TD n°1. Rappels sur le groupe linéaire

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Quelques propriétés classiques

Exercice 1.

a) Montrer que le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^\times$.

b) Montrer que le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe au groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{K}$.

Exercice 2. Soit $B_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.

a) Montrer que $B_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Est-il compact ?

b) Quel est le centre de $B_n(\mathbb{K})$?

c) Quelles sont les composantes connexes de $B_n(\mathbb{K})$?

d) Déduire de (c) que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Exercice 3.

a) Soit $C \geq 0$ un réel. Montrer que toute partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$H_C := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : \max(\|g\|, \|g^{-1}\|) \leq C\}$$

est compacte.

b) Réciproquement montrer que toute partie compacte de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est inclus dans un H_C pour un $C \geq 0$.

c) En déduire qu'une partie fermée H de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est compacte si et seulement s'il existe un réel $C > 0$ tel que tout $g \in H$ vérifie $\|g\| \leq C$ et $|\det(g)| > 1/C$.

Exercice 4 (partiel 2013)**.** Pour $0 \leq p \leq n$ on note R_p l'ensemble des matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ de rang p.

a) Rappeler *succinctement* pourquoi M est dans R_p si et seulement s'il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

b) Montrer que R_p est connexe si $p \leq n-1$.

c) Montrer que l'ensemble $\cup_{q \geq p} R_q$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que l'adhérence de R_p dans $M_n(\mathbb{R})$ est égale à $\cup_{q \leq p} R_q$.

2 Résultats de densité

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible dès que $n \geq 2$.

a) Soit A une matrice non inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que tout voisinage de A dans $M_n(\mathbb{R})$ intersecte $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

b) Supposons qu'il existe un hyperplan H de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice inversible. Montrer alors que H est *exactement* l'ensemble des matrices non-inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

c) Conclure.

Exercice 6.

a) Soit $P(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme non nul. Montrer que l'ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : P(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\}$ est dense dans $\mathbb{K}^n$ (on pourra se ramener au cas $n = 1$).
Montrer de plus que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors cet ensemble est connexe. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

b) En déduire que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, et que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe. En déduire aussi que $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^\times\,\mathrm{Id}$.

c) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Et sur $\mathbb{R}$?
On rappelle que pour tout entier $d \geq 1$, il existe un polynôme Discr_d, appelé discriminant, défini sur $\mathbb{C}_d[X]$ (l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{C}$ de degré au plus d) tel que $\mathrm{Discr}_d(P) = 0$ ssi P a une racine multiple dans $\mathbb{C}$.

d) Applications de (c) :

i) Montrer que si A et B sont deux matrices dans $M_n(\mathbb{K})$, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

ii) Montrer que pour toute matrice A, $\chi_A(A) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton).