TD n°4. Décomposition polaire

1 Propriétés de base

Exercice 1.

a) On rappelle que $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes. Grâce à la décomposition polaire, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

b) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

a) Montrer que toute matrice de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ y est conjuguée à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ pour un θ dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Montrer que $\exp : H \to \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ est surjective.

Exercice 3 (rattrapage 2012)**.** Le groupe orthogonal *complexe* $O_n(\mathbb{C})$ est donné par :

$$O_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : {}^tMM = I_n\}$$

a) Montrer que le groupe $O_n(\mathbb{C})$ n'est pas connexe.

b) Soit M une matrice dans $O_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice antisymétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $M = O\exp(iA)$.

c) En déduire que $O_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, et que sa composante neutre est $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) = \{M \in O_n(\mathbb{C}) : \det(M) = 1\}$.

2 Groupe orthogonal généralisé

Exercice 4 (les groupes $O_{p,q}$)**.** Soit $p, q \geq 1$ deux entiers. Soit $\underline{q}$ la forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^{p+q}$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Le groupe orthogonal de signature (p,q) est défini par :

$$O_{p,q} = \left\{M \in M_{p+q}(\mathbb{R}) : \ {}^tMJ_{p,q}M = J_{p,q}\right\}$$

a) Montrer que $O_{p,q}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ stable par transposition et que $\det(M) = \pm 1$ pour tout $M \in O_{p,q}$.

b) Montrer que $K_{p,q} = O_{p,q} \cap O_{p+q}$ est compact et homéomorphe à $O_p \times O_q$ (on écrira des matrices par blocs).

c) Montrer que la décomposition polaire sur $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ se restreint en un homéomorphisme

$$O_{p,q} \longrightarrow O_p \times O_q \times \left(O_{p,q} \cap \mathcal{S}_{p+q}^{++}\right)$$

où S_{p+q}^{++} est l'espace des matrices symétriques définies positives de $M_{p+q}(\mathbb{R})$.

d) En utilisant l'exponentielle, en déduire que $O_{p,q}$ est homéomorphe à $K_{p,q} \times \mathbb{R}^d$.

e) Combien $K_{p,q}$ a-t-il de composantes connexes ? Montrer que $\mathrm{SO}_{p,q} = \{k \in O_{p,q} : \det(k) = 1\}$ est un sous-groupe d'indice et de degré 2 contenant la composante neutre $(\mathrm{SO}_{p,q})^\circ$.

f) Montrer que si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O_{p,q}$, alors ${}^tAA \in \mathcal{S}_p^{++}$. Montrer que $\det(A) > 0$ si $M \in (\mathrm{SO}_{p,q})^\circ$ et $\det(A) < 0$ sur l'autre composante de $\mathrm{SO}_{p,q}$.
En déduire que l'application $\mathrm{SO}_{p,q} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $M \mapsto \frac{\det(A)}{|\det(A)|}$ est un morphisme de groupes de noyau $(\mathrm{SO}_{p,q})^\circ$. Montrer que $K_{p,q}$ s'identifie aux matrices de $O_{p,q}$ telles que $\det(A) = \pm 1$.

3 Groupe symplectique

Exercice 5 (partiel 2012)**.** Le but de cet exercice est d'étudier un peu le groupe symplectique réel. Soit J la matrice de taille $2n$ ainsi conçue :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

où I_n désigne bien sûr la matrice identité de taille n. On définit alors $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R}) : {}^tMJM = J\}$.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, que l'on appelle groupe symplectique. Montrer que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est stable par transposition, et que toute matrice symplectique est de déterminant ± 1.

b) Montrer que si $M = OS$, avec $(O, S) \in O_{2n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$, est la décomposition polaire d'une matrice symplectique $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, alors O et S sont encore symplectiques.

c) Soit S une matrice symplectique orthogonale : $S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap O_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que S est de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

où A et B sont des matrices réelles de taille n vérifiant ${}^tAA + {}^tBB = I_n$ et ${}^t({}^tAB) = {}^tAB$ (on pourra faire un calcul par bloc). En déduire que $A + iB$ est une matrice unitaire, c'est-à-dire dans $U_n(\mathbb{C})$. Montrer que $S \mapsto A + iB$ est un isomorphisme de groupes de Lie entre $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap O_{2n}(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

d) En déduire que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$, puis enfin que toute matrice symplectique est de déterminant 1.