

Partiel du 27 octobre

Durée : 1h30. Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1.

- Déterminer le plus grand diviseur commun à 546 et 650.
- Donner deux entiers u et v tels que $546u + 650v = (546 \wedge 650)$.
- Quel est le cardinal du sous-groupe engendré par $\overline{546}$ dans $(\mathbb{Z}/650\mathbb{Z}, +)$?
- Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $546x + 650y = 78$.

Exercice 2.

- $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?
- Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$? on donnera à chaque fois un générateur.

Exercice 3. Soient G un groupe non nécessairement commutatif, et a, b deux éléments de G .

- On suppose que a et b commutent. Montrer que $o(ab) | o(a) \vee o(b)$. A-t-on toujours égalité ?
- On ne suppose plus que a et b commutent, mais on suppose que $o(a) \wedge o(b) = 1$. Montrer que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$.
Indication : on rappelle que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ est un sous-groupe de G .
- On suppose enfin que a et b commutent, et que $o(a) \wedge o(b) = 1$. Montrer que $o(ab) = o(a)o(b)$.