4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 1

1. Exercices sur le cours 1

Exercices à préparer avant le TD. Les questions étoilées sont plus difficiles et seront plus particulièrement vues en TD.

1. Un peu de syntaxe — On se place dans le langage des anneaux (qui contient les constantes 0, 1 et les symboles de fonctions binaires $(+, -, \cdot)$) augmenté d'un symbole de relation unaire P. Dans chacun des exemples suivants, vérifier si ce qui est écrit a un sens et dans ce cas si c'est un terme ou une formule atomique ; les représenter aussi sous forme d'un arbre.

1) $+(1, v_1)$	2) $+(+(1, \cdot(v_1, v_2)), \cdot(\cdot(v_1, v_2), v_3))$	3) $P(1)$
4) $P(v_1, v_2)$	5) $+(+(1, \cdot(v_1, v_2), \cdot(\cdot(v_1, v_2), v_3)))$	6) $P(1) = v_1$
7) $P(1 = v_1)$	8) $P(+(1, x))$	9) $+(1, P(v_1))$

Vérifier si les formules suivantes sont bien écrites. Si tel est le cas, lister les variables de cette formule et décrire les occurrences qui sont libres ou liées. Enfin les représenter sous forme d'un arbre

1) $(\forall v_1 (v_1 \wedge P(c)))$	2) $(\exists v_2\ (\forall v_1\ (P(+(v_2, c)) \to v_2 = +(c, v_1))))$
3) $(\forall v_1\ (+(v_2, (\exists v_2\ P(v_2)))))$	4) $(\exists v_2\ (\forall v_1\ P(+(v_2, c)))) \to v_2 = +(c, v_1)))$

2. Les groupes — On utilise le langage des groupes (une constante 1, un symbole de fonction unaire $^{-1}$ et un symbole de fonction binaire $\cdot$).

1) Rappeler la théorie des groupes.
2) Écrire la théorie des groupes abéliens.
3) Écrire la théorie des groupes sans torsion.
4) Écrire la théorie des groupes divisibles (tout élément a une racine n-ième pour tout n).
5) (*) Écrire la théorie des groupes qui ont un nombre infini de classes de conjugaison.

3. Les corps — Dans le langage des anneaux, écrire la théorie des corps commutatifs puis (*) la théorie des corps algébriquement clos.

4. Les ordres — On se donne un langage muni d'un symbole de relation binaire $<$.

1– Écrire les théories des ordres, puis celle des ordres totaux, enfin celle des ordres totaux sans plus grand ni plus petit élément.

2– (*) Écrire la théorie des ordres totaux denses : entre deux éléments, il y en a toujours un troisième.

3– (*) Au contraire, la théorie des ordres totaux discrets : pour chaque élément, il y a le plus petit des majorants et le plus grand des minorants.

5. Les relations d'équivalences — On se donne un langage muni d'un symbole de relation binaire $\sim$.

1– Écrire la théorie des relations d'équivalences.

2– Pour k et n deux entiers, écrire la théorie des relations d'équivalences ayant au moins k classes avec chacune au moins n éléments.

3– (*) Écrire la théorie des relations d'équivalences qui ont une nombre infini de classes.

4– (*) Écrire la théorie des relations d'équivalences qui ont une nombre infini de classes avec un nombre infini d'éléments.

5– (*) Écrire la théorie des relations d'équivalences qui ont une nombre infini de classes, chacune avec un nombre infini d'éléments.

2. Exercices d'illustration du cours 2

Remarque : Dorénavant, la plupart des formules seront écrites de manière lisible par un être humain. Il est important d'avoir des règles claires et strictes de construction des formules, par exemple pour avoir un théorème de lecture unique (voir la dernière partie). Les facilités d'écriture ne sont que des abréviations.

6. Une structure — On se place dans le langage des anneaux. On définit la structure $\mathcal{M}$ suivante : l'ensemble de base est $\mathbb{Z}$, les constantes sont interprétées par $0^{\mathcal{M}} = 3$ et $1^{\mathcal{M}} = 16$; enfin les fonctions sont interprétées par $n +^{\mathcal{M}} m = n^m$ et $n \cdot^{\mathcal{M}} m = \max(n, m)$.

1– Calculer l'interprétation des termes $0+0$, $0+1$, $1+0$, $1+1$, $0\cdot 0$, $0\cdot 1$.

2– Les deux formules suivantes sont-elles satisfaites dans cette structure ?

$\varphi : (\forall v_1\, (\forall v_2\, v_1 + v_2 = v_2) \to v_1 = 0)$ et $\psi : (\forall v_1\, (\forall v_2\, (\exists v_3\, ((v_1 \cdot v_2) + v_2 = v_3 + v_2) \wedge (v_3 = v_1 \vee v_3 = v_2))))$.

7. Trouver des structures — Trouver, dans les exemples suivants, plusieurs structures satisfaisant les énoncés donnés :

1) Le langage $\mathcal{L}_1$ comporte une constante 0, une fonction binaire $\cdot$ et deux fonctions unaires f et g. Trouver des modèles pour cette théorie : $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ et
$$(\forall v_1\ (f(v_1) \cdot f(v_1)) = ((g(v_1) \cdot g(v_1)) \cdot g(v_1)))$$

2) Le langage $\mathcal{L}_2$ comporte deux constantes A et B, une fonction unaire f et une relation binaire P. Trouver des modèles pour cette théorie :
$$(\forall v_1\ (\forall v_2\ (\forall v_3\ ((P(v_1, v_2) \wedge P(v_2, v_3)) \to P(v_1, v_3)))))$$
$$(\forall v_1\ (P(A, v_1) \wedge P(v_1, B)))$$
$$(\forall v_1\ P(f(v_1), v_1))$$

8. — Le langage comporte deux symboles de relation : P d'arité 1 et Q d'arité 2. Donner un modèle satisfaisant le premier mais pas le second des énoncés ci-dessous ; puis en donner un autre satisfaisant le second mais pas le premier.

1) $(\forall v_1\ (\exists v_2\ (P(v_1) \to Q(v_1, v_2))))$

2) $(\exists v_2\ (\forall v_1\ (Q(v_1, v_2) \to P(v_1))))$

9. Conséquence sémantique — Décider si les conséquences suivantes sont vraies :

1– $\models (\forall v_1\ \varphi) \to \varphi$

2– $\models (\forall v_1\ (\varphi \wedge \psi)) \leftrightarrow ((\forall v_1\ \varphi) \wedge (\forall v_1\ \psi))$

3– On note T_{corps} la théorie des corps (commutatifs) : $T_{\text{corps}} \models \exists v_2, (v_2)^p = v_1$.

4– On note T_{groupes} la théorie des groupes : $T_{\text{groupes}} \models \forall v_1 \forall v_2\ v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$.

5– On note $T_{\text{O.T.}}$ la théorie des ordres totaux :
$$T_{\text{O.T.}} \models \forall v_1\ (\exists v_2\ (v_2 < v_1 \wedge (\forall v_3\ (v_3 < v_1) \to (v_3 < v_2 \vee v_3 = v_2)))) \to$$
$$(\exists v_2\ (v_2 > v_1 \wedge (\forall v_3\ (v_3 > v_1) \to (v_3 > v_2 \vee v_3 = v_2)))) .$$

10. 0-définissabilité — On fixe un langage $\mathcal{L}$. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. On dit qu'un ensemble $X \subset M$ est 0-définissable si et seulement s'il existe une formule à une variable libre $\varphi(v)$ telle que, pour toute assignation des variables s,
$$(\mathcal{M}, s) \models \varphi(v) \text{ implique } s(v) \in X.$$

On verra plus tard dans le cours l'énoncé intuitif et fondamental suivant :

Théorème : *Si X est un ensemble 0-définissable dans $\mathcal{M}$ et σ est un automorphisme*[1] *de $\mathcal{M}$, alors $\sigma(X) = X$.*

1) $[0, +\infty[$ est-il 0-définissable dans $\mathbb{R}$ (avec le langage des anneaux) ? Et $[0, 1]$?

2) L'ensemble des puissances de 2 est-il 0-définissable dans $\mathbb{N}$ (langage de l'arithmétique) ?

3) $\mathbb{N}$ est-il 0-définissable dans $\mathbb{Z}$ (avec le langage des anneaux) ?

4) On travaille dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_9$ avec le langage des groupes. Un sous-groupe cyclique est-il définissable ? (*Indication : peut-on le distinguer d'un conjugué ?*) Le sous-groupe alterné est-il définissable ? Que peut-on ajouter au langage pour le rendre définissable ?

5) $\mathbb{R}$ est-il définissable dans le corps $\mathbb{C}$ (langage des anneaux) ?

6) (**) Le sous-groupe dérivé (engendré par les commutateurs) d'un groupe G est-il définissable (langage des groupes) ?

7) (**) $\mathbb{Z}$ est-il 0-définissable dans $\mathbb{Q}$ (langage des anneaux) ? (La réponse est oui, et c'est en réalité un théorème difficile, dû à Julia Robinson !)

Remarque : L'ensemble des parties définissables et sa combinatoire sont le cœur de la théorie des modèles.

1. C'est-à-dire une bijection de M dans M qui respecte l'interprétation des prédicats et des relations.

3. Pour aller plus loin

11. Le théorème de lecture unique — On veut montrer le théorème de lecture unique des formules :

Théorème. Soit φ une formule. On est alors dans un et un seul des cas suivants :

- il existe un unique symbole de relation n-aire R et d'uniques termes t_1, ..., t_n tels que φ soit $R(t_1, \dots, t_n)$.
- il existe une unique formule ψ telle que que φ soit $(\neg\psi)$.
- il existe deux formules uniques ψ et η, et un unique symbole $\boxdot$ parmi $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$ tels que $\varphi = (\psi \boxdot \eta)$.
- il existe une unique formule ψ, une unique variable x et un unique quantificateur $\ni$ parmi $\exists$ et $\forall$ tels que $\varphi = (\ni x\, \psi)$.

1– Énoncer un théorème analogue pour les termes.

2– Montrer que dans tout terme, le nombre de parenthèses ouvrantes égale le nombre de parenthèses fermantes. Montrer la même chose pour les formules.

3– Soit t un terme de longueur $n > 1$. Montrer que parmi les k premiers symboles, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, le nombre de parenthèses ouvrantes est strictement supérieur au nombre de parenthèses fermantes. En déduire que la suite des k premiers symboles, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, n'est pas un terme. On dit qu'un préfixe strict d'un terme n'est pas un terme.

4– En déduire le théorème de lecture unique pour les termes.

5– Montrer de manière analogue qu'un préfixe strict d'une formule n'est pas une formule.

6– En déduire le théorème de lecture unique pour les formules.