TD n°11. Dérivations, représentations

Exercice 1. Une dérivation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une opération linéaire $D : \mathfrak{g} :\to \mathfrak{g}$ telle que pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, on ait $D([x,y]) = [x, D(y)] + [D(x), y]$.

a) Montrer que les dérivations de $\mathfrak{g}$ forment une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, notée $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, ad_x est une dérivation de $\mathfrak{g}$. En déduire que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Montrer que $\operatorname{im}\mathrm{ad}$ (notée $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$) est un idéal de $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

c) On suppose que $\mathfrak{g}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension finie. Montrer que $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

Exercice 2. Cet exercice expose trois démonstrations différentes du résultat suivant :

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, alors $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

On rappelle que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, une dérivation sur $\mathfrak{g}$ est un endomorphisme δ de l'espace-vectoriel sous-jacent vérifiant $\delta([x,y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$. L'ensemble des dérivations $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, dont $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ est un idéal.

a) Première méthode : par le calcul.
   i) Montrer que pour toute dérivation $\delta \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, on ait $\kappa(X,Y) = \operatorname{Tr}(\delta \circ \mathrm{ad}_Y)$.
   ii) Montrer que pour tous $Y, Z \in \mathfrak{g}$, on a $\kappa((\delta - \mathrm{ad}_X)(Y), Z) = 0$. En déduire que $X \mapsto \mathrm{ad}_X \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme.

b) Deuxième méthode : par la géométrie.
   Notons $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$; $\mathfrak{g}_1$ est un idéal de $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Soit $I = \mathfrak{g}_1^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_1$ par rapport à la forme de Killing de $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$.
   i) Montrer que $I \cap \mathfrak{g}_1 = 0$ (indication : la forme de Killing de $\mathfrak{g}_1$ est restriction de celle de $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$).
   ii) Montrer que $[I, \mathfrak{g}_1] = 0$. En déduire que $I = 0$, puis que $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

c) Troisième méthode : par les représentations.
   i) Soit δ une dérivation de $\mathfrak{g}$. Montrer que pour $(x, a, y) \in \mathfrak{g} \times \mathbb{K} \times \mathfrak{g}$, l'expression $x \cdot (a, y) = (0, a\delta(x) + [x, y])$ définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $V = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}$.
   ii) Grâce au théorème de Weyl, prendre un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans V et conclure.

Exercice 3. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.
On rappelle que pour toute algèbre de Lie de dimension finie, l'algèbre de Lie de $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ est $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

a) On suppose dans cette question que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe G. Montrer que $\mathrm{Ad}(G) = \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})^\circ$ et en déduire que $\mathrm{Ad}(G)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

b) Montrer que $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $O(\kappa)$. En déduire qu'il existe un groupe de Lie G dont $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie ; en particulier si κ est définie (positive ou négative), G peut être pris compact.

Exercice 4 (rattrapage 2012)**.** Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel complexe de dimension finie et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. On suppose que $\mathfrak{g}$ est *semi-simple*.
On fixe un élément X dans $\mathfrak{g}$, et l'on note $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan additive dans $\mathfrak{gl}(V)$ (X_s est diagonalisable et X_n est nilpotent). Le but de cet exercice est de montrer que $\mathfrak{g}$ est stable par décomposition de Jordan, c'est-à-dire que X_s et X_n sont encore dans $\mathfrak{g}$.

a) Montrer que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V)$.

b) Soit $\mathfrak{n} = \{Y \in \mathfrak{sl}(V) : [Y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$. Montrer que $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ contenant $\mathfrak{g}$ comme idéal, puis que X_s et X_s appartiennent à $\mathfrak{n}$.

c) Étant donné une sous-représentation *irréductible* $W \leq V$ de $\mathfrak{g}$, on définit

$$\mathfrak{s}_W = \left\{Y \in \mathfrak{gl}(V) : Y \cdot W \subset W \text{ et } \operatorname{Tr}(Y_{|W}) = 0\right\}$$

   Montrer que $\mathfrak{s}_W$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ contenant X_s et X_n.

d) Soit $\mathfrak{g}'$ l'intersection de $\mathfrak{n}$ et des algèbres $\mathfrak{s}_W$ pour toutes les sous-représentations irréductibles $W \leq V$ de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}'$.

e) En déduire qu'il existe un supplémentaire U de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ tel que $[\mathfrak{g}, U] = 0$ (on pourra utiliser le théorème de complète réductibilité de Weyl).

f) Soient $Y \in U$ et W une sous-représentation irréductible $W \leq V$ de $\mathfrak{g}$. Montrer que $Y_{|W} : W \to W$ est un morphisme de représentations de $\mathfrak{g}$. En déduire que $Y_{|W} = 0$, puis que $Y = 0$.

g) Montrer que X_s et X_n sont dans $\mathfrak{g}$.

h) Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple abstraite.

  i) En appliquant ce qui précède à $\mathfrak{g} = \mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{gl}(\tilde{\mathfrak{g}})$, montrer que :

$$\forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \exists!(X_s, X_n) \in \tilde{\mathfrak{g}}^2, \quad \mathrm{ad}(X)_s = \mathrm{ad}(X_s) \text{ et } \mathrm{ad}(X)_n = \mathrm{ad}(X_n)$$

  Montrer que $[X_n, X_s] = 0$.

  ii) Soit $\rho : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}'$ un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie avec $\tilde{\mathfrak{g}}'$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple. Montrer que pour X dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, on a $\rho(X_s) = \rho(X)_s$ et $\rho(X_n) = \rho(X)_n$ (on pourra utiliser la décomposition de $\tilde{\mathfrak{g}}$ en somme d'idéaux simples).