Examen

Durée : trois heures. Les notes de cours sont autorisées. Le sujet fait deux pages.

Exercice 1. Montrer que si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}$ sont des $\mathcal{L}$-structures vérifiant $\mathcal{M} \preceq \mathcal{P}$ et $\mathcal{N} \preceq \mathcal{P}$, alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. [Il existe un argument d'une ligne.]

Problème 2. Soient $\mathcal{L} = \{<\}$ et T la théorie affirmant les choses suivantes :
– $<$ est un ordre total sans extrémités ;
– $<$ est *discret*, i.e. tout élément admet un successeur immédiat et un prédécesseur immédiat.

a) Donner des axiomes pour cette théorie.
b) T est-elle $\aleph_0$-catégorique ?
   On admet (c'est facile) que tout modèle est de la forme $\sqcup_{(I,\lessdot)}(\mathbb{Z}, <)$, où $(I, \lessdot)$ est un ensemble ordonné non-vide.
c) Montrer que si $\mathcal{M} \models T$ est ω-saturé, alors $(I, \lessdot)$ est un ordre linéaire dense sans extrémités.
   On admettra que c'est une condition suffisante.
d) Montrer que les isomorphismes locaux ne forment pas une famille d'∞-isomorphismes entre deux modèles ω-saturés.
e) Montrer que deux modèles ω-saturés sont néanmoins ∞-isomorphes.
f) T est-elle complète ?
g) T élimine-t-elle les quanteurs ?
h) T est-elle $\aleph_1$-catégorique ?

Problème 3. Soient $\hat{\mathcal{L}}$ et $\check{\mathcal{L}}$ deux langages du premier ordre. On note $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}} \cap \check{\mathcal{L}}$ leur intersection, et $\overline{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}} \cup \check{\mathcal{L}}$ leur union.

Convention. Quand on parle d'une théorie ou d'une structure dans un langage, elle portera toujours le chapeau (ou l'absence de chapeau) qui lui convient. On indiquera toujours le langage, par exemple en écrivant $\equiv_{\hat{\mathcal{L}}}$ ou $\preceq_{\overline{\mathcal{L}}}$. Si $\hat{\mathcal{M}}$ est une $\hat{\mathcal{L}}$-structure, on note $\mathcal{M}$ la $\mathcal{L}$-structure associée en oubliant l'interprétation des symboles de $\hat{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L}$, et de même pour les autres paires de langages.

L'objectif des quatre premières questions est d'établir le résultat suivant.

Lemme (de « cohérence disjointe » de Robinson)**.** Soient $\hat{T}$ une $\hat{\mathcal{L}}$-théorie satisfaisable et $\check{T}$ une $\check{\mathcal{L}}$-théorie satisfaisable. On suppose que $T = \hat{T} \cap \check{T}$ est (une $\mathcal{L}$-théorie) complète. Alors $\overline{T} = \hat{T} \cup \check{T}$ est (une $\overline{\mathcal{L}}$-théorie) satisfaisable.

Soient $\hat{T}$, $\check{T}$ et T comme dans le lemme de Robinson.

a) Montrer, sans l'hypothèse de complétude, que T est satisfaisable.
b) Soient $\hat{\mathcal{M}}$ une $\hat{\mathcal{L}}$-structure et $\check{\mathcal{N}}$ une $\check{\mathcal{L}}$-structure. On suppose que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes : $\mathcal{M} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$. Montrer qu'il existe une $\hat{\mathcal{L}}$-structure $\hat{\mathcal{P}}$ telle que $\hat{\mathcal{M}} \preceq_{\hat{\mathcal{L}}} \hat{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{N} \preceq_{\mathcal{L}} \mathcal{P}$.
   On pourra former $\hat{\mathrm{Th}}(\hat{\mathcal{M}}, M) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{N}, N)$.
c) Soient $\hat{\mathcal{M}}_0 \models \hat{T}$ et $\check{\mathcal{N}}_1 \models \check{T}$. Construire des structures $(\hat{\mathcal{M}}_{2i})$ et $(\check{\mathcal{N}}_{2j+1})$ telles que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 \preceq_{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1 \preceq_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_2 \preceq_{\mathcal{L}} \mathcal{N}_3 \preceq_{\mathcal{L}} \dots \\ \hat{\mathcal{M}}_0 \preceq_{\hat{\mathcal{L}}} \hat{\mathcal{M}}_2 \preceq_{\hat{\mathcal{L}}} \hat{\mathcal{M}}_4 \preceq_{\hat{\mathcal{L}}} \dots \\ \check{\mathcal{N}}_1 \preceq_{\check{\mathcal{L}}} \check{\mathcal{N}}_3 \preceq_{\check{\mathcal{L}}} \check{\mathcal{N}}_5 \preceq_{\check{\mathcal{L}}} \dots \end{aligned}$$

d) Soit $P = \cup_i M_{2i} = \cup_j N_{2j+1}$. Montrer que P peut être muni d'une $\overline{\mathcal{L}}$-structure $\overline{\mathcal{P}}$ qui en fait un modèle de $\overline{T}$. En déduire le lemme de Robinson.

L'objectif des trois prochaines questions est le corollaire suivant.

Lemme (d'« interpolation » de Craig)**.** Soient $\hat{\varphi}$ une $\hat{\mathcal{L}}$-formule et $\check{\psi}$ une $\check{\mathcal{L}}$-formule. On suppose que $\hat{\varphi} \models \check{\psi}$ (dans $\overline{\mathcal{L}}$). Alors il existe une $\mathcal{L}$-formule χ telle que $\hat{\varphi} \models \chi$ et $\chi \models \check{\psi}$ (dans $\hat{\mathcal{L}}$, resp. $\check{\mathcal{L}}$).

Soient $\hat{\varphi}$ et $\check{\psi}$ comme dans le lemme de Craig. *On suppose qu'il n'existe pas de formule χ convenant.*

e) Soient $C(\hat{\varphi}) = \{\chi \in \mathcal{L} : \hat{\varphi} \models \chi\}$, $C(\neg\check{\psi}) = \{\chi \in \mathcal{L} : \neg\check{\psi} \models \chi\}$ et $T_0 = C(\hat{\varphi}) \cup C(\neg\check{\psi})$. Montrer que $T_0 \cup \{\hat{\varphi}\}$ et $T_0 \cup \{\neg\check{\psi}\}$ sont satisfaisables.

f) Soit $T_0 \subseteq T$ une $\mathcal{L}$-théorie telle que $T \cup \{\hat{\varphi}\}$ et $T \cup \{\neg\check{\psi}\}$ soient toutes deux satisfaisables (dans $\hat{\mathcal{L}}$, resp. $\check{\mathcal{L}}$), avec T *maximale pour cette propriété*. Montrer que T est complète (dans $\mathcal{L}$).

g) Grâce au lemme de Robinson, démontrer le lemme de Craig.

h) Réciproque. En supposant le lemme de Craig, redémontrer le lemme de Robinson.

Exercice 4. Montrer que chacune des affirmations suivantes est incorrecte :
– « $\mathrm{PA}_1 \vdash \neg\mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1)$ »
– « $\mathrm{PA}_1 \vdash \mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1) \to \neg\mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1)$ »
– « $\mathrm{PA}_1 \models \mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1)$ »

Examen de rattrapage

Exercice 1.

a) Montrer que $(\mathbb{Z}, 0, +) \not\equiv (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, +)$. [Indication : dans $\mathbb{Z}$, tout nombre est soit pair soit impair ; au moment d'utiliser cette indication, faites attention au langage.]

b) Démontrer que si $m \neq n$, $(\mathbb{Z}^m, 0, +) \not\equiv (\mathbb{Z}^n, 0, +)$.

1 Théorie des modèles

Problème 2. Soient $\mathcal{L} = \{B, R, <\}$ où B et R (« bleu » et « rouge ») sont des symboles de prédicat unaire, et $<$ est un symbole de relation binaire. Considérons les conditions suivantes :
– tout point est soit rouge, soit bleu, mais pas les deux ;
– $<$ est une relation d'ordre total ;
– entre deux points il y a toujours un point ;
– avant et après chaque point bleu, il y a un point rouge ;
– avant et après chaque point rouge, il y a un point bleu.

a) Écrire des $\mathcal{L}$-énoncés exprimant ces axiomes. Soit T la $\mathcal{L}$-théorie obtenue.

b) Montrer que les fonctions croissantes ne sont pas toutes des isomorphismes locaux.

c) Démontrer que deux modèles T sont ∞-isomorphes.

d) Montrer que T est complète.

e) T élimine-t-elle les quanteurs ?

f) T est-elle $\aleph_0$-catégorique ? $\aleph_1$-catégorique ?

g) Que se passe-t-il si l'on enlève la clause qu'entre deux points il y a toujours un point ?

Problème 3. Ce problème a deux parties indépendantes.
On rappelle qu'une formule est :
– existentielle si de la forme $\exists y_1 \dots \exists y_n\ \psi(\underline{x}, \underline{y})$, où ψ est sans quanteurs ;
– universelle si de la forme $\forall y_1 \dots \forall y_n\ \psi(\underline{x}, \underline{y})$, où ψ est sans quanteurs ;
– $\forall\exists$ si de la forme $\forall z_1 \dots \forall z_m \exists y_1 \dots \exists y_n\ \psi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$, où ψ est sans quanteurs.
On rappelle aussi que si $\mathcal{M}$ est une structure et $A \subseteq M$ est un ensemble de paramètres, $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A)$ désigne sa théorie complète sur A ; $\mathrm{Th}_0(\mathcal{M}, A)$ est sa théorie sans quanteurs ; $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{M}, A)$ se comprend aisément.
Les premières questions sont dédiées au lemme suivant.

Lemme. Soit T une théorie fixée. On suppose que chaque fois que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ sont deux modèles de T et $\underline{m} \in M$ est tel que $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$, alors on a aussi $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{m})$. Alors φ équivaut (modulo T) à une formule existentielle.

Soit φ comme dans le Lemme. On ajoute des constantes $\underline{c}$ au langage et l'on forme $\Psi = \{\psi(\underline{x})$ *existentielle* telle que $T \models \psi(\underline{c}) \to \varphi(\underline{c})\}$. Soit $\hat{T}$ la théorie : $T \cup \{\neg\psi(\underline{c}) : \psi \in \Psi\} \cup \{\varphi(\underline{c})\}$.

a) On suppose $\hat{T}$ satisfaisable. Soit $\mathcal{M}$ un tel modèle ; on note encore $\underline{c} \in M$ l'interprétation des constantes $\underline{c}$. Montrer que $\mathrm{Th}_0(\mathcal{M}, M) \cup \{\neg\varphi(\underline{c})\}$ n'est pas satisfaisable.

b) En déduire que $\hat{T}$ n'est pas satisfaisable, puis conclure.

Les questions suivantes sont indépendantes. On montre à présent un résultat dû à Tarski.

Lemme. $T = T_{\forall\exists}$ si et seulement si toute union croissante de modèles de T est un modèle de T.

d) Montrer le sens facile.

e) Soient $\mathcal{M} \models T_{\forall\exists}$ et la théorie :

$$T' = T \cup \{\neg\exists \underline{y}\varphi_0(\underline{m}, \underline{y}) : \forall \underline{x} \exists \underline{y} \varphi_0(\underline{x}, \underline{y}) \notin T_{\forall\exists}, \varphi_0 \text{ sans quanteurs}\}$$

Montrer que $\mathrm{Th}_0(\mathcal{M}, M) \subseteq T'$.

f) Montrer que T' est satisfaisable.

g) Soit $\mathcal{N} \models T'$. Montrer que la théorie : $\mathrm{Th}_0(\mathcal{N}, N) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$ est satisfaisable.

h) En déduire que si $\mathcal{M} \models T_{\forall\exists}$, alors il existe $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}$ tels que : $\mathcal{N} \models T$ et $\mathcal{M} \preceq \mathcal{P}$.

i) On suppose que toute union croissante de modèles de T est un modèle de T. Soit $\mathcal{M}_0 \models T_{\forall\exists}$. Construire des structures $\mathcal{N}_i \models T$ et des structures $\mathcal{M}_i \models T_{\forall\exists}$ telles que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \dots \\ \mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M}_2 \preceq \mathcal{M}_4 \preceq \dots \end{aligned}$$

j) Conclure.

Exercice 4. PA_1 est-elle $\aleph_0$-catégorique ? même question pour $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$.