

§ SÉ1. Ordinaux et espaces clairsemés

Ce sujet d'étude présente la dérivation de Cantor-Bendixson et plusieurs applications. On propose d'abord de classer les ordinaux à isomorphisme topologique près, puis les espaces topologiques dénombrables localement compacts. On fait également montrer un théorème sur les ordres, et un autre sur les espaces profinis à anneau dénombrable de ferveurs. La dernière partie relie ces thèmes aux anneaux de Boole.

5

Prérequis : topologie générale, dont compacité locale et compactifié d'Alexandroff ; §§ 1–5 ; topologie d'ordre (ex. 2.8), forme normale de Cantor (ex. 3.9).

Les ordinaux sont ordonnés par $<$. On ajoute un symbole ∞ les majorant tous (notamment, $\omega < \omega_1 < \infty$). En outre :

10

- tout ordinal est soit nul, soit successeur (i.e. avec plus grand élément), soit limite ;
- toute famille non vide d'ordinaux possède un plus petit élément ; on pose $\min \emptyset = \infty$;
- tout *ensemble* d'ordinaux possède une borne supérieure.

15

1. Dérivation de Cantor-Bendixson

Cette partie est à la base du sujet d'étude.

Soit $(E ; \mathcal{T})$ un espace topologique. Un point x est *isolé dans* E si $\{x\}$ est un ouvert de E . Le *dérivé* est le fermé obtenu en enlevant les points isolés de E :

20

$$E' = E \setminus \{\text{points isolés de } E\}.$$

On définit par récurrence ordinale les sous-espaces $E^{(\emptyset)} = E$; $E^{(\alpha+1)} = (E^{(\alpha)})'$; et pour α un ordinal limite, $E^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} E^{(\beta)}$.

Théorème A (Cantor-Bendixson). Tout espace topologique E s'écrit de manière unique comme réunion disjointe $E = O \sqcup F$, où $O \subseteq E$ est un ouvert de E tel qu'il existe un ordinal α vérifiant $O^{(\alpha)} = \emptyset$, et $F \subseteq E$ un fermé de E tel que $F' = F$.

25

1.1. Décomposition de Cantor-Bendixson

- (a) Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $E^{(\alpha+1)} = E^{(\alpha)}$. [Sinon choisir $x_\alpha \in E^{(\alpha)} \setminus E^{(\alpha+1)}$.]
- (b) En déduire le théorème A.
- (*) (c) Montrer que si E est dénombrablement topologiquement engendré, alors $\text{card } O \leq \aleph_0$. (Question non utilisée dans la suite du sujet.)

30

1.2. Rang de Cantor-Bendixson. On définit deux rangs ordinaux comme suit.

- Le *rang d'isolation* (relatif) d'un point $x \in E$ est $\text{rg}_E(x) = \sup\{\alpha : x \in E^{(\alpha)}\}$ (peut être ∞).

35

- Le rang de discrétisation de l'espace E est $\text{rg } E = \sup\{\text{rg}_E(x) : x \in E\}$ (idem).
- (a) Montrer que si $\text{rg}_E(x) < \infty$, alors cet ordinal est un maximum (cela peut être faux pour $\text{rg } E$).
- (b) Montrer les inégalités $\text{rg } E + 1 \geq \min\{\alpha : E^{(\alpha)} = \emptyset\} \geq \text{rg } E$. 5
- (c) Montrer que si $U \subseteq E$ est ouvert et $x \in U$, alors $\text{rg}_E(x) = \text{rg}_U(x)$. En déduire $\text{rg}_E x = \min\{\text{rg } U : U \text{ ouvert de } E \text{ contenant } x\}$.

2. Ordinaux à isomorphisme topologique près

Il faut avoir traité la première partie du sujet.

Pour α ordinal, soit E_α l'espace topologique associé à l'ordre $(\alpha ; <)$, i.e. dont 10
les points sont les ordinaux $\beta < \alpha$ et les ouverts sont engendrés par les intervalles $\alpha_{>x} = \{y \in E_\alpha : y > x\}$ et $\alpha_{<x} = \{y \in E_\alpha : y < x\}$. On rappelle (ex. 2.8) que si $X \subseteq E_\alpha$, alors :

- la topologie de sous-espace sur X contient celle de l'ordre $(X ; \leq)$,
- on a égalité dès que X est convexe dans l'ordre, ou compact dans la topologie 15
de sous-espace.

On fait montrer la classification suivante.

Théorème B. Pour α, β deux ordinaux, on a $E_\alpha \simeq E_\beta$ [Top] ssi α ont même degré, coefficient dominant, et valuation (définis en 2.2).

2.1. **Ordinaux dans la topologie de l'ordre.** Montrer les points suivants : 20

- (a) E_α est séparé ;
- (b) E_α est compact ssi α est nul ou successeur [réciproque : partir d'un recouvrement ouvert de $\alpha = \beta + 1$ et considérer $\{\gamma \leq \beta : [\gamma, \beta] \text{ est inclus dans un sous-recouvrement fini}\}]$;
- (c) E_α est localement compact, i.e. E_α est séparé et tout point possède un 25
voisinage compact ;
- (d) E_α peut être compact sans être séquentiellement compact [songer à ω_1] ;
- (e) si $X \subseteq E_\alpha$ est fermé, alors la topologie de sous-espace sur X coïncide avec celle de l'ordre $(X ; <)$.

2.2. **Dérivation dans E_α .** On suppose $\alpha > 0$, écrit sous forme normale de Cantor 30
de base ω :

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot k_0 + \dots + \omega^{\alpha_n} \cdot k_n,$$

avec $\alpha_0 > \dots > \alpha_n$ et les $k_i \in \omega \setminus \{0\}$, i.e. des entiers non nuls. On pose $d(\alpha) = \alpha_0$, $c(\alpha) = k_0$, et $v(\alpha) = \alpha_n$, appelés respectivement *degré*, *coefficient dominant*, et *valuation* de α . 35

- (a) Montrer que pour tout ordinal γ , on a $E_\alpha^{(\gamma)} = \{\beta \in E_\alpha : v(\beta) \geq \gamma\}$.

(b) En déduire $E_{\omega^\alpha \cdot \beta}^{(\alpha)} \simeq E_\beta$ [Top], et si $0 < \gamma < \omega^\alpha$, alors $E_{\omega^\alpha \cdot \beta + \gamma}^{(\alpha)} \simeq E_{\beta+1}$ [Top].

(c) Conclure que dans les termes et notations de la question 1.2 :

- le rang de discrétisation de E_α est $\text{rg } E_\alpha = d(\alpha)$;
- le plus petit ordinal β tel que $E_\alpha^{(\beta)}$ soit compact est $v(\alpha)$;
- le nombre de points de rang d'isolation $\text{rg } E_\alpha$ est $c(\alpha)$ ou $c(\alpha) - 1$.

[Traiter trois cas : ω^{α_0} , $\omega^{\alpha_0} \cdot k_0$, cas général.]

2.3. **Séries d'ordinaux.** Soient γ_n des ordinaux, pour $n \in \omega$. On pose $\sigma_n = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$, puis $\sum_{\omega} \gamma_n = \sup\{\sigma_n : n \in \omega\} < \infty$.

Montrer que *si aucun γ_n n'est limite*, alors $E_{\sum_{\omega} \gamma_n} \simeq \prod_{\mathbb{N}} E_{\gamma_n}$ [Top]. [Si des O_i partitionnent un espace $(E ; \mathcal{T})$, alors dans la topologie de sous-espace $E \simeq \prod_I O_i$ [Top].]

2.4. **Application aux isomorphismes topologiques**

(a) Soit α un ordinal tel que $d(\alpha) > v(\alpha)$. Montrer $E_\alpha \simeq E_{\omega^{d(\alpha)} \cdot c(\alpha) + \omega^{v(\alpha)}}$ [Top]. [Commencer par le cas $v(\alpha) = 0$, en s'inspirant des séries d'ordinaux.]

(b) En déduire le théorème B.

2.5. **Le paradoxe ω^ω .** Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

Soit $\alpha = \omega^\omega$. Alors :

$$\alpha' = \left\{ \omega^{a_0} \cdot k_0 + \dots + \omega^{a_n} \cdot k_n : \begin{array}{l} \omega > a_0 > \dots > a_n > 0, \\ k_0, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\} \end{array} \right\},$$

donc $(\alpha' ; <)$ est isomorphe à l'ordinal ω^ω . Dans la topologie de l'ordre, on a donc $\alpha' \simeq \omega^\omega$, i.e. $\alpha \simeq \alpha'$ en tant qu'espaces topologiques. Donc α est sans point isolé ; étant localement compact il est de cardinal au moins continu.

3. Espaces dénombrables localement compacts

Cette partie requiert la première et les questions 2.1 et 2.3.

Le but est un résultat d'identification.

Théorème C. Soit E un espace topologique dénombrable localement compact. Alors il existe un ordinal (dénombrable) α tel que $E \simeq E_\alpha$ [Top].

Par brièveté on parle d'*espaces dlc* et d'*espaces ordinaux*. Pour montrer que tout espace dlc est ordinal, on introduit une notion topologique intermédiaire.

3.1. **Espaces clairsemés.** Un espace topologique E est *clairsemé* s'il existe un ordinal α tel que $E^{(\alpha)} = \emptyset$.

- (a) Montrer l'équivalence entre : (i) E est clairsémi ; (ii) tout $x \in E$ possède un rang $< \infty$; (iii) toute partie non vide contient un point isolé (pour la topologie de sous-espace) ; (iv) tout *fermé* non vide contient un point isolé. En déduire que tout espace ordinal même indénombrable est clairsémi.
- (b) Montrer que si E est clairsémi et séparé, alors il est totalement discontinu (i.e. ses composantes connexes sont des singletons). Et sans séparation ?
- (c) (Prérequis : ex. 4.7. Question strictement topologique ; peut être admise.) Montrer que si E est localement compact et totalement discontinu, alors tout point possède un voisinage ouvert compact.
- (d) Montrer que si E est localement compact et non clairsémi, alors $\text{card } E \geq [2]^{\aleph_0}$. [Injecter l'espace de Cantor dans E .]
- (e) En déduire que si E est un espace dlc, alors il est réunion au plus dénombrable d'ouverts compacts disjoints.

3.2. **Classification des espaces dénombrables localement compacts.** Le théorème C se montre par récurrence sur $\text{rg } E$. On fixe donc un espace dlc E , supposant le résultat connu pour tous les espaces de rang moindre.

- (a) Montrer que si E est compact, alors il possède un nombre fini > 0 de points de rang maximal. Montrer qu'avec la seule compacité *locale*, ce nombre peut être 0, fini > 0 , ou infini.
- (b) On suppose E sans point de rang maximal. Montrer que E est ordinal. [Paver par une famille dénombrable d'ouverts compacts (3.1.e), et procéder par récurrence grâce à une série d'ordinaux (2.3).]
- (c) On suppose E compact et ayant un unique point x de rang maximal. Montrer que E est ordinal. [Former $\check{E} = E \setminus \{x\}$ et comparer son compactifié d'Alexandroff avec E .]
- (d) Démontrer le théorème C.

4. Condensations d'ordres, espaces topologiques ordonnés

Cette partie requiert la première et l'énoncé du théorème C.

On fait montrer deux théorèmes supplémentaires, le second reposant sur le premier. Pour $\mathbb{O}$ un ordre total, soit $\hat{\mathbb{O}}$ l'ensemble, totalement ordonné par inclusion, de ses parties closes inférieurement, i.e. telles que $(x < y \wedge y \in S) \rightarrow (x \in S)$. (Également appelées « coupures » quand on les voit comme partitions $\mathbb{O} = S \sqcup (\mathbb{O} \setminus S)$.)

Théorème D. Soit $\mathbb{O} = (O ; \leq)$ un ordre total. Si $\text{card } \hat{\mathbb{O}} > \text{card } O$, alors $(\mathbb{Q} ; \leq) \hookrightarrow \mathbb{O} [\text{Ord}]$.

Théorème E. Soit $(E ; \mathcal{T})$ un espace profini tel que $\text{Ferv}(\mathcal{T})$ soit dénombrable. Alors :

— ou bien E se surjecte continûment sur l'espace de Cantor,

— ou bien il existe un ordinal (dénombrable, successeur) α tel que $E \simeq E_\alpha$ [Top].

- 4.1. **Ordres quotients dérivés, et application au cas rationnel.** Partant d'un espace topologique E , au lieu de voir son dérivé comme sous-ensemble muni de la topologie de sous-espace, on peut y penser comme à une injection $\iota: D(E) = E' \hookrightarrow E$ [Top]. L'intersection ensembliste prend en charge les « compositions infinies ». On va renverser cette interprétation : au lieu d'injections naturelles on aura des surjections naturelles ; au lieu d'inclusions, des quotients.

Soit $\mathbb{O} = (O ; \leq)$ un ordre total.

- (a) Un *saut* d'un ordre est une paire $x < y$ sans élément intermédiaire. Montrer que si $\mathbb{O} = (O ; \leq)$ est un ordre total sans saut ayant au moins deux éléments, alors $(\mathbb{Q} ; \leq) \hookrightarrow \mathbb{O}$ [Ord].
- (b) Sur O , soit E_0 la plus petite relation d'équivalence contenant la relation de saut (prédécesseur immédiat–successeur immédiat).
Vérifier que $x E_0 y$ ssi $]x, y[$ est fini ; vérifier que les classes d'équivalence sont convexes. En déduire une structure d'ordre compatible sur le quotient, i.e. $\mathbb{O}/E_0 = (O/E_0 ; \preceq)$ telle que $\pi: \mathbb{O} \twoheadrightarrow \mathbb{O}/E_0$ [Ord].
- (c) Sur O , on définit les relations d'équivalence convexes suivantes :
 - $x R_\emptyset y$, par : $x = y$;
 - $x R_{\alpha+1} y$, par : $\pi_\alpha(x) E \pi_\alpha(y)$ dans $\mathbb{O}/R_\alpha$, où $\pi_\alpha: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}/R_\alpha$ et $E = E_{\mathbb{O}/R_\alpha}$ est comme à la question 4.1.b ;
 - pour α limite, $x R_\alpha y$, par : $(\exists \beta)(\beta < \alpha \wedge x R_\beta y)$.

Montrer qu'il existe un ordinal α vérifiant $\text{card } \alpha \leq \text{card } \mathbb{O}$ et $R_{\alpha+1} = R_\alpha$, et qu'alors $\Delta^\alpha(\mathbb{O}) = \mathbb{O}/R_\alpha$ est muni d'un ordre sans sauts (éventuellement singleton).

- (d) Soient $s < t$ des éléments de $\mathbb{O}$ non E_0 -équivalents. Montrer qu'il y a un nombre fini de parties S closes inférieurement telles que $s \in S$ et $t \notin S$. En déduire que l'ensemble $\hat{\mathbb{O}}_1$ des parties de $\mathbb{O}$ closes inférieurement et sous E_0 vérifie $\text{card}(\hat{\mathbb{O}} \setminus \hat{\mathbb{O}}_1) \leq \text{card } \mathbb{O}$.
- (e) Pour $\beta \leq \alpha$, soit $\hat{\mathbb{O}}_\beta$ l'ensemble des parties de $\mathbb{O}$ closes inférieurement et sous R_β . Montrer $\text{card}(\hat{\mathbb{O}} \setminus \hat{\mathbb{O}}_\beta) \leq \text{card } \mathbb{O}$.
- (f) En déduire le théorème D.

- 4.2. **Espaces topologiques ordonnés, et application au cas profini.** Un espace topologique $(E ; \mathcal{T})$ est *ordonné* s'il existe un ordre total $\leq$ sur E dont $\mathcal{T}$ soit la topologie d'ordre.

- (a) Montrer que tout espace profini à anneau fervert dénombrable, est ordonné. [Plonger dans l'espace de Cantor $\mathcal{C}$. Un compact d'une topologie d'ordre a pour topologie de sous-espace la topologie du sous-ordre.]
- (b) On fixe dorénavant un espace ordonné $(E ; \mathcal{T}, \leq)$. Soit $E^- = \{a \in E : (\exists b)[(a < b) \wedge (\forall c)(a < c \rightarrow b \leq c)]\}$ l'ensemble des points ayant un successeur immédiat.

Déterminer les *intervalles* ferverts de $(E ; \mathcal{T}, \leq)$ en fonction de E^- .

- (c) Montrer que $(E ; \mathcal{T})$ est compact ssi $(E ; \leq)$ est complet au sens de Dedekind (toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure) avec extrémités. [Réciproque : considérer $X = \{x \in E : [\min E, x] \text{ est inclus dans un sous-recouvrement fini}\}$.]
- (d) En déduire que $(E ; \mathcal{T})$ est profini ssi $(E ; \leq)$ est complet avec extrémités, et que $E^- \cup \{\max E\}$ est dense dans $(E ; \mathcal{T})$. Et pour la densité dans $(E ; \leq)$? 5
- (e) On suppose $(E ; \mathcal{T})$ profini, et $(\mathbb{Q} ; \leq) \hookrightarrow (E^- ; \leq)$ [Ord]. Montrer que E se surjecte continûment sur $\mathcal{C}$. [L'image de $\mathbb{Q}$ détermine $\aleph_0$ ferveurs de E .]
- (f) Montrer le théorème E. [Estimer les cardinaux en jeu ; théorèmes C et D.] 10

5. Traduction algébrique

Cette partie requiert toutes les autres. Elle combine une technique type Cantor-Bendixson, l'étude des espaces ordinaux, clairsemés (3.1) et ordonnés (4.2) dans le cadre de la dualité de Stone.

Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Par définition, ses idéaux sont propres ; on appelle $\mathbb{A}$ *l'idéal impropre*. Le quotient résultant $\{0\}$ est dit *dégénéré*. 15

5.1. Anneaux de Boole à spectre clairsemé. Un *atome* de $\mathbb{A}$ est un élément $a \neq 0$ vérifiant : $(\forall x)(ax = 0 \vee ax = a)$.

- (a) Mettre en correspondance atomes de $\mathbb{A}$ et points isolés de $\text{Spec } \mathbb{A}$.
- (b) À un idéal $I \triangleleft \mathbb{A}$ on associe $F_I = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A} : I \leq \mathfrak{p}\}$. Montrer que ceci met en bijection les idéaux de $\mathbb{A}$ et les fermés non vides de $\text{Spec } \mathbb{A}$. Vérifier $F_I \simeq \text{Spec}(\mathbb{A}/I)$ [Top]. 20
- (c) Soit $R(\mathbb{A})$ l'idéal engendré par les atomes de $\mathbb{A}$. On forme une suite d'idéaux éventuellement impropres en posant $I_\emptyset = (0)$, puis $I_{\alpha+1} = \pi_\alpha^{-1}(R(\mathbb{A}/I_\alpha))$, et aux limites $I_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} I_\beta$. 25
Montrer que cette suite stationne en un ordinal α , et que $\mathbb{A}/I_\alpha$ est alors sans atomes ou dégénéré.
- (d) Montrer les équivalences entre (i) $\text{Spec } \mathbb{A}$ est clairsemé ; (ii) tout anneau quotient $\mathbb{A}/I$ possède un atome ; (iii) il existe un ordinal α tel que $I_\alpha = \mathbb{A}$. [(iii) $\Rightarrow$ (ii) : considérer β minimal tel que $I_\beta \not\leq I$.] 30
- (e) Démontrer $(\text{Spec } \mathbb{A})^{(\beta)} = F_{I_\beta}$ et retrouver 5.1.d.

5.2. Anneaux de Boole à base ordonnée. On rappelle que dans un anneau de Boole la relation $ab = a$ définit un ordre partiel $a \leq b$. Une *base ordonnée* de $\mathbb{A}$ est une partie totalement ordonnée $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{A}$ évitant 0, contenant 1, et telle que $\langle \mathcal{B} \rangle_{\text{ann}} = \mathbb{A}$. On fait bien noter que $\mathcal{B}$ contient toujours le plus grand élément 1. 35

- (a) Montrer que si $(E ; \mathcal{T}, \leq)$ est un espace profini ordonné (4.2), alors $\text{Ferv } E$ possède une telle base.
- (b) Montrer qu'une base ordonnée $\mathcal{B}$ est aussi une base $\mathbb{F}_2$ -linéaire.

- (c) On suppose qu'il existe une base ordonnée $\mathcal{B}$. Montrer que la relation $\mathfrak{p} \preceq \mathfrak{q}$ définie par $\mathfrak{p} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{q} \cap \mathcal{B}$ fait de $\text{Spec } \mathbb{A}$ un espace ordonné. [Si une topologie séparée est incluse dans une topologie compacte, on a égalité.]
- (d) En déduire que $\mathbb{A}$ possède une base ordonnée ssi $\text{Spec } \mathbb{A}$ est un espace ordonné. 5
- (e) On suppose qu'il existe une base ordonnée $\mathcal{B}$. Comme dans le théorème D, $\hat{\mathcal{B}}$ désigne l'ensemble des parties closes inférieurement de $\mathcal{B}$. Montrer $(\text{Spec } \mathbb{A} \cup \{\mathbb{A}\} ; \preceq) \simeq (\hat{\mathcal{B}} ; \subseteq)$. [On rappelle que si I est un idéal et S une partie multiplicative disjointe, alors tout idéal contenant I , évitant S , et maximal pour ces propriétés est premier.] 10
- (f) En déduire que si α est un ordinal *successeur*, alors $\mathbb{A}$ possède une base ordonnée par α ssi $\mathbb{A} \simeq \text{Ferv } E_\alpha$ [Bool]. Et si α n'est pas successeur?
- 5.3. **Le type $\mathbb{C}_0$.** Soit $\mathbb{C}_0$ l'anneau de Boole librement engendré par $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- (a) Montrer $\text{Spec } \mathbb{C}_0 \simeq \mathcal{C}$ [Top].
- (b) Montrer que $\mathbb{C}_0$ possède une base ordonnée. En déduire que tout anneau 15
de Boole dénombrable possède une base ordonnée.
- (c) On suppose que $\mathbb{A}$ possède une base ordonnée $\mathcal{B}$ et que $(\mathbb{Q} ; \leq) \hookrightarrow \mathcal{B}$. Montrer $\mathbb{C}_0 \hookrightarrow \mathbb{A}$ [Bool].
- (d) Grâce aux théorèmes C et D, déduire que si $\mathbb{A}$ est dénombrable, alors soit $\mathbb{C}_0 \hookrightarrow \mathbb{A}$, soit $\mathbb{A} \simeq \text{Ferv } E_\alpha$ pour un ordinal dénombrable. Retrouver le 20
théorème E.

5.4. Questions supplémentaires

- (a) Soit $\mathcal{A} = 2^{<\omega}$ l'ensemble des suites finies de 0 et de 1 muni de l'ordre *dyadique*, lié à sa réalisation dans $]0, 1[$ via $\frac{1}{2} + \sum_n \frac{(-1)^{1+s(n)}}{2^n}$.
Pour $s \in \mathcal{A}$, soit $f_s = \prod_{j < \ell(s)} (-1)^{s(j)} e_j$, où $\neg^0 x = x$ et $\neg^1 x = (1 + x)$. Soit : 25
- $$b_s = f_s e_{\ell(s)} + \sum_{\substack{i < \ell(s): \\ s(i)=1}} f_{s|_i} e_i.$$
- Vérifier que $\{b_s : s \in \mathcal{A}\} \cup \{1\}$ forme une base ordonnée de $\mathbb{C}_0$.
- (*) (b) Donner un anneau de Boole à spectre clairsemé, mais sans base ordonnée. [Parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}_1$.]
- (**) (c) Donner un anneau de Boole à spectre clairsemé *et* à base ordonnée, mais 30
sans base ordonnée par un ordinal. [$\text{Ferv}(\omega_1 + 1 + \omega_1^{\text{op}} ; \leq)$. Penser aux rangs de Cantor-Bendixson.]

Notes conclusives

En deuxième lecture on recommande [FM88]. On rappelle par ailleurs l'intérêt de [Rosenstein] et [Koppelberg].

• Repères historiques

Le but de cette Note est de démontrer sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo et sans l'aide des nombres transfinis le théorème suivant sur la structure des ensembles de points dans l'espace euclidien à m dimensions :

Théorème 1. *Tout ensemble de points P (situé dans l'espace euclidien à m dimension) se décompose en une somme de deux ensembles*

$$(1) \quad P = C + D,$$

dont l'ensemble C (s'il n'est pas vide) est clairsemé et effectivement énumérable, et l'ensemble D (s'il n'est pas vide) est dense en soi. [Sie20a]

Ce sont les toutes premières lignes publiées dans *Fundamenta Mathematicae*, revue qui contribua grandement à la floraison de l'École polonaise de mathématiques, à la poursuite de la théorie descriptive des ensembles, puis à l'émergence de la logique moderne. Éditeur-fondateur, Sierpiński fut un artisan essentiel des deux premiers aspects.

Dérivation de Cantor-Bendixson. • Elle apparaît chez Cantor [Can72, p. 129] (*abgeleitete Punktmenge*; l'*Ableitung* est également la dérivation du calcul différentiel), reprise dans [Can82] avec mention de travaux d'Ascoli et Dini. Le concept mériterait une étude historique. • Le nom actuel est dû aux liens avec le théorème de Cantor-Bendixson. Pour ce dernier, § 4, notes conclusives.

Ordinaux à isomorphisme topologique près.

Leur classification trouve ses sources chez Cantor. Elle est régulièrement redécouverte.

• Cas compact [Bak72] mais pourrait être plus ancien; par exemple [MP60, Theorem 4.2], voire Hausdorff. Notamment on devine l'argument de réorganisation topologique dans [MS20] (cas compact dénombrable); il faudrait vérifier chez Hausdorff. • Cas général [FM88, Remarks 2.5.3].

Ordres. Le théorème D, ainsi que l'idée d'une dérivation de Cantor-Bendixson produisant des quotients et non des sous-objets (on parle de *condensation*), sont certainement de Hausdorff; il serait intéressant d'en trouver l'origine.

Anneaux de Boole à base ordonnée. Origine [MT39]. Jalon important [MP60]; le contre-exemple 5.4.c est [MP60, Lemma 3.4]. [Koppelberg] ne travaille pas en ces termes, mais

[FM88] : Jörg FLUM et Juan Carlos MARTÍNEZ. « On topological spaces equivalent to ordinals ». In : *J. Symbolic Logic* 53.3 (1988), p. 785-795

[Rosenstein] : Joseph ROSENSTEIN. *Linear orderings*. T. 98. Pure and Applied Mathematics. New York-London : Academic Press, 1982, p. xvii+487

[Koppelberg] : Sabine KOPPELBERG. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1*. Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet. Amsterdam : North-Holland, 1989. xx+312

[Sie20a] : Wacław SIERPIŃSKI. « Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points ». In : *Fundam. Math.* 1 (1920), p. 1-6

[Can72] : Georg CANTOR. « Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen ». In : *Math. Ann.* 5 (1872), p. 123-132

[Can82] : Georg CANTOR. « Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4 ». In : *Math. Ann.* 21 (1882), p. 51-59

[Bak72] : John Warren BAKER. « Compact spaces homeomorphic to a ray of ordinals ». In : *Fund. Math.* 76.1 (1972), p. 19-27

[MP60] : Richard MAYER et Richard PIERCE. « Boolean algebras with ordered bases ». In : *Pacific J. Math.* 10 (1960), p. 925-942

[MS20] : Stefan MAZURKIEWICZ et Wacław SIERPIŃSKI. « Contribution à la topologie des ensembles dénombrables ». In : *Fundam. Math.* 1 (1920), p. 17-27

[MT39] : Andrzej MOSTOWSKI et Alfred TARSKI. « Boolesche Ringe mit geordneter Basis ». In : *Fundam. Math.* 32 (1939), p. 69-86

préfère les anneaux de segments.

- **Sur le théorème A : dérivation au sens de Leibniz.** La dérivation de Cantor est bien une dérivation au sens de Leibniz, i.e. si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques non vides, alors :

$$(E_1 \times E_2)' = E_1' \times E_2 \cup E_1 \times E_2'$$

- **Sur le théorème B : ordinaux à isomorphisme borélien près.** • Analogie mesure-théorique d'un isomorphisme topologique, un *isomorphisme borélien* est une bijection bi-mesurable. On peut classer les espaces ordinaux de ce point de vue. • Pour α ordinal, soit $\kappa(\alpha)$ le cardinal qui vaut :

- 0 si $\text{card } \alpha$ est dénombrable ou non régulier (§ 26.3) ;
- $\max\{\lambda : (\text{card } \alpha) \cdot \lambda \leq \alpha\}$ sinon (produit ordinal).

Théorème ([GJK08]). Deux ordinaux α, β sont Borel-isomorphes ss'ils sont équipotents et $\kappa(\alpha) = \kappa(\beta)$.

- **Sur le théorème C (1) : classification des espaces dlc.** Elle se reformule ainsi.

Théorème. Soit E un espace topologique. Sont équivalents :

- (i) $E \simeq E_\alpha$ [Top] pour un ordinal dénombrable ;
- (ii) E est dénombrable et localement compact ;
- (iii) E est compact dénombrable, ou co-singleton dans un tel espace.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est la question 2.1.c. (ii) $\Rightarrow$ (iii) emploie le théorème C, et une compactification évidente. On montre (iii) $\Rightarrow$ (i). Si E est compact dénombrable, on a fini. Sinon soit $\tilde{E} = E \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff. Par le théorème C, $\tilde{E} \simeq E_{\alpha+1}$ pour un ordinal

α . Donc $E = E_{\alpha+1} \setminus \{\beta\}$ pour un $\beta \leq \alpha$. Si $\beta = \alpha$ alors $E = E_\alpha$ et l'on a fini. On suppose donc $E = [0, \beta) \sqcup (\beta, \alpha]$. Écrivons $\alpha = \beta + 1 + \gamma$ pour un ordinal $\gamma \geq 0$. D'après 2.3, $E = E_\beta \sqcup [\beta + 1, \beta + 1 + \gamma] \simeq E_\beta \sqcup E_{\gamma+1} \simeq E_{\gamma+1+\beta}$ [Top]. $\square$

• Cas compact [MS20, Théorème 1] ; cas général [FM88, Theorem 2.3]. Extension au cas compact non dénombrable (il faut alors une hypothèse locale) [Bak72, Theorem 2]. • Prendre garde aux hypothèses. Soit $E = \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$ muni de la distance $d((m, n), (k, \ell)) = 2^{-m} + 2^{-k}$ sauf si les points sont égaux, et $d((m, n), \infty) = 2^{-m}$. Alors $(E ; d)$ est métrique complet ; E est clairsemé (c'est aussi une conséquence du théorème de Cantor-Bendixson dans le cas polonais : v. § 4, notes conclusives). Pourtant E n'est pas localement compact en ∞ . L'espace n'est donc pas ordinal. Il se plonge pourtant comme sous-ensemble dans un tel espace : v. infra.

- **Sur le théorème C (2) : classification des parties des espaces dlc.** Les sous-espaces des espaces ordinaux dénombrables peuvent être caractérisés.

Théorème ([KU53, Théorème IV]). Soit E un espace topologique. Sont équivalents :

- (i) E est topologiquement isomorphe à une partie d'un espace ordinal dénombrable ;
- (ii) E est topologiquement isomorphe à une partie d'un compact dénombrable ;
- (iii) E est un espace polonais (v. § 4, notes conclusives) dénombrable ;
- (iv) E est dénombrable, métrisable, clairsemé.

• Attention aux hypothèses : aucun des trois espaces suivants ne se plonge dans un ordinal dénombrable. – Dans sa topologie usuelle, $\mathbb{Q}$ est dénombrable et métrisable,

[GJK08] : Su GAO, Steve JACKSON et Vincent KIEFTENBELD. « A classification of ordinals up to Borel isomorphism ». In : *Fund. Math.* 198.1 (2008), p. 61-76

[KU53] : Bronisław KNASTER et Kazimierz URBANIK. « Sur les espaces complets séparables de dimension 0 ». In : *Fund. Math.* 40 (1953), p. 194-202

mais pas clairsemé. – Un ensemble non dénombrable muni de la distance discrète est métrisable et clairsemé, mais pas dénombrable. – Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal de $P(\mathbb{N})$; soit l'espace $\mathbb{N} \cup \{\infty_{\mathcal{U}}\}$, où les entiers sont isolés, et les voisinages de $\infty_{\mathcal{U}}$ sont les $A \cup \{\infty_{\mathcal{U}}\}$ exactement pour $A \in \mathcal{U}$. Cet espace est dénombrable et clairsemé, mais pas métrisable (car pas topologiquement dénombrable au voisinage de $\infty_{\mathcal{U}}$). • On peut poursuivre sans dénombrabilité.

Théorème ([Tel68, Théorème 11]; indep. [AF78]). Tout espace métrique clairsemé se plonge dans un espace ordinal.

On peut aller encore plus loin et demander des réalisations d'espaces topologiques *ordonnés* dans des espaces ordinaux, chercher à quelle condition une topologie est une topologie d'ordre, etc. Voir [Hil16], aux références historiques très utiles.

- **Sur le théorème D : ordres excluant les rationnels.** • Mise en garde avant de consulter la littérature spécialisée : un ordre est clairsemé-*en-tant-qu'ordre* s'il ne contient pas de copie de $(\mathbb{Q}; \leq)$. Ce n'est pas la même chose qu'être clairsemé dans la topologie de l'ordre. En effet $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ lexicographique est un ordre discret (donc topologiquement clairsemé) mais contient une copie de $\mathbb{Q}$. Il vaut donc mieux parler d'ordre « $\mathbb{Q}^{\perp}$ », ou « sans- η_0 », η_0 étant la notation traditionnelle pour $(\mathbb{Q}; \leq)$. • Le théorème suivant trouve son origine chez Hausdorff.

Théorème (v. [Hau08, § 11] et [Rosenstein, Theorem 5.26]). Les ordres totaux sans- η_0 forment la plus petite collection contenant l'ordre singleton, et close par réversion (i.e. prise de l'ordre opposé) et sommes indexées par les ordinaux.

- **Sur les anneaux de Boole à spectre clairsemé.** D'après la question 5.1.d, ce sont exactement les anneaux de Boole *héréditairement atomiques* de l'ex. 5.4.

- **Sur les anneaux de Boole à base ordonnée.** • Attention : l'anneau ferverd d'un espace ordinal n'a pas nécessairement une base ordonnée. Par exemple E_{ω} est discret, donc $\mathbb{A} = \text{Ferv } E_{\omega} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ [Bool], et (ex. C.3) que $\text{Spec } \mathbb{A} \simeq \beta\mathbb{N}$. Or ce dernier espace n'est pas ordonné (il y a des critères d'ordonnabilité pour les compactifiés de Stone-Čech, [VRS72], [Pur73]). Donc $\mathbb{A}$ n'a pas de base ordonnée. • On peut préciser le type d'ordre des bases dans le cas dénombrable (question 5.3.b).

Théorème ([Pie73]). Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole dénombrable. Alors il existe :

- un ordre $\mathbb{O}$ parmi les suivants : $\{1, \dots, n\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$, $\{-\infty\} \cup \mathbb{Q}$, $\{-\infty\} \cup \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$,
- des ordinaux dénombrables δ_x ,

tels que $\mathbb{A}$ ait une base ordonnée de type d'ordre $\sum_{x \in \mathbb{O}} \omega^{\delta_x} + 1$ (somme ordonnée).

[Tel68] : Rastislav TELGÁRSKY. « Total paracompactness and paracompact dispersed spaces ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 16 (1968), p. 567-572

[AF78] : Alberto AROSIO et Arturo FERREIRA. « On nonseparable 0-dimensional metrizable spaces ». In : *Portugal. Math.* 37.3-4 (1978), p. 273-297

[Hil16] : Jacob HILTON. « Combinatorics of countable ordinal topologies ». Thèse de doct. The University of Leeds, 2016. vii+138

[Hau08] : Felix HAUSDORFF. « Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen ». In : *Math. Ann.* 65.4 (1908), p. 435-505

[VRS72] : M. VENKATARAMAN, Minakshisundaram RAJAGOPALAN et T. SOUNDARARAJAN. « Orderable topological spaces ». In : *General Topology and Appl.* 2 (1972), p. 1-10

[Pur73] : Steven PURISCH. « On the orderability of Stone-Čech compactifications ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 41 (1973), p. 55-56

[Pie73] : Richard PIERCE. « Bases of countable Boolean algebras ». In : *J. Symbolic Logic* 38 (1973), p. 212-214