Université Pierre & Marie Curie — Master 1 de mathématiques
4M232 (Logique pour mathématiciens) — Printemps 2015

Devoir à la maison n°1

À rendre le 12 février.

Le but de ce problème est de montrer que la logique intuitionniste est assez expressive pour encoder sans perte la logique classique.

Notations.
La *traduction de Gentzen-Gödel* d'une formule φ est la formule φ^* définie récursivement par : φ^*

– si φ est atomique, φ^* est $\neg\neg\varphi$;
– si φ est $\neg\psi$, φ^* est $\neg\psi^*$;
– si φ est $\psi_1 \wedge \psi_2$, φ^* est $\psi_1^* \wedge \psi_2^*$;
– si φ est $\psi_1 \vee \psi_2$, φ^* est $\neg(\neg\psi_1^* \wedge \neg\psi_2^*)$;
– si φ est $\psi_1 \to \psi_2$, φ^* est $\psi_1^* \to \psi_2^*$;
– si φ est $\forall x\ \psi$, φ^* est $\forall x\ \psi^*$;
– si φ est $\exists x\ \psi$, φ^* est $\neg\forall x\ \neg\psi^*$.

Pour un ensemble Σ de formules, on note $\Sigma^* = \{\varphi^* : \varphi \in \Sigma\}$. Σ^*

On note enfin $\vdash^*$ la notion de déduction employant toutes les règles sauf $\neg_e$. $\vdash^*$

Questions.

(a) Montrer par récurrence sur φ que $\mathcal{M}[s] \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}[s] \models \varphi^*$.

(b) Montrer par récurrence sur φ que $\{\varphi\} \vdash \varphi^*$ et $\{\varphi^*\} \vdash \varphi$.
Ces deux premières questions montrent que du point de vue classique, la traduction est fidèle : en sémantique comme en déduction, φ et φ^* sont équivalentes.

(c) Déduire de la question (b) que si $\Sigma^* \vdash^* \varphi^*$, alors $\Sigma \vdash \varphi$.
Nous allons à présent montrer la réciproque.

(d) Préliminaire : vérifier que $\vdash^* \neg\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$.

(e) Montrer par récurrence sur φ que $\vdash^* \neg\neg\varphi^* \to \varphi^*$.

(f) Montrer par récurrence sur la déduction que si $\Sigma \vdash \varphi$, alors $\Sigma^* \vdash^* \varphi^*$.

Les questions (b) et (e) sont plus longues. Traiter une sélection de cas représentatifs est toléré.

Remarques.

– Vous avez droit aux notation « allégées » pour les arbres de déduction. Par exemple, la règle $\neg_i$ est très utilement notée :

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\cancel{\varphi}^{(k)} & \Sigma \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \neg\psi\end{array}}{\neg\varphi}\ {\scriptstyle \neg_i (k)}$$

si vous barrez au $k^{\text{ème}}$ moment – ce que vous veillerez à signaler.
Notez, cela vous servira, que φ n'a même pas besoin d'être là pour être barrée (si $\Sigma \vdash \psi$ et $\Sigma \vdash \neg\psi$, alors $\Sigma \vdash \neg\varphi$ pour toute formule φ : et cela ne demande *pas* $\neg_e$).

– Les arbres de déduction sont assez pénibles à réaliser en LaTeX, et je ne conseille pas de rendre un DM tapé. Si vous voulez néanmoins tenter l'exérience, sachez que j'utilise personnellement le paquet `proof`. Très chronophage. Le source de l'arbre précédent est :

```
\[
\infer[\scriptstyle \neg_i (k)]
{\neg \varphi}
{
  \infer*{\psi}
  {\cancel{\varphi}^{(k)}} & \infer*{\neg \psi}{\Sigma}
}
\]
```