4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 4

1. Exercices sur le cours 4

1. Des entiers non-standards — Il s'agit ici de prouver qu'il y a d'autres modèles de l'arithmétique de Peano du premier ordre que $\mathbb{N}$ et d'en étudier quelques propriétés. On fera plus tard dans l'année une étude systématique de ces modèles.

1– Écrire une formule $\varphi_n(x)$ à une variable libre x affirmant que x est plus grand que le $n^{\text{ème}}$ successeur de 0.

2– On rajoute une constante c au langage. Montrer que $\mathrm{PA}_1 \cup \{\varphi_n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ est satisfaisable.

3– Conclure.

4– Montrer que la relation suivante est une relation d'équivalence dans tout modèle de PA_1 :

$$a \sim b \text{ si et seulement si } a - b \text{ ou } b - a \text{ est un successeur de } 0$$

5– Montrer que tout modèle de PA_1 différent de $\mathbb{N}$ est, pour l'ordre, de la forme $\mathbb{N} \cup_{i\in I} \mathbb{Z}$ où I est un ensemble ordonné.

2. Des réels non-standards —

1– Donner un théorie des corps réels : c'est-à-dire des corps de caractéristique nulle dans lesquels on peut définir un ordre total compatible avec les opérations en posant : $x \leqslant y$ si et seulement si $y - x$ est un carré dans le corps.

2– Montrer que dans tout modèle la relation d'ordre, restreinte au sous-corps $\mathbb{Q}$, coïncide avec l'ordre usuel sur les rationnels.

3– Montrer qu'il existe des modèles qui ont des éléments « infiniment petits » non nuls (c'est-à-dire plus petits en valeur absolue que tout rationnel non nul) ou « infiniment grands ».

4– Montrer que l'ensemble des éléments infiniment petits est un sous-anneau, et que l'inverse d'un infiniment petit non nul est un infiniment grand.

2. Exercices d'illustration du cours 5

3. Opérations ensemblistes — Le but de cet exercice est de prouver qu'on peut faire les constructions ensemblistes habituelles et que leur sens est bien défini. « Construire un objet $\mathcal{C}(a, b, \ldots)$ dépendant d'ensembles a, b... » « signifie » : montrer dans ZF l'existence d'un ensemble ayant les propriétés désirées et montrer dans ZF que $\mathcal{C}(a, b, ..) = \mathcal{C}(a', b', ...)$ implique $a = a'$, $b = b'$...

1– Définir la paire $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ et le produit cartésien $a \times b$ pour a et b deux ensembles.

2– Pour a et b deux ensembles, construire l'ensemble b^a des fonctions de a dans b.

3– Si l'on a une bijection f de a dans b, construire la bijection réciproque.

4– Si l'on a une collection d'ensembles a_i indexée par un ensemble I, (c'est-à-dire une relation fonctionnelle φ, qui est définie sur I – et on note a_i l'unique y tel que $\varphi(i, y)$) montrer que c'est un ensemble, définir l'union des a_i, le produit cartésien $\prod_I a_i$.

5– Soient a un ensemble et $\sim$ un prédicat binaire sur a. Définir « $\sim$ est une relation d'équivalence ». Montrer que le quotient $a/\sim$ est encore un ensemble.

4. Théorème de Cantor-Berstein (2.1.22) — Soient A et B deux ensembles. On suppose qu'on a une injection f de A dans B et une injection g de B dans A. On considère le graphe orienté dont les sommets sont $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$, et dont les arêtes sont les $(a, 0) \to (f(a), 1)$ et $(b, 1) \to (g(b), 0)$.

1– Montrer qu'il y a quatre types de composantes connexes : le cycle, la chaîne bi-infinie, la chaîne infinie qui commence par un élément de $A \times \{0\}$, ou la chaîne infinie qui commence par un élément de $B \times \{1\}$.

2– Décrire une bijection de A dans B en utilisant la structure précédente.

5. Constructions sur les ordinaux : 2.2.11 et 2.2.12 —

1– Montrer que tout bon ordre est uniquement isomorphe à un unique ordinal de Von Neumann.

2– Montrer que si α est un ordinal, $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ aussi. (Un tel β est appelé ordinal successeur).

3– Montrer que si X est un ensemble d'ordinaux, $\cup X$ aussi.

4– Montrer que la classe On des ordinaux est totalement ordonnée et bien ordonnée (i.e. tous les segments initiaux sont des ensembles bien ordonnés), mais c'est une classe propre.

6. Des classes bien ordonnées — Soit $\mathcal{C}$ une classe bien ordonnée : il y a un ordre total et tout segment initiaux est un ensemble bien ordonné. Monterr que $\mathcal{C}$ est uniquement isomorphe à la classe des ordinaux.

3. Pour aller plus loin : définir les objets mathématiques

La série d'exercices suivante a pour but d'éprouver l'expressivité de la théorie des ensembles pour se persuader qu'on peut y « faire (presque) toutes les maths ». Le but est donc de définir des objets de plus en plus complexes pour arriver à de « vrais » objets mathématiques intéressants.

« Définir » ou « construire »signifie : écrire une phrase dans le langage de la théorie des ensembles (et des objets déjà construits) qui définit ou construit l'objet en question.

7. Les groupes et action de groupes —

1– Soit a un ensemble. Qu'est ce qu'une loi de composition interne $\times$ sur a ?

2– Définir le fait que $(a, \times)$ est un groupe.

3– Soit b un autre ensemble. Définir une opération de $(a, \times)$ sur b.

8. La topologie —

1– Soit a un ensemble. Définir « b est une topologie sur a ».

2– Définir la notion d'espace topologique.

3– Définir la topologie produit sur un produit d'espaces topologiques.

4– Définir la notion de recouvrement ouvert puis de quasi-compacité d'un sous-ensemble d'un espace topologique.

5– Définir la topologie engendrée par une base d'ouverts (plus petite topologie contenant les ouverts donnés).

9. $\mathbb{R}$ et sa structure différentiable —

1– Montrer que les constructions classiques de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{N}$ s'écrivent en théorie des ensembles.

2– Définir l'ordre de $\mathbb{R}$ et la topologie qui va avec.

3– Définir la valeur absolue et la distance.

4– Définir qu'une fonction définie sur un intervalle est continue, dérivable en un point, dérivable sur I, de classe C^1 sur I.

5– Définir $\mathbb{R}^n$ et sa topologie.

6– Définir qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est de classe C^1.

Continuez à vous amuser : vous pouvez définir ce qu'est une variété, un groupe de Lie, une fonction exponentielle, une loi normale...