TD n°7. Quelques isomorphismes

Exercice 1. Soient $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $V = M_2(\mathbb{C})$.

a) G est-il un groupe compact ? Montrer que G est homéomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$.

b) Soit $\rho : G \to \mathrm{End}(V)$ l'application définie, pour tout $(X, Y) \in G$ et $M \in V$, par :

$$\rho((X, Y))(M) = XMY^{-1}$$

Montrer que (V, ρ) est une représentation du groupe topologique G.

c) Déterminer le noyau du morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

d) Pour $M \in V$, on note $\widetilde{M}$ la transposée de sa comatrice :

$$\widetilde{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Rappelons que sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on a $\widetilde{M} = (\det M)M^{-1}$.) Montrer que l'application $B : V \times V \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $M, N \in V$, par

$$B(M, N) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(M\widetilde{N})$$

est une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique non dégénérée. Quelle est la relation entre $B(M, M)$ et $\det M$?

e) Montrer que B est invariante sous l'action de G, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, $M, N \in V$:

$$B\left(\rho(g)(M), \rho(g)(N)\right) = B(M, N)$$

(On se rappellera qu'une forme bilinéaire symétrique est déterminée par la forme quadratique associée.)

f) Montrer que $\rho(G)$ est homéomorphe à un sous-groupe de $O_4(\mathbb{C})$. (Sur $\mathbb{C}$, toutes les formes quadratiques non dégénérées sur un espace vectoriel donné sont équivalentes.)

g) Calculer l'algèbre de Lie de G et comparer sa dimension avec celle de l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$.

h) Déduire des questions précédentes un isomorphisme de groupes topologiques $G/\ker\rho \simeq \mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 2 (examen 2012)**.** On rappelle que la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$\mathrm{Ad}(M)(X) = MXM^{-1} \qquad \text{pour } (M, X) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

a) Montrer que $\ker(\mathrm{Ad}) = \{\pm I_2\}$.

b) Montrer que le déterminant est une forme quadratique non-dégénérée sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ de signature $(1, 2)$, et que $\mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ est un sous-groupe de $O(\det)$.

c) Montrer que $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ est injective.

d) En déduire que $\mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ est isomorphe à $(\mathrm{SO}(1, 2))^\circ$, la composante neutre du groupe $O(1, 2)$ (on rappelle que la différentielle de Ad est ad).

e) En déduire que Ad induit un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I_2\} \to (\mathrm{SO}(1, 2))^\circ$.

Exercice 3 (partiel 2013)**.** Le but de cet exercice est de montrer que le groupe $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3 \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, où $\mathbb{S}^3$ est la sphère unité dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne standard.

a) Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G, non nécessairement distingué. Comme d'habitude on munit l'espace quotient G/H de la topologie quotient induite par la projection $\pi : G \to G/H$.

On suppose qu'il existe une application continue $\sigma : G/H \to G$ telle que $\pi \circ \sigma = Id$. Montrer que G est homéomorphe à $G/H \times H$.

b) Soit $\mathbb{H}$ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{C})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$.

i) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.
Remarque : $\mathbb{H}$ est en fait un corps, appelé corps des quaternions, mais cela ne nous servira pas ici.

ii) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa norme euclidienne standard, et $M_2(\mathbb{C})$ de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} |z_i|^2$$

Montrer que l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{H} \\ (a,b,c,d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a-id & -b+ic \\ b+ic & a+id \end{pmatrix} \end{array}$$

est une isométrie.
En particulier l'application f induit un isomorphisme de groupes de Lie entre $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(\mathbb{H})$ qui se restreint en un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ sur $O^+(\mathbb{H})$.

iii) Pour $u \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ on définit l'application $\varphi_u \in \mathrm{GL}(\mathbb{H})$ par $\varphi_u(v) = uv$. Montrer que l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{H} \setminus \{0\} & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{H}) \\ u & \mapsto & \varphi_u \end{array}$$

est continue.

iv) Montrer que φ induit une application continue $\mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$.

c) Conclure en utilisant l'action naturelle de $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^3$.