèles $\hat{\mathbb{V}}$ avec des classes ne correspondant à aucune collection définissable de $\mathbb{V}$.

Démontrons le théorème. Soit φ un $\{\in\}$-énoncé.

- Supposons ZF $\models \varphi$. Soient $\mathbb{V}$ un modèle de BGN, et $\check{\mathbb{V}}$ la partie $\mathrm{Ens}[\mathbb{V}]$. Par le lemme A on a $\check{\mathbb{V}} \models$ ZF, donc $\check{\mathbb{V}} \models \varphi$, i.e. $\mathbb{V} \models \varphi_{|\mathrm{Ens}}$.
- Supposons BGN $\models \varphi_{|\mathrm{Ens}}$. Soient $\mathbb{V} \models$ ZF et $\hat{\mathbb{V}}$ le modèle de BGN obtenu par le lemme B. Alors $\hat{\mathbb{V}} \models \varphi_{|\mathrm{Ens}}$. Comme les ensembles de $\hat{\mathbb{V}}$ sont exactement la classe $\mathbb{V}$, on a $\mathbb{V} \models \varphi_{|\mathrm{Ens}}$ et $\mathbb{V} \models \varphi$. $\square$

Remarque (ajouts de formes du choix). L'ajout d'une ligne à la démonstration montre que, restreinte aux seuls ensembles, BGN $\cup$ {AC} a la même force que ZFC. C'est aussi le cas de BGN $\cup$ {CG} mais moins évident ; v. notes finales.

Remarques

— L'étape 2 entraîne le principe suivant. Soient $\mathbb{V} \models$ BGN et $\check{\mathbb{V}} \models$ ZF sa classe ensembliste, pour l'appartenance induite. Soit $\varphi(x)$ une $\{\in\}$-formule. Alors $\varphi[\check{\mathbb{V}}]$ est une classe de $\mathbb{V}$.

— Conséquence pratique : les foncteurs définissables de ZF sont « réalisés » quand on passe à BGN, i.e. les classes de ZF (entités syntaxiques) s'incarnent en classes de BGN (points du modèle).

— En revanche un modèle $\mathbb{V} \models$ BGN peut avoir des classes ne correspondant à aucune collection définissable de $\check{\mathbb{V}}$. Le premier concept est d'ailleurs formel (i.e.interne au modèle), et le second sémantique (i.e. externe).

— Enfin cela ne vaut que pour les formules purement ensemblistes. Mais de toute façon $\check{\mathbb{V}}$ est modèle de ZF, pas de BGN : considérer $\varphi^2[\check{\mathbb{V}}]$ pour une BGN-formule n'aurait aucun sens.

§ Q.3. Structures de taille classe ; classes de satisfaction

Dans une théorie à ensembles et classes comme BGN, la notion de « structure formelle » de § 26.1 s'élargit. Il y a dorénavant les structures formelles à domaine ensembliste, et celles à domaine une classe propre. On réservera $\mathbbm{m}$ aux premières, employant $\mathbb{M}$ pour les secondes.

Remarques (structures de taille classe, et paramètres)

— En toute rigueur BGN ne peut former que des paires d'*ensembles*, si bien qu'une écriture comme $\mathbb{M} = (M ; \mathcal{L})$ pour M une classe propre n'a pas de sens. On convient que cet abus de notation désigne une réunion de type $(M \times \{*\}) \sqcup \bigsqcup_{R \in \mathcal{L}} (R[\mathbb{M}] \times \{R\})$, où chaque $R[\mathbb{M}]$ est une classe de n_R-uplets de M.

— Si M est une classe, et X un *ensemble*, alors M^X est encore une classe : donnée par « f est un ensemble de paires (x, m) avec $x \in X$ et $m \in M$ ». Notamment, la classe des paramètres formels $\ulcorner \mathrm{Par}(M) \urcorner$ a un sens.

On rappelle l'existence d'une relation de satisfaction formelle $\ulcorner \models \urcorner$ entre structures formelles *à domaine ensembliste* et formules formelles à paramètres. Dans BGN, grâce à la compréhension restreinte, cette relation vue comme classe de paires devient un objet. En revanche elle ne s'étend pas (même comme relation) aux structures formelles quelconques.

— En effet si une telle relation existait, existerait aussi une relation unaire $\ulcorner \mathrm{Ens} \models \urcorner$ telle que pour chaque vrai énoncé ensembliste φ :

$$\mathbb{V} \models (\ulcorner \mathrm{Ens} \models \urcorner \ulcorner \varphi \urcorner) \quad \text{ssi} \quad \mathrm{Ens}[\mathbb{V}] \models \varphi.$$

Mais si c'était toujours le cas, on contredirait l'indéfinissabilité.

— Remède inefficace : pour $\mathbb{m}$ structure formelle ensembliste et φ un vrai énoncé, on a $\mathbb{V} \models \varphi_{|\mathbb{m}} \leftrightarrow (\mathbb{m} \ulcorner \models \urcorner \ulcorner \varphi \urcorner)$, où $\varphi_{|\mathbb{m}}$ est l'énoncé « restreint », obtenu en bornant les quantificateurs à $\mathbb{m}$. Clairement $f_{|\mathbb{M}}$ existe encore pour f formule formelle et $\mathbb{M}$ structure formelle de taille classe. Mais « définir » $\mathbb{V} \models (\mathbb{M} \ulcorner \models \urcorner f)$ par $\mathbb{V} \models f_{|\mathbb{M}}$, pour f formelle, demanderait précisément une relation de satisfaction globale, contre l'indéfinissabilité.

On est donc confronté au problème suivant : a priori, certaines structures formelles peuvent ne pas posséder de relation/classe de satisfaction. Ceci motive la définition suivante.

Définition (classe de satisfaction)**.** Soient $\mathbb{M} = (M\,; \mathcal{L})$ une structure formelle, non nécessairement de taille ensembliste. Une *classe de satisfaction* pour $\mathbb{M}$ est une classe $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ de formules formelles à paramètres $f(\mathbf{a}) \in \ulcorner \mathcal{L}\text{-Form}(M) \urcorner$ vérifiant :

— $\ulcorner \bot \urcorner \notin \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$;

— si f est $\ulcorner R(\mathbf{x}) \urcorner$, alors $f(\mathbf{a}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ ssi $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in R[\mathbb{M}]$;

— si f est $\ulcorner \neg \urcorner g$, alors $f(\mathbf{a}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ ssi $g(\mathbf{a}) \notin \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$;

— définition évidente pour $\ulcorner \wedge \urcorner$, $\ulcorner \vee \urcorner$, $\ulcorner \rightarrow \urcorner$;

— si f est $\ulcorner (\exists x) \urcorner g$, alors $f(\mathbf{a}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ ss'il existe $\mathbf{a}' \in \ulcorner \mathrm{Par}(M) \urcorner$ tel que $\mathbf{a}'_{x^c} = \mathbf{a}_{x^c}$ et $g(\mathbf{a}') \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$;

— définition évidente pour $\ulcorner \forall \urcorner$.

Noter que cette définition, présentée en français pour la lisibilité, *est formelle.* En outre elle est fidèle dans le sens suivant : si $\mathcal{L}$ est un vrai langage, $\mathbb{M} = (M\,; \#\mathcal{L})$, et que φ est un vrai $\mathcal{L}$-énoncé, alors $\mathbb{M} \models \varphi$ ssi $\mathbb{V} \models (\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$ (récurrence intuitive).

Remarques

— Toute structure à domaine ensembliste $\mathbb{m}$ possède une classe de satisfaction (§ 26.1). On a même $\mathbb{T}_{\mathbb{m}} = \ulcorner \mathrm{Th}(\mathbb{m}/m) \urcorner$ en notation évidente.

— En revanche, $\mathrm{Ens}[\mathbb{V}]$ pour l'appartenance induite ne possède pas nécessairement de telle classe.

— Par récurrence (formelle, i.e. dans $\mathbb{V}$) sur la structure des formules formelles, une structure formelle possède *au plus* une classe de satisfaction.

Le théorème suivant construit une extension élémentaire de taille classe.

Théorème. Soient $\mathbb{V} \models \mathrm{BGN} \cup \{\mathrm{CG}\}$ et $\mathbbm{m} = (m\,;\mathcal{L})$ une structure formelle à domaine ensembliste. Alors il existe une structure formelle de taille classe propre $\mathbb{M}$ qui possède une classe de satisfaction $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ contenant $\mathbb{T}_{\mathbbm{m}}$.

Si $\mathcal{L}$ est un vrai langage fini qu'on a par un léger abus de notation reflété dans le modèle, il suit $\mathbbm{m} \preccurlyeq \mathbb{M}$, vu de l'extérieur. Mais la notation $\mathbb{V} \models (\mathbbm{m} \ulcorner\!\preccurlyeq\!\urcorner \mathbb{M})$ n'a pas de sens général, puisque la satisfaction formelle peut faire défaut.

Démonstration. Le raisonnement informel suivant contient l'idée :

> On construit une chaîne ordinale de structures formelles. On pose $\mathbbm{m}_0 = \mathbbm{m}$; aux limites on prend la réunion. Si $\mathbbm{m}_\alpha$ est donné, on prend pour $\mathbbm{m}_{\alpha+1}$ la première structure formelle ensembliste de cardinal $> \operatorname{card} \mathbbm{m}_\alpha$ telle que $\mathbbm{m}_\alpha \preccurlyeq \mathbbm{m}_{\alpha+1}$.

C'est effectivement l'idée, mais on ne peut formaliser la construction par récurrence ordinale, à moins de donner un sens formel à $\preccurlyeq$, alors que la notion est extérieure au modèle par indéfinissabilité. Il faut donc l'internaliser.

Notation. Si $\mathbbm{m}, \mathbbm{n}$ sont deux structures formelles de $\mathbb{V}$ avec $\mathbbm{m} \subseteq \mathbbm{n}$, on note $\mathbbm{m} \ulcorner\!\preccurlyeq\!\urcorner \mathbbm{n}$ la relation :

$$(\forall f)(\forall \mathbf{a})[(f \in \ulcorner\mathrm{Form}\urcorner \wedge \mathbf{a} \in \ulcorner\mathrm{Par}(\mathbbm{m})\urcorner) \to (\mathbbm{m} \ulcorner\!\models\!\urcorner f(\mathbf{a}) \leftrightarrow \mathbbm{n} \ulcorner\!\models\!\urcorner f(\mathbf{a}))].$$

On conduit alors l'argument attendu. □

Remarques

— Si $\mathbbm{m}, \mathbbm{n}$ sont deux structures formelles de $\mathbb{V}$ provenant d'un langage fini vérifiant $\mathbb{V} \models (\mathbbm{m} \ulcorner\!\preccurlyeq\!\urcorner \mathbbm{n})$, alors $\mathbbm{m} \preccurlyeq \mathbbm{n}$. La réciproque peut être fausse si $\mathbb{V}$ a des formules non standard.

— L'argument montre mieux. Dans $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ (choix : lire infra), il existe une formule φ telle $\mathbb{M} = \varphi[\mathbb{V}]$ est une $\mathcal{L}$-structure de taille classe vérifiant $\mathbbm{m} \preccurlyeq \mathbb{M}$. En revanche dans ZF on ne peut pas traiter $\mathbb{M}$ comme un objet, donc on ne peut pas écrire $\mathbbm{m} \ulcorner\!\preccurlyeq\!\urcorner \mathbb{M}$.

— Si dans $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$ est donné $\mathbbm{m}$, il existe un modèle intérieur $\mathbb{V}'$ de taille classe contenant $\mathbbm{m}$ et ayant du choix global. On peut par exemple considérer $\mathbb{L}[\mathbbm{m}]$, analogue de la hiérarchie constructible de § 27 conçu en admettant $\mathbbm{m}$ dès le niveau 0. Conduire l'argument dans $\mathbb{V}'$ permet ainsi de ne pas supposer de choix dans $\mathbb{V}$.

Définition (Ord-saturation)**.** Une structure formelle est Ord-*saturée* si elle possède une classe de satisfaction, et que tout 1-type à paramètres ensemblistes est réalisé.

Noter l'importance de la première clause pour pouvoir écrire la seconde, qui n'a aucun sens sinon.

Théorème (et définition : modèle monstre)**.** Soit $\mathbb{V} \models \mathrm{BGN} \cup \{\mathrm{CG}\}$. Soit T une théorie élémentaire formelle ensembliste formellement complète (i.e. T est comme une théorie élémentaire complète naïve, mais réalisée en tant qu'objet du modèle). Alors T possède à isomorphisme près une unique structure formelle $\mathbb{M}$ telle que $T \subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$, et $\mathbb{M}$ est Ord-saturée. On l'appelle *modèle monstre* de T.

Démonstration. Dans la preuve, « premier » fait référence à un bon ordre global sur les ensembles, donné par choix global.

L'existence est obtenue par tour d'extensions élémentaires le long des ordinaux. Soit $\mathbb{m}_0$ le premier modèle ensembliste de T. Aux ordinaux limites on prend la réunion. Pour incrémenter, on prend le premier formel ensembliste extension élémentaire $\mathbb{m}_\alpha$ et réalisant tous ses 1-types. On prend enfin la Ord-réunion. Noter qu'on produit simultanément la structure-réunion *et* sa classe de satisfaction.

L'unicité est un va-et-vient mené le long des ordinaux. □

Remarques

— Dans l'adaptation évidente de ces définitions, le monstre de T est ($<$ Ord)-universel et ($<$ Ord)-homogène. V. § 17.2.

— Comme $\mathrm{BGN} \cup \{\mathrm{CG}\}$ est une extension conservative de ZFC, la théorie des modèles emploie librement des modèles monstres pour étudier les théories élémentaires : ils ne créent pas de théorème indémontrables dans ZFC.

§ Q.4. Un renforcement considérable : KM

La théorie de Kelley-Morse KM étend BGN ; elle n'a pas de restriction sur les quantifications dans la compréhension. Théorie des ensembles et des collections d'ensembles avec compréhension non restreinte, *Kelley-Morse avec choix ensembliste est exactement* ZFC^2 *en sémantique de Henkin* (§ 12). Analogie :

	Entiers	Ensembles
Théorie élémentaire	PA	ZFC
Compréhension restreinte (prédicative)	ACA_0	BGN $\cup$ {AC}
Compréhension immodérée (imprédicative)	Z_2	KM $\cup$ {AC}
Théorie du 2^e ordre (naïve)	PA^2	ZFC^2

Extensionnalité : comme pour BGN ;

Bloc ensembliste : comme pour BGN (i.e. comme pour ZF) ;

Axiome de remplacement : comme pour BGN ;

***Schéma* de compréhension d'ensembles en classes :** pour chaque formule $\varphi^2(x, \mathbf{Y})$ à paramètres (toutes quantifications permises, tous paramètres permis), l'axiome :

$$(\forall \mathbf{Y})(\exists X)(\forall x)[(\varphi^2(x, \mathbf{Y}) \leftrightarrow (\mathrm{Ens}(x) \wedge x \in X)];$$

Fondation : comme dans BGN.

Choix : le choix pour les classes devient un schéma.

Remarques (position dans une chaîne de théories)

— Il est clair que KM $\models$ BGN ; en effet chaque construction de classe de BGN est une instance du schéma de compréhension. (On peut aussi déplacer ce schéma vers le remplacement, obtenant une axiomatisation équivalente.)

— Noter que KM n'est *pas* finiment axiomatisée. Sans surprise, elle n'est pas finiment axiomatisable.

— KM possède à son tour des extensions : par exemple KM avec « compréhension de classes » (un schéma d'axiomes permettant de collecter des classes en classes).

Remarques (modèles naturels de KM) On ajoute le choix ensembliste pour avoir une notion maniable de « cardinal inaccessible » (la chose est sinon pénible).

— Si ZFC $\cup$ {« il existe un cardinal inaccessible} est satisfaisable, alors KM aussi.

Soient en effet $\mathbb{V} \models$ ZFC et κ un cardinal inaccessible. Alors $V_{\kappa+1}$ est un modèle de KM dont les objets-ensembles sont les éléments de V_κ, et les objets-classes les éléments de $V_{\kappa+1}$ (i.e. toutes les parties de V_κ).

— En revanche, KM ne démontre pas l'existence d'inaccessibles.

Diverses formes de choix de taille classe ne sont pas équivalentes dans KM ; on laisse le sujet.

Par opposition à BGN, la théorie KM est *beaucoup plus forte* que ZF.

Théorème. KM $\models \ulcorner\mathrm{Sat}(\mathrm{ZF})\urcorner$.

Démonstration.

Lemme. Soit $\mathbb{V} \models$ KM. Soit $\mathbb{M}$ une structure formelle dans $\mathbb{V}$. Alors $\mathbb{M}$ possède une (unique) classe de satisfaction.

Démonstration. L'unicité est connue. On introduit la notion de *classe de satisfaction en longueur paramétrique* en restreignant la clause définissant les classes de satisfaction aux formules formelles de longueur formelle $\leqslant n \in \omega$. On notera $\mathbb{T}^n_{\mathbb{M}}$ une telle classe ; noter qu'il en existe au plus une.

Or pour tout entier intuitif n, il existe une classe de satisfaction en longueur $\leqslant \#n$; c'est même vrai dans BGN. Ainsi, pour chaque entier intuitif n,

$$\mathrm{BGN} \models (\forall \mathbb{M})(\exists \mathbb{T}^n_{\mathbb{M}})(\mathbb{T}^n_{\mathbb{M}} \text{ est de satisfaction pour } \mathbb{M} \text{ en longueur } \leqslant \#n).$$

Le raisonnement s'arrêterait ici dans BGN mais nous travaillons dans KM.

Notons $\varphi(\mathbb{M}, n)$ l'existence d'une classe de satisfaction pour $\mathbb{M}$ en longueur $\leqslant n$. Cette formule quantifie sur les classes. Soit la partie suivante de $\mathbb{V}$:

$$S_{\mathbb{M}} = \{n \in \omega : \varphi(\mathbb{M}, n)\}.$$

C'est grâce à KM bien un ensemble ; la compréhension restreinte de BGN ne suffit pas. Donc $S_{\mathbb{M}}$ est un sous-ensemble de ω contenant clairement $\varnothing$ (et même chaque image d'entier intuitif), et clos par incrémentation formelle. Par propriété de ω, on trouve $S_{\mathbb{M}} = \omega$. Mais toute formule formelle a une longueur formelle, donc $\mathbb{T}_{\mathbb{M}} = \bigcup_\omega \mathbb{T}^n_{\mathbb{M}}$ est une classe de satisfaction pour $\mathbb{M}$. □

Démontrons le théorème. Soit $\mathbb{T}_{\mathrm{Ens}}$ une classe de satisfaction pour $(\mathrm{Ens}[\mathbb{V}], \in_{|\mathrm{Ens}[\mathbb{V}]})$; on a donc une relation unaire $\mathrm{Ens}\ulcorner\models\urcorner\cdot$, fidèle au sens attendu. Il est clair que pour tout énoncé intuitif φ de ZF, on a bien $\mathbb{V} \models (\mathrm{Ens}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner)$, mais il s'agit de vérifier la satisfaction (formelle) de $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$. Cette formalisation peut contenir des axiomes formels non standard.

Attention, un argument similaire à celui montrant le Lemme ne suffit pas. On peut certes dans $\mathbb{V}$ indexer $\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner$ par ω, disons les f_n, puis former l'ensemble $S' \subseteq \omega$ des f_n formellement satisfaits dans Ens, mais S' n'a aucune raison d'être clos sous incrémentation. Il faut bien un argument invoquant les propriétés du modèle ambiant.

Soit $f \in \ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner$. Si f est l'un des axiomes (en nombre fini) distincts du remplacement, on a $\mathbb{V} \models (\mathrm{Ens} \ulcorner \models \urcorner f)$. On suppose donc que f est une instance formelle du remplacement. Il existe donc une formule formelle g (paramètres tolérés) telle que $\mathbb{V} \models [\mathrm{Ens} \ulcorner \models \urcorner (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)(g(x, y_1) \wedge g(x, y_2) \to y_1 = y_2)]$. Soit d un ensemble. Soit, par remplacement mené dans $\mathbb{V}$:

$$c = \{y \colon (\exists x \in d)(\mathrm{Ens} \ulcorner \models \urcorner g(x, y)\};$$

c'est bien un ensemble. Mais alors $\mathbb{V} \models (\mathrm{Ens} \ulcorner \models \urcorner f)$, et $\mathbb{V} \models (\forall f)(f \in \ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner \to (\mathrm{Ens} \ulcorner \models \urcorner f))$. Ainsi $\mathbb{V} \models \ulcorner \mathrm{Sat}(\mathrm{ZF}) \urcorner$. □

Remarques

— Si $\mathbb{V} \models \mathrm{BGN}$ possède une classe de satisfaction pour $(\mathrm{Ens}[\mathbb{V}]; \in_{|\mathrm{Ens}[\mathbb{V}]})$, alors $\mathbb{V} \models \ulcorner \mathrm{Sat}(\mathrm{ZF}) \urcorner$. Mais comme certains modèles de BGN n'ont pas de telle classe, on n'en déduit pas $\mathrm{BGN} \models \ulcorner \mathrm{Sat}(\mathrm{ZF}) \urcorner$.

— Les structures formelles du Lemme peuvent être de taille classe, mais même en ce cas leurs points sont des ensembles. KM n'a pas de classes de classes ; le résultat n'est pas contradictoire.

Exercices

Q.1. Montrer qu'il y a dans BGN une classe de toutes les fonctions entre ensembles, mais que la collection définissable de toutes les fonctionnelles entre classes n'est pas une classe.

Q.2. Montrer que les deux formes de fondation sont équivalentes dans $\mathrm{BGN} \setminus \{\mathrm{AF}\}$.

Q.3. Trouver l'erreur.

Soit $\hat{\mathbb{V}} \models \mathrm{BGN}$. Alors $\mathbb{V} \models \mathrm{ZF}$. Mais par le théorème Q.2 dont la démonstration est menée dans ZF, on a $\mathrm{BGN} \vdash \ulcorner \mathrm{Coh}(\mathrm{BGN}) \urcorner \leftrightarrow \ulcorner \mathrm{Coh}(\mathrm{ZF}) \urcorner$. Donc $\hat{\mathbb{V}} \models \ulcorner \mathrm{Coh}(\mathrm{BGN}) \urcorner$, et $\mathrm{BGN} \vdash \ulcorner \mathrm{Coh}(\mathrm{BGN}) \urcorner$: par incomplétude, $\mathrm{BGN} \vdash \perp$, et enfin $\mathrm{ZF} \vdash \perp$.

Q.4 (choix global dans BGN**).** Dans BGN, on peut quantifier sur les classes et donc former des énoncés du type $(c_1 \hookrightarrow c_2)$ pour des classes. On rappelle que « classe » signifie « ensemble ou classe », par opposition à « classe propre ». Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(i) [bon ordre global :] il existe une relation de bon ordre global sur $\mathbb{V}$, à segments initiaux propres ensemblistes ;

(ii) [limitation de taille :] deux classes propres sont en bijection ;

(iii) [énumération de l'univers :] il existe une fonctionnelle bijective $\mathbb{V} \simeq \mathrm{Ord}$;

(iv) [choix global :] il existe une fonctionnelle de choix global sur les ensembles non vides ;

(v) Ord se surjecte sur toute classe (propre ou non) ;
(vi) toute classe (propre ou non) s'injecte dans Ord ;
(vii) AC pour les ensembles, et Ord s'injecte dans toute classe non ensembliste ;
(viii) comparaison de Zermelo pour les classes (de deux classes, l'une s'injecte dans l'autre) ;
(ix) comparaison de Zermelo avec la classe Ord (toute classe se plonge dans Ord ou en contient une copie).

Indications. Pour (iv)⇒(v), récursion : si $V_\gamma \cap x \nsubseteq \operatorname{im} F_{|\alpha}$, prendre $F(\alpha)$ dans l'ensemble-différence. Pour (ix)⇒(i), introduire l'ensemble B_α des bons ordres sur V_α, et la classe-réunion $\mathcal{B}$; il y a deux cas.

Aucun de ces énoncés n'est directement exprimable dans ZF. Il existe pourtant une formulation du choix global dans ZF (exercice 26.5).

(*) **Q.5.** Soit ZFC$^+$ la théorie ZFC ∪ {« il existe un cardinal inaccessible » }. Une compréhension superficielle intercalerait KM entre ZFC et ZFC$^+$. Décider si chacun des points suivants est vrai, faux, ou n'a même pas de sens.

a. KM $\models$ ZFC ;
b. si $\mathbb{V} \models$ KM, alors Ens[$\mathbb{V}$] $\models$ ZFC ;
c. si $\mathbb{V} \models$ ZF, alors il existe $\hat{\mathbb{V}} \models$ KM tel que $\mathbb{V} = \mathrm{Ens}[\hat{\mathbb{V}}]$;
d. KM $\models$ ⌜Sat ZFC⌝ ;
e. ZFC$^+$ $\models$ KM ;
f. si $\mathbb{V} \models$ ZFC$^+$, alors il existe $\hat{\mathbb{V}} \models$ KM tel que $\mathbb{V} = \mathrm{Ens}[\hat{\mathbb{V}}]$;
g. si $\mathbb{V} \models$ KM, alors Ens[$\mathbb{V}$] $\models$ ZFC$^+$;
h. ZFC$^+$ $\models$ ⌜Sat⌝⌜KM⌝ ;

Notes conclusives

Wir können zunächst nicht mehr tun als feststellen, daß hier ein weiteres Bedenken gegen die Mengenlehre vorliegt und daß vorläufig kein Weg der Rehabilitation bekannt ist. [Neu25, derniers mots]

- **Repères historiques**

von Neumann, Bernays, Gödel. • Le doctorat de von Neumann [Neu26], sur la théorie des ensembles, semble introuvable (considérations linguistiques mises à part). Publiée en [Neu25], l'axiomatisation donnée est étudiée plus avant dans [**Neu28a**]. La théorie de von Neumann est à deux sortes (i.e. deux types d'objets) : ensembles et fonctions. Il s'agit de théorie des ensembles à proprement parler, i.e. n'entretenant pas de liaisons dangereuses avec le logicisme. Von Neumann avait lu et compris [**Sko23**] ; son texte

[Neu25] : János von Neumann. « Eine Axiomatisierung der Mengenlehre ». In: *J. Reine Angew. Math.* 154 (1925), S. 219–240
[Neu26] : János von Neumann. « Az általános halmazelmélet axiomatikus felépítése ». Thèse de doct. Magyar Királyi Pázmány Péter Tudományegyetem, 1926
[**Neu28a**] : János von Neumann. « Die Axiomatisierung der Mengenlehre ». In : *Math. Z.* 27.1 (1928), p. 669-752
[**Sko23**] : Thoralf Skolem. « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre ». In : 5. Kongreß Skandinav. in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922. Helsinki : Akademiska Bokhandeln, 1923, p. 217-232

est remarquablement lucide, et sa discussion finale sur l'impossible catégoricité paraît le rapprocher du scepticisme. • Dès 1929–1930 Bernays avait sa version, publiée en [**Ber37**], [Ber41]. Bernays dit s'inspirer de von Neumann mais aussi de Schröder et de Russel-Whitehead ; sa théorie possède *ensembles* et *classes*. L'Étape 2 est [**Ber37**, p. 72]. • C'est essentiellement celle que reprendra Gödel pour ses travaux sur AC et HC (§ 27), d'où le nom *Bernays-Gödel-von Neumann* et la notation BGN. • Bernays avait un axiome de remplacement plus faible, portant sur des fonctions totales et n'entraînant pas le caractère standard de l'inclusion ; en conséquence, il devait rajouter un tel axiome pour énoncer l'axiome de la puissance. (Une autre option aurait été de renforcer la puissance en $(\forall x\colon \mathrm{Ens})(\exists y\colon \mathrm{Ens})(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$, sans restriction sur z ; cela entraîne bien le caractère standard.)

Conservativité. • La conservativité de BGN était certainement claire à Gödel, sans quoi il serait resté dans ZF pour ses travaux. Pourtant je n'ai pas trouvé d'étude antérieure à [Nov50], issu du doctorat [Nov48] sous la direction de Loomis et Quine. (Ilse Novak a changé de prénom et adopté le nom de son époux ; elle s'appela aussi Lisl Gaal.) Novak-Gaal y montre que si ZF est satisfaisable, alors BGN aussi ; la méthode est purement syntaxique. La conservativité semble notée pour la première fois dans [Mos50]. • Le lemme § Q.2.B appartient à des idées plus générales. Soit T une théorie élémentaire, supposée à une seule sorte d'objets appelés « points ». On peut naturellement former une théorie T^2 à deux sortes, « points-classes », qui étend T et permet la *compréhension prédicative* : à toute partie définissable de points, obtenue par une définition sur les seuls points, correspond une classe formelle. Les modèles de T s'étendent naturellement en modèles de T^2. • Rappelons (v. § 8, notes conclusives) que toute théorie récursive en langage fini, possède une extension conservative finie (Craig, Vaught). La méthode générale est abstraite ; dans le cas de ZF, BGN est une solution naturelle.

KM. • L'appellation « Kelley-Morse » est attestée depuis les années 1970 mais très discutable. • Avec générosité, on peut voir en Zermelo un précurseur de KM. • Après l'âge des antinomies, Quine [Quine, § 202] avait tenté de renouer avec la « compréhension imprédicative » en théorie des ensembles. Son premier essai était incohérent [Ros42b]. • La question du rapport entre compréhension imprédicative et BGN (compréhension prédicative) semble posée dans [Qui42]. • KM apparaît dans [Wan49], où

[**Ber37**] : Paul Bernays. « A system of axiomatic set theory I ». In : *J. Symb. Log.* 2 (1937), p. 65-77

[Ber41] : Paul Bernays. « A system of axiomatic set theory II ». In : *J. Symbolic Logic* 6 (1941), p. 1-17

[Nov50] : Ilse Novak. « A construction for models of consistent systems ». In : *Fund. Math.* 37 (1950), p. 87-110

[Nov48] : Ilse Novak. « On the consistency of Gödel's axioms for class and set theory relative to a weaker set of axioms ». Thèse de doct. Cambridge, Massachusetts : Radcliffe College, 1948

[Mos50] : Andrzej Mostowski. « Some impredicative definitions in the axiomatic set-theory ». In : *Fund. Math.* 37 (1950), p. 111-124

[Quine] : Willard Quine. *Mathematical Logic.* New York : W. W. Norton & Co., 1940, p. xiii+348

[Ros42b] : Barkley Rosser. « The Burali-Forti paradox ». In : *J. Symbolic Logic* 7 (1942), p. 1-17

[Qui42] : Willard Quine. « On existence conditions for elements and classes ». In : *J. Symbolic Logic* 7 (1942), p. 157-159

[Wan49] : Hao Wang. « On Zermelo's and von Neumann's axioms for set theory ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 35 (1949), p. 150-155

elle est nommée NQ pour *von Neumann-Quine*. • Mostowski [Mos50, note 11] savait déjà que KM $\models$ ⌜Sat ZF⌝ ; j'ignore qui l'a démontré. • KM est présente sans mention de Wang dans l'appendice de [Kelley], dont les remerciements indiquent « *Many of the pleasanter features of the appended development of set theory are taken from the unpublished system of Morse. . .* », puis développée dans [Morse], d'inspiration russellienne. • On lui adjoint parfois aussi le nom de Tarski. • KM est une théorie encore mal comprise, et un peu étudiée. Quoi qu'il en soit, *la théorie* KM *est* ZF^2 *en sémantique de Henkin.*

• **Formes du choix dans** BGN. • L'exercice Q.4 vient de la page de J. Hamkins. N'importe lequel de ces énoncés est un axiome de « choix global ». (Rappelons qu'on ne peut pas former de tel énoncé dans ZF ; il faut augmenter le langage ; v. § 26, notes conclusives.) • Dans BGN, CG est strictement plus fort que AC [Eas64, § 6] (non publié, issu du doctorat d'Easton sous la direction de Church) ; utilise du forcing. • Pourtant en ce qui concerne les *ensembles*, il n'y a pas de différence.

Théorème. Soit $\varphi = \varphi_{|\mathrm{Ens}}$ un énoncé à quantification ensembliste. Alors ZFC $\models \varphi$ ssi BGN $\cup$ {AC} $\models \varphi$ ssi BGN $\cup$ {CG} $\models \varphi$.

En effet la conservativité de BGN $\cup$ {AC} sur ZFC suit du théorème Q.2, et l'équivalence de force entre choix local et choix global sur BGN suit de la discussion en § 26, notes conclusives. On peut approfondir dans [Fel76] aux excellentes références.

• BGN **est une théorie standard.** Le « caractère standard » de l'inclusion est résumé par l'énoncé $(\forall x)(\forall y)(x \subseteq y \wedge \mathrm{Ens}(y) \to \mathrm{Ens}(x))$. Des théories alternatives « non standard » le rejettent, non par choix de généralité mais pour intégrer les raisonnements par saturation ; v. § 21, notes conclusives.

• **Alternatives au monstre.** L'approche BGN$\cup${CG} n'est pas la seule. On peut aussi invoquer [KS04, § 4], qui produit *dans* ZFC une classe monstre, à plus grand coût technique. • On peut enfin supposer un cardinal inaccessible et travailler dans un modèle $(<\kappa)$-saturé de cardinal κ (ex. 24.6). • Or par opposition à (ZFC $\subseteq$ BGN$\cup${CG}), l'extension (ZFC $\subseteq$ ZFC$\cup${« il existe un inaccessible » }) n'est pas conservative. On semble donc avoir créé de l'information. • Cependant la méthode par introduction d'inaccessible produit une conclusion indépendante de l'existence d'inaccessibles [HK21]. • La pratique de montrer non pas un énoncé, mais sa cohérence et son absoluité, pour en déduire l'énoncé d'origine, est assez typique de l'école de Shelah.

• **Une alternative à** BGN **: la théorie d'Ax.** [Ack56]. C'est une théorie des classes, dont certaines sont des ensembles ; le langage est $\{\in, \mathrm{Ens}\}$ pour la relation unaire

[Kelley] : John Kelley. *General topology.* Toronto–New York–London : D. Van Nostrand Co., 1955, p. xiv+298
[Morse] : Anthony Morse. *A theory of sets.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XVIII. New York–London : Academic Press, 1965, p. xxxi+130
[Eas64] : William Easton. « Powers of regular cardinals ». Thèse de doct. Princeton, NJ : Princeton University, 1964, p. 72
[Fel76] : Ulrich Felgner. « Choice functions on sets and classes ». In : *Sets and classes (on the work by Paul Bernays).* 1976, 217-255. Studies in Logic and the Foundations of Math., Vol. 84
[KS04] : Vladimir Kanovei et Saharon Shelah. « A definable nonstandard model of the reals ». In : *J. Symbolic Logic* 69.1 (2004), p. 159-164
[HK21] : Yatir Halevi et Itay Kaplan. « Saturated Models for the Working Model Theorist ». In : (2021). arXiv 2112.02774
[Ack56] : Wilhelm Ackermann. « Zur Axiomatik der Mengenlehre ». In : *Math. Ann.* 131 (1956), p. 336-345

« être un ensemble » Ens. En conséquence il y a *deux* schémas de collection d'ensembles : l'un en classes, l'autre en ensembles. La variante Ack* ajoute l'axiome de fondation pour les ensembles. • Ackermann crut établir Ack $\models$ ZF\{AF}. Or Lévy [Lév59] (issu de son doctorat dirigé par Fraenkel et A. Robinson) trouva une erreur dans la preuve du remplacement sans donner de contre-exemple, mais montra au contraire que ZF était au moins aussi forte que Ack*. Reinhardt, étudiant de Vaught, prouva la réciproque, complétant l'équivalence.

Théorème ([Rei70])**.** Soit φ un énoncé de $\{\in\}$. Alors ZF $\models \varphi$ ssi Ack* $\models \varphi_{|\mathrm{Ens}}$ (énoncé relativisé).

La question semble ouverte entre ZF\{AF} et Ack [Rei70, Question 4.24]. • D'inspiration distincte de BGN ou ZF, la théorie d'Ackermann capture pourtant les mêmes propriétés : sans démontrer l'existence d'une réalité ensembliste, c'est tout de même une indication favorable à la cohérence de l'intuition ensembliste.

§ R. L'hypothèse du continu généralisée et l'axiome du choix

ZF $\cup$ {HCG} $\models$ AC, dans une formulation judicieuse de HCG.

Prérequis : §§ 22–23 ; développement ordinal de Cantor, ordinal de Hartogs et théorème du carré de Tarski (exercices 3.3, 22.9 et 23.2).

Parler de l'hypothèse du continu généralisée sans choix requiert un peu de soin dans le maniement des cardinalités, qui ne sont plus nécessairement représentées par des ordinaux.

— Une *cardinalité* est un ensemble vu à équipotence près. La suite ne considère que des cardinalités, pas des cardinaux formels.

— Nous noterons encore κ, λ de telles entités ; rien ne dit qu'un ordinal les représente.

— Somme, produit, puissance de cardinalités sont définies via réunion disjointe, produit cartésien, ensemble de fonctions. Les relations naïves sont vraies.

— Sans choix, on perd des informations cruciales du type $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$ (la démonstration de § 24.2 vaut pour les $\aleph$, pas en général).

— On note $\kappa \simeq \lambda$ l'équipotence ; $\kappa \leqslant \lambda$ la relation $\kappa \hookrightarrow \lambda$; enfin $\kappa < \lambda$ la relation $(\kappa \hookrightarrow \lambda) \wedge \neg(\lambda \hookrightarrow \kappa)$. D'après le théorème de Cantor-Bernstein, $\kappa < \lambda$ équivaut à $(\kappa \hookrightarrow \lambda) \wedge \neg(\kappa \simeq \lambda)$.

[Lév59] : Azriel Lévy. « On Ackermann's set theory ». In : *J. Symbolic Logic* 24 (1959), p. 154-166

[Rei70] : William Reinhardt. « Ackermann's set theory equals ZF ». In : *Ann. Math. Logic* 2.2 (1970), p. 189-249

Ces relations se comportent comme attendu, sauf la totalité de l'ordre : $\neg(\kappa \leqslant \lambda)$ n'entraîne pas $\lambda < \kappa$. Enfin on évite le symbole $\geqslant$.

— Soit pour κ l'énoncé :

$$\mathrm{HC}(\kappa): \quad (\forall\lambda)[(\kappa \leqslant \lambda \leqslant 2^\kappa) \to (\lambda \simeq \kappa \vee \lambda \simeq 2^\kappa)].$$

Une façon d'exprimer l'*hypothèse du continu généralisée* HCG est alors : $(\forall\kappa)[\neg(\kappa < \aleph_0) \to \mathrm{HC}(\kappa)]$.

Théorème. $\mathrm{ZF} \cup \{\mathrm{HCG}\} \models \mathrm{AC}$.

Démonstration. Elle repose sur des inégalités entre cardinalités ; en l'absence de choix, les relations de comparaison ne sont pas évidentes. Notamment le cœur de l'argument est la non-inégalité $2^\kappa \not\leqslant \kappa^2$ (Lemme B), étonnamment délicate sans AC. Elle invoque une récursion ordinale et les équipotences $\alpha^2 \simeq \alpha$ pour $\mathrm{Ord}(\alpha)$. (On rappelle que l'exponentielle ordinale α^2 a bien pour domaine l'ensemble de fonctions α^2, donc pour cardinalité α^2 : pas de confusion possible.)

Ces équipotences sont connues de § 24.2, mais plusieurs bijections existent, ce qui paraît mener à recourir au choix. Le premier lemme montre que l'existence de bijections $\alpha \simeq \alpha^2$ est *uniforme*.

Lemme A. Il existe une relation (définissable) fonctionnelle $F(x)$ telle que, dans tout modèle :

$$(\forall\alpha)[(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge \omega \leqslant \alpha) \to (F(\alpha)\colon \alpha \simeq \alpha^2)].$$

Démonstration. En guise de préparation, il existe $G(x)$ vérifiant $(\forall\alpha)[(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge \omega \leqslant \alpha) \to (G(\alpha)\colon \alpha \simeq \alpha+1)]$, i.e. la propriété analogue pour l'incrémentation. Nous dirons : « uniformément pour α infini, $\alpha \simeq \alpha + 1$ ». En effet on peut former la fonction qui fait $0 \mapsto \alpha$, $k+1 \mapsto k$ pour $0 < k < \omega$, et $\beta \mapsto \beta$ pour $\omega \leqslant \beta < \alpha$. Elle est définie (sans choix) avec le seul paramètre α : elle provient bien d'une relation $G(x)$.

Uniformément pour α non nul, $\omega^{\alpha+1} \simeq \omega^\alpha$. Le cas $\alpha < \omega$ est uniforme par les moyens classiques ; le cas $\omega \leqslant \alpha$ suit du paragraphe précédent.

Uniformément pour α non nul et $c < \omega$ non nul, $\omega^\alpha \cdot c \simeq \omega^\alpha$. En effet la démonstration du théorème de Cantor-Bernstein est constructive et uniforme : elle produit à partir de deux injections $f\colon A \hookrightarrow B$ et $g\colon B \hookrightarrow A$ une bijection $h\colon A \simeq B$, donnée par une relation $H(f, g)$. Ici les injections uniformes $\omega^\alpha \hookrightarrow \omega^\alpha \cdot c \hookrightarrow \omega^{\alpha+1} \hookrightarrow \omega^\alpha$ suffisent.

La fin de l'argument exploite le développement de Cantor (en base ω) d'un ordinal α. Celui-ci est uniforme, i.e. il existe une relation sans paramètres qui à α associe $n \in \omega$, les α_i décroissants et les $c_i < \omega$ non nuls tels que $\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot c_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot c_n$. Noter que α est infini ssi $1 \leqslant \alpha_0$. On suit ces notations.

Uniformément pour α infini, $\alpha \simeq \omega^{\alpha_0}$. En effet le terme initial $\beta = \omega^{\alpha_0} \cdot c_0 \leqslant \alpha$ est bien déterminé sans choix, ainsi que le reste $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha_i} \cdot c_i$ (somme ordonnée). Ces termes étant connus, $\beta + \gamma \simeq \gamma + \beta = \beta$ uniformément (il faut savoir caractériser β à partir de $\beta + \gamma$, ce qui est ici le cas). Donc uniformément pour α infini, $\alpha \simeq \omega^{\alpha_0} \cdot c_0 \simeq \omega^{\alpha_0}$.

Uniformément pour α infini, $\alpha \simeq \alpha \cdot 2$. En effet $\alpha \simeq \omega^{\alpha_0}$ pour $\alpha_0 > 0$. Que α_0 soit fini ou non, $\omega^{\alpha_0+1} \simeq \omega^{\alpha_0}$ uniformément, puis on applique une construction uniforme de Cantor-Bernstein. En particulier, uniformément pour α_0 non nul, $\omega^{\alpha_0 \cdot 2} \simeq \omega^{\alpha_0}$: le cas fini est uniformément clair, et le cas infini résulte de $\alpha_0 \cdot 2 \simeq \alpha_0$.

Enfin, uniformément en α vérifiant $\omega \leqslant \alpha$:

$$\alpha^2 \simeq \omega^{\alpha_0} \cdot \omega^{\alpha_0} = \omega^{\alpha_0 \cdot 2} \simeq \omega^{\alpha_0} \simeq \alpha. \qquad \square$$

La collection des $F(\alpha)$ pour α ordinal infini est donc une famille *uniformément définissable*. (On évite « canonique » puisque d'autres relations F sont possibles.) Par uniformisation et rigidité ordinales, en transportant la structure il existe sans choix une famille uniforme $F(A)$ telle que pour tout bon ordre infini A, on ait $F(A)\colon A \simeq A^2$.

Lemme B. Si κ a au moins 5 éléments, alors $P(\kappa)$ ne s'injecte pas dans $\kappa \times \kappa$. En particulier $2^\kappa \nleqslant \kappa \cdot 2$ et $2^\kappa \nleqslant \kappa^2$.

Démonstration. Soit par l'absurde $f\colon P(\kappa) \hookrightarrow \kappa \times \kappa$. On dispose pour tout bon ordre infini A d'une bijection entre A et A^2, notée g_A.

On définit par récursion ordinale $H_\alpha\colon \alpha \hookrightarrow \kappa$. La fonction H_5 est construite grâce à cinq éléments de κ ; les cas limites sont sans difficulté. Supposons H_α construite et étendons-la, sans choix, en α. Soit $A = \operatorname{im} H_\alpha \subseteq \kappa$. Il y a deux cas.

— Si $\alpha = k$ est un entier formel vérifiant $5 \leqslant k$, comme ZF $\models 2^k > k^2$ et que l'on peut canoniquement bien ordonner $2^k \simeq P(k) \simeq P(A)$, on prend $\min\{E \in P(A) : f(E) \notin A^2\}$. Écrivons $f(E) = (x, y) \in \kappa^2$; si $x \notin A$, on pose $H(k) = x$; sinon $y \notin A$ et l'on pose $H(k) = y$. Sans choix, cela construit bien $H(\alpha) \notin A$, i.e. une extension injective.

— Si α vérifie $\omega \leqslant \alpha$, alors $g_A\colon A \simeq A^2$. Soit $h\colon A \to P(A)$ qui à $a \in A$ associe $B \in P(A)$ tel que $f(B) = g_A(a) \in \kappa^2$ s'il en existe un (alors unique), et $\varnothing$ sinon.

Soient $C = \{a \in A : a \notin h(a)\}$ puis $f(C) = (x, y) \in \kappa^2$. Si $(x, y) \in A^2$, alors existe $a \in A$ tel que $g_A(a) = (x, y) = f(C)$; en ce cas $h(a) = C$ d'où $a \in C$ ssi $a \notin C$, absurde. Donc $(x, y) \notin A^2$: comme précédemment on prend x si possible, et sinon y, pour étendre H.

Ceci injecte Ord dans κ, contradiction. On a donc $2^\kappa \nleqslant \kappa^2$.

En particulier $2^\kappa \nleqslant \kappa \cdot 2$. On fixe en effet deux points $\infty, * \in \kappa$; alors $\kappa \times \{\infty, *\} \leqslant \kappa \times \kappa$, d'où $\kappa \cdot 2 \leqslant \kappa^2$, ce qui conclut. (Noter qu'on n'affirme pas disposer d'injections uniformes en κ : il faut, à κ donné, fixer deux points.) $\square$

Lemme C. Si κ vérifie $\mathrm{HC}(\kappa) \wedge \mathrm{HC}(2^\kappa)$, alors κ est bien ordonnable.

Démonstration. On notera = l'équipotence pour ne pas alourdir la lecture. On peut supposer κ non fini ; il a notamment au moins 5 éléments.

Montrons d'abord $\kappa^2 = \kappa$. Sans choix, et même à κ fixé, il n'est pas clair qu'on puisse injecter $\kappa \times \kappa$ dans $P(\kappa)$; il faut donc procéder par étapes. Pourtant $\kappa \leqslant \kappa + 1 \leqslant \kappa \cdot 2 \leqslant 2^\kappa$: les deux premières injections sont claires ; pour la dernière, fixons trois éléments $0, 1, 2 \in \kappa$ et faisons $(x, 0) \mapsto \{x\}$ et $(x, 1) \mapsto \{x, 0\}$ pour $x \neq 0$ mais $(0, 1) \mapsto \{0, 1, 2\}$.

On a donc :

$$\kappa \leqslant \kappa + 1 \leqslant \kappa \cdot 2 \leqslant 2^\kappa,$$

mais $2^\kappa \nleqslant \kappa \cdot 2$ par le Lemme B. De $\mathrm{HC}(\kappa)$, on tire $\kappa = \kappa + 1 = \kappa \cdot 2$. Notamment :

$$\kappa \leqslant \kappa^2 \leqslant (2^\kappa)^2 = 2^{\kappa \cdot 2} = 2^\kappa,$$

mais $2^\kappa \nleqslant \kappa^2$ encore par le Lemme B. Toujours par $\mathrm{HC}(\kappa)$, on obtient ainsi $\kappa = 2 \cdot \kappa = \kappa^2$.

Soit $\eta = \mathrm{Hart}(\kappa)$ l'ordinal de Hartogs de κ (exercice 22.9) ; c'est un ordinal ne s'injectant pas dans κ, et qui vérifie en outre $2^\eta \leqslant 2^{2^{\kappa^2}}$. Il vient donc, grâce au théorème de Cantor :

$$\begin{aligned} 2^\kappa \leqslant 2^\kappa + \eta < 2^{2^\kappa + \eta} = 2^{2^\kappa} \cdot 2^\eta &\leqslant 2^{2^\kappa} \cdot 2^{2^{\kappa^2}} \\ &= 2^{2^\kappa} \cdot 2^{2^\kappa} = 2^{2^\kappa \cdot 2} = 2^{2^{\kappa+1}} = 2^{2^\kappa}. \end{aligned}$$

De $\mathrm{HC}(2^\kappa)$, on tire à présent $2^\kappa + \eta = 2^\kappa$.

Bien sûr $\kappa + \eta = \kappa$ mène à $\eta \leqslant \kappa$, contradiction grossière à sa définition. Donc $\kappa + \eta > \kappa$. Il suit ainsi :

$$\kappa < \kappa + \eta \leqslant 2^\kappa + \eta = 2^\kappa,$$

et de $\mathrm{HC}(\kappa)$ on tire enfin $\kappa+\eta = 2^\kappa$. Il vient donc $(\kappa+\eta)^2 = 2^{\kappa\cdot 2} = 2^\kappa = \kappa+\eta$. Mais d'après le théorème du carré de Tarski, cette condition suffit pour que κ soit bien ordonnable. □

Le théorème suit. □

Exercices

R.1. Dans un modèle de ZF, montrer que tout *ordinal* $\omega \leqslant \alpha$ est en bijection avec :

- $P_{\text{fin}}(\alpha)$, ensemble des parties finies de α ;
- $\alpha^{<\omega}$, ensemble des uplets *finis* à valeurs dans α ;
- $\alpha^{<\omega,\text{inj}}$, ensemble des uplets injectifs finis à valeurs dans α.

Indication : forme normale de Cantor.

R.2. Cet exercice n'utilise pas la forme normale de Cantor. On travaille dans ZF sans choix ; $\kappa, \lambda, \ldots$ désignent des cardinalités. Soit $\kappa \succcurlyeq \lambda$ la relation $\kappa \twoheadrightarrow \lambda$.

a. Montrer que $\kappa \leqslant \lambda$ implique $\lambda \succcurlyeq \kappa$, et que $\kappa \succcurlyeq \lambda$ implique $P(\lambda) \leqslant P(\kappa)$.

b. On note $\mathrm{HC}^{\mathrm{op}}(\kappa)$ l'énoncé : $(\forall \lambda)[(2^\kappa \succcurlyeq \lambda \succcurlyeq \kappa) \to (\lambda \simeq \kappa \vee \lambda \simeq 2^\kappa)$. Montrer que $\mathrm{HC}^{\mathrm{op}}(\kappa)$ entraîne $\kappa \simeq 2\kappa$. [Indication : commencer par $2\kappa \leqslant 2^\kappa$, et penser au lemme B.]

c. Montrer que si $\kappa + \lambda \succcurlyeq \mu \cdot \nu$, alors $\kappa \succcurlyeq \mu$ ou $\lambda \succcurlyeq \nu$.

d. Soit $\mathrm{Hart}^{\mathrm{op}}(\kappa)$ le plus petit ordinal α tel que $\kappa \not\succcurlyeq \alpha$. Montrer que c'est bien défini, et que $2^{2^\kappa} \succcurlyeq \mathrm{Hart}^{\mathrm{op}}(\kappa)$.

e. Déduire que $\mathrm{HC}^{\mathrm{op}}(\kappa) \wedge \mathrm{HC}^{\mathrm{op}}(2^\kappa)$ entraîne $\mathrm{Hart}^{\mathrm{op}}(\kappa) \succcurlyeq 2^\kappa$. [Adapter la preuve du théorème : encadrer $2^\kappa + \mathrm{Hart}^{\mathrm{op}}(\kappa)$.]

f. Conclure : $\mathrm{ZF} \cup \{\mathrm{HCG}^{\mathrm{op}}\} \models \mathrm{AC}$.

Notes conclusives

Plus de liens et de limites des liens entre arithmétique cardinale et axiome du choix dans [HS01], texte virtuose mais accessible sans forcing car reposant sur des modèles de permutations. Réflexions reprises au chapitre 5 de l'élégant [Halbeisen].

• Repères historiques

[HS01] : Lorenz Halbeisen et Saharon Shelah. « Relations between some cardinals in the absence of the axiom of choice ». In : *Bull. Symbolic Logic* 7.2 (2001), p. 237-261
[Halbeisen] : Lorenz Halbeisen. *Combinatorial set theory.* Springer Monographs in Mathematics. With a gentle introduction to forcing. Springer, London, 2012, p. xvi+453

> *I had a dream, quite a natural one for a mathematician in the twentieth century: to solve a Hilbert problem, preferably positively. This is quite hard for (at least) three reasons:*
>
> *(a) those problems are almost always hard,*
>
> *(b) almost all have been solved,*
>
> *(c) my (lack of) knowledge excludes almost all.*
>
> *Now (c) points out the first Hilbert problem as it is in set theory; also, being the first, it occupies a place of honor.*
>
> [She00]

• Le théorème, pressenti par Lindenbaum, fut annoncé dans [LT26, Théorème 94] (une trentaine de pages d'énoncés livrés sans preuves). Première démonstration [Sie47]. • Preuve suivie [Spe54] ; l'important Lemme B est [Spe54, Satz 2]. • Exercice R.2 : [Tru73]. On ignore cependant si le dual du lemme B est correct.

• **Optimalité.** En l'absence de choix, les diverses façons de formuler $\mathrm{HC}(\kappa)$ ne sont pas en général équivalentes. On conserve celle donnée plus haut pour la discussion suivante.

– HC seule n'implique pas AC. Dans le modèle de Solovay [Sol70], toute partie non dénombrable de $P(\omega)$ est en bijection avec $P(\omega)$, i.e. $\mathrm{HC}(\aleph_0)$; mais tous les ensembles de réels étant Lebesgue-mesurables, on viole AC.

– HCG n'entraîne pas le choix global.

– Noter que sans choix, l'argument n'injecte pas κ^2 dans 2^κ ; je n'ai pas de référence, mais il ne doit pas être difficile de produire un modèle où $\kappa^2 \nleqslant 2^\kappa$.

– Enfin noter que Specker a en fait montré : si $\mathrm{HC}(\kappa)$ et $\mathrm{HC}(2^\kappa)$, alors $2^\kappa = \mathrm{Hart}(\kappa)$ est bien ordonné (et donc κ aussi). Sierpiński supposait en outre $\mathrm{HC}(2^{2^\kappa})$; la preuve de Specker est un grand progrès technique. • On ignore encore si $\mathrm{HC}(\kappa)$ suffit ; cette hypothèse entraîne bien $\kappa \simeq \kappa^2$, mais la démonstration donnée du théorème du carré de Tarski (ex. 23.2) requiert $\kappa + \mathrm{Hart}(\kappa) \simeq (\kappa + \mathrm{Hart}(\kappa))^2$. [KP02] pour l'état actuel des connaissances.

• **Plus de combinatoire.** Le lemme B est un cas très particulier de résultats combinatoires plus fins. En général (contrairement au cas bien ordonné), l'ensemble des parties *finies* de E, l'ensemble des uplets finis de E, et celui des uplets finis injectifs, n'ont pas de lien a priori [HS94, Theorems 1 et 2]. Les énoncés suivants demandent donc de la finesse.

Théorème ([HS94, Theorem 3 et Lemma p. 36])**.** Dans un modèle de ZF, pour E non fini, $P(E) \not\hookrightarrow P_{\mathrm{fin}}(E)$ (ensemble des parties

[She00] : Saharon Shelah. « The generalized continuum hypothesis revisited ». In : *Israel J. Math.* 116 (2000), p. 285-321

[LT26] : Adolf Lindenbaum et Alfred Tarski. « Communication sur les recherches de la théeorie des ensembles ». In : *C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III* 19 (1926), p. 299-330

[Sie47] : Wacław Sierpiński. « L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix ». In : *Fund. Math.* 34 (1947), p. 1-5

[Spe54] : Ernst Specker. « Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom ». In : *Arch. Math. (Basel)* 5 (1954), p. 332-337

[Tru73] : John Truss. « Dualisation of a result of Specker's ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 6 (1973), p. 286-288

[Sol70] : Robert Solovay. « A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable ». In : *Ann. of Math. (2)* 92 (1970), p. 1-56

[KP02] : Akihiro Kanamori et David Pincus. « Does GCH imply AC locally ? » In : *Paul Erdős and his mathematics II. Based on the conference, Budapest, Hungary, July 4–11, 1999.* Berlin : Springer ; Budapest : János Bolyai Mathematical Society, 2002, p. 413-426

[HS94] : Lorenz Halbeisen et Saharon Shelah. « Consequences of arithmetic for set theory ». In : *J. Symbolic Logic* 59.1 (1994), p. 30-40

finies), $P(E) \not\precsim E^{<\omega}$ (ensemble des uplets finis), et $P(E) \not\precsim E^{<\omega,\mathrm{inj}}$ (ensemble des uplets injectifs finis).

§ S. Le théorème de Banach-Tarski

Renchérissant sur une décomposition obtenue par Hausdorff, Banach et Tarski ont démontré un célèbre énoncé souvent, et à tort, présenté comme un paradoxe ensembliste. Il s'agit simplement de théorie géométrique des groupes ; le malentendu provient certainement de l'emploi de l'axiome du choix pour prendre des représentants d'orbites.

Prérequis : théorie des groupes ; §§ 1, 23.

En voici l'énoncé intuitif :

> il existe une partition finie de la sphère dont les pièces, après mouvement rigide, composent deux copies de la sphère d'origine.

Remarques

— L'aspect paradoxal de l'énoncé tient à l'idée naïve qu'un mouvement rigide doit préserver la mesure ; elle est erronée.

— Tout mouvement rigide de $\mathbb{R}^3$ est la composée d'une translation et d'une rotation vectorielle. Ces dernières forment le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

— Notons $\sqcup$ la réunion disjointe. L'affirmation est ainsi qu'il existe une partition finie

$$\mathbb{S}^2 = (A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k) \sqcup (B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_\ell),$$

et des éléments $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_\ell \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tels que :

$$\bigsqcup_{i=1}^{k} g_i A_i = \mathbb{S}^2 = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} h_j B_j.$$

Formalisons cela.

Définition. Soit G un groupe agissant sur un ensemble Ω.

— Deux parties $A, B \subseteq \Omega$ sont *finiment G-congruentes* s'il existe $n \in \mathbb{N}$, des partitions $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$, et des éléments $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que pour chaque indice, $g_i A_i = B_i$.

On note alors $(g_1, \ldots, g_n) \colon A = \bigsqcup A_i \sim B = \bigsqcup B_i$, ou plus simplement $\mathbf{g} \colon A \sim B$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

— Ω est *finiment G-duplicable* s'il existe une partition $\Omega = A \sqcup B$ avec $A \sim \Omega \sim B$.

Théorème (Banach et Tarski, d'après Hausdorff)**.** $\mathbb{S}^2$ est finiment $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-duplicable dans l'action naturelle.

Démonstration. Elle passe par un phénomène groupe-théorique profond : la présence dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'une copie du groupe libre à deux générateurs F_2. Dorénavant nous dirons simplement *duplicable*.

Lemme A (à la Cantor-Bernstein)**.** Soient G un groupe agissant sur un ensemble Ω et $A, A' \subseteq \Omega$ tels que $A \cap A' = \varnothing$ et $A \sim \Omega \sim A'$. Alors Ω est duplicable.

Démonstration. Par hypothèse il existe $\mathbf{f}\colon A \sim A'$ et $\mathbf{g}\colon \Omega \sim A$. Posons $B = \Omega \backslash A$; co-étendant et restreignant on a maintenant $\mathbf{f}\colon A \hookrightarrow B$ et $\mathbf{g}\colon B \hookrightarrow A$. D'après le lemme de Knaster-Tarski (v. chapitre I, § 1.2), la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & P(A) & \to & P(A) \\ & X & \mapsto & A \backslash \mathbf{g}(B \backslash \mathbf{f}(X)) \end{array}$$

possède un plus grand point fixe noté X. Poursuivant la découpe, il vient $\mathbf{f}\colon X \sim \mathbf{f}(X)$ et $\mathbf{g}\colon B \backslash \mathbf{f}(X) \sim A \backslash X$. Ainsi $A \sim B$ et Ω est duplicable. □

Lemme B. Le groupe libre à deux générateurs F_2 est duplicable dans son action sur lui-même par translations à gauche (l'action « régulière gauche »).

Démonstration. Disons F_2 engendré par a et b. Tout élément de F_2 possède une unique écriture comme mot réduit (non simplifiable). Soit pour $x \in F_2$ l'ensemble $M_x = \{g \in F_2 : \text{le mot réduit de } g \text{ commence par } x\}$. Alors $F_2 = \{1\} \sqcup M_a \sqcup M_{a^{-1}} \sqcup M_b \sqcup M_{b^{-1}}$.

Soient $A = M_a \sqcup M_{a^{-1}}$ et $A' = bA \sim A$, qui sont disjoints. Notons que $(1, a)\colon A = M_a \sqcup M_{a^{-1}} \sim M_a \sqcup (F_2 \backslash M_a) = F_2$. Par le lemme précédent, F_2 est duplicable. □

Lemme C. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ contient une copie de F_2.

Remarque. C'est en fait un cas très particulier d'un phénomène général établi par Tits (voir les notes conclusives).

Démonstration. On peut donner explicitement deux rotations sans relations. Le plus classique est de procéder via les inclusions $F_2 \hookrightarrow C_2 * C_3 \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

À la main c'est assez pénible. Soient les matrices de rotation suivantes :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \chi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'ordre respectif 2 et 3. Noter que χ^{-1} est obtenue par transposition, ou conjugaison de Galois de $\sqrt{3}$. Pour $\varepsilon = \pm 1$, un rapide calcul donne :

$$\chi^\varepsilon \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors par récurrence sur k que pour tout k-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{\pm 1\}^k$, la rotation $\chi^{\varepsilon_1}\varphi \cdot \chi^{\varepsilon_2}\varphi \cdots \chi^{\varepsilon_k}\varphi$ a pour matrice

$$\frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_{11} & q_{12}\sqrt{3} & q_{13} \\ p_{21}\sqrt{3} & q_{22} & q_{23}\sqrt{3} \\ p_{31} & p_{32}\sqrt{3} & p_{33} \end{pmatrix}$$

où $p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{32}, p_{33}$ sont pairs et $q_{12}, q_{13}, q_{22}, q_{23}$ sont impairs. Il suit qu'un mot de cette forme ne vaut jamais 1 ni $\chi^{\pm 1}$. Les seules relations entre φ et χ sont donc triviales (formellement, $\langle \varphi, \chi \rangle \simeq C_2 * C_3$) : aucun mot réduit plus long ne vaut 1.

On considère enfin le sous-groupe engendré par $(\varphi\chi)^2$ et $(\chi\varphi)^2$. Celui-ci est clairement libre. □

Lemme D (AC)**.** Soit G un groupe agissant sur un ensemble Ω. On suppose :

— que cette action est libre (seul 1 a des points fixes dans Ω) ;

— que dans l'action régulière gauche, G est duplicable.

Alors Ω est duplicable.

Démonstration. C'est à peu près évident, puisque toute action libre est réunion disjointe de copies de l'action régulière. Mais leur nombre étant potentiellement infini, l'axiome du choix intervient pour sélectionner un point par orbite.

Soit $G = A \sqcup B$ une partition vérifiant $A \sim G \sim B$. Soit $\Sigma \subseteq \Omega$ un système de représentants des G-orbites, de sorte que $\Omega = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} G \cdot \{\sigma\}$. Alors clairement $A \cdot \Sigma \sim G \cdot \Sigma = \Omega \sim B \cdot \Sigma$, mais par construction et liberté, $A \cdot \Sigma \cap B \cdot \Sigma = \varnothing$. $\square$

Établissons le théorème. On fixe une copie de F_2 dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Chaque rotation $\rho \neq 1$ possède exactement deux points fixes : $L_\rho \cap \mathbb{S}^2$, où L_ρ est l'axe de ρ. Il suit que l'ensemble

$$P = \{p \in \mathbb{S}^2 : (\exists \rho \in F_2 \backslash \{1\})(\rho(p) = p)\}$$

est dénombrable. Par construction, l'action restreinte de F_2 sur $\mathbb{S}^2 \backslash P$ est libre. D'après les lemmes, il suit que $\mathbb{S}^2 \backslash P$ est F_2-duplicable.

Il reste à étendre à $\mathbb{S}^2$ entière ; il suffit de trouver un ensemble $\hat{P}$ contenant P et finiment $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-congruent à $\hat{P} \backslash P$: ceci montrera la duplicabilité de $\mathbb{S}^2$. Le plus simple est de trouver φ tel que P soit disjoint de tous les $\varphi^n(P)$ pour $n \geqslant 1$; cela entraîne qu'ils sont tous disjoints. La condition impose déjà $\varphi \notin F_2$. Fixons un axe de rotation L évitant P. Le sous-groupe G_L des rotations d'axe L est isomorphe au cercle ; l'ensemble $\{\varphi \in G_L : (\exists n \in \mathbb{N})(\exists p \in P)(\varphi^n(p) \in P)\}$ est dénombrable (c'est l'avantage d'avoir fixé l'axe : on raisonne en cardinal et non en propriété plus fine). Il suit qu'il existe $\varphi \in G_L$ tel que l'on ait toujours $P \cap \varphi^n(P) = \varnothing$.

Comme φ est bijective, les $\varphi^n(P)$ sont deux à deux disjoints. Soit $\hat{P} = \bigsqcup_{n \geqslant 0} \varphi^n(P)$. Alors :

$$\mathbb{S}^2 = (\mathbb{S}^2 \backslash \hat{P}) \sqcup \hat{P} \underset{(1,\varphi)}{\sim} (\mathbb{S}^2 \backslash \hat{P}) \sqcup \varphi(\hat{P}) = (\mathbb{S}^2 \backslash \hat{P}) \sqcup (\hat{P} \backslash P) = \mathbb{S}^2 \backslash P,$$

qui est F_2-, et donc $\langle F_2, \varphi \rangle$-duplicable. Il suit que $\mathbb{S}^2$ l'est : ce qu'on voulait. $\square$

Exercices

S.1. Donner une preuve « à la Baire » de l'existence de φ faisant $\hat{P} \sim \hat{P} \backslash P$.

(N'ayant pas trouvé de tel argument pour la présence d'une copie du groupe libre dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, ni su utiliser les quaternions, je me suis rabattu sur les preuves du commerce.)

Notes conclusives

Pour approfondir, consulter le formidable [Tomkowicz-Wagon]. Nous ne ferons que survoler.

- **Repères historiques**

> [...] *la possibilità del problema della misura dei gruppi di punti di una retta e quella di bene ordinare il continuo non possono coesistere.* [Vit05, derniers mots]

> *Zu diesem Zwecke zeigen wir,* daß eine Kugelhäfte mit einem Kugeldritell kongruent sein kann. [Hau14]

• Vitali construisit l'ensemble qui porte à présent son nom, et nota l'incompatibilité de mesurer toutes les parties de la droite avec l'axiome du choix [Vit05]. (On rappelle un résultat de forcing de Solovay [Sol70] : si ZF est cohérente, on peut lui ajouter « toute partie de la droite est mesurable au sens de Lebesgue ».) • Hausdorff obtint une décomposition paradoxale de la sphère [Hau14]. C'est essentiellement la duplicabilité de $\mathbb{S}^2 \setminus P$, et c'est clairement la méthode de plongement de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (et donc de F_2) dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. • Banach et Tarski [BT24] citent évidemment Vitali et Hausdorff ; le « théorème » est le Lemme 22, mais c'est le Lemme 21 (employant la décomposition de Hausdorff) qui fait l'essentiel. • On aurait tort de limiter [BT24] à ce résultat ; il étudie également le cas dénombrable, et montre *la congruence des parties bornées d'intérieur non vide de* $\mathbb{R}^n$, moins célèbre que la duplication de la sphère. • En analysant les problèmes de mesurabilité liés au théorème de Banach-Tarski, von Neumann [Neu29] a dégagé l'importante condition de *moyennabilité* d'un groupe. • Dès 1945, Sierpiński [Sie45] parlait de « paradoxe » ; le qualificatif peut être plus ancien.

- **Nombre et type de pièces.** • Banach et Tarski n'estiment pas le nombre de pièces ; [Rob47] montre que le minimum est 5. • Les pièces ne sont évidemment pas Lebesgue-mesurables. Mais on peut les prendre ayant la propriété de Baire (B a la propriété de Baire s'il existe un ouvert O tel que $B \triangle O$ soit maigre) [DF94, Theorem 2.6] ; elles sont donc moins pathologiques que prévu.

- **Plongements du groupe libre.** On peut envisager trois types de généralisation.

Plongements de groupes libres. • Il est connu que $F_{\aleph_0}$ s'injecte dans F_2 : la sphère est donc $\aleph_0$-démultipliable. • [Sie45] montre qu'elle est $2^{\aleph_0}$-démultipliable ; l'argument consiste essentiellement à construire dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ une copie de $F_{2^{\aleph_0}}$ (ce qui est clairement maximal).

[Tomkowicz-Wagon] : Grzegorz Tomkowicz et Stanley Wagon. *The Banach-Tarski paradox.* Second. T. 163. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. With a foreword by Jan Mycielski. Cambridge University Press, New York, 2016, p. xviii+348

[Vit05] : Giuseppe Vitali. *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta.* Bologna, 1905

[Hau14] : Felix Hausdorff. « Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen ». In : *Math. Ann.* 75.3 (1914), p. 428-433

[BT24] : Stefan Banach et Alfred Tarski. « Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes ». In : *Fund. math* 6 (1924), p. 244-277

[Neu29] : János von Neumann. « Zur allgemeinen Theorie des Masses ». In : *Fundam. Math* 13 (1929), p. 73-116

[Sie45] : Wacław Sierpiński. « Sur le paradoxe de la sphère ». In : *Fund. Math.* 33 (1945), p. 235-244

[Rob47] : Raphael Robinson. « On the decomposition of spheres ». In : *Fund. Math.* 34 (1947), p. 246-260

[DF94] : Randall Dougherty et Matthew Foreman. « Banach-Tarski decompositions using sets with the property of Baire ». In : *J. Amer. Math. Soc.* 7.1 (1994), p. 75-124

Typicité des sous-groupes libres. [Eps71] montre par un argument élémentaire que (Haar-)presque tout n-uplet d'un groupe de Lie connexe non résoluble engendre une copie de F_n.

Existence de sous-groupes libres. La profonde « alternative de Tits » est un phénomène central en théorie des groupes ; elle résout une conjecture de Bass et Serre.

Théorème (Tits ; [Tit72, Corollary 1])**.** Un groupe linéaire (i.e. sous-groupe d'un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) finiment engendré contient une copie du groupe libre, ou possède un sous-groupe résoluble d'indice fini.

Comme $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple, il contient une copie de F_2.

Un outil central dans la démonstration de Tits, qu'il n'invente pas, est le *ping-pong*, dont il existe de nombreuses formes.

Lemme (ping-pong)**.** Soient G un groupe agissant sur un ensemble Ω, et H, K deux sous-groupes. On suppose qu'il existe deux parties disjointes $X, Y \subseteq \Omega$ telles que :

– $(\forall h \in H \backslash \{1\})(h \cdot X \subseteq Y)$, et
– $(\forall k \in K \backslash \{1\})(k \cdot Y \subseteq X)$.

Alors $\langle H, K \rangle = H * K$ (produit libre).

• La preuve du lemme est à peu près évidente. Le résultat est mentionné pour son importance en théorie des groupes. Il est hélas peu exploitable pour construire une copie de F_2 dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$: il faut exhiber des générateurs et calculer quelque chose. • Pour une excellente introduction au ping-pong, voir [Man17] ; *on recommande vivement tout l'ouvrage comme avant-goût de la « théorie géométrique des groupes ».*

• **Moyennabilité.** La *moyennabilité* d'un groupe G est l'existence d'une mesure finiment additive sur $P(G)$ entier, invariante par translation. Elle possède depuis de nombreuses définitions équivalentes.

– Von Neumann a montré qu'un groupe contenant une copie de F_2 n'est pas moyennable, ce qui est une façon d'expliquer la non-conservation de la surface (pour des parties non Lebesgue-mesurables...) sous l'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

  Il en déduisit une version plane de Banach-Tarski, non avec des isométries ($\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est moyennable) mais sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$: « *Ja, die ganze Hausdorff-Banach-Tarski-sche Pathologie wiederholt sich schon in der Ebene, wenn wir nur O_2 durch A_2, d.h. längetreu durch linear-flächentreu, ersetzen.* » [Neu29, p. 85].

  On peut aller encore plus loin : dans $\mathbb{R}^2$, un disque et un carré de même surface sont finiment congruents *sous l'action des translations* [Lac90] [Tomkowicz-Wagon, Chapitre 9].

– Fut conjecturée l'alternative : tout groupe est moyennable ou bien contient une copie de F_2. On sait depuis qu'elle est fausse, mais (en raison de la moyennabilité, déjà non triviale, des groupes résolubles et des groupes finis) vraie pour les groupes linéaires d'après l'alternative de Tits.

Voir [Tomkowicz-Wagon, Chapitre 12].

[Eps71] : David Epstein. « Almost all subgroups of a Lie group are free ». In : *J. Algebra* 19 (1971), p. 261-262
[Tit72] : Jacques Tits. « Free subgroups in linear groups ». In : *J. Algebra* 20 (1972), p. 250-270
[Man17] : Johanna Mangahas. « The ping-pong lemma ». In : *Office hours with a geometric group theorist.* Princeton, NJ : Princeton Univ. Press, 2017, p. 85-105
[Lac90] : Miklós Laczkovich. « Equidecomposability and discrepancy ; a solution of Tarski's circle-squaring problem ». In : *J. Reine Angew. Math.* 404 (1990), p. 77-117

§ T. Notions de nombres : surréels

Les nombres surréels, découverts par Conway, forment la généralisation ultime de la notion de continuum. Le super-corps surréel est hautement structuré ; il englobe les réels et les ordinaux.

Prérequis : À peu près tout l'ouvrage, notamment §§ 1–3, 17–18, 22–24, B, Q. En outre : forme normale de Cantor (ex. 3.3), arithmétique de Hessenberg (ex. 22.11), théories DOAG (ex. 18.2) et RCF (ex. K.5).

Dans la suite, on tolère toujours $\kappa = \mathrm{Ord}$, à condition de passer à $\mathrm{BGN} \cup \{\mathrm{CG}\}$.

§ T.1. Arbres ordonnés latéralement

On rappelle qu'un *arbre ensembliste* (sujet d'étude § SÉ5) est un ordre partiel $\mathbb{A} = (A, \sqsubseteq)$ ayant un plus petit élément (enraciné) et tel que chaque $\mathbb{A}_{\sqsubset s}$ est bien ordonné.

Notation. Soit $\mathbb{A}_\kappa = \coprod_{\alpha \in \kappa} 2^\alpha$ l'ensemble des suites de 0 et de 1 de longueur ordinale $< \kappa$. On munit $\mathbb{A}_\kappa$ de deux relations :

— l'ordre partiel d'extension $\sqsubseteq$, défini par :

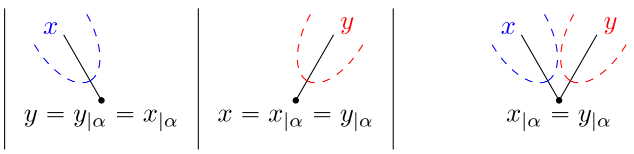
$$x \sqsubseteq y \text{ ss'il existe } \alpha \in \kappa \text{ tel que } x = y_{|\alpha};$$

cet ordre bien fondé donne une structure d'arbre ensembliste compatible avec la concaténation $\frown$; il induit une fonction « ancêtre commun » $\sqcap$;

— l'ordre « latéral » $\leqslant$, défini par :

$$x \leqslant y \quad :\mathrm{si} (x = y) \vee \quad (y^\frown 0 \sqsubseteq x) \quad \vee \quad (x^\frown 1 \sqsubseteq y) \quad \vee (\exists u)(u^\frown 0 \sqsubseteq x \wedge u^\frown 1 \sqsubseteq y).$$

Illustration :



Deux équivalents :

Noter que $x < y$ ssi $[x < (x \sqcap y) = y] \vee [x = (x \sqcap y) < y] \vee [x < (x \sqcap y) < y]$, et $\alpha \in \kappa$ tel que $x_{|\alpha} = y_{|\alpha}$ et $(\alpha \in \operatorname{dom} x \setminus \operatorname{dom} y \wedge x(\alpha) = 0) \vee (\alpha \in \operatorname{dom} x \cap \operatorname{dom} y \wedge x(\alpha) = 0 < 1 = y(\alpha)) \vee (\alpha \in \operatorname{dom} y \setminus \operatorname{dom} x \wedge y(\alpha) = 1)$.

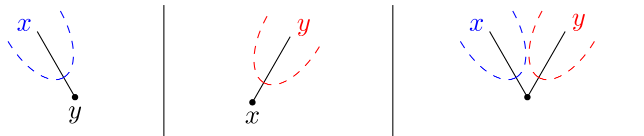
Proposition.

(i) $(\mathbb{A}_\kappa; \leqslant) \models \mathrm{DLO}$.

(ii) $\operatorname{card} \mathbb{A}_\kappa = \sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda$.

Démonstration.

(i) Pour la densité, considérer les cas de figure suivants :



prendre $z = x^\frown 1$ | prendre $z = y^\frown 0$ | prendre $z = (x \sqcap y)$.

(ii) $\operatorname{card} \mathbb{A}_\kappa = \sum_{\alpha\in\kappa} 2^{\operatorname{card}\alpha} = \sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda$. $\square$

Théorème (Sierpiński)**.** Si κ est un cardinal régulier, alors $(\mathbb{A}_\kappa; \leqslant)$ est κ-saturé.

Démonstration. L'argument repose sur l'examen des « coupures » de $(\mathbb{A}_\kappa; \leqslant)$; cette terminologie du XIX$^\text{e}$ siècle désigne en fait les 1-types sans quantificateurs.

Définition. Une partie $\Gamma \subseteq \mathbb{A}_\kappa$ est *à domaines confinés* s'il existe $\alpha \in \kappa$ tel que $(\forall\gamma)(\gamma \in \Gamma \to \operatorname{dom}\gamma \subseteq \alpha)$.

Étape 1. Si $\Gamma \subseteq \mathbb{A}_\kappa$ est de cardinal κ, alors Γ est à domaines confinés.

Vérification. Soit $D_\Gamma = \{\operatorname{dom}\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, qui est un ensemble d'ordinaux $< \kappa$ de cardinal $< \kappa$. Par régularité, $\sup D_\Gamma < \kappa$. $\diamond$

Définition. Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{A}_\kappa$ à domaines confinés. Le *majorant optimal* de Γ, noté $e = e(\Gamma)$, est défini par la récursion suivante. On suppose $e_{|\alpha}$ connu. Soient :

— $\Gamma_\alpha = \{\gamma \in \Gamma : \gamma_{|\alpha} = e_{|\alpha}\}$,

— $\Gamma_\alpha^\downarrow = \{\gamma \in \Gamma_\alpha : \operatorname{dom}\gamma = \alpha\}$,

— $\Gamma_\alpha^0 = \{\gamma \in \Gamma_\alpha : \alpha \in \operatorname{dom}\gamma \wedge \gamma(\alpha) = 0\}$,

— $\Gamma_\alpha^1 = \{\gamma \in \Gamma_\alpha : \alpha \in \operatorname{dom}\gamma \wedge \gamma(\alpha) = 1\}$,

de sorte que $\Gamma_\alpha^\downarrow$ est au plus singleton et $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^\downarrow \sqcup \Gamma_\alpha^0 \sqcup \Gamma_\alpha^1$.

— Si $\Gamma^1_\alpha \neq \varnothing$, on étend par $e(\alpha) = 1$.

— Si $\Gamma^1_\alpha = \varnothing$ et $\Gamma^\downarrow_\alpha \neq \varnothing$, on pose $\operatorname{dom} e = \alpha$ et l'on arrête.

— Si $\Gamma^1_\alpha = \Gamma^\downarrow_\alpha = \varnothing$ et $\Gamma^0_\alpha \neq \varnothing$, on étend par $e(\alpha) = 0$.

— Si $\Gamma_\alpha = \varnothing$, on pose $\operatorname{dom} e = \alpha$ et l'on arrête.

Noter que dans le deuxième cas, $e \in \Gamma$; mais pas dans le quatrième.

Étape 2. C'est bien défini, i.e. la construction s'arrête. En outre :

(i) $\Gamma \leqslant \{e\}$; en particulier si $e \in \Gamma$ alors $e = \max \Gamma$;

(ii) si $\Gamma \leqslant \{\delta\} < \{e\}$, alors $e^\frown 0 \sqsubseteq \delta$;

(iii) si $e \notin \Gamma$ et $e \sqsubseteq f$, alors $\Gamma < \{f\}$.

Vérification. Comme Γ est à domaines confinés, il existe $\alpha \in \kappa$ tel que $\Gamma_\alpha = \varnothing$; la construction termine.

(i) Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $e < \gamma$. Soit $\alpha = \operatorname{dom}(e \sqcap \gamma)$, de sorte que $e \in \Gamma_\alpha$.

— Si $\alpha \in \operatorname{dom} \gamma \setminus \operatorname{dom} e$ et $\gamma(\alpha) = 1$, alors $\Gamma^1_\alpha \neq \varnothing$, d'où $e(\alpha) = 1$: absurde.

— Si $\alpha \in \operatorname{dom} \gamma \cap \operatorname{dom} e$ et $e(\alpha) = 0 < 1 = \gamma(\alpha)$, alors $\Gamma^1_\alpha \neq \varnothing$: même contradiction.

— Si $\alpha \in \operatorname{dom} e \setminus \operatorname{dom} \gamma$ et $e(\alpha) = 0$, alors $\Gamma^1_\alpha = \varnothing$ mais $\Gamma^\downarrow_\alpha \neq \varnothing$, d'où $\operatorname{dom} e = \alpha$: contradiction.

Ainsi $\gamma \leqslant e$.

(ii) Soit $\delta \in \mathbb{A}_\kappa$ tel que $\Gamma \leqslant \{\delta\} < \{e\}$. Soit $\alpha = \operatorname{dom}(e \sqcap \gamma)$.

— Si $\alpha \in \operatorname{dom} e \setminus \operatorname{dom} \delta$ et $e(\alpha) = 1$, alors $\Gamma^1_\alpha \neq \varnothing$; pour $\gamma \in \Gamma^1_\alpha$ on a $\gamma_{|\alpha} = \delta_{|\alpha} = \delta$ et $\gamma(\alpha) = 1$, d'où $\gamma > \delta$, contradiction.

— Si $\alpha \in \operatorname{dom} e \cap \operatorname{dom} \delta$ et $\delta(\alpha) = 0 < 1 = e(\alpha)$, alors ici encore $\Gamma^1_\alpha \neq \varnothing$: même contradiction.

— Donc $\alpha \in \operatorname{dom} \delta \setminus \operatorname{dom} e$ et $\delta(\alpha) = 0$, i.e. $e^\frown 0 \sqsubseteq \delta$, comme voulu.

(iii) Soient $e \sqsubseteq f$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $f \leqslant \gamma$; on va montrer $e \in \Gamma$. Noter que e et $f \sqcap \gamma$ sont $\sqsubseteq$-comparables car prédécesseurs de f.

Supposons d'abord $(f \sqcap \gamma) \sqsubset e$; alors $f \neq \gamma$ car sinon $f \sqsubset e$. Donc $f < \gamma$. Soit $\alpha = \operatorname{dom}(f \sqcap \gamma) < \operatorname{dom} e$. Noter que $e_{|\alpha} = (f \sqcap \gamma) = \gamma_{|\alpha}$.

— Si $\alpha \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} \gamma$ et $f(\alpha) = 0 < 1 = \gamma(\alpha)$, alors $\gamma \in \Gamma^1_\alpha$, ce qui force $e(\alpha) = 1$ mais $e(\alpha) = f(\alpha) = 0$, absurde.

— Si $\alpha \in \operatorname{dom} f \setminus \operatorname{dom} \gamma$ et $f(\alpha) = 0$, alors $\operatorname{dom} \alpha = \gamma$ d'où $\gamma \in \Gamma^\downarrow_\alpha$.

Mais en outre $e(\alpha) = f(\alpha) = 0$ donc $\Gamma^1_\alpha = \varnothing$. Par construction, $\operatorname{dom} e = \alpha$: contradiction.

— Enfin si $\alpha \in \operatorname{dom}\gamma \setminus \operatorname{dom} f$, alors $\alpha > \operatorname{dom} e$, absurde.

Les trois cas étant contradictoires, on a $e \sqsubseteq (f \sqcap \gamma)$. Soit $\beta = \operatorname{dom} e$. Alors $\gamma_{|\beta} = (f \sqcap \gamma)_{|\beta} = e$ donc $\gamma \in \Gamma_\beta$ et $\Gamma_\beta \neq \varnothing$. Comme en outre $\operatorname{dom} e = \beta$, par construction $\Gamma^\downarrow_\beta \neq \varnothing$, et $e \in \Gamma$. ◇

Grâce à l'automorphisme d'arbre échangeant 0 et 1 en renversant l'ordre, on a aussi une notion de *minorant optimal*.

Étape 3. Si $\Gamma < \Delta$ sont de cardinal $< \kappa$, alors il existe $e \in \mathbb{A}_\kappa$ tel que $\Gamma < \{e\} < \Delta$.

Par opposition à la condition de Dedekind-Hölder (§ B.1), Γ et Δ peuvent être vides.

Vérification. Si Γ a un plus grand élément et Δ un plus petit élément, on invoque la densité de $(\mathbb{A}_\kappa; \leqslant)$. On peut donc supposer la négation. Quitte à employer l'anti-automorphisme, on peut supposer que Γ n'a pas de plus grand élément. Soit γ^+ son majorant optimal. Par l'étape 2 (i), $\gamma_+ \notin \Gamma$. Soit alors β majorant les domaines pour $\Gamma \cup \Delta$. Soit encore $e = \gamma^+ \frown \underline{0}$ (avec β zéros). Par l'étape 2 (iii), $\Gamma < \{e\}$. Soit $\delta \in \Delta$ tel que $\delta \leqslant e$. On a $\delta < e$ car $\operatorname{dom}\delta < \operatorname{dom} e$. Par l'étape 2 (ii), $e \frown 0 \sqsubseteq \delta$, contradiction. Ainsi $\Gamma < \{e\} < \Delta$. ◇

Soit $p(x)$ un 1-type à paramètres dans un ensemble de cardinal $< \kappa$. Par élimination des quantificateurs dans DLO, $p(x)$ est une coupure $\Gamma < x < \Delta$ avec $\operatorname{card}(\Gamma \cup \Delta) < \kappa$. D'après l'étape 3, on a une réalisation dans $\mathbb{A}_\kappa$: c'est la κ-saturation. □

No **Définition.** Soit **No** la collection définissable $(\exists\alpha)(\operatorname{Ord}(\alpha) \wedge x \in 2^\alpha)$. On la munit de $\sqsubseteq$ et $\leqslant$.

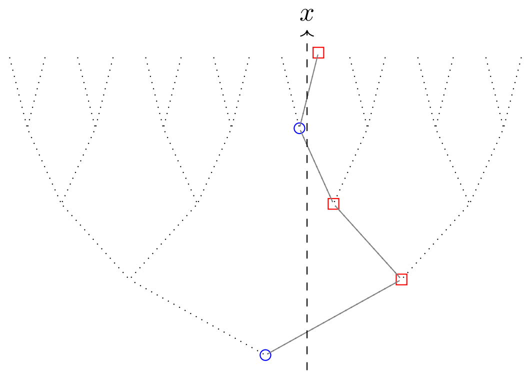
La structure $(\mathbf{No}; \leqslant, \sqsubseteq)$ n'est évidemment pas un ensemble. Pour la manipuler on passe à une théorie des ensembles *et classes*, disons BGN avec choix global (§ Q).

Corollaire. $(\mathbf{No}; \leqslant)$ est un ordre linéaire dense Ord-saturé, i.e. si $\Gamma < \Delta$ sont des *sous-ensembles* de **No**, alors il existe x de **No** tel que $\Gamma < \{x\} < \Delta$.

L'analogie avec les réels est donc assez trompeuse : $(\mathbb{R}; \leqslant)$ n'est même pas $\aleph_0$-saturé.

§ T.2. Structure algébrique

Notation. Pour x de **No**, on note $\Gamma_x = \{y \in \mathbf{No}_{\sqsubset x} : y < x\} = \{x_{|\alpha} : \alpha \in \operatorname{dom} x \wedge \alpha(x) = 1\}$ et $\Delta_x = \{y \in \mathbf{No}_{\sqsubset x} : y > x\} = \{x_{|\alpha} : \alpha \in \operatorname{dom} x \wedge \alpha(x) = 0\}$.



Les $\sqsubseteq$-restrictions du nœud x se répartissent à sa $\leqslant$-gauche et à sa $\leqslant$-droite.

Lemme (et notation)**.**

(i) Toute sous-classe $\leqslant$-convexe non vide de **No** possède un $\sqsubseteq$-plus petit élément.

(ii) Si $\Gamma < \Delta$ sont des sous-ensembles de **No**, alors il existe un $\sqsubseteq$-plus petit e de **No** tel que $\Gamma < \{e\} < \Delta$. On le note $(\Gamma|\Delta)$.

$(\Gamma|\Delta)$

(iii) Si $\Gamma' \subseteq \Gamma$ est cofinal et $\Delta' \subseteq \Delta$ est coinitial, alors $(\Gamma'|\Delta') = (\Gamma|\Delta)$.

(iv) Si $x \in \mathbf{No}$, alors $x = (\Gamma_x|\Delta_x)$.

Démonstration.

(i) Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{No}$ une classe convexe non vide. Soit $x \in \mathcal{C}$ un élément $\sqsubseteq$-minimal. Soit $y \in \mathcal{C}$ un autre élément ; supposons $x < y$. Alors

(ii) La classe définie par $\Gamma < \{x\} < \Delta$ est convexe et non vide, par Ord-saturation ; on applique (i).

(iii) Évident.

(iv) En effet x « remplit » la coupure $\Gamma_x < \Delta_x$, $\square$

§ T.3. Séries de Hahn

- **Séries formelles sur un ensemble**

Définition A. Soit X un ensemble quelconque.

— On note $\mathbb{R}[[t^X]]$ l'ensemble des séries formelles

$$f = \sum_{x \in X} \lambda_x t^x,$$

où $(\lambda_x) \in \mathbb{R}^X$.

— Le *support* de $f \in \mathbb{R}[[t^X]]$ est $\operatorname{supp} f = \{x \in X : \lambda_x \neq 0\}$.

— On munit $\mathbb{R}[[t^X]]$ d'une structure de groupe coordonnée par coordonnée, i.e. via la bijection naturelle avec le groupe $(\mathbb{R}^X ; +)$.

— Si κ est un cardinal, on note $\mathbb{R}[[t^X]]_{<\kappa} = \{f \in \mathbb{R}[[t^X]] : \operatorname{card} \operatorname{supp} f < \kappa\}$.

— [BGN.] Si X est une classe propre, on définit de même le groupe $\mathbb{R}[[t^X]]_{<\mathrm{Ord}}$.

Remarque.

(i) $(\mathbb{R}[[t^X]] ; +)$ et $(\mathbb{R}[[t^X]]_{<\kappa} ; +)$ sont des groupes abéliens divisibles sans torsion.

(ii) On suppose $\kappa \geqslant \operatorname{card} X$. Alors $(\mathbb{R}[[t^X]] ; +)$ est κ-saturé ssi $(\mathbb{R}[[t^X]]_\kappa ; +)$ est κ-saturé ssi $(X; =)$ est κ-saturé (ce qui est toujours le cas).

La deuxième clause n'est mise que pour l'analogie avec les Propositions A et B. Tout est évident car la théorie DAG des groupes abéliens divisibles sans torsion est λ-catégorique en tout $\lambda > \aleph_0$.

• **Séries de Hahn sur un ordre**

Définition B. Soit $(\mathbb{O}; \leqslant)$ un ordre total.

— Soit $\mathbb{H}(\mathbb{O}) = \left\{f \in \mathbb{R}[[t^{\mathbb{O}}]] : \operatorname{supp} f \text{ est bien ordonné}\right\}$ l'ensemble des *séries de Hahn sur* $\mathbb{O}$. On définit de même $\mathbb{H}_{<\kappa}(\mathbb{O}) = \mathbb{H}(\mathbb{O}) \cap \mathbb{R}[[t^{\mathbb{O}}]]_{<\kappa}$.
(Pour l'analogue « *anti*-bien ordonné », i.e. bien ordonné par $\leqslant^{\mathrm{op}}$, voir remarque T.3).

— La *valuation* de $f \in \mathbb{H}(\mathbb{O})$ est $v(f) = \min \operatorname{supp} f \in \mathbb{O} \cup \{+\infty\}$.

— Le *coefficient dominant* de $f \neq 0$ est $c(f) = \lambda_{v(f)} \in \mathbb{R}$, en notation évidente.

— On ordonne $\mathbb{H}(\mathbb{O})$ par : $f < g$ si $c(g - f) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Noter que sur $\mathbb{H}(\mathbb{O})_{>0}$, la valuation est *décroissante*, i.e. t se comporte en infiniment petit.

Les éléments de $\mathbb{H}(\mathbb{O})$ sont ainsi des séries formelles $\sum_{\beta<\alpha} \lambda_\beta t^{x_\beta}$, où α est un ordinal et $(x_\beta : \beta < \alpha)$ une α-suite strictement *croissante* de $(\mathbb{O}; \leqslant)$.

Proposition A.

(i) $(\mathbb{H}(\mathbb{O})\,;+,\leqslant)$ et $(\mathbb{H}_\kappa(\mathbb{O})\,;+,\leqslant)$ sont des groupes abéliens divisibles ordonnés.

(ii) On suppose $(\mathbb{O};\leqslant) \models$ DLO. Alors $(\mathbb{H}(\mathbb{O})\,;+,\leqslant)$ est κ-saturé ssi $(\mathbb{H}_\kappa(\mathbb{O})\,;+,\leqslant)$ est κ-saturé ssi $(\mathbb{O};\leqslant)$ est κ-saturé.

Démonstration. (i) est trivial; on traite (ii). Rappelons que la théorie DOAG des groupes abéliens divisibles ordonnés élimine les quantificateurs dans $\{0,+,-,\leqslant\}$. Par ailleurs une formule de base est une (in)équation linéaire. En particulier, un modèle $(\mathbb{A}\,;+,\leqslant) \models$ DOAG est κ-saturé ssi $(\mathbb{A};\leqslant)$ l'est. En outre $(\mathbb{O};\leqslant) \hookrightarrow (\mathbb{H}_{<\kappa}(\mathbb{O})\,;+,\leqslant)$ naturellement, ce qui montre certaines implications.

On suppose dorénavant $(\mathbb{O};\leqslant)$ κ-saturé. Soit $(\Gamma < \Delta)$ une coupure de cardinal $< \kappa$ dans $\mathbb{H}(\mathbb{O})$; on cherche à réaliser le 1-type $\Gamma < x < \Delta$. La construction est itérative, mais l'itération ne sera formulée que tardivement par souci de clarté. On rappelle que sur $\mathbb{H}(\mathbb{O})_{>0}$, la valuation est décroissante.

Étape 1. On peut supposer $\{0\} < \Gamma < \Delta$.

Vérification. Si $\Gamma < \{0\} < \Delta$, la construction termine. Donc on peut supposer $(\exists\gamma)(\gamma \in \Gamma \wedge \gamma \geqslant 0) \vee (\exists\delta)(\delta \in \Delta \wedge \delta \leqslant 0)$; les deux cas s'excluent. Quitte à considérer $(-\Delta < -\Gamma)$, on peut supposer qu'il existe $\gamma \in \Gamma_{\geqslant 0}$.

Si $\Gamma \leqslant \{0\}$, on considère $(v(\Delta) < \varnothing)$ dans $(\mathbb{O};\leqslant)$. Par κ-saturation, il existe $x_0 \in \mathbb{O}$ tel que $\{x_0\} > v(\Delta)$. Alors $\Gamma \leqslant \{0\} < \{t^{x_0}\} < \Delta$ et la construction termine.

Donc on peut supposer $\neg(\Gamma \leqslant \{0\})$, i.e. qu'il existe $\gamma \in \Gamma_{>0}$. On s'est ainsi ramené à $\{0\} < \Gamma_{>0} < \Delta$. ◇

Étape 2. On peut supposer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{O}$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\min v(\Gamma) = \max v(\Delta) = x_0$ et $\sup\{c(\gamma) : \gamma \in \Gamma \text{ de valuation } x_0\} = \inf\{c(\delta) : \delta \in \Delta \text{ de valuation } x_0\}$.

Vérification. Comme $\{0\} < \Gamma < \Delta$, on a $v(\Delta) \leqslant v(\Gamma)$ et $v(\Delta) \cap v(\Gamma)$ est au plus singleton. S'il est vide, on réalise $v(\Delta) < x < v(\Gamma)$ dans $\mathbb{O}$; alors $\Gamma < \{t^x\} < \Delta$ et la construction termine. On peut donc supposer l'existence de x_0.

Soient $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : v(\gamma) = x_0\} \neq \varnothing$ et Δ_0 de même; alors $\sup c(\Gamma_0) \leqslant \inf c(\Delta_0)$. Si l'inégalité est stricte, les parties étant non vides on réalise

$(\sup c(\Gamma_0) < \inf c(\Delta_0))$ dans $(\mathbb{R}; \leqslant)$. Alors $\Gamma \leqslant \Gamma_0 < \{\lambda t^{x_0}\} < \Delta_0 \leqslant \Delta$, et la construction termine. On peut donc supposer l'existence de λ_0. $\diamond$

Étape 3. Itération et conclusion.

Vérification. Un triplet (Γ, Δ, f) est *admissible* si $\Gamma < \Delta$ et que pour tout $g \in \Gamma \cup \Delta$, on a $\operatorname{supp} f$ segment initial de $\operatorname{supp} g$ et $g_{|\operatorname{supp} f} = f$, i.e. g étend f par des termes de valuation strictement supérieure. Ainsi pour les ensembles de départ, $(\Gamma, \Delta, 0)$ est admissible.

Partant ce celui-ci, on construit une suite de triplets admissibles emboîtés (les Γ_α et Δ_α décroissent, les f_α croissent). Pour itérer, on prend x_0 et λ_0 comme dans l'étape 2, et l'on pose :

$$f_{\alpha+1} = f_\alpha + \lambda_0 t^{x_0},$$

puis $\Gamma_{\alpha+1} = \{\gamma \in \Gamma_\alpha : \gamma_{|\operatorname{supp} f_{\alpha+1}} = f_{\alpha+1}\}$ et $\Delta_{\alpha+1}$ de même. Aux limites, on pose $\Gamma_\alpha = \bigcap_\alpha \Gamma_\beta$, Δ_α de même, et $f_\alpha = \lim_\alpha f_\beta = \bigcup f_\beta$ (en tant que graphes de fonctions).

Comme $\operatorname{card}(\Gamma \cup \Delta) < \kappa$, la construction termine en $< \kappa^+$ étapes et f_α convient alors. Si en outre $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{H}_{<\kappa}(\mathbb{O})$, le résultat a $< \kappa$ termes. $\diamond$

Ceci montre la κ-saturation de $(\mathbb{H}(\mathbb{O}); \leqslant)$ et $(\mathbb{H}_{<\kappa}(\mathbb{O}); \leqslant)$. $\square$

Remarque. On note $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}(\mathbb{O}) = \{f \in \mathbb{R}[[t^{\mathbb{O}}]] : \operatorname{supp} f$ est *anti-bien ordonné*$\}$ (i.e. bien ordonné par $\leqslant^{\mathrm{op}}$). Les éléments de $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}(\mathbb{O})$ sont alors des séries formelles $\sum_{\beta<\alpha} \lambda_\beta t^{x_\beta}$ avec des α-suites $(x_\beta) \in \mathbb{O}^\alpha$ strictement *décroissantes* dans $(\mathbb{O}; \leqslant)$.

Cela donne une théorie similaire en tout point, dans laquelle t se comporte en infiniment grand (et cette version sera employée pour les surréels, avec $t = \omega$). En outre, $(\mathbb{H}^{\mathrm{op}}(\mathbb{O})\,; +, \leqslant) \simeq (\mathbb{H}(\mathbb{O}^{\mathrm{op}})\,; +, \leqslant)$.

- **Séries de Hahn sur un groupe abélien ordonné**

Définition C. Soit $(\mathbb{G}\,; +, \leqslant)$ un groupe abélien ordonné.

On munit $\mathbb{H}(\mathbb{G})$ d'une loi supplémentaire en posant :

$$f \cdot g = \sum_{x,y \in \mathbb{G}} \lambda_x \mu_y t^{x+y} = \sum_{z \in \mathbb{G}} \left(\sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{G}^2 : \\ x+y=z}} \lambda_x \mu_y \right) t^z.$$

Proposition B.

(i) C'est bien défini ; $(\mathbb{H}(\mathbb{G})\,;+,\cdot,\leqslant)$ et $(\mathbb{H}_{<\kappa}(\mathbb{G})\,;+,\cdot,\leqslant)$ sont des corps ordonnés.

(ii) On suppose $(\mathbb{G};+,\leqslant) \models$ DOAG. Alors $(\mathbb{H}(\mathbb{G});+,\cdot,\leqslant)$ et $(\mathbb{H}_{<\kappa}(\mathbb{G});+,\cdot,\leqslant)$ sont même modèles de RCF.

(iii) On suppose $(\mathbb{G}\,;+,\leqslant) \models$ DOAG. Alors $(\mathbb{H}(\mathbb{G})\,;+,\cdot,\leqslant)$ est κ-saturé ssi $(\mathbb{H}_{<\kappa}(\mathbb{G})\,;+,\cdot,\leqslant)$ est κ-saturé ssi $(\mathbb{G}\,;+,\leqslant)$ est κ-saturé.

Démonstration.

(i) À z fixé, $\{(x,y) \in \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g : x+y=z\}$ est fini. En effet il est en bijection avec $\operatorname{supp} f \cap (z - \operatorname{supp} g)$, qui est à la fois bien ordonné et anti-bien ordonné par $\leqslant$, donc fini (ex. 2.2). Le produit est donc bien défini, et l'on trouve sans peine une structure d'anneau. L'existence d'inverse est une construction itérative.

(ii) Admis. L'idée est de se ramener au théorème d'Artin-Schreier en posant $\mathbb{F} = \mathbb{H}(\mathbb{G})$ et en montrant que $\mathbb{F}[i]$ est algébriquement clos via une variante du lemme de Hensel.

(iii) Par élimination des quantificateur dans RCF. $\square$

§ T.4. Structure valuée et conséquence

Définition.

— Soient $x, y \in \mathbf{No}_{>0}$. On note $x \ll y$ si pour chaque entier, $nx \leqslant y$.

— Pour $x \in \mathbf{No}_{>0}$, on pose récursivement :

$$v(x) = (\{v(x_-) : x_- \in \Gamma_x \wedge x_- \ll x\} | \{v(x_+) : x_+ \in \Delta_x \wedge x_+ \gg x\})\,;$$

pour $x < 0$ on pose $v(x) = v(-x)$; enfin $v(0) = +\infty$.

— Pour $x \in \mathbf{No}$, on pose récursivement :

$$\omega^x = \left(\{n\omega^{x_-} : (n, x_-) \in \mathbb{N} \times \Gamma_x\} \middle| \{\frac{1}{2^n}\omega^{x_+} : (n, x_+) \in \mathbb{N}_{>0} \times \Delta_x\} \right).$$

Ces définitions ne sont possibles que grâce à la structure arborescente sur **No** ; la seule structure de corps ordonné n'y suffirait pas. (Il existe bien, dans tout corps réel clos, une valuation naturelle et une section de cette valuation ; ici on a une formule.)

Proposition. C'est bien défini, et $\omega\colon (\mathbf{No}\,;+) \to (\mathbf{No}_{>0}\,;\cdot)$ est un morphisme de groupes. En outre $v(\omega^x) = x$.

Corollaire.

1. $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant) \simeq (\mathbb{H}_{<\mathrm{Ord}}(\mathbf{No})\,;+,\cdot,\leqslant)$.
2. $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant)$ est un corps réel clos.

Idée de démonstration. En fait on montre plutôt $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant) \simeq (\mathbb{H}^{\mathrm{op}}_{<\mathrm{Ord}}(\mathbf{No})\,;+,\cdot,\leqslant)$, mais comme $(\mathbf{No}\,;+,\leqslant) \simeq (\mathbf{No}\,;+,\leqslant)^{\mathrm{op}}$, cela revient au même. Tout surréel se représente donc de manière unique comme série formelle

$$\sum_{\beta<\alpha} \lambda_\beta \omega^{x_\beta},$$

où α est un ordinal, $(\lambda_\beta)_{\beta\in\alpha} \in \mathbb{R}^\alpha$, et (x_β) est une suite strictement décroissante de surréels.

Puis **No** étant un corps de Hahn, est réel clos par la proposition B. □

Attention, on n'a pas d'écriture $\sum_{\beta<\alpha} \lambda_\beta \omega^{x_\beta}$ avec (x_β) croissante ; passer de $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}(\mathbf{No})$ à $\mathbb{H}(\mathbf{No}^{\mathrm{op}})$ ne permet pas cela.

Exercices

T.1 (universalité rapide de $(\mathbb{A}_\kappa;\leqslant)$). Soit $\mathbb{O}_\kappa = \{f \in 2^\kappa : (\exists \alpha \in \kappa)(f(\alpha) = 1 \wedge (\forall \beta \in \kappa)(\beta > \alpha \to f(\beta) = 0))\}$ l'ensemble des fonctions totales ayant un dernier 1. On l'ordonne lexicographiquement.

a. Montrer que $(\mathbb{A}_\kappa;\leqslant) \simeq (\mathbb{O}_\kappa;\leqslant)$.

b. Montrer que tout ordre total de cardinal $\leqslant \kappa$ se plonge dans $(\mathbb{O}_\kappa;\leqslant)$. Indication : énumérer, et à x_α associer la α-suite « a-t-on $x_\beta \leqslant x_\alpha$? »

Deux remarques : a. la structure arborescente est moins intuitive sur $(\mathbb{O}_\kappa;\leqslant)$ que sur $(\mathbb{A}_\kappa;\leqslant)$, et b. la κ^+-universalité est moins forte que la κ-saturation (ex. 17.2). Elle ne demande d'ailleurs pas la régularité de κ.

T.2 (η_α de Hausdorff). Cet exercice démontre la puissance de l'outil modèle-théorique. Un η_α *de Hausdorff* est un ordre linéaire dense $\aleph_\alpha$-saturé. Montrer les points suivants :

– si $(\mathbb{O};\leqslant)$ est un ordre quelconque de cardinal $\leqslant \aleph_\alpha$, il se plonge dans chaque η_α ;
– il existe au plus un η_α de cardinal $\aleph_\alpha$;
– il existe un η_α de cardinal $\aleph_\alpha$ ssi $\aleph_\alpha$ est régulier et $\sum_{\beta<\alpha} 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$;
– si $\aleph_\alpha$ est singulier, tout η_α est un $\eta_{\alpha+1}$;
– tout $\eta_{\alpha+1}$ est de cardinal $\geqslant 2^{\aleph_\alpha}$;

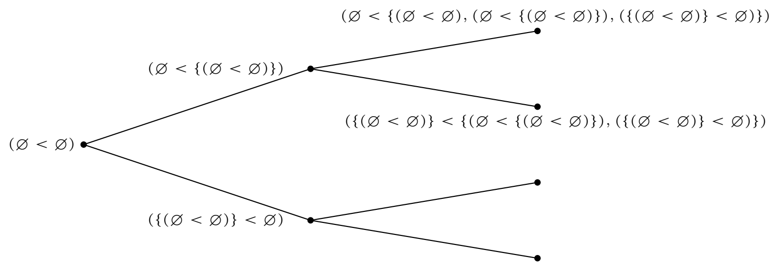
– il existe des $\eta_{\alpha+1}$ de cardinal $2^{\aleph_\alpha}$;
– il existe un $\eta_{\alpha+1}$ de cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ ssi $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

T.3 (une construction alternative de $(\mathbf{No}; \leqslant, \beta)$). Soit $\mathbb{O} = (O, \leqslant)$ un ordre total. Une *coupure de Cuesta Dutari* est une paire $(\Gamma < \Delta)$ avec $O = \Gamma \sqcup \Delta$; l'un ou l'autre peut être vide (les deux, si $\mathbb{O}$ l'est). On note $\mathcal{C}(\mathbb{O})$ leur ensemble, et l'on ordonne $\hat{\mathbb{O}}$ comme suit :

– l'ordre étend celui de $\mathbb{O}$;
– si $x \in O$ et $(\Gamma < \Delta) \in \mathcal{C}(\mathbb{O})$, on pose $x < (\Gamma < \Delta)$ si $x \in \Gamma$ et $(\Gamma < \Delta) < x$ si $x \in \Delta$;
– si $(\Gamma_1 < \Delta_1), (\Gamma_2 < \Delta_2) \in \mathcal{C}(\mathbb{O})$, on pose $(\Gamma_1 < \Delta_1) < (\Gamma_2 < \Delta_2)$ si $\Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2$.

a. Montrer que $(\hat{\mathbb{O}}; \leqslant)$ reste un ordre total, que $(\mathbb{O}; \leqslant)$ s'y plonge naturellement, et que chacun est dense dans l'autre.
On pose $\mathbb{O}_\varnothing = \varnothing$, $\mathbb{O}_{\alpha+1} = \hat{\mathbb{O}}_\alpha$, et aux limites $\mathbb{O}_\alpha = \lim \mathbb{O}_\beta$ (limite inductive usuelle). Soit $(\mathbb{O}; \leqslant)$ la Ord-réunion des $\mathbb{O}_\alpha$.

b. [Opt.] Étiqueter les deux nœuds vides :



Quels sont les deux nœuds en bas à droite ?

c. Pour $x \in \mathbb{O}$, montrer que $\min\{\alpha : \mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \in \mathbb{O}_\alpha\}$ est un ordinal successeur, noté $\beta(x) + 1$. Montrer que $x \in \mathcal{C}(\mathbb{O}_\beta)$. (Note : il y a ainsi décalage avec $\mathbf{No}$; par exemple $\mathbb{O}_\omega$ est dénombrable mais pas $\mathbf{No}_\omega$.)

d. On pose $\Gamma_x = \{y \in \mathbb{O} : \beta(y) < \beta(x) \wedge y < x\}$ et $\Delta_x = \{y \in \mathbb{O} : \beta(y) < \beta(x) \wedge y > x\}$. Montrer que $x \leqslant y$ ssi $(\Gamma_x < \{y\} \wedge \{x\} < \Delta_y)$.

e. Montrer que si $\Gamma < \Delta$ sont deux sous-ensembles de $\mathbb{O}$, il existe un unique x tel que $\Gamma < \{x\} < \Delta$ minimisant β.

f. Déduire qu'il existe un unique isomorphisme $(\mathbf{No}; \leqslant, \beta) \simeq (\mathbb{O}; \leqslant, \beta)$, où pour x surréel on note $\beta(x) = \operatorname{dom} x$.

(*) g. Sans recours à cet isomorphisme, définir l'ordre d'extension $\sqsubseteq$ sur $\mathbb{O}$ et vérifier ses propriétés.

T.4. Un arbre ensembliste est *binaire* si chaque point a au plus deux successeurs immédiats, et chaque chaîne limite a au plus un successeur immédiat. On ne considérera que de tels arbres.

a. Un *arbre binaire ordonné latéralement* est une structure $(\mathbb{A}; \leqslant, \sqsubseteq)$ où :
   – $(\mathbb{A}; \leqslant)$ est un ordre total ;
   – $(\mathbb{A}; \sqsubseteq)$ est un arbre binaire ensembliste ;
   – deux éléments $x < y$ sont $\sqsubseteq$-incomparables ssi $(\exists z)(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y \wedge x < z < y)$.

   Soit $(\mathbb{A}; \leqslant, \sqsubseteq)$ un arbre binaire muni d'un ordre. Montrer l'équivalence :

(i) $(\mathbb{A}; \leqslant, \sqsubseteq)$ est ordonné latéralement ;

(ii) $(\mathbb{A}; \leqslant, \sqsubseteq)$ est isomorphe à un sous-arbre initial (clos $\sqsubseteq$-inférieurement) de $(\mathbf{No}; \leqslant, \sqsubseteq)$;

(iii) chaque classe $\leqslant$-convexe non vide a un $\sqsubseteq$-plus petit élément et si $x \sqsubset y$, alors $\Gamma_x < \{y\} < \Delta_x$.

b. Un arbre ordonné latéralement est :

– *plein* si chaque point a exactement deux successeurs immédiats, et chaque chaîne limite a exactement un successeur immédiat ;

– *complet* si toute coupure ensembliste $\Gamma < x < \Delta$ est réalisée.

Soit $(\mathbb{A}; \leqslant, \sqsubseteq)$ un arbre binaire muni d'un ordre. Montrer l'équivalence :

(i) $(\mathbb{A}; \sqsubseteq)$ est plein ;

(ii) $(\mathbb{A}; \leqslant, \sqsubseteq)$ est complet ;

(iii) si $\alpha \in \mathrm{Ord}$ et $(I_\beta : \beta < \alpha)$ est une famille de classes $\leqslant$-convexes non vides, alors $\bigcap_\alpha I_\beta \neq \varnothing$.

T.5. On note $\mathbf{No}_\alpha$ l'ensemble $\bigsqcup_{\beta \in \alpha} 2^\beta$, avec la structure induite. Montrer que $(\mathbf{No}_\alpha\, ; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{No}\, ; +)$ ssi $(\exists \beta)(\alpha = \omega^\beta)$ ssi pour $\beta, \gamma < \alpha$ on a $\beta + \gamma < \alpha$ (somme ordonnée).

Notes conclusives

> *I am proudest, though, of discovering a whole new world of numbers, which Donald Knuth named "surreal numbers." I wish I'd invented that name. More than a century ago, a great German mathematician, Georg Cantor, discovered the theory of infinite numbers. Two thousand years ago, Archimedes founded the theory of real numbers that we normally use. The surreal numbers include both. Some of them are infinite and are equal to Cantor's numbers. Some of them are equal to the real numbers but there are also mixes of them and infinitesimal numbers. When I discovered them, I went around in a permanent daydream for six weeks thinking about how the explorer Hernando Cortez looked out over the Pacific and saw a world that no Westerner had ever seen before. Nobody had ever seen what I saw before.*
>
> Conway, [Cook, p. 18]

Si l'on tient compte du rôle de Cantor dans l'analyse du continu archimédien, les surréels apparaissent paradoxalement comme le point de jonction de *deux* idées cantoriennes : les réels et les ordinaux. On rappelle pourtant l'hostilité de Cantor envers les infinitésimaux.

> *Die Tatsache der aktual-unendlich großen Zahlen ist also so wenig ein Grund für die Existenz aktual-unendlich kleiner Größen, daß vielmehr gerade mit Hilfe der ersteren die Unmöglichkeit der letzteren bewiesen wird.*
>
> [Can87, S. VI]

[Cook] : Mariana Cook. *Mathematicians: an outer view of the inner world.* Portraits by Mariana Cook, With an introduction by Robert Clifford Gunning and an afterword by Brandon Fradd, Corrected reprint of [MR2542778]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2018, p. 199

[Can87] : Georg Cantor. « Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten I ». In: *Zeitschr. Phil. u. phil. Kritik* 91 (1887), S. 81–125

L'argument de Cantor contre les infinitésimaux est discuté dans [Moo02b].

• **Repères historiques.** Pour éviter les confusions, bien distinguer (**No**; $\leqslant$) de (**No** ; $+, \cdot, \leqslant$) et (**No** ; $+, \cdot, \leqslant, \sqsubseteq$). S'il eut des précurseurs sur les deux premières structure, Conway est l'incontestable découvreur de la troisième.

Ordres saturés. • Leur père est Hausdorff. Les η_α apparaissent dans [Hau07, p. V.3] et sont repris dans [**Hausdorff**, p. VI.8]. Ils ont inspiré de nombreux travaux jusque dans les années 1960 ; [Fel02] est excellent. • L'universalité dans le théorème T.1 est de [Sie49], et la preuve de l'ex. T.1 dans [Men58]. (J'ignore qui a plus tard étudié la saturation des $(\mathbb{A}_\kappa; \leqslant)$.)

Parenthèse : le cas Cuesta Dutari. • Alling attribue les coupures de l'ex. T.3 à Cuesta Dutari [Cue54], dont il existe une traduction amateur [Had21]. • *Les travaux de C. D. et plus généralement ceux de l'école espagnole de structures ordonnées mériteraient un sérieux examen historique.* J'ignore si l'on y trouve construction d'un ordre Ord-saturé. J'ignore également dans quelle mesure C. D. envisagea de la structure algébrique. • L'idée de remplir la coupure par un élément formel était dans l'air du temps : on la retrouve chez un Padmavally (dans une revue où publiait C. D.). Itération de cette méthode pour obtenir un ordre saturé dans [Har64]. • Lien avec dans (**No**; $\leqslant$) [AE86b], [AE86a].

Structure algébrique sur les ordres saturés. Hausdorff avait posé la question de l'existence de structures algébriques compatibles sur les η_α. On distingue preuves d'existence et constructions explicites.

- L'existence abstraite est conséquence de [Jón56], avec même unicité [Jón60]. Jónsson travaille avec des classes abstraites de structures, hors du cadre de la logique élémentaire ; il suppose donc des propriétés type amalgamation, aisément vérifiées par la classes des modèles de DOAG ou RCF.
- Unicité [EGH55], en son temps célébré.

[Moo02b] : Matthew Moore. « A Cantorian argument against infinitesimals ». In : *Synthese* 133.3 (2002), p. 305-330
[Hau07] : Felix Hausdorff. « Untersuchungen über Ordnungstypen ». In : *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl.* 59 (1907), p. 84-159
[**Hausdorff**] : Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig : Veit & Comp., 1914. viii+476
[Fel02] : Ulrich Felgner. *Die Hausdorffsche Theorie der η_α-Mengen und ihre Wirkungsgeschichte*. Berlin : Springer-Verlag, 2002, p. 645-674
[Sie49] : Wacław Sierpiński. « Sur une propriété des ensembles ordonnés ». In : *Fund. Math.* 36 (1949), p. 56-67
[Men58] : Elliott Mendelson. « On a class of universal ordered sets ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958), p. 712-713
[Cue54] : Norberto Cuesta. « Ordinal algebra ». In : *Rev. Acad. Ci. Madrid* 48 (1954), p. 103-145
[Had21] : Labib Haddad. « Sur un article de 1954 signé N. Cuesta, une traduction ». arXiv 2101.05805. 2021
[Har64] : Egbert Harzheim. « Beiträge zur Theorie der Ordnungstypen, insbesondere der η_α-Mengen ». In : *Math. Ann.* 154 (1964), p. 116-134
[AE86b] : Norman Alling et Philip Ehrlich. « An alternative construction of Conway's surreal numbers ». In : *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 8.4 (1986), p. 241-246
[AE86a] : Norman Alling et Philip Ehrlich. « An abstract characterization of a full class of surreal numbers ». In : *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 8.5 (1986), p. 303-308
[Jón60] : Bjarni Jónsson. « Homogeneous universal relational systems ». In : *Math. Scand.* 8 (1960), p. 137-142
[EGH55] : Paul Erdős, Leonard Gillman et Melvin Henriksen. « An isomorphism theorem

Par élimination des quantificateurs dans RCF et avec le concept de saturation, c'est évident.

– Alling [All62] a donné des critères pour qu'un groupe abélien ordonné, pour qu'un corps ordonné, soit porté par un η_α. Ceci faisait le lien avec la théorie de Hahn. S'il eût été porté sur la logique Alling aurait pu découvrir $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant)$ avant Conway ; mais pas $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant,\sqsubseteq)$.

Conway. La structure de corps sur $(\mathbf{No};\sqsubseteq)$, comme le passage à la « taille classe », est de Conway [Conway] mais fut popularisée par Knuth [Knuth]. • La modestie et l'humour ont nui aux surréels longtemps pris pour une simple curiosité. Conway n'insista que tardivement sur leur importance. En outre, l'exposition à la Conway-Knuth par jeux (voire ludique) veut rendre les surréels autonomes des ordinaux ou de tout autre prérequis, au risque d'une certaine perte de repères mathématiques ; j'ai préféré une pédagogie plus conventionnelle. • Sans l'excellente monographie [Gonshor] et la constance d'Ehrlich, le sujet aurait pu être abandonné dans les années 1980. • Ex. T.4 : [Ehr01].

• **Unicité.** Les surréels $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant)$ sont uniques en tant que corps réels clos Ord-saturé. Mais $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant)$ n'est *pas* la seule structure de corps réel clos sur $(\mathbf{No};\leqslant)$. V. cas ensembliste [AK94].

• **Surréels contre hyperréels.** « *As an abstract Field,* **No** *is the unique universally embedding totally ordered Field. We repeat that* **No** *has plenty of additional structure which would not emerge from this "definition".* » [Conway, p. 43] • La structure d'arbre est essentielle à l'étude approfondie de **No** ; même les techniques « à la Hahn » ne permettent pas d'intuiter l'indispensable $\sqsubseteq$. Les surréels sont bien plus qu'un gros modèle de RCF, i.e. qu'un gros corps hyperréel.

Pour produire un modèle très saturé de RCF, on peut :

– travailler dans ZFC $\cup$ {Grothendieck-Tarski} (« univers », v. 25.5) ;
– opter pour BGN avec choix global et exploiter les bonnes propriétés de RCF ;
– opter pour BGN avec choix global et exploiter les bonnes propriétés de DLO pour obtenir $(\mathbf{No};\leqslant)$, puis travailler à la Hahn pour obtenir $(\mathbb{R}_{<\mathrm{Ord}}[t^{\mathbf{No}}]\,;+,\cdot,\leqslant)$;
– passer la méthode « Eudoxe-Schanuel », § B.2) par une itération d'ultrafiltres [BJK12]).

Très clair algébriquement, [All85] envisage certaines de ces possibilités.

for real-closed fields ». In : *Ann. of Math. (2)* 61 (1955), p. 542-554

[All62] : Norman Alling. « On the existence of real-closed fields that are η_α-sets of power $\aleph_\alpha$ ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 103 (1962), p. 341-352

[Conway] : John Conway. *On numbers and games.* London Mathematical Society Monographs, No. 6. London–New York : Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1976, p. ix+238

[Knuth] : Donald Knuth. *Surreal numbers.* Reading, Mass.–London–Amsterdam : Addison-Wesley, 1974, p. iii+119

[Gonshor] : Harry Gonshor. *An introduction to the theory of surreal numbers.* T. 110. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1986, p. vi+192

[Ehr01] : Philip Ehrlich. « Number systems with simplicity hierarchies : a generalization of Conway's theory of surreal numbers ». In : *J. Symbolic Logic* 66.3 (2001), p. 1231-1258

[AK94] : Norman L. Alling et Salma Kuhlmann. « On η_α-groups and fields ». In : *Order* 11.1 (1994), p. 85-92

[BJK12] : Alexandre Borovik, Renling Jin et Mikhail Katz. « An integer construction of infinitesimals : toward a theory of Eudoxus hyperreals ». In : *Notre Dame J. Form. Log.* 53.4 (2012), p. 557-570

[All85] : Norman Alling. « Conway's field of surreal numbers ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 287.1 (1985), p. 365-386

Cependant aucune des méthodes ci-dessus ne produit $\sqsubseteq$. Pour dégager la structure arborescente, il fallait comme Conway faire table rase des considérations précédentes et repartir de rien.

- **Analogues en caractéristique positive.** Conway a construit un modèle de ACF_2 jouant le rôle de **No** parmi ceux de RCF. Il ne s'agit toujours pas de montrer l'existence d'un modèle très saturé, mais de donner sa structure algébrique explicite à partir de l'arbre. L'analogue en toute caractéristique est très partiellement compris [DiM15]. On ignore en revanche s'il y a des applications.

- **Sous-structures initiales de No.** Par Ord-saturation, tout corps réel clos $(\mathbb{K}\,;+,\cdot,\leqslant)$ (et donc tout corps ordonné) de taille ensembliste se plonge dans $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant)$. Les surréels forment donc un corps ordonné de taille classe universel pour ceux de taille ensembliste, tout comme $(\mathbb{R};+,\cdot,\leqslant)$ est universel *parmi les corps ordonnés archimédiens.*

Cependant **No** peut contenir de multiples copies de $\mathbb{K}$. Mais au plus une sera sous-structure *initiale*, i.e. close $\sqsubseteq$-inférieurement.

Théorème ([Ehr01, Theorems 9, 19])**.**
- Si $\mathbb{G} \models$ DOAG, alors $\mathbb{G}$ est isomorphe à un sous-groupe initial de $(\mathbf{No}\,;+,\leqslant)$.
- Si $\mathbb{K} \models$ DOAG, alors $\mathbb{K}$ est isomorphe à un sous-corps initial de $(\mathbf{No}\,;+,\cdot,\leqslant)$.

On peut réciproquement se demander quelles « troncatures » (v. ex. T.5) $\mathbf{No}_\alpha = 2^\alpha$ sont de telles sous-structures.

Théorème ([DE01])**.**
- $(\mathbf{No}_\alpha\,;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{No}\,;+)$ ssi $(\exists\beta)(\alpha=\omega^\beta)$ ssi pour $\beta,\gamma<\alpha$ on a $\beta+\gamma<\alpha$ (somme ordonnée).
- $(\mathbf{No}_\alpha\,;+,\cdot)$ est un sous-anneau de $(\mathbf{No}\,;+,\cdot)$ ssi $(\exists\beta)(\alpha=\omega^{\omega^\beta})$ ssi pour $\beta,\gamma<\alpha$ on a $\beta\cdot\gamma<\alpha$ (produit ordonné).
- $(\mathbf{No}_\alpha;+,\cdot)$ est un sous-corps de $(\mathbf{No};+,\cdot)$ ssi $\alpha=\omega^\alpha$. En outre $\mathbf{No}_\alpha$ est alors clos sous exp et log, et $(\mathbf{No}_\alpha\,;+,\cdot,\exp) \preccurlyeq (\mathbf{No};+,\cdot,\exp)$ (v. *Structure additionnelle* infra).

Enfin [EK21, Theorem 9.1] donne une condition nécessaire et suffisante très technique pour qu'un corps exponentiel ordonné soit sous-structure initiale de **No**.

- **Partie entière et « entiers omnifiques ».** D'abord relire la discussion dans § 19, notes conclusives. Comme tout corps réel clos, **No** possède des parties entières [MR93]. L'une est privilégiée car très explicite.

Théorème (et définition ; v. [Conway, chap. V] ou [Gonshor, chap. 8])**.** Pour a de **No**, sont équivalents :

(i) $a\colon \operatorname{dom} a \to \{0,1\}$ est localement constante, i.e. si $\beta,\beta+1\in\operatorname{dom} a$ alors $a(\beta+1)=a(\beta)$ (« pas d'alternance ») ;

(ii) $a=\sum_\alpha \lambda_\beta\omega^{x_\beta}$ est à valuations $x_\beta\geqslant 0$, et le terme de valuation 0 est un entier relatif usuel (i.e. $a=n+\sum\lambda_\beta\omega^{x_\beta}$ avec des x_β tous >0) ;

(iii) $a=(\{a-1\}|\{a+1\})$.

En particulier, la classe **Oz** des tels a, appelés *entiers omnifiques*, est un sous-anneau de $(\mathbf{No}\,;+,\cdot)$ et même une partie entière. Enfin $\mathbf{No}=\operatorname{Frac}\mathbf{Oz}$.

Démonstration. Admettant l'équivalence, le reste suit de (ii) et (iii) du théorème. Puis si $a=\sum\alpha\lambda_\beta\omega^{x_\beta}$, soit $\Delta=\{\lambda_\beta : x_\beta\neq 0\}\cup\{0\}$. On réalise $(\varnothing<\Delta)$

[DiM15] : Joseph DiMuro. « On $\mathbf{On}_p$ ». In : *J. Algebra* 433 (2015), p. 183-207
[DE01] : Lou van den Dries et Philip Ehrlich. « Fields of surreal numbers and exponentiation ». In : *Fund. Math.* 167.2 (2001), p. 173-188
[EK21] : Philip Ehrlich et Elliot Kaplan. « Surreal ordered exponential fields ». In : *J. Symb. Log.* 86.3 (2021), p. 1066-1115
[MR93] : Marie-Hélène Mourgues et Jean-Pierre Ressayre. « Every real closed field has an integer part ». In : *J. Symbolic Logic* 58.2 (1993), p. 641-647

dans **No**, par y. Alors $a = \frac{\omega^{-y}a}{\omega^{-y}}$, et les deux sont dans **Oz**. □

Le nom peut être trompeur ; par exemple $\frac{1}{\pi}\sqrt{\omega} \in$ **Oz**. Signalons deux sources de confusions.

1. Analogies hâtives avec Ord. • Ord est évidemment muni de l'*arithmétique naturelle* de Hessenberg-Hausdorff (ex. 22.11), car l'arithmétique ordonnée de Cantor n'est pas compatible à la structure de **Oz**. • Notamment ω n'est pas « le plus petit omnifique infini » ; l'expression n'a même pas de sens. • On a bien (Ord ; $+, \cdot$) $\subseteq$ (**Oz** ; $+, \cdot$), mais **Oz** n'est ni le groupe, ni l'anneau de Grothendieck de Ord. En fait les ordinaux sont « plutôt rares » dans **Oz**.
2. Analogies hâtives avec $\mathbb{Z}$. L'analogie entre $\mathbb{R}$ et **No** ne s'étend aucunement à une analogie entre $\mathbb{Z}$ et **Oz**. Comme ($\mathbb{R}$; $+, \cdot, \leqslant$) n'interprète pas ($\mathbb{Z}$; $+, \cdot$), rien ne motive cette erreur. • Déjà, **No** = Frac **Oz**. (On notera d'ailleurs que **No** est en bijection avec **Oz** et Ord, alors que $\mathbb{R}$ ne l'est absolument pas avec $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$. La raison en est que dans $\mathbb{R} \subseteq$ **No**, on tolère certaines suites de domaine ω, alors que tout élément de **No** a un domaine < Ord. On voit donc qu'il y a comparativement plus de réels par rapport à ω, que de surréels par rapport à Ord.) • En particulier, **Oz** n'est *pas* modèle de PA. En effet Frac **Oz** possède $\sqrt{2}$, phénomène interdit par PA. Mais comme toute partie entière de corps réel clos, **Oz** est modèle de IQF.

• **Questions de définissabilité**

Dans **(No ; $+, \cdot, \leqslant$).** Par o-minimalité, ni $\mathbb{R}$, ni $\mathbb{Z}$, ni Ord, ni **Oz** n'est définissable.

Dans **(No ; $+, \cdot, \leqslant, \preceq_h$),** où $x \preceq_h y$ si $\operatorname{dom} x \leqslant \operatorname{dom} y$, on peut récupérer les ordinaux, les dyadiques, les entiers, les réels (je ne suis pas certain pour les omnifiques).

Dans **(No; $+, \cdot, \leqslant, \sqsubseteq$),** je ne sais pas. On doit pouvoir récupérer les omnifiques mais pas plus.

La structure (**Oz**; $+, \cdot$) est néanmoins complexe.

Lemme. (**Oz** ; $+, \cdot$) interprète ($\mathbb{Z}$; $+, \cdot$).

Démonstration. On exploite l'équation $x^2 = 2y^2$. Il y a des solutions dans **Oz** ; par exemple le surréel $\sqrt{\frac{\omega}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^{\frac{1}{2}}$ est omnifique. Plus généralement, si a est dans **Oz**$\setminus\mathbb{Z}$, il existe $0 < x, y \leqslant |a|$ dans **Oz** tel que $x^2 = 2y^2$. Prendre en effet $x = \omega^r$, pour $r > 0$ assez petit, puis $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^{\frac{r}{2}}$.

Par ailleurs (la restriction de l'ordre) $\leqslant$ est définissable dans (**Oz** ; $+, \cdot$). En effet **No** = Frac **Oz**, donc (**Oz** ; $+\cdot, \leqslant$) $\models x \leqslant y$ ssi (**No** ; $+, \cdot$) $\models (\exists z)(y - x = z^2)$ ssi (**Oz** ; $+, \cdot$) $\models (\exists a)(\exists b)(b \neq 0 \wedge a^2 = (y-x)b^2)$. La valeur absolue $|\cdot|$ l'est donc aussi.

On considère alors la formule : $(\forall x)(\forall y)(0 < x \leqslant |n| \wedge 0 < y \leqslant |n| \to x^2 \neq 2y^2)$. Dans **Oz**, elle définit $\mathbb{Z}$. Notamment ($\mathbb{Z}$; $+, \cdot$) est interprétable dans (**Oz** ; $+, \cdot$). □

• **Structure additionnelle**

Il existe une exponentielle.

Théorème.

(i) Il existe une fonction exp: **No** $\to$ **No** étendant exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [Gonshor, chap. 10] (attribué à Kruskal).

(ii) ($\mathbb{R}$; $+, \cdot, \leqslant, \exp$) $\preccurlyeq$ (**No** ; $+, \cdot, \leqslant, \exp$) [DE01].

Attention à ne pas confondre cette exponentielle avec la fonction ω^x de § T.4. En particulier, on n'a pas de rapport entre ω^x et $\exp(x \log \omega)$. (Les deux diffèrent en ε_0.)

Il existe une dérivation aux propriétés attendues.

Théorème ([BM18])**.** Il existe une dérivation ∂ sur (**No** ; $+, \cdot, \exp$) telle que :

– $\partial(xy) = x\partial y + \partial xy$ (définition d'une dérivation) ;

[BM18] : Alessandro Berarducci et Vincenzo Mantova. « Surreal numbers, derivations and transseries ». In : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 20.2 (2018), p. 339-390

– si (x_i) est une famille sommable, alors $\partial \sum x_i = \sum \partial x_i$;

– $\partial \exp x = \partial x \cdot \exp x$;

– $\ker \partial = \mathbb{R}$;

– si $\{x\} > \mathbb{N}$, alors $\partial x > 0$.

Intégration. À ma connaissance, on cherche encore à cerner une bonne théorie de l'intégration sur les surréels.

• **Surréels et transséries.** **No** est un corps de transséries (pour l'une des définitions proposées) [BM18], ce qui signifie qu'ils pourront sans doute répondre à des questions d'« asymptotique modérée » (de même que l'o-minimalité a pu répondre à des questions de topologie modérée) en s'insérant dans les théories type Hardy-Écalle. J'ai lu dans [MM17] une bonne introduction à ce sujet difficile. [Aschenbrenner-van den Dries-van der Hoeven] fut très remarqué.

[MM17] : Vincenzo Mantova et Mickaël Matusinski. « Surreal numbers with derivation, Hardy fields and transseries : a survey ». In : *Ordered algebraic structures and related topics.* T. 697. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, p. 265-290

[Aschenbrenner-van den Dries-van der Hoeven] : Matthias Aschenbrenner, Lou van den Dries et Joris van der Hoeven. *Asymptotic differential algebra and model theory of transseries.* T. 195. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017, p. xxi+849