Devoir à rendre le 20 octobre

Exercice 1. Montrer que pour tout entier naturel n, $40^n n!$ divise $(5n)!$.

Exercice 2. Soient a, b, n, m des entiers naturels tels que $n \wedge m = 1$ et $a^n = b^m$. Montrer qu'il existe c tel que $a = c^m$ et $b = c^n$.

Exercice 3.

a) Calculer $(3^{123} - 5) \wedge 25$. Expliquer la méthode ; un résultat ne suffit pas.

b) Même question pour $(2^{445} + 7) \wedge 15$.

Exercice 4.

a) Résoudre (dans $\mathbb{Z}^2$) l'équation $323x - 391y = 612$. (On veillera à rédiger spécialement bien cette question, attendu que le correcteur ne lit pas les calculs.)

b) Soient a, b des entiers positifs premiers entre eux et $c > ab$. Montrer que $ax + by = c$ a des solutions dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ un entier ; on écrit sa décomposition $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

a) Cas particulier : $n = 504$. Effectuer sa décomposition en facteurs premiers, et lister ses diviseurs. Dans la suite on revient au cas général.

b) Montrer que le nombre de diviseurs de n est :

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$$

c) Montrer que n est un carré si et seulement si $d(n)$ est impair.

d) Montrer que si n est un carré alors le produit des diviseurs de n est :

$$\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d(n)}$$