Examen

Durée : trois heures.

Notes de cours, polycopiées et manuscrites, autorisées. Autres documents interdits.

Les appareils électroniques et notamment les téléphones portables ne sont *pas* autorisés pendant l'épreuve. Tout appareil utilisé peut être saisi.

Exercice 1. Soit T une théorie du premier ordre. Le but de cet exercice est de montrer le théorème d'élimination (théorème 3.5.21) :

> E est un ensemble d'élimination pour T ssi : chaque fois que $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ et $\underline{m} \in M$, $\underline{n} \in N$ vérifient les mêmes formules de E, alors $\underline{m}$ et $\underline{n}$ vérifient les mêmes formules (propriété *).

a) Faire le sens facile.

On suppose dorénavant (*).

b) Montrer que si deux modèles de T vérifient les mêmes énoncés de E, alors ils sont élémentairement équivalents.

On fixe à présent une formule $\varphi(\underline{x})$.

c) Soient $\underline{c}$ et $\underline{d}$ deux uplets de constantes, et soit la théorie

$$T' = T \cup \{\varphi(\underline{c})\} \cup \{\neg\varphi(\underline{d})\} \cup \{\psi(\underline{c}) \leftrightarrow \psi(\underline{d}) : \psi \in E\}$$

T' est-elle cohérente ? En déduire qu'il existe un sous-ensemble *fini* $E_0 \subseteq E$ tel que :

$$T \models \forall \underline{x} \forall \underline{y} \left(\bigwedge_{\psi \in E_0} \psi(\underline{x}) \leftrightarrow \psi(\underline{y}) \right) \to \big(\varphi(\underline{x}) \leftrightarrow \varphi(\underline{y})\big)$$

d) Soit $\mathcal{M} \models T$ un modèle fixé. Pour $\underline{c} \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{c})$, on note $\psi_{\mathcal{M},\underline{c}}$ la formule

$$\left(\bigwedge_{\substack{\psi \in E_0 \\ \mathcal{M} \models \psi(\underline{c})}} \psi(\underline{x}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{\psi \in E_0 \\ \mathcal{M} \not\models \psi(\underline{c})}} \neg\psi(\underline{x}) \right)$$

puis $\psi_{\mathcal{M}}$ la formule

$$\bigvee_{\substack{\underline{c} \in M \\ \mathcal{M} \models \varphi(\underline{c})}} \psi_{\mathcal{M},\underline{c}}(\underline{x})$$

Justifier qu'il s'agit bien de formules. Montrer que $\mathcal{M} \models \forall \underline{x}\ \varphi(\underline{x}) \leftrightarrow \psi_{\mathcal{M}}(\underline{x})$.

On a bien montré que φ équivaut dans $\mathcal{M}$ à une combinaison booléenne de formules de E, mais le problème est que $\psi_{\mathcal{M}}$ dépend du modèle. Il faut donc poursuivre l'étude.

e) Montrer qu'il existe un énoncé $\chi_{\mathcal{M}}$ combinaison booléenne d'énoncés de E tel que :

$$T \cup \{\chi_{\mathcal{M}}\} \models \forall \underline{x}\ \varphi(\underline{x}) \leftrightarrow \psi_{\mathcal{M}}(\underline{x})$$

On pourra raisonner comme précédemment, d'abord en trouvant un ensemble *fini* d'énoncés $E_{\mathcal{M}} \subseteq E$ tel que :

$$T \cup \{\chi \in E_{\mathcal{M}}\} \cup \{\neg\chi : \chi \in E_{\mathcal{M}}, \mathcal{M} \not\models \chi\} \models \forall \underline{x}\ \varphi(\underline{x}) \leftrightarrow \psi_{\mathcal{M}}(\underline{x})$$

f) En déduire qu'il existe ψ combinaison booléenne de formules de E telle que $T \models \forall \underline{x}\ \varphi(\underline{x}) \leftrightarrow \psi(\underline{x})$.

Exercice 2. Le langage comporte une infinité de relations binaires $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Écrire une théorie T affirmant :
— que chaque R_n est une relation d'équivalence ;
— que R_0 possède une unique classe ;
— que les R_n s'affinent progressivement (chaque R_{n+1}-classe est incluse dans une R_n-classe) ;

— que chaque R_n-classe se divise en exactement deux R_{n+1}-classes infinies.

b) Faire un dessin. Montrer que l'ensemble des suites stationnaires à valeurs dans $\{0, 1\}$ est modèle de T, pour les relations : $R_n(f, g)$ ssi $f_{|n} = g_{|n}$ où $f_{|n}$ désigne la restriction de f à $\{0, \ldots, n-1\}$.

c) Montrer qu'étant donné un modèle $\mathcal{M} \models T$, il existe une extension élémentaire $\mathcal{M}' \succeq \mathcal{M}$ *de même cardinal* avec la propriété suivante :

(') pour tout $a \in M$, il existe une infinité de $b \in M'$ tels que pour tout n, $\mathcal{M}' \models R_n(a, b)$

On pourra introduire une infinité (du bon cardinal) de constantes.

d) En déduire qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{M}^* \succeq \mathcal{M}$ *de même cardinal* avec la propriété suivante :

(*) pour tout $a \in M^*$, il existe une infinité de $b \in M^*$ tels que pour tout n, $\mathcal{M}^* \models R_n(a, b)$

e) Montrer que si $\mathcal{M} \models T$ est ω-saturé, alors il vérifie (*).

f) T est-elle complète ? Élimine-t-elle les quanteurs ?

g) Deux modèles dénombrables sont-ils toujours isomorphes ? Deux modèles dénombrables et ω-saturés sont-ils toujours isomorphes ?

h) Décrire les 1-types de T.

i) Compter les k-types de T.

Les dernières questions sont hors barême.

j) On se place dans un modèle ω-saturé ; soit A une partie finie ; compter les 1-types sur A.

k) Même question si A est dénombrable.

Exercice 3. Soit T une théorie complète dont tous les modèles dénombrables sont ω-saturés. Montrer que T est $\aleph_0$-catégorique. (Indication : va-et-vient.)

Exercice 4. On rappelle que $\mathbb{N} \models \mathrm{PA}_1$.

a) Montrer que si $\mathbb{N} \models \Box\varphi$, alors $\mathbb{N} \models \varphi$. La réciproque est-elle vraie ?

b) A-t-on $\mathbb{N} \models (\Box\Box\varphi) \leftrightarrow (\Box\varphi)$?

Rattrapage

Durée : trois heures.

Notes de cours, polycopiées et manuscrites, autorisées. Autres documents interdits.

Les appareils électroniques et notamment les téléphones portables ne sont *pas* autorisés pendant l'épreuve. Tout appareil utilisé peut être saisi.

Exercice 1. On travaille dans ZF *sans choix*. Un ensemble X est dit Dedekind-infini s'il existe une injection $f : X \hookrightarrow X$ qui ne soit pas surjective.

a) Montrer que si X contient un sous-ensemble dénombrable (i.e., en bijection avec ω), alors X est Dedekind-infini.

b) Montrer que si X est Dedekind-infini, alors X contient un sous-ensemble dénombrable. On pourra partir de $x_0 \in X \setminus f(X)$ et itérer.

Exercice 2 (p-groupes abéliens élémentaires)**.** Soit p un nombre premier fixé. On note $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments (noté parfois $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Un groupe abélien est dit d'exposant n si tout élément est d'ordre divisant n.

On rappelle que tout groupe abélien d'exposant p peut être naturellement muni d'une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.

a) Dans le langage $\mathcal{L}_{\text{grp}} = \{0, +, -\}$ des groupes, écrire les axiomes d'une théorie T_0 dont les modèles sont exactement les groupes abéliens d'exposant p.

b) Montrer que T_0 n'est pas complète.

c) Soit T la théorie formée de T_0 et, pour chaque entier intuitif n, de l'axiome :

$$\psi_n : \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$$

Montrer que T n'est pas finiment axiomatisable (i.e., il n'existe pas de théorie finie qui ait exactement les mêmes modèles que T).

d) Montrer que les isomorphismes locaux entre deux modèles de T sont des ∞-isomorphismes. En déduire que T est complète et élimine les quanteurs.

e) Déterminer l'ensemble des cardinaux κ tels que T soit κ-catégorique.

f) Montrer que tout modèle de T est ω-saturé.

g) Montrer que toute partie définissable d'un modèle est finie ou cofinie.

Exercice 3.

a) Soit $\mathcal{C}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. On note $\text{Th}(\mathcal{C})$ l'intersection des $\text{Th}(\mathcal{N})$ pour $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{C}$. On fixe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$. Montrer l'équivalence entre :
   i) $\mathcal{M} \models \text{Th}(\mathcal{C})$;
   ii) $\mathcal{M}$ est élémentairement équivalent à un ultraproduit d'éléments de $\mathcal{C}$;
   iii) $\mathcal{M}$ se plonge élémentairement dans un tel ultraproduit.

   On pourra relire la démonstration du théorème de compacité.

b) Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{M}$ se plonge *non-élémentairement* dans un tel ultraproduit.

Exercice 4. On considère une théorie T dans un langage dénombrable. Soit $\mathcal{M} \models T$ un modèle de cardinal infini κ.

a) Soit $\varphi(\underline{x}, \underline{m})$ une formule à paramètres dans $\mathcal{M}$. Montrer qu'il existe un $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ *encore de cardinal* κ dans lequel l'ensemble des $\underline{n}$ tels que $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{n}, \underline{m})$ est soit fini soit de cardinal exactement κ.

b) Montrer qu'il existe $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ *encore de cardinal* κ dans lequel tout ensemble définissable à paramètres dans $\mathcal{M}$ est soit fini soit de cardinal exactement κ.

c) Montrer qu'il existe $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ *toujours de cardinal* κ dans lequel tout ensemble définissable à paramètres (dans $\mathcal{N}$!) est soit fini soit de cardinal exactement κ.

Exercice 5. On rappelle que $\mathbb{N} \models \text{PA}_1$.

a) On sait que $\text{PA}_1 \vdash \text{Coh} \to \neg\text{Comp}$ mais aussi que $\text{PA}_1 \nvdash \text{Coh}$. Questions : est-ce que $\text{PA}_1 \vdash \text{Coh} \to \text{Comp}$? est-ce que $\text{PA}_1 \vdash \text{Comp} \to \neg\text{Coh}$?

b) Montrer que $\text{PA}_1 \vdash 1 = 0$ ssi $\text{PA}_1 \vdash \Box(1 = 0)$. Est-ce que $\text{PA}_1 \vdash (1 = 0) \leftrightarrow \Box(1 = 0)$?