Examen du 19 décembre 2014

Durée 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1

Les trois questions sont indépendantes.

1) Quel est l'ensemble des entiers relatifs n tels que 5 divise $n^2 + 1$?
2) Soit n un entier naturel. Montrer que les entiers $4n + 3$ et $5n + 4$ sont premiers entre eux.
3) Soit n un entier congru à 2 modulo 19 et 5 modulo 23.
   3.1) Déterminer des entiers a et b tels que l'on ait $19a + 23b = 1$.
   3.2) En déduire le reste de la division euclidienne de n par 437.

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{F}_{19}$ est le corps $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.

1) Montrer que 2 est un générateur de $\mathbb{F}_{19}^*$.
2) Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que l'on ait $7 = 2^n$ dans $\mathbb{F}_{19}^*$.
3) En déduire l'ordre de 7 dans $\mathbb{F}_{19}^*$.

Posons

$$\mathbb{F}_{19}^{*2} = \left\{ x^2 \mid x \in \mathbb{F}_{19}^* \right\}.$$

4) Justifier pourquoi $\mathbb{F}_{19}^{*2}$ est un sous-groupe de $\mathbb{F}_{19}^*$. Quel est son cardinal ?
5) L'élément -1 appartient-il à $\mathbb{F}_{19}^{*2}$?
6) En déduire un anneau quotient de $\mathbb{F}_{19}[X]$ qui soit un corps de cardinal 361.

Exercice 3

On considère l'anneau quotient

$$K = \mathbb{F}_7[X]/(X^3 + X + 1).$$

1) Montrer que K est un corps.
2) Quelle est sa caractéristique ? Quel est son cardinal ?
3) Quels sont les ordres possibles des éléments du groupe K^* ?
4) Quel est le nombre de générateurs dans K^* ?

   Soit α la classe de X modulo (X^3+X+1). On rappelle que le système $\mathcal{B}= (1, \alpha, \alpha^2)$ est une base du $\mathbb{F}_7$-espace vectoriel K.

5) Quelles sont les coordonnées de α^{-1} dans $\mathcal{B}$?
6) Calculer les coordonnées de α^9 et de α^{19} dans $\mathcal{B}$.
7) Montrer que α est un générateur de K^*.