

LEXIQUE SOMMAIRE

Les italiques renvoient à d'autres entrées du lexique.

Absurde (démonstration par l'). *Déduction* de φ par réfutation de sa négation $\neg\varphi$. • La déduction de $\neg\varphi$ par réfutation de φ n'est pas une démonstration par l'absurde. • Certaines écoles comme l'*intuitionnisme* refusent la démonstration par l'absurde pour non-*constructivité*. • § 9, § G.

Axiomatisation. Collection d'*énoncés* donnée effectivement. V. *indépendant*. • § 8, § E.

Cardinal. Terme de théorie des *ensembles*. La cardinalité, ou *puissance*, désigne la classe d'équipotence d'un ensemble. Certaines *théories* des ensembles procurent des représentants canoniques pour ces classes, alors appelés cardinaux. • L'exponentiation cardinale est encore très mal comprise, et nos minorations de sa complexité conceptuelle sont désespérantes. • § 1, § 24, § 27.

Catégoricité. Propriété, pour une *théorie*, d'admettre un unique *modèle* à isomorphisme près. Il faudrait dire « monomorphie ». • En logique *élémentaire* la propriété reste impossible fors cas triviaux; on travaille donc souvent à cardinalité fixée, parlant de κ -catégoricité. • En logique élémentaire, la κ -catégoricité entraîne la *complétude*; la réciproque est fautive. En sémantique *pleine* du deuxième *ordre*, la réciproque est *indécidable* dans la théorie ensembliste *ZFC*. • Le concept est central en logique pure et important pour les applications al-

gébriques; son intérêt épistémologique n'est pas négligeable. • § 8, § 12, § 15.

Choix. L'une des formes, mais pas la seule, d'argument non *constructif* pour établir une existence. • Les difficultés épistémologiques et les conséquences réputées fâcheuses du raisonnement par choix sont largement surestimées par le public; car les mathématiques sans choix sont autrement plus pathologiques. • § 1, § 23, § S, § T.

Classe. Collection d'*ensembles*. Les *théories* d'ensembles et de classes peuvent être vues comme des extensions des théories d'ensembles. Certaines sont *prédicatives*. • § R.

Classique (logique). Désigne toute *logique* aux pouvoirs expressif et déductif conventionnels. • Par contraste, la logique *intuitionniste* perd la démonstration par l'*absurde*; la logique *modale* incorpore des modalités renforçant l'expressivité. • La sémantique des logiques non classiques peut changer la notion de *structure*. • § 6, § 9, § G, § H, § I.

Cohérence. Propriété, pour une *théorie*, de ne pas admettre de contradiction dans un calcul *déductif* donné. • Cette notion syntaxique a pour pendant sémantique la *satisfaisabilité*, i.e. l'existence d'un *modèle*. L'adéquation des deux notions est appelée *complétude* de la logique ambiante. • Les mathématicques préfèrent le point de vue sémant-

Annexes

tique. • La « logique paracohérente » n'a pas convaincu la communauté. • § 9, § 10.

Compacité. Propriété, pour une *logique*, d'avoir une relation de *satisfaction* finitaire, i.e. vérifiant $\Theta \models \varphi$ ss'il existe $\Theta_0 \subseteq \Theta$ fini tel que $\Theta_0 \models \varphi$. C'est effectivement la compacité d'un espace topologique. • Par exemple la logique *élémentaire* est compacte ; mais pas celle d'*ordre* supérieur en sémantique *pleine*. • § 11, § 12, § F, § G, § H.

Complétude. Terme imprécis car trop polysémique, renvoyant historiquement à une forme de suffisance ou de maximalité.

- Complétude de certaines structures (ex. relations d'ordres), plongées dans une théorie des ensembles : propriété de posséder des éléments répondant à certains critères.
- Complétude d'une *logique* : propriété d'admettre un calcul *déductif* adapté, où *cohérence* et *satisfaisabilité* coïncident.
- Complétude d'une *théorie* : propriété d'avoir pour *conséquence* chaque *énoncé* ou sa négation.

Par exemple, la logique *élémentaire* est complète (pour la sémantique et le calcul déductif usuels), mais l'arithmétique élémentaire des entiers *PA* est une théorie incomplète. Certaines logiques ne sont pas, ou seulement partiellement, complètes. • § 10, § 12, § 20, § A, § F, § G, § H, § Q, § U.

Compréhension. Acte de collecter des objets. Une théorie des *ensembles* naïve, affirmant qu'à toute collection d'objets correspond un objet, risque l'*incohérence*. Ne pas confondre avec *séparation*. • § 21.

Conséquence. Un énoncé est conséquence d'une *théorie* si tout *modèle* de l'une, est modèle de l'autre. • En présence d'un calcul *déductif*, on peut chercher une déduction de l'énoncé à partir des axiomes de la théorie. • Si le calcul déductif est adéquat (ou *complet*), les deux notions de conséquence coïncident ; en mathématiques, la bonne est la première. • § 6, § 9, § 10.

Conservatif. Qui n'augmente pas la notion de *conséquence*. Soient $\Lambda \subseteq \Lambda'$ deux *logiques* et $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ deux *langages*. Soit $(\Theta \subseteq \Theta')$ une paire de $\Lambda(\mathcal{L})$ -, resp. $\Lambda'(\mathcal{L}')$ -*théories*. L'extension $(\Theta \text{ dans } \Lambda) \subseteq (\Theta' \text{ dans } \Lambda')$ est conservative si les $\Lambda(\mathcal{L})$ -énoncés de Θ' coïncident avec Θ . Noter que Θ' peut être donnée dans une logique plus forte. • P. ex. $(ZFC \subseteq \text{BGN})$ est une extension conservative, à logique constante, en étendant le langage. • Pour la *déduction* $\vdash$, l'extension $(\Lambda_{\omega, \omega}(\mathcal{L}) \subseteq \Lambda^2(\mathcal{L}))$ est conservative, à langage constant, en étendant la logique. • § 8, § 12, § R.

Constructivisme. Attitude exigeant du concret, de l'effectif, en mathématiques. Peut s'incarner dans le refus de la démonstration par l'*absurde*, le rejet de manipulations non *finitaires*, ou un rapport modifié aux objets de base. • La logique *intuitionniste* modélise la seule constructivité des preuves, pas celle des objets. • Le constructivisme induit souvent un rapport très hétérodoxe aux objets comme les nombres réels ; mais c'est affaire de mathématiques, non de logique. • § 1, § G.

Continu (substantif). Peut faire référence à trois classes d'entités distinctes.

- Continu arithmétique : désigne le corps ordonné de Dedekind et Cantor $(\mathbb{R} ; +, \cdot, <)$, et par extension tout corps ordonné ayant des propriétés semblables.
- Continu ensembliste : désigne l'ensemble des branches de l'arbre binaire infini, ou l'ensemble des ensembles d'entiers. Ils sont équipotents dans la plupart des théories des *ensembles*.
- Continu géométrique : désigne l'idée intuitive de droite.

Le continu arithmétique de Dedekind-Cantor se montre équipotent au continu ensembliste dans toute théorie des ensembles assez forte. Mais sa pertinence pour modéliser le continu géométrique est une thèse épistémologique (d'ailleurs très plausible), et non un énoncé scientifique. • L'hypothèse du continu HC est la conjecture, due à Cantor, de l'absence de *cardinal* intermédiaire entre

celui des entiers et celui du continu ensembliste. Elle est ouverte car *indécidable* dans *ZFC*; les indications actuelles iraient vers sa fausseté. • § 1, § 27, § A, § S, § U.

Crise des fondements. Ou « âge des antinomies ». Vers 1900, l'emploi de théories naïves de la vérité vit publier des paradoxes (certains connus de toute antiquité). Il faut relativiser – le rôle des idées de Cantor dans l'émergence de ces paradoxes, – le rôle de ces paradoxes dans l'axiomatisation de l'appartenance ensembliste, – le rôle de cette « crise » dans l'essor de la logique mathématique, – l'intérêt conceptuel intrinsèque de ces paradoxes. • On notera l'indifférence de Hausdorff à cette vogue. • Si les philosophes insistent pour centrer « la crise des fondements » sur l'axe Frege-Russell, alors elle ne ressortit guère à l'histoire des mathématiques. • En allemand, *Grundlagenkrise*; ne pas confondre avec *Grundlagenstreit*.

Déductif (calcul). Tout ensemble de *règles* de manipulations de *séquents*. Les plus connus sont la déduction naturelle et le calcul des séquents. Une déduction (aussi : dérivation) est alors un arbre de séquents. • § 9, § J.

Définissable (partie). Désigne une partie d'une *structure* décrite par une formule logique, dans une *logique* et pour un *langage* donnés. P. ex. $\mathbb{N}$ est élémentairement définissable dans $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ mais pas dans $(\mathbb{R}; +, \cdot)$. • En permettant les quotients on passe aux *interprétables*. • La théorie des modèles est l'étude de la combinatoire/géométrie des parties définissables. • § 13, § 26.

Démonstration (théorie de la). L'un des versants de la logique informatique, étudiant la structure des calculs *déductifs*. Absente de cet ouvrage, elle en mériterait un autre, écrit par quelqu'un de compétent. • § 9, § J.

Énoncé. Les énoncés sont les objet syntaxiques déterminés par une *logique* et un *langage*, et susceptibles d'être ou non *satisfait*s dans une *structure* donnée. On dit

alors que la structure est *modèle* de l'énoncé. • Changer la logique ou le langage affecte la collection des énoncés. • § 6, § 7.

Élémentaire. Relatif à la *logique* $\Lambda_{\omega, \omega}$, laquelle ne quantifie que sur les objets et non sur leurs relations, aussi dite du premier *ordre*. • § 6, § 7.

Ensemble. Point d'une $\in$ -*structure*. • Le but de toute *théorie* des ensembles est de décrire la combinatoire de $\in$, pas de spéculer sur l'ontologie d'objets idéaux nommés « ensembles ». • § 21.

Fini. Désigne un objet; ne pas confondre avec *finitaire* ou *finitiste*. • Nos diverses formalisations du caractère fini d'un ensemble cessent d'être équivalentes en l'absence de *choix*. • § 22.

Finitaire. Désigne un mode de raisonnement; ne pas confondre avec *fini* ou *finitiste*. • L'adjectif n'a pas de définition formelle mais est sujet à débat. • § 20.

Finitiste. Désigne une position épistémologique; ne pas confondre avec *fini* ou *finitaire*. • Le finitisme refuse l'infini actuel : il n'y a pas d'objet $\mathbb{N}$. • L'ultrafinitisme refuse même l'infini potentiel : il n'y a pas d'entiers arbitrairement grands. • Le refus de l'infini indénombrable n'a pas de nom classique; « dénombrabilisme » ou « skolemisme » conviendrait. • § 20.

Grundlagenstreit. Controverse Brouwer-Hilbert, menant à l'éviction du premier par le second. Les thèses de Brouwer formaient l'*intuitionnisme*. Ne pas confondre avec *crise des fondements*. • § G.

Hyperréel. V. *réel*.

Imprédictif. V. *prédictif*.

Indécidable. A deux sens distincts; terme déconseillé.

– Un *énoncé* est logiquement indécidable dans une *théorie* Θ s'il en est *indé-*

Annexes

pendant. L'inexistence d'énoncés indécidables dans Θ est donc sa *complétude*.

- Une théorie est algorithmiquement indécidable s'il n'existe pas de procédure de décision capable de déterminer si un énoncé en est conséquence ou non.

Pour une théorie effective (i.e. dont on peut lister les énoncés par une *axiomatisation*), la décidabilité logique entraîne la décidabilité algorithmique. La réciproque est fausse. Une théorie non effective est algorithmiquement indécidable. • § 20.

Indépendant. A deux sens liés. • L'indépendance d'un énoncé φ par rapport à une théorie Θ , aussi appelée son indécidabilité, est la propriété que Θ n'a ni φ ni sa négation pour *conséquence*. Une théorie a des énoncés indépendants si et seulement si elle n'est pas *complète*. Par exemple la *cohérence* de l'arithmétique de Peano PA , la convergence des suites de Goodstein, sont indépendantes de l'arithmétique de Peano; la cohérence de ZFC , l'hypothèse du *continu*, sont indépendantes de ZFC . • L'indépendance d'une *axiomatisation satisfaisable* A est sa minimalité pour l'inclusion. L'indépendance de A signifie ainsi : pour tout $\alpha \in A$, l'énoncé α est indépendant de la théorie engendrée par $A \setminus \{\alpha\}$. • § 20, § 27, § E.

Interprétable (structure). Désigne toute *structure* émulable, à isomorphisme près, comme quotient de parties *définissables* d'une autre structure donnée. • § 13.

Intermédiaire (logique). *Logique* entre l'intuitionniste et la *classique*. On dit aussi superintuitionniste. Thème marginal. • § G.

Intuitionnisme. Ésotérisme hollandais; ne pas confondre avec la logique *intuitionniste*.

Intuitionniste (logique). Raffinement de la logique *classique* où les structures viennent non pas seules mais en faisceaux. Elle modélise une pratique des mathématiques sans démonstration par l'*absurde*, i.e. dans un calcul *déductif* plus faible. La

logique intuitionniste est notamment la logique du *constructivisme*. • § G, § I.

Langage. Ensemble de symboles. Les *logiques* s'en emparent pour former leurs *énoncés*. Un langage est donc un système de générateurs pour l'étude d'une combinatoire *définissable*. • § 6.

Logicisme. Avatar du réductionnisme selon quoi les mathématiques émanent du formalisme logique. Ses tenants ne furent pas de signalés géomètres. • § 12.

Logique. Système Λ associant à tout langage $\mathcal{L}$ la classe des $\Lambda(\mathcal{L})$ -structures, celle des $\Lambda(\mathcal{L})$ -énoncés, et un couplage de *satisfaction* souvent noté $\models$. • La plus importante est la logique *élémentaire* $\Lambda_{\omega, \omega}$; un théorème de Lindström en donne la raison. • § 6, § 7, § O.

Modale (logique). *Logique* incorporant la notion de nécessité, en cela extra-*classique*. • § H, § I.

Modèle. Structure *satisfaisant* à une *théorie* donnée (dans une *logique* donnée). • § 8.

Ordinal. Terme de théorie des ensembles. Type de bon ordre, à isomorphisme près. Les ordinaux sont les échelles de comptage en mathématiques. • Certaines théories des ensembles procurent des représentants canoniques pour les ordinaux. Par contraste, il serait utile d'appeler « ordinalités » les types d'isomorphisme. • § 3, § 22.

Ordre logique. La logique naïve oppose les objets à leurs propriétés, plus généralement aux relations, i.e. ensembles (de uplets) d'objets. Une quantification sur les seuls objets est appelée du premier ordre (ou *élémentaire*); une quantification sur leurs parties, dite du deuxième ordre (il faudrait dire « méréologique »); sur les parties de parties, du troisième ordre; etc. • Ne pas confondre l'ordre logique, distinguant points et collections de points, avec la nature intuitive des objets visés. Par exemple, PA^2 décrit les entiers mais est du deuxième ordre; ZFC dé-

crit les *ensembles* mais est du premier ordre, i.e. élémentaire. • La quantification élémentaire est un acte conceptuel bien compris. Une quantification sur les parties demande : – soit de prescrire au cas par cas quelles parties sont admissibles ; – soit d'affirmer que tout sous-ensemble est admissible. La première option ramène à la logique élémentaire. La seconde option, appelée sémantique *pleine*, présuppose une ontologie ensembliste maîtrisée. • Indépendamment des difficultés épistémologiques liées à la quantification ensembliste, la « logique d'ordre supérieur » n'est, en sémantique pleine, ni *compacte* ni *complète*, i.e. ne possède pas de *déduction* effective. • § 12, § 20, § 27.

PA. Pour « Peano Arithmetic ». *Théorie élémentaire standard* pour les entiers naturels. En raison même de son étonnante expressivité, elle est très *incomplète* ; p. ex. la *cohérence* de PA, la convergence des suites de Goodstein, sont *indécidables* dans PA. • Extensions au deuxième ordre logique : ACA_0 (*prédicative*), Z^2 (*imprédicative*). PA^2 est la lecture de Z^2 en sémantique *pleine*. • § 12, § 19, § 20.

Partie. Mot employé dans son sens intuitif. • Une partie *définissable* possède une définition par une formule logique. • Un sous-ensemble d'un *ensemble* en est une partie qui est aussi un objet formel. Dans les théories des ensembles *standard*, les parties définissables des ensembles sont des sous-ensembles. • § 21.

Pleine (sémantique). Soit $\mathcal{L}$ un langage à deux espèces d'objets, p et c , pour des points et leurs collections. Une $\mathcal{L}$ -structure $\mathbb{A}$ est alors donnée par les points formant $\mathbb{A}$, et des parties de $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^2$, etc. La sémantique pleine sur $\mathbb{A}$ consiste à faire varier les c dans tous les sous-ensembles des $\mathbb{A}^n$. Mais ceci présuppose d'avoir fixé un cadre ensembliste et n'a pas de sens intrinsèque. V. *ordre logique*. • § 12.

Prédictat. Synonyme désuet de relation n -aire. Le « calcul des prédicats » désignait la logique *élémentaire*. • § 6.

Prédictatif. Terme de philosophie. Soit Θ une *théorie* « du deuxième ordre logique », i.e. à deux espèces d'objets, p et c , pour des points et leurs collections. On suppose que Θ a des *axiomes* garantissant l'existence de collections données par certaines définitions, de la forme $c_\varphi = \{p : \varphi(p)\}$. • Si les conditions φ ne quantifient que sur les points (sans référence aux collections), Θ est *prédicative* ; si l'on peut quantifier sur les collections dans les définitions φ , elle est *imprédicative*. • Dans la vision *prédicative*, le langage met une stratification naturelle sur les objets : les collections ne peuvent être définies que par compréhension explicite de points. • À l'inverse la vision *imprédicative* permet des définitions « implicites » de collections en mentionnant les collections. Cette vision ne tient pas le langage pour primant sur la réalité : elle constate un état de fait dans l'algèbre des collections. • Ex. : la part *prédicative* de KM est BGN. • Le *constructivisme* a tendance à rejeter l'imprédicativité. • § 12, § R.

Puissance. Terme imprécis de théorie des ensembles. Peut désigner :

- la cardinalité intuitive d'un ensemble (« la puissance du continu ») ;
- l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble (« fonction puissance »).

On évitera le terme. • § 1, § 21.

Réel. Désigne le corps ordonné de Cantor-Dedekind, ou n'importe quel élément de celui-ci. L'ordre sous-jacent a la plus haute forme de *complétude*, et son *cardinal* est *continu*. Le corps possède une axiomatisation *élémentaire* également *complète* notée RCF, mais celle-ci n'est jamais κ -catégorique. • « Hyperréel » est un synonyme, déconseillé, de « réel non *standard* ». • « Surréel » désigne le corps de Conway, ou n'importe quel élément de celui-ci. Ce corps de taille *classe* jouit d'une variante de la *complétude*, et est muni de relations additionnelles. • § 11, § A, § L, § U.

Règle de déduction. Opération de base d'un calcul *déductif*, p. ex. de $\varphi \rightarrow \chi$ et φ

Annexes

déduire χ , ou de $\neg\neg\varphi$ déduire φ (déduction par l'absurde). • L'approche par règles est préférable à son ancêtre par « axiomes pour la déduction », qui – ne clarifiait pas la différence conceptuelle et – ne produisait rien de lisible. • § 9.

Relativisme. Doctrine, avérée, de ce qu'une *théorie élémentaire* n'a pas (fors cas triviaux) de *modèle* unique. V. *catégoricité*, v. *standard*. • § 10, § 15.

Satisfaction. Relation fondamentale couplant *structures* et *énoncés* pour leur associer une « valeur de vérité ». Les valeurs possibles peuvent dépasser $\{0, 1\}$. • La formalisation de la satisfaction relative à une structure ne s'internalise pas (fors cas triviaux) dans la structure elle-même, mais requiert en général une structure-cadre, « dans le méta ». • § 6, § 20, § 26, § Q.

Satisfaisable. Se dit d'une *théorie* qui possède un *modèle*. Dans une logique *complète*, la satisfaisabilité équivaut à la *cohérence*. • § 8, § 10.

Séparation. Acte de sélectionner, dans une collection d'objets, ceux vérifiant telle ou telle propriété. C'est une modération de la *compréhension*. • § 12, § 21.

Séquent. Objet de base en théorie de la *démonstration*. N'importe quelle écriture formelle $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont des suites de formules, avec plus ou moins de contraintes ou d'identifications. • « Le » calcul des séquents est un calcul déductif spécifique, mais pas le seul. • § 9, § J.

Standard. Terme informel ayant deux acceptions distinctes :

- *modèle standard* : modèle attendu. « Non standard » désigne un modèle inattendu,

ou un élément d'un tel modèle; 40

- *théorie standard* : théorie commune. P. ex. la théorie non standard de Nelson étend *ZFC*. 5

L'existence de modèles non standard est inévitable en logique *élémentaire* (v. *catégoricité* et *relativisme*). • Les « techniques non standard » exploitent les résonances entre le modèle attendu et sa parentèle logique, par des principes dits « de transfert ». • Ne pas confondre entiers non standard et *ordinaux*. • § 11, § 15, § 20, § K. 45 50

Structure. Collection de points munie d'une famille de relations prescrite à l'avance. Généralise naturellement la notion de structure algébrique. • § 6. 55

Surréal. V. *réel*.

Système formel. Collusion d'un calcul *déductif* et d'une *théorie*. On déconseille cette approche, même en théorie de la *démonstration*; il est toujours préférable de distinguer *règles* et *axiomes*. • § 9. 20 60

Théorie. Collection d'*énoncés* d'une logique censée décrire une *structure*, ou une classe de structures. Une *axiomatisation* en est une partie génératrice donnée effectivement. En logique *élémentaire* il existe toujours des *modèles* inattendus, dits non *standard*. V. *relativisme*. • § 8, § 11. 65

ZFC. Pour « Zermelo-Fraenkel avec choix ». *Théorie élémentaire standard* pour les *ensembles*. Très *incomplète*; p. ex. l'hypothèse du *continu* y est *indécidable*. • Renforcements au deuxième *ordre logique* pour manier des *classes* : BGN (*prédicative*), KM (*imprédicative*). Ici la sémantique *pleine* serait circulaire : elle présupposerait la notion d'ensemble pour l'axiomatiser. • § 21, § Q, § R. 70 75