TD n°9. Idéaux dérivés et applications

La lettre $\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique $\neq 2$.

Exercice 1 (résolubilité et radical)**.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Soit $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ l'idéal engendré par $\{[x,y] : (x,y) \in \mathfrak{g}^2\}$. (On note aussi $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, mais attention à l'étape d'engendrement !)

a) Donner un exemple d'algèbre de Lie non simple telle que $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

b) Montrer que $\mathcal{D}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, puis que $\mathcal{D}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

c) On note $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}))$. Montrer que $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

d) On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe n entier vérifiant $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = 0$.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) $\mathfrak{g}$ est résoluble ;
   ii) il existe une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ $\{0\} = \mathfrak{J}_n \leq \cdots \leq \mathfrak{J}_0 = \mathfrak{g}$ tels que chaque $\mathfrak{J}_k/\mathfrak{J}_{k+1}$ soit abélien ;
   iii) il existe une suite de sous-algèbres $\{0\} = \mathfrak{J}_n \leq \cdots \leq \mathfrak{J}_0 = \mathfrak{g}$ tels que chaque $\mathfrak{J}_{k+1}$ soit un idéal de $\mathfrak{J}_k$ et que $\mathfrak{J}_k/\mathfrak{J}_{k+1}$ soit abélien.

e) Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$ le sont.

f) Montrer que la somme de deux idéaux résolubles est un idéal résoluble.
Comme la somme de deux idéaux résolubles est encore un idéal résoluble, on peut définir le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: c'est $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$, la somme de tous les (= le plus grand des) idéaux résolubles.

g) Déterminer les sous-algèbres résolubles maximales de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ grâce au théorème de Lie. En déduire que $\operatorname{Rad}\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = Z(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$.

Exercice 2 (nilpotence)**.** Pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on note :
– $Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : \forall y \in \mathfrak{g}, [x,y] = 0\}$ puis $Z_{n+1}(\mathfrak{g}) = \pi^{-1}Z(\mathfrak{g}/Z_n(\mathfrak{g}))$
– $C(\mathfrak{g}) = \operatorname{Vect}(\{[x,y] : (x,y) \in \mathfrak{g}^2\})$ puis $C^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})]$

a) Montrer que ce sont des idéaux de $\mathfrak{g}$.

b) Montrer que $Z_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \Leftrightarrow C^n(\mathfrak{g}) = 0$.
On dit alors que $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

c) Montrer que toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble. Donner un contre-exemple à la réciproque.

d) Exemple étrange : montrer que si $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2, alors $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est nilpotente.

e) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente et que $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre, montrer que $\mathfrak{K}$ est nilpotente. Si $\mathfrak{J} \leq \mathfrak{g}$ est un idéal, montrer que $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$ est nilpotente.

f) Montrer que si $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}$ sont nilpotentes, $\mathfrak{g}$ n'est pas forcément nilpotente.

g) Montrer que si $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

h) Montrer la condition de normalisateur : si $\mathfrak{g}$ est nilpotente et $\mathfrak{K} < \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre propre, alors $\mathfrak{K} < N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{K})$ ("les normalisateurs croissent").

i) Soit $\mathfrak{g}$ de dimension finie. On suppose que $\mathfrak{J} \leq \mathfrak{g}$ est un idéal tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$ soit nilpotente, et que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $(\operatorname{ad}_x)_{|\mathfrak{J}}$ soit un opérateur nilpotent. Montrer que $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

Exercice 3 (nilpotence ou résolubilité)**.** On équipe $\mathbb{K}^3$ de la base e_1, e_2, e_3, et l'on définit :
– $\mathfrak{g}_1$ par :

$$[e_1,e_2] = 0, \quad [e_1,e_3] = e_2, \quad [e_2,e_3] = -e_1$$

– $\mathfrak{g}_2$ par :

$$[e_1,e_2] = e_3, \quad [e_1,e_3] = e_2, \quad [e_2,e_3] = -e_1$$

$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ sont-elles résolubles ? nilpotentes ?

Exercice 4 (complexification et formes réelles)**.**

a) Rappeler la définition du complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ainsi que sa propriété universelle.

b) Réciproque : soit V un $\mathbb{C}$-ev muni d'un automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire anti-linéaire φ tel que $\varphi^2 = \mathrm{Id}$. Montrer que V est isomorphe au complexifié de $V^\varphi = \{v \in V : \varphi(v) = v\}$.

c) Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie et $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sa complexifiée. Donner la formule définissant le crochet de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

d) Déterminer la complexifiée de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

a) Montrer que $\mathfrak{g}$ est abélienne/nilpotente/résoluble si et seulement si $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'est.

b) En déduire que si $\mathfrak{g}$ est résoluble, alors $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est nilpotente.

Exercice 6. Soit $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un groupe de Lie linéaire connexe. Montrer que G est résoluble ssi $\mathrm{Lie}(G)$ l'est.

Exercice 7 (simplicité de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$)**.** L'objectif de cet exercice est d'établir que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ est simple, pour $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal non-nul de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que les $E_{i,j}$ $(i \neq j)$ engendrent $\mathfrak{sl}_n$. En déduire que si $\mathfrak{J}$ contient un $E_{i,j}$, alors $\mathfrak{J} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

b) Soit $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,i}$ une matrice diagonale de $\mathfrak{J}$. On suppose que D n'est pas scalaire : $\exists i \neq j$: $\lambda_i \neq \lambda_j$. Montrer que $E_{i,j} \in \mathfrak{J}$ et conclure.

c) Soit maintenant $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,i}$ une matrice diagonale de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ telle que $(i, j) \mapsto \lambda_i - \lambda_j$ soit injective sur l'ensemble des couples $i \neq j$.

   i) Montrer que l'application adjointe $\mathrm{ad}_D : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ se restreint à $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

   ii) Montrer que l'un des vecteurs propres de ad_D est dans $\mathfrak{J}$, et conclure.

d) En déduire les idéaux de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.