

Raconte-moi... la conjecture de Cherlin-Zilber en rang 3

Adrien Deloro

Séminaire «Raconte-moi»

juin 2020

Dans cette partie :

① Cadre et motivation

Trois théorèmes et une conjecture
Groupes de rang de Morley fini

② Éléments sur la preuve en rang 3

Identification dans le bon cas
Radicalisation dans le mauvais cas
Élimination dans le mauvais cas

③ L'exposé à l'envers (si le temps le permet)

Origines de la conjecture
Le programme de Borovik

Groupes de transformations

Les groupes de transformations de l'espace linéaire sont des groupes de matrices.

Ex. : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) / Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}))$ (dont il sera question) contrôle $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

- Programme d'Erlangen (Klein) : *unifier les géométries linéaires en langage groupe-théorique.*
- Ces groupes ont émergé surtout à partir du modèle réel, ce qu'on appelle la « théorie de Lie ».
- Mais on peut/doit les envisager sur d'autres corps. Groupes simples dits « de type Lie » / « de Chevalley ».

Dans cet exposé, « simple » sera toujours au sens des groupes abstraits.

Ce sont les fameux $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$.

- L'initiateur était Galois : simplicité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$.

Leur omniprésence invite. . .



C. Chevalley
(1909–1984)

Groupes de Lie linéaires

Un *groupe de Lie linéaire*, c'est un sous-groupe $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ fermé. Outre la loi de groupe on a plusieurs couches structurelles :

- information infinitésimale ;
(G est une variété différentielle)
- information Lie-théorique ;
($T_e G$ porte une structure algébrique ; puis système de racines)
- information algébrique linéaire
(liée à $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ex. : décomposition « de Jordan »).

Théorème (Lie-Killing-Cartan)

Soit G un groupe de Lie simple. Alors G est de Chevalley.

Démonstration.

Classifier les algèbres de Lie simples, i.e. les « systèmes de racines ».



Groupes algébriques linéaires

Un *groupe algébrique linéaire*, c'est un groupe de matrices $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donné par des équations polynomiales.

Outre la loi de groupe on a plusieurs couches structurelles :

- information « rationnelle »
(varier le corps $\mathbb{K}$; en fait je devrais parler de « groupe de $\mathbb{K}$ -points ») ;
- information topologique
(topologie « de Zariski », valable sur tout corps ; $\neq$ top. métrique sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) ;
- information algébrique linéaire.

Théorème (Chevalley)

Soit G un groupe algébrique simple. Alors G est de Chevalley.

Démonstration.

En variant le corps, reconstruire les infinitésimaux et l'algèbre de Lie. □

Groupes simples finis

Un *groupe fini*, c'est un groupe abstrait G dont l'ordre est fini. Outre la loi de groupe on a plusieurs couches structurelles :

- information arithmétique
(Sylow etc.);
- information caractère-théorique
(on peut concevoir la classe des représentations de G).

Théorème (Galois-Jordan-Mathieu-Brauer-Gorenstein ; non exhaustif)

Soit G un groupe simple fini. Aux exceptions près, G est de Chevalley.

Esquisse de démonstration.

Considérer les involutions de G .



La conjecture de Cherlin-Zilber

Comme si Lie/algébriques/finis étaient 3 sommets émergés d'un continent sous-marin :

Méta-conjecture

Les groupes de géométrie linéaires n'étant pas accidentels, il existe une théorie englobant ces théorèmes de classification.

Nb. La « th. de Chevalley » part d'objets connus, ne classifie pas de groupes abstraits.

La théorie des modèles propose des cadres pour les mathématiques « de complexité modérée ». Exemple :

Conjecture (Cherlin-Zilber)

Soit G un groupe simple de rang de Morley fini. Alors G est de Chevalley.

C'est le pire de tous les mondes : pas d'arithmétique, pas de topologie, pas de représentations, pas de vision « atomique » de la matière (Jordan).

Abstraction : dimension sans topologie

Commune aux groupes de Lie, groupes algébriques, groupes finis :
une notion de dimension.

- Dimension différentielle sur les groupes de Lie ;
- dimension « de Zariski » sur les groupes algébriques ;
- dimension 0 sur les groupes finis (l'ordre tient lieu de multiplicité).

Idée : abstraire le concept de dimension.

Quelles parties portent une dimension ?

- en Lie, les sous-variétés ($\leftarrow$ trop topologique) ;
- en algébrique, les *constructibles* ($\leftarrow$ bonne intuition) ;
- en fini, on peut *toujours* compter ($\leftarrow$ irréaliste).

La généralisation naturelle des constructibles est la classe *définissable*.

Parties définissables

La classe *définissable* généralise la classe constructible, sans géométrie.

Soit G un groupe abstrait. On considère toutes les parties données par :

- les équations de groupe à paramètres (ex. : $\{g : gag^{-1} = b\}$) ;
- les combinaisons « et/ou/non » ;
- les projections $G^{n+1} \rightarrow G^n$ (ex. : $\{g : \exists x : g = xax^{-1}\}$) ;
- les quotients par relations d'équivalence de cette nature (ex. : G/H).

Nb. On rate typiquement G' et les « groupes engendrés ».

Fait

- Si $G = \mathbb{G}(\mathbb{K})$ est algébrique, alors tout constructible est définissable.
- Si $\mathbb{K}$ est alg. clos, tout définissable est constructible (Chevalley-Tarski).

Évidemment, pour un groupe abstrait, c'est compliqué.

(« Quelles sont les parties déf. du groupe libre ? » : Sela, Kharlampovitch-Myasnikov).

Rang de Morley

On peut dorénavant abstraire la notion de dimension.

Définition

Un *groupe de rang de Morley fini* est un groupe dont les définissables portent une dimension entière, « à la Zariski » :

- $\dim A \geq n + 1$ ss'il existe des B_i déf. de $\dim \geq n$ avec $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subseteq A$;
- constructions naturelles sur les fibres des fonctions (typiquement si $f : A \rightarrow B$, alors $\dim A = \dim \operatorname{im} f + \dim \text{fibre générique}$) ;
- un truc technique sur l'infini ($\leftarrow$ pour que ça reste de la théorie des modèles).

Ex. Soient $\mathbb{K}$ alg. clos et $G = \mathbb{G}(\mathbb{K})$ pour la dimension de Zariski. Alors G est « de rang de Morley fini ».

Conjecture (Cherlin, Zilber ; fin années 1970)

Soit G simple de rang fini. Alors $G \simeq \mathbb{G}(\mathbb{K})$.

Corps et matière

Conjecture (Cherlin, Zilber ; fin années 1970)

Soit G simple de rang fini. Alors $G \simeq \mathbb{G}(\mathbb{K})$.

Tous les corps considérés seront algébriquement clos. Raison :

Théorème (Macintyre 1971)

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini de rang fini. Alors $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.

- C'est une première indication positive.
- En revanche *il existe des corps de rang $k > 1$* (cf. géométrie où $\dim \mathbb{K} = 1$),
- et même $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}_+$ ou $\mathbb{K}^\times$ ont des sous-groupes déf. non triviaux (cf. matière dans groupes alg. linéaires : $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}^m$ sont minimaux).

En conclusion, on n'a pas de contrôle « au niveau atomique ».

Dans cette partie :

① Cadre et motivation

Trois théorèmes et une conjecture
Groupes de rang de Morley fini

② Éléments sur la preuve en rang 3

Identification dans le bon cas
Radicalisation dans le mauvais cas
Élimination dans le mauvais cas

③ L'exposé à l'envers (si le temps le permet)

Origines de la conjecture
Le programme de Borovik

Énoncé et structure de l'argument

Conjecture (Cherlin, Zilber ; fin années 1970)

Soit G simple de rang fini. Alors $G \simeq \mathbb{G}(\mathbb{K})$.

Théorème (Frécon 2017)

Soit G simple de rang 3. Alors $G \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$.

- Il a fallu près de 40 ans pour le savoir ; début années 2010, certains croyaient encore que ce serait faux.
- Rappel : ni Lie, ni topologie, ni représentations, ni « matière fine » ...
- La démonstration a trois étapes principales :
 - ① identification dans « le bon cas » ;
 - ② radicalisation dans « le mauvais cas » ;
 - ③ élimination du « mauvais cas ».

Ces étapes furent portées par trois contributeurs différents.

Identification : Cherlin 1979

Soit G simple de rang 3.

Proposition (Cherlin 1979)

Si G possède un sous-groupe de rang 2, alors $G \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$.

Cherlin reconstruisait à la main la « décomposition de Bruhat », i.e. la géométrie interne au groupe $G = BwB \sqcup B$.

Proposition (Hrushovski 1989)

Si H est simple et agit sur un ensemble de rang 1, alors $H \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$.

Proposition (Altinel-Wiscons 2018)

Si H est simple et agit sur un ensemble de rang 2, alors $\dim H \leq 8$; l'égalité impose $H \simeq \mathrm{PGL}_3(\mathbb{K})$.

Cherlin 1979, d'après Hrushovski

Proposition (Hrushovski 1989)

Si H est simple et agit sur un ensemble X de rang et multiplicité 1, alors $H \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$.

Démonstration.

- H est strictement 3-transitif (non trivial).
- Soit $\infty \in X$. Alors $(\mathrm{Stab}_H(\infty), X \setminus \{\infty\}) \equiv (\mathrm{GA}_1(\mathbb{K}), \mathbb{A}^1(\mathbb{K}))$.
- [Digression.] En fait l'émergence d'un corps à l'intérieur des stabilisateurs (en $\mathbb{K}_+ \rtimes \mathbb{K}^\times$) a été généralisée par Zilber.
Fait troublant : les groupes de rang de Morley fini résolubles non nilpotents définissent des corps : *lemme de Schur définissable*.
(Conséquence : preuve élémentaire de Borel-Tits par Poizat).
- À partir de là, on fixe $0, 1, \infty \in X$ et l'on identifie $G \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$. □

Géométrisation : Nésin 1989

Soit G simple de rang 3.

Proposition (Nésin 1989)

Si G n'a pas de sous-groupe de rang 2, alors il n'a pas d'involutions.

C'est pathologique ! En effet :

- ① tout groupe algébrique simple a des involutions (on connaît les groupes algébriques linéaires de dimension 1 : $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}^m$) ;
- ② tout groupe simple fini (non abélien) a des involutions. C'est le théorème de Feit-Thompson *dont il n'y a pas d'équivalent rangé*.
Nb. Même modulo un Feit-Thompson rangé, Cherlin-Zilber reste ouverte.

Nesin 1989, d'après D.-Wiscons

Proposition (Nesin 1989)

Si G n'a pas de sous-groupe de rang 2, alors il n'a pas d'involutions.

Démonstration.

- « Analyse locale » : soit $A < G$ de rang 1. Alors $G = \bigsqcup_{g \in G} A^g$. (Pathologique.) On suppose qu'il y a des involutions.
- On construit une géométrie d'incidence $\Gamma = (\text{points, lignes, plans})$ vérifiant les axiomes d'un espace projectif de dimension 3.
- Γ est coordinatisable (Hilbert-Desargues), donc $G \hookrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^3(\mathbb{K}))$. $\mathbb{K}$ est alg. clos (Macintyre).
- Th. du point fixe de Borel appliqué à $\overline{A}^{\text{Zar}} \leq \text{Aut}(\mathbb{P}^3(\mathbb{K})) \curvearrowright \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$:
- A possède un point fixe dans l'action régulière $G \curvearrowright G$.
- Contradiction. □

Élimination : Frécon 2017

Soit G simple de rang 3, sans sous-groupes de rang 2.

Proposition (Frécon 2017)

Il n'existe pas de tel G .

- Marqué par Nesin, Frécon a rédigé sa preuve en termes de géométries (points, droites, plans). Une partie de son travail est consacrée à montrer qu'il n'y a pas de plans, et l'autre à en construire. À aucun moment il ne regarde les axiomes d'incidence. . .
- Marqués par Frécon, Poizat et Wagner persistent en termes géométriques.
- On peut douter de cette approche.

Frécon 2017, d'après Poizat-Wagner

Proposition (Frécon 2017)

Il n'existe pas de G simple de rang 3 sans sous-groupes de rang 2.

Démonstration.

- [Nesin.] G n'a même pas d'automorphisme involutif.
- $G \times G$ agit sur $\Omega := \{\text{parties déf.}\} / \ll \text{essentiellement égales} \gg$.
- Pour $g \in G$, on appelle *symétrie* σ_g la fonction $\omega \mapsto g\omega^{-1}g$.
- $Y \subseteq G$ est *confiné* si $Y \subseteq_{i=1}^k g_i H_i$, avec $H_i < G$ sous-groupes déf.
- Lemme général. [G simple sans automorphisme involutif].
 $\forall \omega \in \Omega$, l'ensemble $\Sigma(\omega) := \{g \in G : \sigma_g(\omega) = \omega\}$ est confiné.
- Soit $c_0 = [a_0, b_0]$ « générique » ; soit $X := \{a : \exists b \ [a, b] = c_0\}$.
- Brefs calculs de commutateurs : $\dim X = 2$, puis $\dim \Sigma(X) = 2$.
- Mais il n'y a pas d'ensemble confiné de rang 2 ! Contradiction. □

Dans cette partie :

① Cadre et motivation

Trois théorèmes et une conjecture
Groupes de rang de Morley fini

② Éléments sur la preuve en rang 3

Identification dans le bon cas
Radicalisation dans le mauvais cas
Élimination dans le mauvais cas

③ L'exposé à l'envers (si le temps le permet)

Origines de la conjecture
Le programme de Borovik

Catégoricité

Définition

Une structure algébrique (i.e. relationnelle, sans information « de plus haut ordre ») $\mathbb{S}$ est κ -catégorique si à isomorphisme près, il existe une unique structure $\mathbb{S}_\kappa$ de cardinal κ ayant les mêmes propriétés logiques que $\mathbb{S}$.

(Typiquement un corps algébriquement clos, κ indénombrable.)

Théorème (« de catégoricité » ; Morley 1965)

Si $\mathbb{S}$ est κ -catégorique pour un κ indénombrable, elle l'est pour tous.

Morley introduisit une variante modèle-théorique du rang de Cantor-Bendixson...
... il ne savait pas qu'il généralisait la dimension de Zariski.

Théorème (Baldwin-Lachlan)

Si $\mathbb{S}$ est κ -catégorique pour κ non dén^o, alors $\mathbb{S}$ est de rang de Morley fini.

L'apport de Zilber

Théorème (Baldwin-Lachlan)

Si $\mathbb{S}$ est κ -catégorique pour κ non dénombrable, alors $\mathbb{S}$ est de rang de Morley fini.

Théorème (Zilber)

Si G est un groupe simple de rang de Morley fini, alors il est κ -catégorique.

En fait Zilber est allé *beaucoup* plus loin.

Conjecture (Zilber)

Une structure algébrique catégorique provient, sauf cas triviaux, d'un corps algébriquement clos.

C'est une affirmation de l'identité : « nature catégorique = géométrie sur les corps clos », couplée à une atomistique logique.

Réfutation par Hrushovski

Théorème (Hrushovski 1993)

Il existe des structures catégoriques non triviales sans corps.

À sa suite :

Théorème (Baudisch 1996)

Il existe des groupes catégoriques non abéliens sans corps (donc non alg).

Théorème (Poizat et al. 1999–)

Il existe des structures catégoriques de corps alg. clos « avec plus de structure » (notamment $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}^m$ non minimaux).

Et malgré tout. . .

Conjecture (Cherlin-Zilber)

Soit G un groupe simple de rang de Morley fini. Alors G est de Chevalley.

Conjecture de Cherlin-Zilber et CGSF

Le bon cadre méthodologique pour penser Cherlin-Zilber, ce n'est pas les groupes algébriques ; c'est la théorie des groupes finis.

Théorème (Borovik-Poizat, 1990)

Soit G de rang de Morley fini. Alors ses 2-sous-groupes de Sylow sont conjugués ; leur structure est classifiée.

- Ouvert pour $p > 2$.
- Pas d'information sur la non-trivialité (pas de « Feit-Thompson »).
- Borovik a suggéré de transposer CGSF — involutions, centralisateurs, fortement réels — vers le paysage rangé.
- Notez que 1. l'exposé ne suivait pas cette ligne : il s'agissait d'algèbre géométrique d'un genre inattendu mais 2. l'obsession involutive était *inévitale*.

Nombreuses involutions : succès

Théorème (Altinel-Borovik-Cherlin, 2008)

Soit G simple de rang de Morley fini. Si G contient (non définissable) $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $G \simeq \mathbb{G}(\mathbb{K})$.

- Même en supposant que G a des involutions,
- même en supposant que tous les sous-quotients simples de G ont des involutions. . .
- la conjecture de Cherlin-Zilber est non triviale.
- Sans involutions c'est pire encore.
- Il n'est pas clair que la résolution en rang 3 change quoi que ce soit à la stratégie d'ensemble.
- Aveu : sans involutions, il n'y a *pas* de stratégie d'ensemble.

Merci !