4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 6

1. Exercices sur le cours 6

Les deux exercices suivants utilisent les propriétés de l'arithmétique cardinale vues dans la précédente feuille de TD.

1. Cofinalité — Soit A un ordre total. On dit qu'une partie $B \subset A$ est *cofinale* dans A si :

$$\forall a \in A \exists b \in B, a \leqslant b.$$

1– Montrer qu'il existe B cofinal dans A et bien ordonné (*Indication : utiliser le lemme de Zorn*). On note $\mathrm{cof}(A)$ le plus petit ordinal isomorphe à un ensemble cofinal bien ordonné de A.

2– Que valent $\mathrm{cof}(\omega)$, $\mathrm{cof}(\omega+1)$ et $\mathrm{cof}(\omega+\omega)$?

3– Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est toujours un cardinal.

4– Montrer que pour tout ordinal α, $\mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) \leqslant \mathrm{Card}(\alpha)$.

2. Régularité — On dit qu'un ordinal est *régulier* si $\mathrm{cof}(\alpha) = \alpha$. Sinon on dit qu'il est *singulier*.

1– Montrer que les ordinaux réguliers sont des cardinaux.

2– Montrer que si α est un ordinal limite, $\mathrm{cof}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

3– Montrer qu'un cardinal successeur est toujours régulier.

4– Soit κ un cardinal infini. Montrer que κ est singulier si et seulement si il existe un ensemble E de parties de κ, toutes de cardinal $< \kappa$ et $\mathrm{Card}(E) < \kappa$, tel que $\kappa = \cup E$. (*Indication : montrer en général que* $\mathrm{cof}(\kappa)$ *est le plus petit cardinal d'un tel ensemble* E.)

2. Exercices d'illustration du cours 7

3. Équivalence élémentaire : l'exemple des ordres — Parmi les ordres suivants, lesquels sont élémentairement équivalents (par convention, on écrit les unions « dans l'ordre ») ?

$$\mathbb{N},\ \{\infty\} \cup \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{N} \cup \mathbb{Z},\ \{\infty\} \cup \mathbb{Q},\ \cup_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

4. Des entiers non-standards — On travaille dans le langage de l'arithmétique et l'on fixe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$.

Soit $\mathbb{N}^{(\mathcal{U})}$ l'ultrapuissance selon $\mathcal{U}$ de $\mathbb{N}$.

1– Monter que $\mathbb{N}^{(\mathcal{U})}$ est un modèle de PA_1.

2– Interpréter la constante 0 dans $\mathbb{N}^{(\mathcal{U})}$, puis le $n^{\text{ème}}$ successeur de 0.

3– On suppose $\mathcal{U}$ principal. Identifier $\mathbb{N}^{(\mathcal{U})}$.

4– On suppose $\mathcal{U}$ non-principal. Exhiber un entier non-standard (non-successeur de 0) dans $\mathbb{N}^{(\mathcal{U})}$.

5. Des corps algébriquement clos — On fixe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ non principal sur l'ensemble des nombres premiers. Soit $\mathbb{K} = \prod_{/\mathcal{U}} \overline{\mathbb{F}_p}$ l'ultraproduit des clôtures algébriques des $\mathbb{F}_p$.

1– Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos.

2– Montrer qu'il est de caractéristique nulle.

3– Montrer qu'il est du cardinal de $\mathbb{C}$.

4– (*) En déduire qu'il a un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du cardinal de $\mathbb{C}$.

5– (*) Montrer que $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$ (en tant que corps).

3. Pour aller plus loin

6. Le théorème de König et $2^{\aleph_0}$ —

1– Soit $A_i \subset B_i$ des ensembles indexés par un ensemble I et tels que pour tout $i \in I$, $\mathrm{Card}(A_i) < \mathrm{Card}(B_i)$. Montrer que :
$$\mathrm{Card} \cup_I A_i \leqslant \mathrm{Card} \prod_I B_i.$$

2– Montrer qu'on a même $\mathrm{Card} \cup_I A_i < \mathrm{Card} \prod_I B_i$. C'est le théorème de König. (*Indication : Montrer qu'on ne peut pas avoir de surjection de l'union sur le produit.*)

3– Montrer que pour tout κ infini, $\kappa < \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$. (*Indication : utiliser le théorème de König et la dernière question de l'exercice 2 de cette feuille.*)

4– Montrer que $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. (*Indication : raisonner par l'absurde, et aboutir à une contradiction avec la question précédente.*)

On sait donc que le continu $2^{\aleph_0}$ ne peut pas être $\aleph_\omega$. Ceci étant, il peut valoir n'importe quel $\aleph_n$ pour n dans ω différent de 0. La détermination des α tels que l'on peut construire un modèle de forcing vérifiant $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ est un pan virtuose de la théorie des ensembles.