TD n°12. Représentations des groupes de Lie

Sauf mention du contraire, on ne considère que des représentations sur le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de redémontrer que le centre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des homothéties.

a) Soit ρ la représentation du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par son action naturelle sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que ρ est irréductible.

b) Montrer que tout élément de $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ définit un morphisme de la représentation ρ.

c) Conclure grâce au Lemme de Schur.

Exercice 2 (Morphismes de groupes topologiques de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}^\times$)**.**

a) Soit G un groupe compact, et $\rho : G \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme de groupes topologiques. Montrer que $\rho(G) \subset \mathbb{S}^1$.

b) En déduire tous les morphismes de groupes topologiques $\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^\times$. (On a $\mathrm{Lie}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ et l'application exponentielle $\exp_{\mathbb{S}^1}$ est donnée par $\theta \mapsto e^{i\theta}$.)

Exercice 3 (Représentations de groupes de Lie abéliens)**.**

a) Montrer que toute représentation $\mathbb{C}$-linéaire irréductible de dimension finie d'un groupe de Lie abélien est de degré 1.

b) Déterminer toutes les $\mathbb{C}$-représentations irréductibles de $\mathbb{S}^1$.

c) Déterminer toutes les $\mathbb{C}$-représentations irréductibles de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (\mathbb{S}^1)^n$ pour $n \geq 2$.

Exercice 4. Soit G un groupe topologique. On s'intéresse aux représentations $\mathbb{K}$-linéaires de dimension finie de G, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Étant donné (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux $\mathbb{K}$-représentations irréductibles de G, on pose :

$$\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) = \{f : V_1 \to V_2 : \forall g \in G, f(\rho_1(g)) = \rho_2(g)(f)\}$$

a) i) Montrer que $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) = \{0\}$ si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas équivalentes.

ii) Montrer que $\mathrm{End}(\rho_1) := \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_1)$ est un corps (pas forcément commutatif).

iii) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\mathrm{End}(\rho_1) \simeq \mathbb{C}$.

b) On prend $G = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

i) Montrer que $\rho : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une représentation irréductible $\mathbb{R}$-linéaire de dimension 2 de $\mathbb{S}^1$.

ii) Calculer $\mathrm{End}(\rho)$.

c) On prend $G = \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Soit H le sous espace vectoriel réel de $\mathbb{C}^4$ défini par :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

i) Quelle est la dimension de H sur $\mathbb{R}$?

ii) Montrer que $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ agit par multiplication à gauche sur H et que cette action, notée ρ, est irréductible.

iii) Calculer $\mathrm{End}(\rho)$.

Exercice 5 (Représentations irréductibles de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$)**.**

a) Montrer que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie complexe, et est la complexifiée de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

b) Soit $\rho : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation. Montrer que $d\rho$ s'étend par $\mathbb{C}$-linéarité en une $\mathbb{C}$-représentation $(d\rho)_{\mathbb{C}} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si ρ est irréductible, alors $(d\rho)_{\mathbb{C}}$ aussi.

c) En déduire toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 6 (Représentations irréductibles de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$)**.**

a) On note Ad la représentation adjointe du groupe $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

i) Montrer que $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}))$ est isomorphe à un sous groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. (On pourra commencer par calculer la dimension de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.)

ii) Montrer que $\ker \mathrm{Ad} = \{\pm I_2\}$.

iii) En déduire $\mathrm{im}\,\mathrm{Ad} = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, puis que Ad fournit un isomorphisme de groupes topologiques $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$.

b) Montrer que toute représentation $\rho' : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définit une représentation $\rho = \rho' \circ \mathrm{Ad} : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\rho(-I_2) = I_n$, et que réciproquement toute représentation $\rho : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\rho(-I_2) = I_n$ se décompose sous la forme $\rho = \rho' \circ \mathrm{Ad}$ avec ρ' une représentation de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

c) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si ρ' est irréductible.

d) En déduire toutes les représentations irréductibles du groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (examen 2012)**.** On se place dans l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et l'on utilise les notations standards :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que pour tout $n \geq 0$ il existe une unique $\mathbb{C}$-représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimension $n+1$, que l'on note V_n.
On définit l'action suivante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C})$:

$$H.E_{i,j} = (2(i+j)-9)E_{i,j}, \quad X.E_{i,j} = (4-i)E_{i+1,j} + (3-j)E_{i,j+1}, \quad Y.E_{i,j} = (i-1)E_{i-1,j} + (j-1)E_{i,j-1}$$

où $E_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 3$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la $i$ème ligne et $j$ème colonne qui vaut 1.

a) Vérifier que les actions de H, X et Y données ci-dessus définissent bien une $\mathbb{C}$-représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, c'est à dire que l'application linéaire $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C}))$ ainsi définie est un morphisme d'algèbres de Lie.

b) Soit V une représentation de dimension finie quelconque de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

i) Soit λ une valeur propre de H de partie réelle minimale pour cette représentation. Montrer que $-\lambda \in \mathbb{N}$ et que $V_{-\lambda}$ est une sous-représentation de V.

ii) Soit W une sous-représentation de V, et soit U une sous-représentation de la représentation quotient V/W. Montrer que V admet une sous-représentation isomorphe à U.

c) On revient à l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ définie plus haut. Montrer que 5 et -5 sont valeurs propres de H de multiplicité 1, que 3 et -3 sont valeurs propres de H de multiplicité 2, et que 1 et -1 sont valeurs propres de H de multiplicité 3.

d) En déduire que V_5 est une sous-représentation de $\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C})$.

e) Montrer que V_3 est une sous-représentation de la représentation quotient $\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C})/V_5$, puis que V_3 est aussi une sous-représentation de $\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C})$.

f) Montrer que la représentation quotient $\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C})/(V_5 \oplus V_3)$ est isomorphe à la représentation V_1. En déduire :

$$\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{C}) = V_5 \oplus V_3 \oplus V_1.$$

Remarque indépendante : cette représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ n'est autre que la réprésentation $V_3 \otimes V_2$. On peut décomposer de la même manière toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 8. Donner une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$, et montrer que toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de carré intégrable et 1-périodique en chacune de ses variables est la limite

$$f(x) = \sum_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{[0,1]^n} f(t) e^{(-2i\pi m_1 t_1)} \ldots e^{(-2i\pi m_n t_n)} dt \right) e^{(2i\pi(m_1 x_1 + \ldots m_n x_n))}$$

au sens de la norme L^2.