TD n°3. Actions de groupes et exponentielle

1 Application des actions aux groupes classiques

Exercice 1 (GL_n)**.** On va montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

a) Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit continûment et transitivement sur $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

b) Soit $P_n = \operatorname{Stab} e_n$ le stabilisateur du dernier vecteur de la base canonique. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/P_n$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

c) Montrer que P_n est homéomorphe à $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n-1}$.

d) Conclure que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

e) Adapter la démonstration pour montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, et que la composante de l'identité est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det M > 0\}$. Déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 2 (connexité de SO_n)**.** On va montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe et que $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes. On peut supposer que $n \geq 1$.

a) Cas $n = 2$. Soit la fonction :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que φ est un morphisme de groupes topologiques et conclure à la connexité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ agit continûment et transitivement sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$.

c) Soit $Q_n = \operatorname{Stab} e_n$ le stabilisateur (dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$) du dernier vecteur de la base canonique. Montrer que Q_n est homéomorphe à $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$.

d) Conclure.

e) Montrer que $U_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

2 Exponentielle matricielle

Exercice 3. On note $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'exponentielle matricielle.

a) Montrer que $\exp M$ est un polynôme en M.

b) Montrer que $\det(\exp M) = \exp(\operatorname{Tr} M)$.

c) Montrer que si $n \geq 2$, exp n'est pas injective, même sur $M_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'exponentielle n'est pas surjective. Montrer qu'elle n'est pas surjective sur $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. (On pourra montrer que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} \exp$.)

Exercice 4. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ne possède pas de sous-groupe arbitrairement petit.