

§ SÉ2. Logiques infinitaires

Ce sujet d'étude présente les logiques infinitaires $\Lambda_{\kappa,\lambda}$, $\Lambda_{\infty,\lambda}$ et $\Lambda_{\infty,\infty}$. Après un survol des mauvaises propriétés de $\Lambda_{\omega_1,\omega}$, on passe à $\Lambda_{\infty,\omega}$, qui est la logique du va-et-vient. Permettre des quantifications par paquets mène aux logiques $\Lambda_{\infty,\lambda}$ et $\Lambda_{\infty,\infty}$, trop expressives. On revient alors à $\Lambda_{\omega_1,\omega}$, qui intervient naturellement dans l'analyse des structures dénombrables. 5

Prérequis : § 3 ; §§ 6–11, dont § 7.3.

Les définitions sont données pour tout langage $\mathcal{L}$, que l'on tend à ne pas noter.

Définition (formules de $\Lambda_{\kappa,\lambda}$). Soient κ, λ deux cardinaux. On prend λ variables élémentaires. Renommant implicitement si besoin, on écarte les conflits de variables. 10

- Toute formule de base $R(\mathbf{t})$ est une $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ -formule.
- Si φ est une $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ -formule, alors $\neg\varphi$ aussi.
- Si Φ est un ensemble de $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ -formules tel que $\text{card } \Phi < \kappa$ et $\text{card}(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{VarLib } \varphi) < \lambda$, alors $\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi$ et $\bigvee_{\varphi \in \Phi} \varphi$ sont des $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ -formules.
- Si φ est une $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ -formule et $\mathbf{x}$ un uplet de variables de longueur $< \lambda$, alors $(\forall \mathbf{x})\varphi$ et $(\exists \mathbf{x})\varphi$ sont des $\Lambda_{\kappa,\lambda}$ -formules. 15

On écrit souvent ω ou ω_1 au lieu de $\aleph_0$ ou $\aleph_1$. Ainsi $\Lambda_{\omega,\omega}$ est la logique élémentaire.

Définition (formules de $\Lambda_{\infty,\lambda}$ et $\Lambda_{\infty,\infty}$).

- Soit $\Lambda_{\infty,\lambda}$ la réunion des $\Lambda_{\kappa,\lambda}$.
- Soit $\Lambda_{\infty,\infty}$ la réunion des $\Lambda_{\infty,\lambda}$. 20

Remarque. Les collections $\Lambda_{\infty,\lambda}(\mathcal{L})\text{-Form}$ et $\Lambda_{\infty,\infty}(\mathcal{L})\text{-Form}$ sont trop grosses pour former des ensembles, mais leur maniement est intuitif et non paradoxal. Par exemple, la conjonction de n'importe quel *ensemble* de $\Lambda_{\infty,\infty}$ -formules reste une $\Lambda_{\infty,\infty}$ -formule.

Attention : les langages et les structures restent de taille ensembliste.

Question préliminaire. Définir la satisfaction des $\Lambda_{\kappa,\lambda}$, $\Lambda_{\infty,\lambda}$, $\Lambda_{\infty,\infty}$ -formules. 25

1. $\Lambda_{\omega_1,\omega}$: première étude

Première étude, optionnelle et essentiellement négative, de $\Lambda_{\omega_1,\omega}$.

Cette première partie signale un certain nombre de réflexes à laisser en entrant en logique infinitaire. On perd le contrôle sur le nombre de formules, l'existence de formes prénexes (cf. ex. 6.4), le théorème de Łoś et la compacité (cf. § 10.2 et § 11.1), 30 et les phénomènes de Löwenheim-Skolem (cf. § 11.3).

- 1.1. **Perte du contrôle cardinal.** Montrer que même pour $\mathcal{L}$ fini, $\Lambda_{\omega_1,\omega}(\mathcal{L})$ -En peut être indénombrable. [Décrire chaque $I \in P(\mathbb{N})$.]

- (*) 1.2. **Perte des formes prénexes**(prérequis : § 4, théorème de Baire). La première sous-question est indépendante.
- (a) Donner un $\{=\}$ -énoncé qui n'équivaut à aucun énoncé prénexe. [La logique *élémentaire* ne caractérise pas la finitude.]
 - (b) Montrer que l'espace de Cantor $\mathcal{C}$ possède une partie dense dénombrable. 5
 - (c) Montrer qu'une telle partie est un F_σ mais pas un G_δ de $\mathcal{C}$. [Baire.]
 - (d) Conclure qu'il existe $\mathcal{L}$ dénombrable et un énoncé sans quantificateurs qui n'équivaut à aucun énoncé $\bigvee$ -prénexe, i.e. de la forme $\bigvee_m \bigwedge_n (\neg)^{\varepsilon_{m,n}} R_{m,n}$.
- 1.3. **Perte de la compacité**
- (a) Montrer que $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ n'est pas compacte. 10
 - (b) Indiquer où échoue la démonstration du théorème de Łoś.
- 1.4. **Perte des phénomènes de Löwenheim-Skolem.** En langage fini, donner :
- (a) un *énoncé* ayant un modèle infini, mais aucun modèle non dénombrable ;
 - (b) une *théorie* ayant un modèle infini, mais aucun modèle dénombrable.
- La question 1.4 laisse de la place à un résultat positif, mise à profit en 4.1.c. 15

2. $\Lambda_{\infty, \omega}$ et va-et-vient

Cette partie montre que la logique du va-et-vient (au sens de § 9) est $\Lambda_{\infty, \omega}$.
La question 2.3 est indispensable à la quatrième partie.

On rappelle que *langages et structures sont toujours de taille ensembliste*.

Définition (énoncé de Karp). Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$ -structure. Un *énoncé de Karp* est un $\Lambda_{\infty, \omega}(\mathcal{L})$ -énoncé $\varphi_{\mathbb{A}}$ caractérisant $\mathbb{A}$ à $\simeq_\infty$ près, i.e. tel que pour toute $\mathcal{L}$ -structure $\mathbb{B}$, on ait : $\mathbb{B} \models \varphi_{\mathbb{A}}$ ssi $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$. 20

Théorème A. Toute structure possède un énoncé de Karp.

Théorème B. Il n'existe pas de $\Lambda_{\infty, \omega}(<)$ -énoncé dont les modèles soient exactement les bons ordres. 25

2.1. Une forme faible, et une application

- (a) Montrer que les relations $\simeq_\infty$ et $\equiv [\Lambda_{\infty, \omega}]$ coïncident. [Réciproque : considérer les paires de uplets finis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vérifiant mêmes $\Lambda_{\infty, \omega}$ -formules.]
- (b) Soient $(\mathbb{A}_i)_I$ et $(\mathbb{B}_i)_I$ deux familles de $\mathcal{L}$ -structures indexées par un ensemble I et telles qu'à chaque indice, $\mathbb{A}_i \equiv \mathbb{B}_i [\Lambda_{\infty, \omega}]$. Montrer $\prod_I \mathbb{A}_i \equiv \prod_I \mathbb{B}_i [\Lambda_{\infty, \omega}]$. 30

2.2. Propriétés des énoncés de Karp

- (a) Montrer qu'un énoncé de Karp est *complet*, i.e. pour chaque $\chi \in \Lambda_{\infty, \omega}$ -Én, on a $\varphi_{\mathbb{A}} \models \chi$ ou $\varphi_{\mathbb{A}} \models \neg\chi$. En déduire que deux énoncés de Karp sont $\Lambda_{\infty, \omega}$ -équivalents. 35

- (b) Donner un énoncé de Karp qui n'est κ -catégorique en aucun $\kappa > \aleph_0$. Et en $\aleph_0$?
- (c) Montrer qu'il existe un langage fini et un énoncé de Karp sans modèle dénombrable. [Question 1.4.b.]

2.3. **Existence d'énoncés de Karp (théorème A).** Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$ -structure fixée. 5

- (a) Soient ν un ordinal et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$ un uplet fini. Montrer qu'il existe une $\Lambda_{\infty, \omega}$ -formule $\varphi_{\mathbf{a}}^{\nu}(\mathbf{x})$ caractérisant la classe de ν -isomorphisme de $\mathbf{a}$, i.e. telle que si $\mathbb{B}$ est une $\mathcal{L}$ -structure et $\mathbf{b} \in \mathbb{B}^{<\omega}$, alors : $\mathbb{B} \models \varphi_{\mathbf{a}}^{\nu}(\mathbf{b})$ ssi $\mathbf{a} \simeq_{\nu} \mathbf{b}$.
- (b) Montrer qu'il existe un ordinal ν tel que pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$, on ait $\mathbb{A} \models (\forall \mathbf{x})[\varphi_{\mathbf{a}}^{\nu}(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi_{\mathbf{a}^{\nu+1}}^{\nu+1}(\mathbf{x})]$. [Ord ne peut pas s'injecter dans un ensemble.] 10
- (c) En déduire le théorème A, et retrouver le résultat de 2.1.a.
- (d) Soit $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Montrer que X est réunion de classes de $\simeq_{\infty}$ -équivalence ss'il existe $\varphi \in \Lambda_{\infty, \omega}(\mathcal{L})\text{-Form}(\mathbf{x})$ telle que $X = \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\}$ (*théorème de définissabilité de Karp*).

2.4. **Inexprimabilité du caractère bien ordonné (théorème B)** (prérequis : 15
§ 3.3, arithmétique ordinale et forme normale de Cantor, ex. 3.7 et 3.9)

- (a) On étend le *rang de quantification* (§ 9.3) à $\Lambda_{\infty, \omega}\text{-Form}$, avec des valeurs ordinales, en posant : $\text{rg}_q(R(\mathbf{t})) = 0$; $\text{rg}_q(\neg\varphi) = \text{rg}_q\varphi$; $\text{rg}_q(\bigwedge_{\Phi}\varphi) = \text{rg}_q(\bigvee_{\Phi}\varphi) = \sup\{\text{rg}_q\varphi : \varphi \in \Phi\}$; $\text{rg}_q(\exists x\varphi) = \text{rg}_q(\forall x\varphi) = \text{rg}_q\varphi + 1$. Montrer que si $\mathbb{A} \simeq_{\nu} \mathbb{B}$, alors $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ vérifient les mêmes $\Lambda_{\infty, \omega}$ -énoncés de rang de quantification $\leq \nu$. 20
- (b) Montrer qu'il existe des ordinaux limites α arbitrairement grands vérifiant : $(\forall \beta < \alpha)(\omega^{\beta} < \alpha)$.
- (c) Soient δ, β deux ordinaux tels que $\delta < \omega^{\beta}$. Montrer $\delta + \omega^{\beta} = \omega^{\beta}$.
- (d) Soient α, β deux ordinaux vérifiant : $(\forall \gamma)(\gamma < \alpha \rightarrow \gamma + \omega^{\beta} < \alpha)$. Soient $\mathbb{O}$ un ordre et $\mathbb{A} = (\mathbb{O} \times \alpha; \text{lex})$ l'ordre lexicographique. Un point $a = (p, \gamma) \in \mathbb{A}$ est β -*limite* s'il existe π tel que $\gamma = \omega^{\beta} \cdot \pi$. Un β -*intervalle* de $\mathbb{A}$ est une partie de la forme $[a, a + \omega^{\beta}[$ où $a \in \mathbb{A}$ est β -limite. Montrer que les β -intervalles sont les classes d'une relation d'équivalence.
- (e) Mêmes notations. Soient $\mathbb{P}$ un autre ordre et $\mathbb{B} = (\mathbb{P} \times \alpha; \text{lex})$. On suppose 30
que $\mathbb{O}$ et $\mathbb{P}$ ont un plus petit élément. Pour $\gamma \leq \beta$, une γ -*fonction* est fonction partielle strictement croissante obtenue comme réunion disjointe d'isomorphismes naturels entre γ -intervalles de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{B}$. Montrer que toute restriction finie d'une γ -fonction est un γ -isomorphisme. (*)
- (f) En déduire le théorème B. [Un tel énoncé aurait un rang de quantification 35
 α_0 . Trouver α tel que $\alpha \simeq_{\alpha_0} (\{-\infty\} \cup \omega^{\text{op}}) \times \alpha$.]

3. $\Lambda_{\infty, \lambda}$ et $\Lambda_{\infty, \infty}$

Cette partie (dont ne dépend pas la quatrième) illustre les excès et limites de logiques « trop » infinitaires. Certaines questions empruntent un peu d'arithmétique cardinale à § 26.

40

On définit sur $\Lambda_{\infty, \lambda}$ -Form une fonctionnelle ρ à valeurs ordinales en posant :
 $\rho(R(\mathbf{t})) = 0$; $\rho(\neg\varphi) = \rho(\varphi)$; $\rho(\bigwedge_{\Phi} \varphi) = \rho(\bigvee_{\Phi} \varphi) = \sup\{\rho(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$;
 $\rho(\exists \mathbf{x} \varphi) = \rho(\forall \mathbf{x} \varphi) = \rho(\varphi) + 1$.

3.1. **Exprimabilité du caractère bien ordonné.** Montrer qu'il existe un $\Lambda_{\omega_1, \omega_1}(<)$ -énoncé dont les modèles sont les bons ordres. 5

3.2. **Va-et-vient par paquets.** Soit λ un cardinal.

(a) On définit des relations $\mathbf{a} \simeq_{\infty, \lambda}^{\nu} \mathbf{b}$ entre uplets de même longueur (éventuellement infinie) extraits de $\mathcal{L}$ -structures $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ comme suit :

- $\mathbf{a} \simeq_{\infty, \lambda}^0 \mathbf{b}$ ssi $\mathbf{a} \simeq_0 \mathbf{b}$;
- $\mathbf{a} \simeq_{\infty, \lambda}^{\nu+1} \mathbf{b}$ ssi pour tout $\alpha \in \mathbb{A}^{<\lambda}$ de longueur $< \lambda$ il existe $\beta \in \mathbb{B}^{<\lambda}$ tel que $\mathbf{a}, \alpha \simeq_{\infty, \lambda}^{\nu} \mathbf{b}, \beta$, et pour tout $\beta \in \mathbb{B}^{<\lambda}$ il existe α etc. ; 10
- pour ν un ordinal limite, $\mathbf{a} \simeq_{\infty, \lambda}^{\nu} \mathbf{b}$ ssi (pour tout $\mu < \nu$) $(\mathbf{a} \simeq_{\infty, \lambda}^{\mu} \mathbf{b})$.

Montrer que $\simeq_{\nu}$ (définie en § 9.1) n'est pas $\simeq_{\infty, \omega}^{\nu}$ mais $\simeq_{\infty, 2}^{\nu}$.

(b) Une famille de (∞, λ) -*va-et-vient sans restriction* est une famille $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de 0-isomorphismes entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, close sous restriction, et vérifiant les conditions de va-et-vient avec des uplets de longueur $< \lambda$. Montrer que la relation résultante $\mathbb{A} \simeq_{\infty, \lambda}^{\infty} \mathbb{B}$ coïncide avec $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B} [\Lambda_{\infty, \lambda}]$. 15

(c) Un (∞, λ) -*système de Karp* entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est une suite (I_{ν}) indexée par des ordinaux et telle que :

- I_0 est formé de 0-isomorphismes ; 20
- chaque I_{ν} est clos sous restriction ;
- si $\mu \leq \nu$, alors $I_{\nu} \subseteq I_{\mu}$;
- si $f \in I_{\nu+1}$, alors :
 - pour tout $\alpha \in \mathbb{A}^{<\lambda}$, il existe $g \in I_{\nu}$ tel que $\alpha \subseteq \text{dom } g$;
 - pour tout $\beta \in \mathbb{B}^{<\lambda}$, il existe $g \in I_{\nu}$ tel que $\beta \subseteq \text{im } g$. 25

Montrer : $\mathbb{A} \simeq_{\infty, \lambda}^{\infty} \mathbb{B}$ ssi pour tout ordinal ν , il existe un (∞, λ) -système de Karp vérifiant $I_{\nu} \neq \emptyset$.

(d) Un (∞, λ) -système de Karp est λ -*petit* si pour tout $f \in I_0$, on a $\text{card dom } f < \lambda$. Il est *continu* si pour ν limite, on a $I_{\nu} = \bigcap_{\mu < \nu} I_{\mu}$. Montrer l'équivalence entre : 30

- (i) il existe un (∞, λ) -système de Karp entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ vérifiant $I_{\nu} \neq \emptyset$;
- (ii) il existe un tel système λ -petit et continu ;
- (iii) $\mathbb{A} \simeq_{\infty, \lambda}^{\nu} \mathbb{B}$;
- (iv) $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ vérifient les mêmes $\Lambda_{\infty, \lambda}$ -énoncés tels que $\rho(\varphi) \leq \nu$.

Retrouver le résultat de 3.2.b. 35

(e) Énoncer et démontrer l'analogue du théorème A pour $\Lambda_{\infty, \lambda}$. Démontrer aussi : à ν fixé, il existe un $\Lambda_{\infty, \lambda}$ -énoncé φ vérifiant $\rho(\varphi) \leq \nu$ et caractérisant la $\simeq_{\infty, \lambda}^{\nu}$ -classe de $\mathbb{A}$.

- (f) (Prérequis : cofinalité, § 26.3.) En déduire que si $\text{cof } \lambda = \aleph_0$, alors pour toute structure de cardinal $\leq \lambda$ il existe un $\Lambda_{\infty, \lambda}$ -énoncé le caractérisant à isomorphisme près *parmi les structures de cardinal $\leq \lambda$* .

3.3. Limites à 3.2.f

- (a) Montrer que pour tout langage $\mathcal{L}$ et tout cardinal λ , il existe deux structures $\Lambda_{\infty, \lambda}$ -équivalentes mais non isomorphes. 5
- (b) Soit $A_0 = B_0 = \mathbb{Q}$. Pour tout ordinal α , on pose $A_{\alpha+1} = A_\alpha + \mathbb{Q}$ et $B_{\alpha+1} = B_\alpha + \{*\} + \mathbb{Q}$. Aux limites, on prend la réunion. Soient $\mathbb{A} = A_{\omega_1}$ et $\mathbb{B} = B_{\omega_1}$. Montrer $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{B}$. [Sinon il existe α tel que $f(A_\alpha) = B_\alpha$.]
- (c) En déduire qu'il existe deux structures $\Lambda_{\infty, \omega_1}$ -équivalentes *de cardinal $\aleph_1$* mais non isomorphes. 10 (*)

3.4. La logique de l'isomorphisme

- (a) Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$ -structure. Montrer qu'il existe un $\Lambda_{\infty, \infty}(\mathcal{L})$ -énoncé caractérisant $\mathbb{A}$ à isomorphisme près. [Imiter le cas fini.]
- (b) Soient α un ordinal, $\mathbf{x}$ un α -uplet de variables, et $X \subseteq \mathbb{A}^\alpha$ un ensemble 15
de α -uplets. Montrer que X est invariant sous $\text{Aut}(\mathbb{A})$ ss'il existe $\varphi \in \Lambda_{\infty, \infty}(\mathcal{L})$ -Form($\mathbf{x}$) telle que $X = \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}^\alpha : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\}$ (*théorème de définissabilité de Krasner*).
- (c) Montrer que c'est faux dans $\Lambda_{\infty, \omega}$: donner une structure $\mathbb{A}$ et une partie 20
 $X \subseteq \mathbb{A}^1$ invariante sous $\text{Aut}(\mathbb{A})$, mais qui n'est de la forme $\{a \in \mathbb{A} : \mathbb{A} \models \varphi(a)\}$ pour aucune $\varphi \in \Lambda_{\infty, \omega}$ -Form. (*)
- (d) (Prérequis : cardinal successeur, § 26.) Montrer qu'il n'existe pas de $\Lambda_{\infty, \infty}(=)$ -énoncé dont les modèles soient les cardinaux successeurs. [Il existe des non successeurs arbitrairement grands.]

4. Retour à $\Lambda_{\omega_1, \omega}$: analyse de Scott 25

Cette dernière partie n'utilise ni la première (on se méfiera toutefois des raisonnements hâtifs) ni la troisième, mais requiert la question 2.3. On propose une étude en profondeur de $\Lambda_{\omega_1, \omega}$.

La question 4.4 est entièrement indépendante.

Définition (énoncé de Scott). Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$ -structure 30
dénombrable. Un *énoncé de Scott* est un $\Lambda_{\omega_1, \omega}(\mathcal{L})$ -énoncé $\varphi_{\mathbb{A}}$ dont $\mathbb{A}$ soit l'unique modèle dénombrable.

Théorème C. Toute structure dénombrable en langage dénombrable possède un énoncé de Scott.

4.1. **Propriété de Löwenheim** (cf. 1.4). Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et $\mathbb{A}$ une 35
 $\mathcal{L}$ -structure infinie.

- (a) Montrer qu'une formule a un nombre dénombrable de sous-formules.

- (b) Une sous-structure $\mathbb{A}_0 \leq \mathbb{A}$ *reflète* une $\Lambda_{\omega_1, \omega}(\mathcal{L})$ -formule φ si pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_0^{<\omega}$, on a $\mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ ssi $\mathbb{A}_0 \models \varphi(\mathbf{a})$. Elle *convient* à φ si $\mathbb{A}_0$ reflète φ et toutes ses sous-formules (pour la définition évidente). Montrer qu'il existe $\mathbb{A}_0 \leq \mathbb{A}$ dénombrable convenant à φ . [Adapter le lemme § 11.3.B.]
- (c) En déduire que si Φ est un ensemble *dénombrable* de $\Lambda_{\omega_1, \omega}(\mathcal{L})$ -énoncés, alors il existe $\mathbb{A}_0 \leq \mathbb{A}$ dénombrable tel que pour chaque $\varphi \in \Phi$ on ait $\mathbb{A} \models \varphi$ ssi $\mathbb{A}_0 \models \varphi$. Est-ce vrai pour Φ quelconque? 5
- (d) Conclure qu'une structure indénombrable ne peut pas être caractérisée à isomorphisme près par un $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ -énoncé.
- 4.2. **Propriétés des énoncés de Scott** 10
- (a) Montrer que deux énoncés de Scott sont $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ -équivalents.
- (b) Montrer qu'un énoncé de Scott peut avoir des modèles indénombrables.
- 4.3. **Existence d'énoncés de Scott (théorème C) et applications**
- (a) En reprenant les questions 2.3.a–2.3.c, montrer que si $\mathbb{A}$ est dénombrable en langage dénombrable, alors elle possède un énoncé de Karp *dans* $\Lambda_{\omega_1, \omega}$. 15
- (b) En déduire l'existence d'énoncés de Scott, et que tout énoncé de Scott est aussi énoncé de Karp.
- (c) Déduire aussi qu'une $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ -théorie *dénombrable* est $\aleph_0$ -catégorique ssi tous ses modèles infinis sont ∞ -isomorphes.
- (d) Soient $\mathbb{A}$ une structure dénombrable en langage dénombrable, et $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Montrer que X est invariant sous $\text{Aut}(\mathbb{A})$ ss'il existe $\varphi \in \Lambda_{\omega_1, \omega}(\mathcal{L})\text{-Form}(\mathbf{x})$ telle que $X = \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n : \mathbb{A} \models \varphi(\mathbf{a})\}$ (*théorème de définissabilité de Scott*). 20
- 4.4. **Le nombre d'automorphismes.** Cette question est entièrement indépendante. Pour $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$ -structure et $\mathbf{a}$ un uplet, on note $\text{Aut}(\mathbb{A}/\mathbf{a}) = \{f \in \text{Aut}(\mathbb{A}) : f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}$. Si $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ sont de même longueur, on note $(\mathbb{A} ; \mathbf{a}) \simeq (\mathbb{A} ; \mathbf{a}')$ s'il existe $f \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ envoyant $\mathbf{a}$ sur $\mathbf{a}'$. 25
- Soit $\mathbb{A}$ une structure dénombrable. On ne considère que des uplets finis.
- (a) Rappeler pourquoi $\mathbf{a} \simeq_\infty \mathbf{a}'$ équivaut à $(\mathbb{A} ; \mathbf{a}) \simeq (\mathbb{A} ; \mathbf{a}')$.
- (b) Montrer que si $\text{card Aut } \mathbb{A} > \aleph_0$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$, alors $\text{Aut}(\mathbb{A}/\mathbf{a}) \neq \{\text{Id}\}$.
- (c) On suppose que pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$ on a $\text{Aut}(\mathbb{A}/\mathbf{a}) \neq \{\text{Id}\}$. Montrer que si $\mathbf{a} \simeq_\infty \mathbf{a}'$, alors il existe α et $\beta_0 \neq \beta_1 \in \mathbb{A}$ tels que $\mathbf{a}\alpha \simeq_\infty \mathbf{a}'\beta_0$ et $\mathbf{a}\alpha \simeq_\infty \mathbf{a}'\beta_1$. 30
- (d) On suppose encore que pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$ on a $\text{Aut}(\mathbb{A}/\mathbf{a}) \neq \{\text{Id}\}$. Montrer $\text{card Aut } \mathbb{A} = |2|^{\aleph_0}$. [Construire un arbre d' ∞ -isomorphismes. Ne pas oublier de garantir la totalité des domaines et des images.] 35
- (e) Conclure que sont équivalents : (i) $\text{card Aut } \mathbb{A} = |2|^{\aleph_0}$; (ii) $\text{card Aut } \mathbb{A} > \aleph_0$; (iii) pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$, on a $\text{Aut}(\mathbb{A}/\mathbf{a}) \neq \{\text{Id}\}$.
- (f) Application. Montrer que s'il existe $\mathbb{B}$ non dénombrable tel que $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$, alors $\text{card Aut } \mathbb{A} = |2|^{\aleph_0}$. La réciproque est-elle vraie?

4.5. **En langage non dénombrable.** Soit $\mathcal{L}$ un langage *quelconque*.

- (a) Montrer que toute $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ -formule emploie $\leq \aleph_0$ symboles. En déduire que le théorème C ne se généralise pas aux structures dénombrables en langage non dénombrable.
- (b) Vérifier que pour deux $\mathcal{L}$ -structures dénombrables $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, on a toujours :
 $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B} [\Lambda_{\omega_1, \omega}(\mathcal{L})]$ ssi $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B} [\mathcal{L}]$. 5
- (c) Soit $\mathbb{A}$ une $\mathcal{L}$ -structure *dénombrable*. Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$ fixé. Montrer qu'il existe un sous-langage dénombrable $\mathcal{L}_{\mathbf{a}} \subseteq \mathcal{L}$ tel que pour tout $\mathbf{b}$ de la bonne longueur, $(\mathbb{A}; \mathbf{a}) \equiv (\mathbb{B}; \mathbf{b}) [\mathcal{L}_{\mathbf{a}}]$ ssi $(\mathbb{A}; \mathbf{a}) \equiv (\mathbb{B}; \mathbf{b}) [\mathcal{L}]$.
- (d) En déduire qu'il existe un sous-langage *dénombrable* $\mathcal{L}_{\mathbb{A}} \subseteq \mathcal{L}$ vérifiant : pour
toute $\Lambda_{\omega_1, \omega}(\mathcal{L})$ -formule $\varphi(\mathbf{x})$, il existe une $\Lambda_{\omega_1, \omega}(\mathcal{L}_{\mathbb{A}})$ -formule $\chi(\mathbf{x})$ telle que
 $\mathbb{A} \models (\forall \mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \chi(\mathbf{x}))$. 10
- (e) Montrer que tout $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$ -automorphisme de $\mathbb{A}$ est un $\mathcal{L}$ -automorphisme, et généraliser la question 4.3.d en langage non dénombrable. Retrouver aussi le résultat de la question 4.5.b en passant par le théorème C. 15
- (f) Conclure : $\text{card Aut } \mathbb{A} \leq \aleph_0$ ss'il existe $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$ tel que pour chaque $b \in \mathbb{A}$, il existe une $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ -formule $\varphi_b(x, \mathbf{a})$ dont b soit la seule solution dans $\mathbb{A}$.

Notes conclusives

Pour approfondir sur $\Lambda_{\omega_1, \omega}$, [Keisler]. Aude là, la théorie est moins bonne; référence 20
[Dickmann].

• Repères historiques

As was pointed out by Tarski [58b], in the logic L_{ω_1, ω_1} it is possible to characterize the class of well-ordering relations by a single sentence of L_{ω_1, ω_1} . For this reason, and also in view of the behavior of L_{ω_1, ω_1} as regards ques-

tions of completeness and axiomatization, it seems to the author that L_{ω_1, ω_1} behaves more like second-order logic. 30
[Sc65, p. 329]

Va-et-vient et logique infinitaire. • Karp, créatrice de la logique infinitaire moderne (v. § 7, notes conclusives), a montré la coïncidence de $\equiv [\Lambda_{\infty, \omega}]$ et $\simeq_{\infty}$ [Kar65] (question 2.1.a). • Scott, qui s'intéressait déjà au sujet, s'empara vite du *cas dénombrable*. Ses théorèmes de la 4^e partie (théorème C, question 4.3.d) sont donnés sans preuve dans [Sc65, p. 338]. La première démonstra- 35
25 40

[Keisler] : Jerome KEISLER. *Model theory for infinitary logic*. T. 62. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam-London : North-Holland, 1971. x+208

[Dickmann] : Maximo DICKMANN. *Large infinitary languages*. T. 83. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Model theory. Amsterdam-Oxford : North-Holland Publishing Co., 1975, p. xv+464

[Sc65] : Dana Scott. « Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers ». In : *Theory of Models Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley*. North-Holland, Amsterdam, 1965, pp. 329–341

[Kar65] : Carol KARP. « Finite-quantifier equivalence ». In : *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley)*. North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 407-412

[Cha68] : Chen-Chung CHANG. « Some remarks on the model theory of infinitary languages ». In : *The syntax and semantics of infinitary languages*. Sous la dir. de Jon BARWISE. Lecture

tion publiée semble [Cha68], qui dépasse le cas dénombrable. Notamment le théorème A n'est pas de Karp, mais de Chang (v. *Terminologie* infra). Le théorème de définissabilité de la question 2.3.d était de folklore dès [Bar73, Corollary 3 p. 21]. V. aussi [Cha68, p. 46]. • Pour la ressemblance entre les théorèmes A et C, v. *Autour du théorème de Scott, Liens entre ω_1 et ∞* infra. • Structures dénombrables en langage indénombrable : [Cha68, Proposition 5.(ii)] L'approche par la question 4.5.d est de [Mot72].

Estimées fines. • [Cha68] a majoré la complexité (i.e. la logique d'appartenance) des énoncés de Karp en fonction de la cardinalité de $\mathbb{A}$ et $\mathcal{L}$. • La hauteur de va-et-vient par paquets (question 3.2), implicite dans [Cha68], a été étudiée dans [Ben69, § 1] et indépendamment [Cal72, § 3]. • Pour les applications algébriques (compléments § I, § J), la relation $\simeq_{\infty, \omega}^{\nu}$ est moins maniable que $\simeq_{\infty, 2}^{\nu}$, i.e. que le va-et-vient présenté en § 9. En outre $\rho(\varphi)$ est une mesure moins naturelle que $\text{rg}_q(\varphi)$ de la complexité d'une formule élémentaire φ . Le va-et-vient par paquets finis est donc peu utile en pratique.

Inexprimabilité du caractère bien ordonné (théorème B). [Lop66], par une preuve très syntaxique. L'argument par va-et-vient

(question 2.4) est de Karp [Kar65, § 2].

Définissabilité de Krasner (question 3.4.b).

C'est le sommet de sa « théorie de Galois généralisée » ; v. ex. K.3 et § K, notes conclusives. Krasner [Kra38, § 7] l'obtenait par maniement de points génériques. • Le même résultat fut atteint par Sebastião e Silva [Seb45, § 18] ; la traduction annotée [Seb85] est plus facile à se procurer. L'écriture de Sebastião e Silva, très didactique, contraste avec le formalisme de [Kra38]. • Il faudrait chercher si l'« école de Berkeley » a redécouvert ce théorème, en tout cas retrouvé par [McG96] qui y lut un résultat de *logicalité* : v. § 14, notes conclusives, *Qu'est-ce qu'une constante logique ?* V. aussi *Autour du théorème de Scott, Liens entre ω_1 et ∞* infra.

Propriété de Löwenheim (question 4.1.c).

Karp avait un énoncé général [Karp, p. 115], obtenu par complétude. V. aussi [Sco65, p. 334]. • L'échec des phénomènes « ascendants » de Löwenheim-Skolem pour $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ (question 1.4) mène à la notion de *cardinal de Hanf* (v. § 13, notes conclusives).

Le nombre d'automorphismes (question 4.4).

Notes in Mathematics 72. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968, p. iii+268

[Bar73] : Jon BARWISE. « Back and forth through infinitary logic ». In : *Studies in model theory*. T. 8. MAA Studies in Math. 1973, p. 5-34

[Mot72] : Nobuyoshi MOTOHASHI. « Countable structures for uncountable infinitary languages ». In : *Proc. Japan Acad.* 48 (1972), p. 716-718

[Ben69] : Miroslav BENDA. « Reduced products and nonstandard logics ». In : *J. Symbolic Logic* 34 (1969), p. 424-436

[Cal72] : Jean-Pierre CALAIS. « Partial isomorphisms and infinitary languages ». In : *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 18 (1972), p. 435-456

[Lop66] : Edgar LOPEZ-ESCOBAR. « On defining well-orderings ». In : *Fund. Math.* 59 (1966), p. 13-21

[Kra38] : Marc KRASNER. « Une généralisation de la notion de corps ». In : *J. Math. Pures Appl.* (9) 17 (1938), p. 367-385

[Seb45] : José SEBASTIÃO E SILVA. « Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque ». In : *Pont. Acad. Sci. Comment.* 9 (1945), p. 327-357

[Seb85] : José SEBASTIÃO E SILVA. « On automorphisms of arbitrary mathematical systems ». In : *Hist. Philos. Logic* 6.1 (1985). Translated from the Italian and with an introduction by A. J. Franco de Oliveira, p. 91-116

[McG96] : Vann MCGEE. « Logical operations ». In : *J. Philos. Logic* 25.6 (1996), p. 567-580

[Karp] : Carol KARP. *Languages with expressions of infinite length*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964, p. xix+183

[Kue68]. Indép. [Rey70, Theorem 2.2.2] (issu de son doctorat dirigé par Craig) l'obtenait par des méthodes de théorie descriptive, notamment la validité de l'hypothèse du continu pour les ensembles analytiques (v. § 4, notes conclusives). • [Mak70] donne un critère (théorique) pour la réciproque à 4.4.f.

• **Terminologie.** • Elle n'est pas conventionnelle : il y a quelque anachronisme à nommer « énoncé de Karp » un énoncé caractérisant une classe d' ∞ -isomorphisme. • Karp a bien démontré la coïncidence de $\equiv [\Lambda_{\infty, \infty}]$ et $\simeq_{\infty}$ [Kar65] (question 2.1.a ; les variantes « par paquets » de 3.2 sont postérieures, v. *supra*), mais n'a pas vu l'existence d'énoncés caractérisant ces classes. Cette existence fut trouvée par Scott, mais seulement dans le cas dénombrable, et sous le prisme de l' $\aleph_0$ -catégoricité. • La littérature spécialisée confond souvent les deux cas, alors que les questions 2.2.b et 2.2.c appelleraient à la prudence.

• **Maniement de $\Lambda_{\infty, \lambda}$ et $\Lambda_{\infty, \infty}$.** Les collections $\Lambda_{\infty, \lambda}(\mathcal{L})$ -Form et $\Lambda_{\infty, \infty}(\mathcal{L})$ -Form, parfois qualifiées de « classes propres », deviennent des objets maniables dans des théories d'ensembles et de classes comme BGN ou KM. V. compléments § T.

• **Analyse de Scott.** Le rang (ou hauteur) de Scott d'une structure $\mathbb{A}$, ou d'un uplet de $\mathbb{A}$, est une mesure ordinale de sa complexité. Plusieurs définitions ont été proposées. • Dans la plus classique, le rang de $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}$ est le plus petit ordinal $\nu_{\mathbf{a}}$ tel que la formule $\varphi_{\mathbf{a}}^{\nu_{\mathbf{a}}}(\mathbf{x})$ caractérise la classe d' ∞ -isomorphisme de $\mathbf{a}$. Le rang de $\mathbb{A}$ est $\nu_{\mathbb{A}} = \sup\{\nu_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{A}^{<\omega}\}$ (v. question 2.3.b). C'est bien un ordinal ; et si $\mathbb{A}$ est dénombrable en langage dénombrable, c'est un ordinal $< \omega_1$. • Plus récemment, [Mon15] a suggéré de définir le rang de Scott comme un rang naturel d'alternance des formules caractérisant la classe d' ∞ -isomorphisme. • Ces questions sont légitimes, mais semblent plus proches de la complexité que de la logique mathématique. Bon tour d'horizon [Har22] ; on laisse le sujet. • Analyse de Scott en logique continue : [Ben+17].

• **Logique $\Lambda_{\infty, \lambda}$ et nombre de modèles.** • Question 3.2.f : [Cha68, Proposition 4]. • La question 3.3.a montre que la catégoricité absolue est rare avant $\Lambda_{\infty, \infty}$, et qu'il faut travailler à cardinalité fixée ou majorée. (La catégoricité absolue de structures données est pourtant possible : pour tout bon ordre, il existe un $\Lambda_{\infty, \omega}(<)$ -énoncé le caractérisant à isomorphisme près ; ex. 26.8.) • Les constructions par tours dénombrables de 3.3.b–3.3.c ont quelque chose d'inévitable, comme esquissé par l'intéres-

[Kue68] : David KUEKER. « Definability, automorphisms, and infinitary languages ». English. In : *The Syntax and Semantics of Infinitary Languages*. Sous la dir. de Jon BARWISE. T. 72. Lect. Notes Math. Springer, 1968, p. 152-165

[Rey70] : Gonzalo REYES. « Local definability theory ». In : *Ann. Math. Logic* 1 (1970), p. 95-137

[Mak70] : Michael MAKKAÏ. « Structures elementarily equivalent relative to infinitary languages to models of higher power ». In : *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 21 (1970), p. 283-295

[Mon15] : Antonio MONTALBÁN. « A robust Scott rank ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 143.12 (2015), p. 5427-5436

[Har22] : Matthew HARRISON-TRAINOR. « An introduction to the Scott complexity of countable structures and a survey of recent results ». In : *Bull. Symb. Log.* 28.1 (2022), p. 71-103

[Ben+17] : Itai BEN YAACOV et al. « Metric Scott analysis ». In : *Adv. Math.* 318 (2017), p. 46-87

[Kue81] : David KUEKER. « $L_{\infty \omega_1}$ elementarily equivalent models of power ω_1 ». In : *Logic Year 1979–80 (Proc. Seminars and Conf. Math. Logic, Univ. Connecticut, Storrs, Conn., 1979/80)*. T. 859. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1981, p. 120-131

sant [Kue81] resté sans suite. • Leur résultat se généralise : pour tout cardinal *régulier* κ , il existe deux structures $\Lambda_{\infty, \kappa}$ -équivalentes de cardinal κ non isomorphes ; [Cha68, p. 45] l'attribue à Morley, non publié. [Dickmann, p. 350 sqq] donne un exemple de Tait, jamais publié non plus. Le cas singulier est encore indécis (et peut-être indécidable). • Au-delà de la catégoricité, il s'agit plutôt de *compter les modèles de cardinal* λ des $\Lambda_{\infty, \lambda}$ -théories. C'est le sujet d'un corpus difficile, entamé dans [Pal77] puis approfondi dans [She81] et ses suites.

• Autour du théorème de Scott

L'isomorphisme est-il logique ? • Pour des structures *dénombrables*, la coïncidence des relations $\equiv [\Lambda_{\omega_1, \omega}]$ et $\simeq$ est remarquable. L'analogie pour la sémantique pleine du deuxième ordre $\Lambda^{2.p}$ est indécidable dans ZFC (v. § 22, notes conclusives, *Complétude et catégoricité*). • En ce sens, $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ apparaît paradoxalement à la fois *plus forte* et *moins dépendante* du cadre ensembliste que $\Lambda^{2.p}$. • Cependant ω_1 reste tributaire de ce cadre.

Liens entre ω_1 et ∞ . La ressemblance entre le théorème C pour $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ et le théorème A pour $\Lambda_{\infty, \omega}$ mérite un commentaire. • Si l'on n'utilise pas toute la force de la théorie de Cantor formalisée en ZF, plus précisément si l'on s'abstient d'invoquer l'axiome de la puissance, il n'y a pas grand lieu de distinguer ω_1 et ∞ . Cette vue d'inspiration skolemiste est très conforme à l'esprit et aux résultats de la théorie des modèles (v. § 13, notes conclusives, *Catégoricité : le théorème de Morley*). Elle l'est aussi aux résultats de la théorie des ensembles : tout cardinal infini peut être « forcé dénombrable » (v. § 26, notes conclusives, *Dénombrabilisme*). • Ce point de vue suggère aussi des liens forts entre $\simeq_\infty$ et $\simeq$. V. *Équivalence en logique* $\Lambda_{\infty, \omega}$.

[Pal77] : Evgeniĭ Andreevich PALYUTIN. « The number of models of L_{∞, ω_1} -theories ». In : *Algebra i Logika* 16.1 (1977), p. 74-87, 124

[She81] : Saharon SHELAH. « On the number of nonisomorphic models of cardinality λ $L_{\infty, \lambda}$ -equivalent to a fixed model ». In : *Notre Dame J. Formal Logic* 22.1 (1981), p. 5-10

[NS78] : Mark NADEL et Jonathan STAVI. « $L_{\infty, \lambda}$ -equivalence, isomorphism and potential isomorphism ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 236 (1978), p. 51-74

• **Équivalence en logique** $\Lambda_{\infty, \omega}$ (2^e lecture). D'après le théorème A (et même sa forme faible la question 2.1.a), la relation $\equiv [\Lambda_{\infty, \omega}]$ coïncide avec $\simeq_\infty$. À cadre ensembliste fixé, c'est plus faible que $\simeq$; mais un argument de forcing élimine l'écart.

Théorème ([Bar73]). Soit $\mathbb{V}$ un modèle de ZFC. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux structures de taille ensembliste dans $\mathbb{V}$. Alors $\mathbb{A} \simeq_\infty \mathbb{B}$ ss'il existe une extension générique $\mathbb{V}[G]$ dans laquelle $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.

(C'est en fait assez clair par destruction cardinale et absoluté de $\simeq_\infty$.) • Ce résultat justifie le nom parfois donné d'*isomorphisme potentiel* à la relation $\simeq_\infty$. • Pas d'analogue dans $\Lambda_{\infty, \lambda}$ [NS78].

• **Sur la compacité.** Hors de la logique élémentaire, une théorie Θ finiment satisfaisable n'est pas nécessairement satisfaisable.

Compacité et grands cardinaux. On peut renforcer l'hypothèse de satisfaisabilité en : toute partie de *cardinal* $< \kappa$ de Θ doit être satisfaisable. Ceci mène à deux notions distinctes de compacité (forte ou faible) pour $\Lambda_{\kappa, \kappa}$. Par extension, κ lui-même est dit *fortement* ou *faiblement compact*. V. § sé5, 2^e partie.

Compacité de Barwise. On peut modifier la notion même de théorie.

The early treatments of infinitary languages had the formulas classified by cardinality (Scott-Tarski [12], 1958, Karp [4], 1959). Formulas of $L_{\kappa, \lambda}$ were to have conjunctions of length less than κ , quantifier-sequences of length less than λ , where κ and λ were cardinals. Actually there was no good reason for doing things that way as Kreisel rather forcefully pointed out in [8], 1963. If, for instance, one is looking at a logical system for formulas which belong to

a set A , what one needs to know about A is that it has closure properties adequate for setting up the logic and that when a formula in A is provable, it has a proof in A . Following Kreisel's suggestions which were, by the way, model-theoretically motivated, Barwise in his thesis [1], 1966, developed infinitary languages and logic along these lines and found, among other things, that the transitive sets A suitable for a natural cut-free deductive system for finite-quantifier formulas are precisely the admissible sets of infinitary recursion theory (Kripke [10]) and their unions.

[Kar68]

- Karp [Karp] avait montré la complétude de $\Lambda_{\omega_1, \omega}$. Mais l'explosion combinatoire des formules passé $\Lambda_{\omega_1, \omega}$ rend erratique le comportement des $\Lambda_{\kappa, \omega}$. • Un ensemble A est admissible s'il est clos sous appartenance

(« transitif ») et que $(A ; \in)$ est modèle d'un fragment faible de ZF. • Cette notion a été introduite dans des exposés de Kripke [Kri64], à l'origine pour faire de la calculabilité infinitaire. Barwise [Bar69] (issu de son doctorat [Bar67] sous la direction de Feferman) a montré que c'était le bon cadre pour étendre la complétude. • Un ensemble admissible fournit des notions d' A -effectivité et de A -finitude. Il fournit également une notion de $\mathcal{L}_A$ -formule : une $\Lambda_{\infty, \omega}(\mathcal{L})$ -formule appartenant à A .

Théorème ([Bar69, § 2]). Soit A un ensemble admissible et dénombrable. Soit Θ une $\mathcal{L}_A$ -théorie A -effective A -finiment satisfaisable. Alors Θ est satisfaisable.

L'argument d'origine employait de la théorie de la démonstration qu'une dose d'abstraction supplémentaire a permis d'éliminer [Mak69]. • On recommande [KK04].

[Kar68] : Carol Karp. « An algebraic proof of the Barwise compactness theorem ». English. In: *Syntax and Semantics of infinitary Languages*. Ed. by Jon Barwise. Vol. 72. Lecture Notes in Mathematics. 1968, pp. 80–9

[Kri64] : Raymond SMULLYAN. « Meeting of the Association for Symbolic Logic ». In : *J. Symbolic Logic* 29.3 (1964), p. 161-162

[Bar69] : Jon BARWISE. « Infinitary logic and admissible sets ». In : *J. Symbolic Logic* 34.2 (1969), p. 226-252

[Bar67] : Kenneth Jon BARWISE. « Infinitary logic and admissible sets ». Thèse de doct. Stanford University, 1967, p. 124

[Mak69] : Michael MAKKAÏ. « An application of a method of Smullyan to logics on admissible sets ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sé. Sci. Math. Astronom. Phys.* 17 (1969), p. 341-346

[KK04] : Jerome KEISLER et Julia KNIGHT. « Barwise : infinitary logic and admissible sets ». In : *Bull. Symbolic Logic* 10.1 (2004), p. 4-36