4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 5

1. Exercices sur le cours 5

1. Somme ordinale — Soient α et β deux ordinaux. On note $\alpha \cup_< \beta$ l'ordre sur l'union disjointe de α et β où tous les éléments de β sont supérieurs à ceux de α.

1– Montrer que $\alpha \cup_< \beta$ est un bon ordre. On notera $\alpha + \beta$ l'ordinal isomorphe à ce bon ordre.

2– Montrer que l'ordinal 0 est neutre pour cette somme, qu'ajouter 1 à droite revient à prendre le successeur. Que se passe-t-il quand on ajoute 1 à gauche ? Montrer que la somme est associative.

3– Montrer que pour tout ordinal β, l'application $\alpha \mapsto \beta + \alpha$ est strictement croissante et continue (i.e. si λ est limite, $\beta + \lambda = \cup_{\alpha<\lambda} \beta + \alpha$). Montrer qu'elle est de plus surjective sur l'ensemble des ordinaux $\geqslant \beta$.

4– Montrer que l'ordinal $\alpha + \beta$ peut-être aussi défini par la récursion $F_\alpha(0) = \alpha$, $F_\alpha(\gamma + 1) = F_\alpha(\gamma) + 1$ et la continuité : si $\lambda = \cup_{\gamma<\lambda}\gamma$, alors $F_\alpha(\lambda) = \cup_{\gamma<\lambda} F_\alpha(\gamma)$.

2. Multiplication ordinale — Soient α et β deux ordinaux. On note $\alpha \times_< \beta$ l'ordre lexicographique (où compte en premier l'élément de β) sur le produit cartésien de α et β.

1– Montrer que $\alpha \times_< \beta$ est un bon ordre. On notera $\alpha \times \beta$ l'ordinal isomorphe à ce bon ordre.

2– Montrer que l'ordinal 1 est neutre pour $\times$ et que multiplier par 0 donne 0. Comparer $2 \times \omega$ et $\omega \times 2$.

3– Montrer que le produit est associatif et distributif à gauche sur l'addition.

4– Montrer que pour tout $\beta \neq 0$, la multiplication à gauche par β est strictement croissante et continue.

5– Montrer que l'ordinal $\alpha \times \beta$ peut être défini par une récursion analogue à celle de la question 1.4.

6– (Division euclidienne) Soient β et $\alpha \neq 0$ deux ordinaux. Alors il existe un unique couple (σ, ρ) d'ordinaux avec $\rho < \alpha$ et $\beta = \alpha \times \sigma + \rho$.

3. Exponentiation ordinale — Soient α et β deux ordinaux. On note $\exp(\alpha, \beta)$ l'ordre sur l'ensemble des fonctions de β dans α nulles sauf pour un nombre fini d'éléments de β défini par : $f < g$ si, au plus *grand* élément $\gamma \in \beta$ où elles diffèrent, on a $f(\gamma) < g(\gamma)$.

1– Montrer que $\exp(\alpha, \beta)$ est un bon ordre. On notera $\alpha^{(\beta)}$ l'ordinal isomorphe à ce bon ordre.

2– Montrer que $\alpha^{(n)} = \alpha \times \ldots \times \alpha$ pour tout entier n.

3– Calculer $2^{(\omega)}$. Remarque : ce n'est *pas* $2^{\aleph_0}$! Montrer que $\omega^{(\omega)}$ est l'union croissante des ω^n.

4– Montrer plus généralement que pour tout $\alpha \neq 0$, $\beta \mapsto \alpha^{(\beta)}$ est strictement croissante et continue.

5– Montrer que pour tous α, β et γ, on a $\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^{(\beta)} \times \alpha^{(\gamma)}$ et $(\alpha^{(\beta)})^{(\gamma)} = \alpha^{(\beta\times\gamma)}$.

6– Comme dans les exercices précédents, montrer que l'ordinal $\alpha^{(\beta)}$ peut être défini par une récursion.

7– (Forme normale de Cantor) Montrer que tout ordinal α s'écrit de manière unique :

$$\alpha = \omega^{(\beta_1)} \times c_1 + \ldots + \omega^{(\beta_k)} \times c_k,$$

où $\alpha > \beta_1 > \ldots > \beta_k$ sont des ordinaux et les c_i des ordinaux finis.

4. L'axiome du choix — On discute ici de quelques énoncés équivalents de l'axiome du choix. Considérons les énoncés suivants :

- (AC1) Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.
- (AC2) Tout produit (indexé par un ensemble) d'ensembles non vides est non vide.
- (AC3) Si on a un ensemble X d'ensembles, il existe une fonction f – dite de choix – qui envoie tout élément de X sur un de ses éléments : $f(x) \in x$.
- (LZ) Tout ensemble inductif non vide a un élément maximal. (Remarque : un ensemble partiellement ordonné est inductif si toute partie totalement ordonné admet un plus grand élément ; un élément est maximal s'il est plus grand que tout élément qui lui est comparable.)

1– Montrer que (AC2) et (AC3) sont équivalents.

2– Montrer que (AC1) implique (AC3) et que (LZ) implique (AC1).

3– Montrer enfin que (AC3) implique (LZ) (c'est plus dur !).

5. Le modèle d'Ackermann — On travaille sur les entiers $\mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$.

1– Construire une bijection $\varphi : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$.

2– Pour deux entiers x, y, on définit : $x \in_\varphi y$ si et seulement si x appartient à $\varphi^{-1}(y)$. Montrer que $(\mathbb{N}, \in_\varphi)$ est un modèle de ZF sauf l'axiome de l'infini.

2. Exercices d'illustration du cours 6

Dans cette partie, on note κ, λ, μ des cardinaux.

6. On s'échauffe —

1– Montrer que, si $(\kappa_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une suite croissante de cardinaux, $\cup_I \kappa_\alpha$ est encore un cardinal. En déduire que la classe Cn des cardinaux n'est pas un ensemble.

2– Montrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\kappa)) > \kappa$. Montrer que tout cardinal a un successeur.

3– Montrer que tout cardinal limite κ vérifie $\kappa = \cup_{\lambda < \kappa} \lambda$.

7. La somme — On définit $\kappa + \lambda = \mathrm{Card}(\kappa \times 0 \cup \lambda \times 1)$.

1– Montrer que l'addition est commutative, associative.

2– Montrer que si κ et λ sont des cardinaux infinis, $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

8. Le produit — On définit $\kappa \times \lambda = \mathrm{Card}(\kappa \times \lambda)$.

1– Montrer que la multiplication est commutative, associative.

2– Montrer que si κ et λ sont des cardinaux infinis, $\kappa \times \lambda = \kappa + \lambda$ (*attention, ce n'est pas si facile !).*

9. La puissance — On définit $\kappa^\lambda = \mathrm{Card}\{\text{fonctions } \lambda \to \kappa\}$.

1– Montrer que la puissance n'est pas commutative, ni associative.

2– Montrer que $\kappa^\lambda \times \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.

3– Montrer que $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \times \mu}$.

4– Montrer que si $\kappa \leqslant \lambda$ sont infinis, alors $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

Attention, l'exponentiation cardinale est différente de l'exponentiation ordinale !

3. Pour aller plus loin

10. Les suites de Goodstein —

Pour tous entiers n et q, on définit la décomposition itérée de n en base q comme l'écriture de n, puis de tous les exposants, *etc...* en base q. Par exemple, en base 2, on a $24 = 2^4 + 2^3 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1}$. Dans l'écriture en base q itérée, n'apparaissent que des nombres inférieurs à q.

On définit maintenant la fonction $f_{p,q}$ (pour p, q entiers) comme la fonction qui prend un entier n, le décompose en base p itérée, puis remplace tous les p par des q. Par exemple :

$$f_{2,3}(24) = f_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2^1+1}) = 3^{3^3} + 3^{3^1+1} = 19764.$$

On définit aussi $f_{p,\omega}$ comme la fonction qui à un entier fait correspondre l'ordinal obtenu en remplaçant p par ω dans la décomposition en base p itérée. Par exemple, $f_{2,\omega}(24) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1}$.

Enfin, on définit la suite $(g_p(k))_{p \geqslant 2}$ de Goodstein de graine l'entier k par :

$$g_2(k) = k \text{ et } g_{p+1}(k) = \begin{cases} f_{p,p+1}(g_p(k)) - 1 \text{ si } g_p(k) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1– Déterminer les suites de graines 1, 2, 3.

2– Calculer quelques premiers termes de la suite de graine 4.

3– Montrer que $f_{p,\omega}$ est strictement croissante.

4– Montrer que la suite d'ordinaux $(f_{p,\omega}(g_p(k)))_{p \geqslant 2}$ décroît strictement tant que $g_p(k) \neq 0$.

5– En déduire que pour tout k, il existe p avec $g_p(k) = 0$.