Complément de cours n°1

Cette partie du cours est tirée sur papier et non détaillée en classe pour des raisons évidentes.

Nous allons démontrer $\vdash (\neg(\varphi\wedge\psi) \leftrightarrow (\neg\varphi\vee\neg\psi)$. Ceci permet au passage de revenir sur la méthode de construction des arbres de déduction en suggérant un allégement considérable des notations.

— Commençons par montrer $\{\neg\varphi\vee\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi\wedge\psi)$ avec les conventions les plus lourdes. (Noter au passage qu'une autre stratégie d'affaiblissements est possible.)

Lisez le verso maintenant.

— Ceci n'apporte rien. Outre la suppression des accolades, on peut ne noter les axiomes qu'en sommet des arbres, à condition d'en avoir une bonne gestion.
Reprenons la déduction de $\neg\varphi \vdash \neg(\varphi\wedge\psi)$. On écrira :

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}}{\varphi}\,\wedge_{\mathrm{e}} \qquad \neg\varphi}{\neg(\varphi\wedge\psi)}\,\neg_{\mathrm{i}}$$

en barrant $\varphi\wedge\psi$ au moment du $\neg_i$. Le fait que $\neg\varphi$ reste non barrée à la fin signifie que cette hypothèse est à mettre à gauche du $\vdash$ final.

— On écrira donc pour la déduction globale :

$$\dfrac{\neg\varphi\vee\neg\psi \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}}{\varphi} \quad \cancel{\neg\varphi}}{\neg(\varphi\wedge\psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}}{\psi} \quad \cancel{\neg\psi}}{\neg(\varphi\wedge\psi)}}{\neg(\varphi\wedge\psi)}$$

en barrant les $\varphi\wedge\psi$ au moment de chaque $\neg_i$ (de manière indépendante), et $\neg\varphi$ et $\neg\psi$ (simultanément) au moment du $\vee_e$.
À la fin il reste $\neg\varphi\vee\neg\psi$ comme hypothèse : on a bien montré $\{\neg\varphi\vee\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi\wedge\psi)$.

— Voici la réciproque sous cette forme compacte.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi\wedge\psi) \quad \cancel{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}^2 \quad \dfrac{\cancel{\neg\varphi}^1}{\neg\varphi\vee\neg\psi}}{\neg\neg\varphi}\,1}{\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\varphi\wedge\psi) \quad \cancel{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}^2 \quad \dfrac{\cancel{\neg\psi}^{1'}}{\neg\varphi\vee\neg\psi}}{\neg\neg\psi}\,1'}{\psi}}{\varphi\wedge\psi}}{\neg\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}\,2}{\neg\varphi\vee\neg\psi}$$

Comme il reste $\neg(\varphi\wedge\psi)$, on a montré $\{\neg(\varphi\wedge\psi)\} \vdash \neg\varphi\vee\neg\psi$.

— Attention : ne jamais oublier, au moment d'apliquer une règle exigeant une révision des hypothèses, de barrer *toutes* les occurrences au-dessus du point d'application de la règle.

— Il vous reste à démontrer $\vdash \neg(\varphi\vee\psi) \leftrightarrow (\neg\varphi\wedge\neg\psi)$.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{\neg\varphi\vee\neg\psi\}\vdash\neg\varphi\vee\neg\psi}\,\mathrm{ax}}{\{\neg\varphi\vee\neg\psi,\varphi\wedge\psi\}\vdash\neg\varphi\vee\neg\psi}\,\mathrm{aff}
\quad
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{\varphi\wedge\psi\}\vdash\varphi\wedge\psi}\,\mathrm{ax}}{\{\varphi\wedge\psi\}\vdash\varphi}\,\wedge_{\mathrm{e_g}}}{\{\varphi\wedge\psi,\neg\varphi\}\vdash\varphi}\,\mathrm{aff}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\{\neg\varphi\}\vdash\neg\varphi}\,\mathrm{ax}}{\{\varphi\wedge\psi,\neg\varphi\}\vdash\neg\varphi}\,\mathrm{aff}
}{\{\neg\varphi\}\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)}\,\neg_{\mathrm{i}}}{\{\neg\varphi\vee\neg\psi,\varphi\wedge\psi,\neg\varphi\}\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)}\,\mathrm{aff}
\quad
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{\varphi\wedge\psi\}\vdash\varphi\wedge\psi}\,\mathrm{ax}}{\{\varphi\wedge\psi\}\vdash\psi}\,\wedge_{\mathrm{e_d}}}{\{\varphi\wedge\psi,\neg\psi\}\vdash\psi}\,\mathrm{aff}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\{\neg\psi\}\vdash\neg\psi}\,\mathrm{ax}}{\{\varphi\wedge\psi,\neg\psi\}\vdash\neg\psi}\,\mathrm{aff}
}{\{\neg\psi\}\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)}\,\neg_{\mathrm{i}}}{\{\neg\varphi\vee\neg\psi,\varphi\wedge\psi,\neg\psi\}\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)}\,\mathrm{aff}
}{\{\neg\varphi\vee\neg\psi,\varphi\wedge\psi\}\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)}\,\vee_{\mathrm{e}}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\{\varphi\wedge\psi\}\vdash\varphi\wedge\psi}\,\mathrm{ax}}{\{\neg\varphi\vee\neg\psi,\varphi\wedge\psi\}\vdash\varphi\wedge\psi}\,\mathrm{aff}
}{\{\neg\varphi\vee\neg\psi\}\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)}\,\neg_{\mathrm{i}}
$$