

§ SÉ5. Cardinaux mesurables

Ce sujet d'étude présente de grands cardinaux très liés à la logique : les cardinaux *mesurables*. Après de premières propriétés, on les intercale entre les cardinaux *fortement* et *faiblement* compacts, qui ont aussi une interprétation logique. Puis on passe aux ultrapuissances indexées par des cardinaux mesurables, pour démontrer qu'un univers constructible n'a pas de tels cardinaux. On étudie enfin les plongements élémentaires de modèles de ZF.

Prérequis : pour les deux premières parties, § 1.3, §§ 6–11 (dont § 7), §§ 23–26 (dont § 26.3). La troisième demande en outre § 27 et § 29. La dernière est indépendante et emploie surtout § 12 et §§ 23–26.

Un modèle $\mathbb{V} \models \text{ZFC}$ est fixé. Plutôt qu'un objet, un *grand cardinal* est une propriété affirmant le caractère « très infini » d'un cardinal. C'est souvent l'extrapolation d'un trait possédé par $\aleph_0$, renforcé par la non-dénombrabilité. En général ZFC ne démontre pas l'existence de grands cardinaux, qui restent hypothétiques.

Définition (filtre κ -complet). Soit κ un cardinal. Un filtre $\mathcal{F}$ d'un anneau $P(I)$ est κ -complet s'il est clos sous intersections de cardinal $< \kappa$, i.e. : si $\lambda < \kappa$ et $(X_\alpha : \alpha \in \lambda) \in \mathcal{F}^\lambda$, alors $\bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha \in \mathcal{F}$.

Question préliminaire. Étendre le théorème de Łoś à $\Lambda_{\kappa, \kappa}$ pour les ultrafiltres κ -complets.

1. Cardinaux mesurables

Cette partie introduit les cardinaux mesurables. Les questions 1.4 à 1.6 sont optionnelles et peuvent être omises pour passer à § 2 ou § 3.

Définition (cardinal mesurable). Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ est *mesurable* s'il existe un ultrafiltre κ -complet non principal de $P(\kappa)$. Un tel ultrafiltre *mesure* alors κ .

1.1. Premières propriétés

- Soient I un ensemble non vide et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $P(I)$. Montrer que $\mathcal{U}$ est κ -complet ssi pour tout cardinal $\lambda < \kappa$ et toute partition $I = \bigsqcup_{\alpha \in \lambda} X_\alpha$, il existe un unique $\alpha \in \lambda$ tel que $X_\alpha \in \mathcal{U}$.
- En déduire que si $\mathcal{U}$ mesure κ , alors tout membre de $\mathcal{U}$ est de cardinal κ .
- Soient I un ensemble non vide et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre $\aleph_1$ -complet et non principal de $P(I)$. Soit κ minimal tel que $\mathcal{U}$ n'est pas κ^+ -complet. Montrer que κ est mesurable. [Former $f : I \rightarrow \kappa$ et « transporter » l'ultrafiltre.]
- En déduire que l'éventuel plus petit cardinal λ tel qu'il existe un ultrafiltre $\aleph_1$ -complet non principal de $P(\lambda)$ est mesurable.

1.2. **Mesurable implique inaccessible.** Soit κ un cardinal mesurable.

- (a) Montrer que κ est *régulier*, i.e. $\text{cof } \kappa = \kappa$, i.e. ne peut s'écrire comme réunion de $< \kappa$ parties de cardinal $< \kappa$.
- (b) Montrer que si $\lambda < \kappa$, alors $|2|^\lambda < \kappa$. [Considérer les $F_{\alpha, \varepsilon} = \{f \in 2^\lambda : f(\alpha) = \varepsilon\}$.] Conclure.

1.3. **Caractérisation modèle-théorique.** Soit $\kappa > \aleph_0$. Montrer que κ est mesurable ssi toute réunion croissante $\Theta = \bigcup_{\alpha < \kappa} \Theta_\alpha$ de $\Lambda_{\kappa, \kappa}$ -théories satisfaisables est elle-même satisfaisable. [Introduire des relations R_A pour $A \subseteq \kappa$, des points c_α pour $\alpha \in \kappa$, et un « point à l'infini » ∞ codant l'ultrafiltre.]

Les questions suivantes sont facultatives ; on peut passer à § 2.

Définition. Une *mesure d'Ulam* sur un ensemble I est une fonction $\mu : P(I) \rightarrow [0, 1]$ non nulle, dénombrablement additive, et telle qu'en tout point, $\mu(\{x\}) = 0$. On dit que I est *Ulam-mesurable*.

- 1.4. Soit κ un cardinal Ulam-mesurable. Une partie $A \subseteq \kappa$ est *divisible* s'il y a une décomposition $A = A_0 \sqcup A_1$ en parties de mesure > 0 .
 - (a) On suppose qu'il y a une partie non négligeable indivisible dans κ . Montrer que κ est Ulam-mesurable par une (autre) mesure à valeurs $\{0, 1\}$.
 - (b) On suppose que toute partie non négligeable de κ est divisible. On choisit une famille de parties non négligeables indexée par un sous-arbre de $(2^{<\kappa}; \sqsubseteq)$, où $\sqsubseteq$ est l'ordre d'extension. On pose $A_\emptyset = \kappa$. Si A_s est connu, on le divise en parties non négligeables $A_s = A_{s,0} \sqcup A_{s,1}$. Pour $s \in 2^\alpha$ avec α limite, on pose $A_s = \bigcap_{\beta < \alpha} A_{s|_\beta}$. On enlève enfin les sommets vides. Montrer que chaque branche ainsi que chaque niveau de l'arbre est dénombrable. En déduire que l'ensemble des branches est de cardinal $\leq |2|^{\aleph_0}$, puis montrer qu'il est Ulam-mesurable.
- 1.5. Soient κ l'éventuel plus petit cardinal Ulam-mesurable, et μ une mesure d'Ulam sur κ . Montrer que μ est $(< \kappa)$ -additive. [Se ramener à des X_α négligeables.]
- 1.6. En déduire que le plus petit cardinal Ulam-mesurable (s'il existe) est mesurable ou inférieur à $|2|^{\aleph_0}$.

2. Cardinaux fortement et faiblement compacts

Cette partie présente les cardinaux fortement et faiblement compacts, les caractérise logiquement, et les compare aux mesurables. Elle n'est pas utilisée dans la suite. Prérequis supplémentaires : ex. 10.2 et 11.1 ; § 18.

Une théorie est κ -satisfaisable si toute partie de cardinal $< \kappa$ est satisfaisable.

Définition (cardinal ou logique fortement compact(e)). Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal.

- κ est *fortement compact* si pour tout ensemble I , tout filtre κ -complet de $P(I)$ est contenu dans un ultrafiltre κ -complet.
- $\Lambda_{\kappa, \kappa}$ est *fortement compacte* si toute théorie κ -satisfaisable est satisfaisable.

Dans la première définition, pas de restriction sur $\text{card } I$. Dans la seconde, pas de restriction sur la taille du langage (cf. variantes « faibles » infra).

2.1. Fortement compact implique mesurable.

- (a) Montrer qu'un cardinal fortement compact est régulier. [Passer dans κ^+ . Si κ est singulier, alors « κ -complet » entraîne « κ^+ -complet » ; or mesurable implique inaccessible d'après la question 1.2.] 5
- (b) Dédire qu'un cardinal fortement compact est mesurable.

2.2. Équivalence des deux compacités fortes. Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal.

- (a) Montrer que si κ est fortement compact, alors $\Lambda_{\kappa, \kappa}$ l'est. Retrouver qu'un cardinal fortement compact est mesurable. [Question 1.3.] 10
- (b) Montrer que si $\Lambda_{\kappa, \kappa}$ est fortement compacte, alors κ l'est. [La logique propositionnelle $\Lambda_{\kappa, 0}$ suffit.]

Aux thèmes précédents on ajoute le lemme de König.

Définition (arbre ensembliste ; propriété de l'arbre).

- Un *arbre ensembliste* est un ordre partiel $\mathbb{A} = (A ; \sqsubseteq)$ ayant un plus petit élément et tel que chaque $\mathbb{A}_{\sqsubseteq s}$ est bien ordonné. La *hauteur* de $s \in \mathbb{A}$ est $\text{ord } \mathbb{A}_{\sqsubseteq s}$, et celle de $\mathbb{A}$ est $\sup\{h(s) + 1 : s \in \mathbb{A}\}$. Les *niveaux* $\mathbb{A}_\alpha = \{s \in \mathbb{A} : h(s) = \alpha\}$ pour $\alpha < h(\mathbb{A})$ sont bien définis. 15
- Un cardinal κ a la *propriété de l'arbre* si tout arbre ensembliste de hauteur κ et à niveaux de cardinal $< \kappa$ possède une branche de longueur κ . 20

Définition (cardinal ou logique faiblement compact(e)). Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal.

- κ est *faiblement compact* si pour chaque famille $\mathcal{B} \subseteq P(\kappa)$ de cardinal $\leq \kappa$, il existe un filtre non principal κ -complet de $P(\kappa)$ tel que $(\forall X)(X \in \mathcal{B} \rightarrow X \in \mathcal{F} \vee X^c \in \mathcal{F})$. 25
- $\Lambda_{\kappa, \kappa}$ est *faiblement compacte* si pour tout langage $\mathcal{L}$ de cardinal $\leq \kappa$, toute $\Lambda_{\kappa, \kappa}(\mathcal{L})$ -théorie κ -satisfaisable est satisfaisable. 30

2.3. Mesurable implique faiblement compact. Le démontrer.

2.4. Faiblement compact équivaut à (inaccessible + propriété de l'arbre).

- (a) Montrer que la propriété de l'arbre implique la régularité.
- (b) Montrer qu'un cardinal faiblement compact est inaccessible. [Régularité : si $\kappa = \bigsqcup_\lambda X_\alpha$, considérer $\{X_\alpha : \alpha \in \lambda\} \cup \{\{x\} : x \in \kappa\}$. Caractère fortement limite : voir 1.2.b.] 30
- (c) Montrer qu'un cardinal faiblement compact a la propriété de l'arbre.
- (d) Montrer qu'un cardinal inaccessible ayant la propriété de l'arbre est faiblement compact. [Se ramener à $\mathcal{B}$ anneau de Boole κ -complet, puis étiqueter l'arbre $2^{<\kappa}$ par des intersections.] 35

(*) **2.5. Équivalence des deux compacités faibles.** Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal.

- (a) Montrer que si κ est faiblement compact, alors $\Lambda_{\kappa,0}$ l'est.
- (b) (Optionnelle ; prérequis : § 18.) Montrer que pour κ inaccessible, si $\Lambda_{\kappa,0}$ est faiblement compact, alors $\Lambda_{\kappa,\kappa}$ l'est. [Henkin, pas Łoś.]
- (c) Montrer que si $\Lambda_{\kappa,0}$ est faiblement compact, alors κ l'est. [Montrer la propriété de l'arbre et le caractère fortement limite.]

5

3. Ultrapuissance indexée par un cardinal mesurable

Cette partie demande la première. On fait démontrer deux résultats, d'abord avec des ultrapuissances de structures ensemblistes, puis avec des ultrapuissances de taille classe.

Prérequis supplémentaires à partir de 3.2 : ex. 24.5 et 27.7 ; § 27, § 29.

10

Théorème A. Si κ est mesurable, alors c'est le κ^e cardinal inaccessible.

Théorème B. Si $\mathbb{V} \models \mathbb{V} = \mathbb{L}$, alors $\mathbb{V}$ n'a pas de cardinal mesurable.

On suppose qu'il existe un cardinal mesurable κ . Soit $\mathcal{U}$ mesurant κ .

- 3.1. **Théorème A par ultrapuissance ensembliste.** Soit $\mathbb{O}^* = \int_{i \in \kappa} (\kappa ; <) d\mathcal{U}_i$ l'ultrapuissance de $(\kappa ; <)$ modulo $\mathcal{U}$. Soit $d: (\kappa ; <) \hookrightarrow \mathbb{O}^*$ le plongement diagonal, qui envoie $\beta \in \kappa$ sur la classe de la suite constante $[(\beta)_\alpha] \in \mathbb{O}^*$. Attention : l'image $(d(\alpha) ; <)$ n'est pas nécessairement isomorphe à $(\alpha ; <)$.
- (a) Montrer que $\mathbb{O}^*$ est un bon ordre [penser à $\Lambda_{\omega_1, \omega}$] d'ordinal $\text{ord } \mathbb{O}^* > \kappa$.
 - (b) Le modèle ambiant $\mathbb{V}$ fournit la sémantique du deuxième ordre. Une formule du 2^e ordre est *de classe* Σ_1^1 si équivalente à une de la forme $(\exists X)(Q)\varphi_0$, où (Q) est un bloc de quantifications élémentaires et φ_0 est du deuxième ordre mais sans quantificateurs. Vérifier que la disjonction de deux formules Σ_1^1 reste Σ_1^1 .
 - (c) Montrer que si $\varphi(\mathbf{x})$ est Σ_1^1 et $\{i \in \kappa : (\kappa ; <) \models \varphi(\mathbf{a}_i)\} \in \mathcal{U}$, alors $\mathbb{O}^* \models \varphi([\mathbf{a}_i])$.
 - (d) Donner une $\in$ -formule $\varphi_{\text{-rég}}(x)$ de classe Σ_1^1 telle que pour tous ordinaux $\alpha < \beta$, on ait : $(\beta ; <) \models \varphi_{\text{-rég}}(\alpha)$ ssi α n'est pas un cardinal régulier.
 - (e) Dédire qu'il existe une $\in$ -formule $\varphi_{\text{-In}}(x)$ de classe Σ_1^1 telle que pour tous ordinaux $\alpha < \beta$, on ait : $(\beta ; <) \models \varphi_{\text{-In}}(\alpha)$ ssi α n'est pas un cardinal inaccessible.
 - (f) On suppose que l'ensemble $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ est un cardinal inaccessible}\}$ est majoré par $\alpha_0 < \kappa$. Montrer $\mathbb{O}^* \models (\forall x)(x \leq d(\alpha_0) \vee \varphi_{\text{-In}}(x))$.
 - (g) De la contradiction résultante, déduire le théorème A.
- 3.2. **Théorème B par ultrapuissance ensembliste.** On suppose que κ est le plus petit cardinal mesurable. Soit $\lambda = (\text{card } P(P(P(\kappa))))^+$. Soit $H_{<\lambda}$ l'ensemble des ensembles héréditairement de taille $< \lambda$, i.e. tels que $\text{card}(\text{cl}\{x\}) < \lambda$. (C'est bien un ensemble : v. ex. 27.7.) Soit $\mathbb{H} = (H_{<\lambda} ; \in)$.

- (a) Donner une formule élémentaire sans paramètres telle que $\mathbb{H} \models (\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow x = \kappa)$.
- (b) Soient $\mathbb{H}^* = (H^* ; \varepsilon^*) = \int_{i \in \kappa} \mathbb{H} d\mathcal{U}_i$, et $d: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^*$ le plongement diagonal. Montrer $\mathbb{H}^* \models \text{ZF} \setminus \{P\}$, et que la relation ε^* est bien fondée. $[\Lambda_{\omega_1, \omega}]$
- (c) Montrer $(\text{Ord}[\mathbb{H}^*] ; \varepsilon^*) \simeq (\lambda ; <)$. [Compter le nombre de ε^* -prédécesseurs d'un ordinal de $\mathbb{H}^*$; noter la régularité de λ .] 5
- (d) Démontrer $\text{ord}(d(\kappa) ; \varepsilon^*) > \kappa$ puis $\mathbb{H}^* \not\cong \mathbb{H}$. Conclure $\mathbb{V} \neq \mathbb{L}$ de l'exercice 29.7.

On va maintenant *former une ultrapuissance du modèle dans le modèle* par la même méthode qu'à l'ex. 27.2 (non requis). Attention : les notations tendent à omettre la dépendance en $\mathcal{U}$. 10

3.3. Formation de $\mathbb{V}_\kappa^*$. Soit $\mathcal{F}_\kappa(x)$ la collection définissable : « x est le graphe d'une fonction de domaine κ ». Sur $\mathcal{F}_\kappa$, soit $f \sim g$ la relation d'équivalence : $\{i \in \kappa : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Attention : la classe d'équivalence $(\mathcal{F}_\kappa(g) \wedge g \sim f)$ n'est pas un ensemble. 15

- (a) Soit rg le rang de fondation (§ 27.1). La *classe d'équivalence restreinte* $[f]$ est la collection $\mathcal{F}_\kappa(x) \wedge (x \sim f) \wedge (\forall h)[(\mathcal{F}_\kappa(h) \wedge h \sim f) \rightarrow (\text{rg } x \leq \text{rg } h)]$. Montrer que c'est un ensemble.
- (b) Soit V^* la collection $(\exists f)(\mathcal{F}_\kappa(f) \wedge x = [f])$. Sur V^* , la relation $[f] \varepsilon^* [g]$ définie par $\{i \in I : \mathbb{V} \models f(i) \in g(i)\} \in \mathcal{U}$ ne dépend clairement pas des représentants. Soient $\mathbb{V}_\kappa^* = (V^* ; \varepsilon^*)$ et $d_\kappa: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}_\kappa^*$ le plongement diagonal. Vérifier que d_κ est élémentaire. 20
- (c) En déduire que $(V^* ; \varepsilon^*)$ est extensionnelle, bien fondée, à segments ε^* -initiaux ensemblistes.

3.4. Plongement de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$ (prérequis : ex. 24.5) 25

- (a) Soient $d_\kappa: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}_\kappa^*$ le plongement diagonal, $\mathbb{M}_\kappa = (M_\kappa ; \in)$ le tassement de Mostowski de $\mathbb{V}_\kappa^*$, et $\pi_\kappa: \mathbb{V}_\kappa^* \simeq \mathbb{M}_\kappa$ l'isomorphisme associé. Montrer que $j_\kappa = \pi_\kappa \circ d_\kappa$ est un plongement élémentaire $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{M}_\kappa$ de graphe $\mathbb{V}$ -définissable. Montrer $j_\kappa(\kappa) > \kappa$.
- (b) Montrer que si $\alpha < \kappa$, alors $j_\kappa(\alpha) = \alpha$ et retrouver le théorème A. 30
- (c) Retrouver le théorème B. [Minimalité de $\mathbb{L}$, ex. 29.3.]

4. Plongements élémentaires de l'univers et phénomènes de rigidité

La dernière partie, indépendante, est motivée par la troisième mais n'utilise pas ses résultats. On contraint fortement les plongements élémentaires $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$.
Prérequis supplémentaires : § 12 et réflexion (ex. 27.6). 35

D'après la question 3.4, un cardinal mesurable induit un plongement élémentaire vers une collection transitive, $j: \mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{M}$. Peut-on avoir $\mathbb{M} = \mathbb{V}$, i.e. existe-t-il $j: \mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{V}$ élémentaire ?

- On n'étudie pas ici l'existence d'automorphismes de $\mathbb{V}$ (cf. ex. 27.5, non requis) mais celle de plongements élémentaires $j: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, *sans demander la surjectivité*.
- On ne suppose pas la définissabilité de j , objet a priori très externe à $\mathbb{V}$. Or la récurrence ordinale veut des collections définissables. Il faut donc *ajouter j au langage et supposer $\mathbb{V} \models \text{ZF}(j)$* , théorie dont les instances du remplacement parcourent les $\{\in, j\}$ -formules. 5

Théorème C (rigidité). Soient $\mathbb{V} \models \text{ZF}$ et $j: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tels que $\mathbb{V} \models \text{ZF}(j)$.

- (i) Si j est définissable, alors $j = \text{Id}$.
- (ii) Si $\mathbb{V} \models \text{AC}$, alors $j = \text{Id}$.

Dans le premier cas, les $\{\in, j\}$ -instances du remplacement sont déjà présentes dans ZF , i.e. l'hypothèse $\mathbb{V} \models \text{ZF}(j)$ est redondante; mais pas dans le second. On travaille sous les hypothèses du théorème C, supposant en outre $j \neq \text{Id}$. 10

4.1. Point critique

- (a) Montrer que si $\mathbb{V} \models \text{Ord}(\alpha)$, alors $\mathbb{V} \models \text{Ord}(j(\alpha)) \wedge j(\alpha) \geq \alpha$.
- (b) Montrer que pour tout ordinal, $(j|_\alpha = \text{Id}_\alpha) \rightarrow (j|_{V_\alpha} = \text{Id}_{V_\alpha})$. [Pour l'incrémentation, montrer $j(x) \subseteq V_\alpha$.] 15
- (c) On appelle *point critique* de j l'ordinal $\text{crit}(j) = \min[\text{Ord}(\alpha) \wedge j(\alpha) \neq \alpha]$. Montrer que $\text{crit}(j)$ n'est pas une image par j et en déduire $j(\omega) = \omega$. [On a $\text{im } j \models \text{AI}$.]
- (d) En supposant AC pour avoir la définition usuelle, montrer que $\text{crit}(j)$ est un cardinal inaccessible (renforcement en 4.2). 20
- (e) Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

$$j(\text{crit}(j)) = j(\{\alpha < \text{crit}(j)\}) = \{j(\alpha) : \alpha < \text{crit}(j)\} = \text{crit}(j),$$
 contradiction.

4.2. Points critiques et mesurabilité. Cette question facultative fait le lien avec 3.4. Montrer que $\text{crit}(j)$ est mesuré par $\mathcal{U} = \{A \in P(\text{crit}(j)) : \text{crit}(j) \in j(A)\}$. (On retrouve l'inaccessibilité grâce à la question 1.2.) 25

4.3. Rigidité (i). On suppose j définissable. Soient $\varphi(x, y, z)$ et a de $\mathbb{V}$ tels que : $y = j(x)$ ssi $\mathbb{V} \models \varphi(x, y, a)$.

- (a) Soit $i: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ un $\in$ -plongement. Montrer que i est élémentaire ssi : 30

$$\mathbb{V} \models (\forall \alpha)(\forall f)(\forall \mathbf{b}) \left[\begin{array}{l} \text{« } \alpha \text{ ordinal et } f(\mathbf{b}) \text{ formule formelle à paramètres} \\ \text{dans } V_\alpha \text{ »} \end{array} \rightarrow (V_\alpha \models f(\mathbf{b}) \leftrightarrow V_{i(\alpha)} \models f(i(\mathbf{b}))) \right].$$

[Procéder par réflexion, ex. 27.6. Notamment, si les α_n conviennent à φ , alors $\sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ aussi.]

- (b) Soit $\mathcal{C}(z)$ la collection « $\varphi(x, y, z)$ définit un plongement élémentaire $\neq \text{Id}$ ». Si $\mathbb{V} \models \mathcal{C}(b)$, on note j_b ce plongement. Montrer que $\mathcal{C}[\mathbb{V}]$ et la fonctionnelle κ_z de $\mathcal{C}[\mathbb{V}]$ vers $\text{Card}[\mathbb{V}]$ qui envoie z sur $\text{crit}(j_z)$ sont $\emptyset$ -définissables. 35

- (c) Minimiser κ_z et tirer une contradiction.
- (d) Montrer que la rigidité (i) permet de retrouver le théorème B.

4.4. **Rigidité (ii).** On suppose $\mathbb{V} \models \text{ZFC}(j)$.

- (a) Soit λ un cardinal vérifiant $|2|^{|\lambda|} = |\lambda|^{\aleph_0}$. Montrer qu'il existe $f: \lambda^{\aleph_0} \rightarrow \lambda$ telle que pour tout $A \subseteq \lambda$ de cardinal λ et tout $\alpha < \lambda$, il existe $s \in A^{\aleph_0}$ tel que $f(s) = \alpha$. [Énumérer les paires (A_β, α_β) par $|2|^{|\lambda|}$ et former des $s_\beta \in A_\beta^{\aleph_0}$ tous distincts.]
- (b) Soient $\kappa_0 = \text{crit}(j)$, puis $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$ et $\lambda = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$. Montrer $j(\lambda) = \lambda$ et $|\lambda|^{\aleph_0} = |2|^{|\lambda|}$.
- (c) Soient f comme à la question 4.4.a et $A = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\}$. Montrer qu'il existe $s \in A^{\aleph_0}$ tel que $j(f)(s) = \kappa_0$. Dédire une contradiction.
- (d) Où a-t-on utilisé le choix ? Où a-t-on utilisé le $\{\in, j\}$ -remplacement ?

Notes conclusives

Tout traité de théorie des ensembles mentionne les grands cardinaux mais on recommande [Kanamori].

probably the best known large cardinals of all. The voice of caution reminds us that they were invented by the same fellow who invented the hydrogen bomb. [Mad88a, § IV]

• Repères historiques

Measurable cardinals were introduced by Ulam in [1930], where he proved that they are inaccessible. They are now known to be much larger than that, larger than all the hyperinaccessibles, Mahlos and weakly compacts. Indeed, because of their power, they are

Cardinaux mesurables. • Introduits par Ulam travaillant sur une question de Banach [Ula30]. (L'École polonaise de la théorie de la mesure donna aussi le théorème de Banach-Tarski inspiré par Hausdorff; v. § C.) • Caractérisation modèle-théorique : [Kei62]. Ils ont aussi une interprétation catégorique : [Bla76] et indépendamment

[Kanamori] : Akihiro KANAMORI. *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings*. Second. Springer Monographs in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2003, p. xxii + 536

[Mad88a] : Penelope MADDY. « Believing the axioms I ». In : *J. Symbolic Logic* 53.2 (1988), p. 481-511

[Ula30] : Stanisław ULAM. « Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre ». In : *Fundam. Math.* 16 (1930), p. 140-150

[Kei62] : Jerome KEISLER. « Some applications of the theory of models to set theory ». In : *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr.)* Stanford : Stanford Univ. Press, 1962, p. 80-86

[Bla76] : Andreas BLASS. « Exact functors and measurable cardinals ». In : *Pacific J. Math.* 63.2 (1976), p. 335-346

[Trn71] : Věra TRNKOVA. « On descriptive classification of set-functors II ». In : *Comment. Math. Univ. Carolinae* 12 (1971), p. 345-357

[Tar62] : Alfred TARSKI. « Some problems and results relevant to the foundations of set theory ». In : *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr.)* Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1962, p. 125-135

[Trn71]. • Théorème A : souvent attribué à [Tar62, Theorem 3], mais celui-ci invoque [Han64]. La preuve semble apparaître dans [Kei62]. Théorème B « $\mathbb{L}$ n'a pas de mesurables » : [Sco61]. La démonstration par troncatures (i.e. en prenant l'ultrapuissance de $H_{<\lambda}$) suit [Chang-Keisler]. • En résumé du sujet, sont équivalents : (i) il existe un cardinal mesurable ; (ii) il existe un ensemble I et un ultrafiltre $\mathbb{N}_1$ -complet non principal de $P(I)$ (question 1.1.c) ; (iii) il existe une classe transitive $\mathbb{M}$ et un plongement élémentaire $j : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{M}$ (questions 3.4 et 4.2). Attention, j comme en (iii) n'est pas nécessairement un j_κ .

Cardinaux compacts. • En germe dès [ET43], et repris dans [ET61]. Les élèves de Tarski (Keisler, Hanf) ont établi leurs propriétés logiques [Han64]. • Autre caractérisation remarquable : κ faiblement compact ssi tout ordre total de cardinal κ contient une copie de κ ou de κ^{op} [ET61, Property P_1]. • Ces cardinaux sont beaucoup étudiés du point de vue de la théorie de Ramsey, qui appartient à la combinatoire (v. § 11, notes conclusives) ; on a préféré mettre en avant

les liens avec la logique mathématique. • De manière générale les grands cardinaux combinatoires (de type Ramsey) sont *inférieurs et antérieurs* aux grands cardinaux de type logique, qui viennent plutôt des années 1950 ou 1960. L'exception notable est la classe des cardinaux mesurables, dont Ulam ignorait l'interprétation modèle-théorique. • La lecture modèle-théorique des grands cardinaux revient un peu en vogue, p. ex. [Bon20] et [Bon+22].

Phénomènes de rigidité. • Rigidité (i) (sans choix mais avec définissabilité) : [Suz99]. • Rigidité (ii) (avec choix mais sans définissabilité) : [Kun71]. Elle entraîne l'incohérence des « cardinaux de Reinhardt » théorisés peu avant. C'était la première fois qu'un axiome de grand cardinal hardi mais plausible donnait une contradiction. • La preuve d'origine de Kunen est plus élémentaire qu'à première vue car elle n'utilise qu'un cas particulier du « lemme combinatoire de Erdős-Hajnal » ; celle proposée suit [Jech]. D'autres preuves existent depuis (v. [Kanamori, § 23] ; dernière en date [Zap96]) ; toutes utilisent le choix. V. infra.

[Han64] : William HANF. « Incompactness in languages with infinitely long expressions ». In : *Fund. Math.* 53 (1963/64), p. 309-324

[Sco61] : Dana SCOTT. « Measurable cardinals and constructible sets ». In : *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961), p. 521-524

[Chang-Keisler] : Chen-Chung CHANG et Jerome KEISLER. *Model theory*. Third. T. 73. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, p. xvi+650

[ET43] : Paul ERDŐS et Alfred TARSKI. « On families of mutually exclusive sets ». In : *Ann. of Math.* (2) 44 (1943), p. 315-329

[ET61] : Paul ERDŐS et Alfred TARSKI. « On some problems involving inaccessible cardinals ». In : *Essays on the foundations of mathematics*. Magnes Press, Hebrew Univ., Jerusalem, 1961, p. 50-82

[Bon20] : Will BONEY. « Model theoretic characterizations of large cardinals ». In : *Israel J. Math.* 236.1 (2020), p. 133-181

[Bon+22] : Will BONEY et al. « Model Theoretic Characterizations of Large Cardinals Revisited ». In : (2022). arXiv 2202.00549

[Suz99] : Akira SUZUKI. « No elementary embedding from V into V is definable from parameters ». In : *J. Symbolic Logic* 64.4 (1999), p. 1591-1594

[Kun71] : Kenneth KUNEN. « Elementary embeddings and infinitary combinatorics ». In : *J. Symbolic Logic* 36 (1971), p. 407-413

[Jech] : Thomas JECH. *Set theory*. Second. Perspectives in Mathematical Logic. Berlin : Springer-Verlag, 1997, p. xiv + 634

[Zap96] : Jindřich ZAPLETAL. « A new proof of Kunen's inconsistency ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 124.7 (1996), p. 2203-2204

• Terminologie

Notion d'arbre ensembliste. L'adjectif « ensembliste » est pour bien distinguer des arbres graphe-théoriques (§ 1.3). • La théorie géométrique des groupes considère des arbres graphe-théoriques hautement infinis-
5
taires qui ne sont pas bien fondés. • Inversement, l'arbre ensembliste $\omega + 1$ n'est pas un arbre graphe-théorique : il n'est pas graphe-théoriquement connexe.

Logiques faiblement compactes. • Il existe une variante encore plus faible de la compacité d'un cardinal, où $\text{card } \mathcal{L}$ et $\text{card } \Theta$ doivent être $\leq \kappa$. On l'appelle ici « très faible compacité ». • Dans ZFC, (compacité) équi-
10
vaut à (inaccessibilité et très faible compacité), mais l'inaccessibilité est indispensable [Boo76].

• **Propriété de l'arbre.** Le lemme de König (§ 1.3) affirme que $\aleph_0$ a cette propriété.

Théorème.

- (i) $\aleph_1$ n'a pas la propriété de l'arbre (attribué à Aronszajn, par Kurepa).
- (ii) Si cohérente, ZFC ne démontre pas
25
que $\aleph_2$ n'a pas la propriété de l'arbre.

Un « arbre d'Aronszajn » est un arbre ensembliste montrant que κ n'a pas ladite propriété. • Excellente introduction au sujet, avec remarques historiques : [Mor18]. Pour

approfondir, [Kunen, § III.5] (lecture difficile). • La propriété de l'arbre inspire encore une abondante littérature. Il est difficile de donner un état des lieux à jour ; commencer
30
par [Ung21, premières pages].

• **Théorème B.** • L'axiome $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ réduit
35
au minimum le degré d'ouverture de $P[\mathbb{V}]$ (puisque $\mathbb{L}$ est le plus petit « modèle intérieur » à ordinaux constants, ex. 29.3), alors que l'existence de mesurables paraît
40
ne parler que de la longueur de $\text{Ord}[\mathbb{V}]$. Le théorème peut surprendre car on voit mal, au premier abord, une corrélation entre les deux. • Cette explication est bien sûr trompeuse : la mesurabilité de κ concerne au fond le degré d'ouverture de P aux alentours de
45
 κ . • La théorie des ensembles contemporaine aime trop les grands cardinaux pour accepter $\mathbb{V} = \mathbb{L}$.

• **Rigidité.** La rigidité (ii) n'interdit pas les plongements élémentaires $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{M}$, où $\mathbb{M}$
50
est une collection non ensembliste (sinon ZFC démontrerait qu'il n'y a pas de cardinaux mesurables ; c'est réputé peu vraisemblable). • Son analogue sans choix est ouvert. • Autres généralisations dans [HKP12].
55
Rigidité sans fondation : [Dag+14]. • Le problème des plongements élémentaires de $\mathbb{V}$ n'est pas clos. On peut atténuer l'hypothèse $\mathbb{V} \models \text{ZFC}(j)$ en supposant seulement la $\{\in, j\}$ -séparation et le $\{\in\}$ -remplacement.
60

[Boo76] : William BOOS. « Infinitary compactness without strong inaccessibility ». In : *J. Symbolic Logic* 41.1 (1976), p. 33-38

[Mor18] : Frédéric MORNEAU-GUÉRIN. « Le lemme de König et les arbres d'Aronszajn ». In : *Bulletin AMQ* 58.2 (mai 2018), p. 44-60

[Kunen] : Kenneth KUNEN. *Set theory*. T. 34. Studies in Logic. London : College Publications, 2011, p. viii + 401

[Ung21] : Spencer UNGER. « Successive failures of approachability ». In : *Israel J. Math.* 242.2 (2021), p. 663-695

[HKP12] : Joel HAMKINS, Gregory KIRMAYER et Norman PERLMUTTER. « Generalizations of the Kunen inconsistency ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 163.12 (2012), p. 1872-1890

[Dag+14] : Ali DAGHIGHI et al. « The foundation axiom and elementary self-embeddings of the universe ». In : *Infinity, computability, and metamathematics*. T. 23. Tributes. Coll. Publ., London, 2014, p. 89-112

[Cor00] : Paul CORAZZA. « The wholeness axiom and Laver sequences ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 105.1-3 (2000), p. 157-260

[Ham01] : Joel HAMKINS. « The wholeness axioms and $V = \text{HOD}$ ». In : *Arch. Math. Logic* 40.1 (2001), p. 1-8

La rigidité (ii) n'élimine pas cette possibilité, appelée « axiome de totalité » par son inventeur [Cor00]. On recommande l'introduction de [Ham01].

• **Grands cardinaux.** Ils sont hypothétiques :

- tous seraient inaccessibles ;
- si cohérente, ZFC ne démontre pas l'existence d'inaccessibles (ex. 27.3.c.(iii)) ;
- il est ouvert, mais tenu improbable, que ZFC démontre leur inexistence (il est d'ailleurs ouvert qu'elle démontre $\perp$).

Les axiomes de grands cardinaux ne jouissent donc pas d'énoncés de cohérence relative, et se distinguent ainsi d'axiomes comme $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. • Quelle légitimité à les introduire ?

Pour. • Si les ensembles doivent *tout* permettre fors l'incohérence, il est légitime d'introduire des propriétés de plus en plus fortes ; « *denn das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit* » [Can83, p. 564]. Cette approche accroît à l'extrême le monde ensembliste.

I am thinking of an axiom which (similar to Hilbert's completeness axiom in geometry) would state some maximum property of the system of all sets, whereas axiom A states a minimum property. Note that only a maximum property would seem to harmonize with the concept of set explained in footnote 11.

Gödel, [Benacerraf-Putnam, n. 19 p. 478]

(Ce texte est la version remaniée en 1964 de [Göd47]. L'axiome A est $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. La note 11 explique la vision itérative des ensembles

de § 27.) • [Mad88a] et [Mad88b] discutent cette approche, que Maddy nomme d'après l'injonction *maximise*.

Contre. • D'après le théorème B, l'univers constructible n'a pas de cardinaux mesurables (il peut avoir de « petits » grands cardinaux, comme des inaccessibles). L'axiome $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ bride ainsi l'infini supérieur. Contraire sans doute aux visions de Cantor, et certainement à celles de Gödel, cet axiome apparaît naturel à l'optique modèl-théorique car il consacre la primauté des parties définissables. • On peut être plus radical et *rejeter* l'infini supérieur dès l'indénombrable (ceci commande de refuser l'axiome de la puissance). Cette thèse est paradoxalement étayable par l'étude même de ZFC : le caractère dénombrable y est si relatif que tout ensemble peut être rendu dénombrable. V. § 26, notes conclusives, *Dénombrabilisme*.

État du consensus. • L'injonction *maximise* et l'axiome $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ représentent deux positions extrêmes (le rejet de l'axiome de la puissance étant actuellement hétérodoxe). La première est plus populaire auprès des spécialistes de théorie des ensembles. Elle fournit une idéologie légitimant leur activité, mais ce n'est pas la seule raison de son succès. En effet les axiomes de grands cardinaux connus s'ordonnent par force, alors qu'ils proviennent d'intuitions distinctes [Kanamori, p. 472]. C'est un indice favorable au bien-fondé du domaine. • Reste la question : « les grands cardinaux ont-ils une incidence sur les *vraies* mathématiques ? » Elle est tendancieuse et sans doute mal posée ; mais en l'état reçoit une réponse *positive*. Les grands cardinaux contrôlent en effet des problèmes de combinatoire dans les entiers [Fri98].

[Can83] : Georg CANTOR. « Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 5 ». In : *Math. Ann.* 21.4 (1883), p. 545-591

[Benacerraf-Putnam] : *Philosophy of mathematics : Selected readings*. Edited and with an introduction by Paul Benacerraf and Hilary Putnam. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1964, p. vii+536

[Göd47] : Kurt GÖDEL. « What is Cantor's continuum problem ? » In : *Amer. Math. Monthly* 54 (1947), p. 515-525

[Mad88b] : Penelope MADDY. « Believing the axioms II ». In : *J. Symbolic Logic* 53.3 (1988), p. 736-764

[Fri98] : Harvey FRIEDMAN. « Finite functions and the necessary use of large cardinals ». In : *Ann. of Math. (2)* 148.3 (1998), p. 803-893

- **Grands cardinaux et logique.** On mentionne deux autres notions liées aux logiques.

Cardinaux supercompacts

Définition. Un cardinal κ est *supercompact* si pour tout ordinal α , il existe une collection transitive $\mathbb{M}_\alpha$ et un plongement élémentaire $j_\alpha : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{M}_\alpha$ tels que :

- $\kappa = \text{crit}(j_\alpha)$;
- $j_\alpha(\kappa) > \alpha$;
- $\mathbb{M}_\alpha^\alpha \subseteq \mathbb{M}_\alpha$.

(L'existence, pour chaque α , d'un j_α signifie qu'il existe une vraie formule à paramètres $J(\alpha, x, y)$ qui en chaque α ordinal définit un plongement élémentaire $y = j_\alpha(x)$ etc.) Cette définition pourrait sembler ad hoc, pour le besoin de renforcer les jeux d'élémentarité. Il n'en est rien.

Théorème ([Mag71]). L'(éventuel) plus petit supercompact serait aussi le cardinal de

Löwenheim de la sémantique pleine $\mathcal{L}^{2,p}$, i.e. le plus petit κ tel que tout $\mathcal{L}^2$ -énoncé φ ayant un modèle ensembliste possède aussi un modèle de cardinal $\leq \kappa$ (v. § 13, notes conclusives).

En revanche il est cohérent à ZF que, si de tels cardinaux existent, le premier d'entre eux soit aussi le premier fortement compact [Mag76].

Principe de Vopěnka. C'est un schéma d'axiomes très forts : « si $\mathcal{C}$ est une classe propre de $\mathcal{L}$ -structures (ensemblistes), alors il y en a deux dont l'une se plonge élémentairement dans l'autre ». Noter la quantification sur les classes : dans ZF ce n'est pas un axiome, mais un schéma (on peut en faire un axiome dans BGN). • Ce principe équivaut à : « pour toute logique Λ il existe κ tel que Λ soit κ -fortement compact » [Mak85, Theorem 2].

[Mag71] : Menachem MAGIDOR. « On the role of supercompact and extendible cardinals in logic ». In : *Israel J. Math.* 10 (1971), p. 147-157

[Mag76] : Menachem MAGIDOR. « How large is the first strongly compact cardinal? or A study on identity crises ». In : *Ann. Math. Logic* 10.1 (1976), p. 33-57

[Mak85] : Johann-Andreas MAKOWSKY. « Vopěnka's principle and compact logics ». In : *J. Symb. Log.* 50 (1985), p. 42-48