4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 7

1. Exercices sur le cours 7

1. Des réels non-standards — On travaille dans le langage des corps et l'on fixe un ultrafiltre non-principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$.

Soit $\mathbb{R}^{(\mathcal{U})}$ l'ultrapuissance selon $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$.

On considère que $\mathbb{R}$ s'injecte dans $\mathbb{R}^{(\mathcal{U})}$ via $r \mapsto [(r, r, \ldots)]$.

1– Définir un ordre sur $\mathbb{R}^{(\mathcal{U})}$ étendant celui de $\mathbb{R}$.

2– On dit qu'un élément de $\mathbb{R}^{(\mathcal{U})}$ est infinitésimal s'il est plus petit que tout réel (on note $\mathbb{R}^0$ leur ensemble), infiniment grand s'il est plus grand que tout réel (on note $\mathbb{R}^\infty$). On dit qu'il est borné (on note $\mathbb{R}^{\text{borné}}$) s'il n'est pas infiniment grand. Ces parties sont-elles non vides ?

3– Montrer que tout ensemble définissable et borné de $\mathbb{R}^{(\mathcal{U})}$ borné admet une borne supérieure.

4– Montrer que les trois parties $\mathbb{R}^0$, $\mathbb{R}^{\text{borné}}$ et $\mathbb{R}^\infty$ ne sont pas définissables.

5– Montrer que $\mathbb{R}^{\text{borné}}$ est un anneau, que $\mathbb{R}^0$ en est un idéal maximal.

6– On appelle fonction « partie standard » l'application de projection $\mathbb{R}^{\text{borné}} \to \mathbb{R}^{\text{borné}}/\mathbb{R}^0$. Montrer que c'est un morphisme d'anneaux et que l'image est un corps isomorphe à $\mathbb{R}$.

2. Théories universelles — Soit T une théorie. On note $T_\forall$ la théorie des énoncés universels démontrés par T. On dit que T est universelle si $T_\forall \vdash T$.

1– Vérifier que la théorie des ordres est universelle.

2– Montrer qu'une théorie est universelle si et seulement si toute sous-structure d'un modèle est encore un modèle. *Indication :* on adaptera la méthode des diagrammes.

3– La théorie des groupes est-elle universelle ?

4– La théorie des corps est-elle universelle ?

5– Montrer que la théorie des anneaux intègres est universelle.

6– Montrer que $(T_{\text{corps}})_\forall$ est la théorie des anneaux intègres.

7– Montrer que $T_\forall \subset T'_\forall$ si et seulement si tout modèle de T' est une sous-structure d'un modèle de T.

2. Exercices d'illustration du cours 8

3. Inclusion élémentaire : l'exemple des ordres — Parmi les ordres suivants, déterminer quelles inclusions sont/ne sont pas élémentaires (par convention, on écrit les unions « dans l'ordre » et l'on prend les inclusions « naturelles ») :

$$\mathbb{N},\ \{\infty\} \cup \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{N} \cup \mathbb{Z},\ \{\infty\} \cup \mathbb{Q},\ \cup_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

4. Union de chaînes — On se donne une suite croissante de structures $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Soit $\mathcal{M}^*$ leur union.

1– Montrer que $\mathcal{M}^*$ est encore une structure.

2– On suppose de plus que $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{M}_j$ pour tout $i \leqslant j$. Montrer que chaque $\mathcal{M}_i$ est élémentairement inclus dans $\mathcal{M}^*$.

5. Structures élémentairement équivalentes — Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux structures élémentairement équivalentes. Montrer que :

1– Il existe une structure $\mathcal{P}$ dans laquelle $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement incluses.

2– $\mathcal{M}$ se plonge élémentairement dans une ultrapuissance de $\mathcal{N}$.

Remarque. Un théorème de Shelah énonce un résultat beaucoup plus fort : deux structures sont élémentairement équivalentes si et seulement si elles ont des ultrapuissances isomorphes.

3. Pour aller plus loin

6. Le théorème de Hausdorff — Soit X un ensemble de cardinal infini κ. On se propose de montrer qu'il y a $2^{(2^\kappa)}$ ultrafiltres distincts sur X. C'est un théorème attribué à Hausdorff.

On note Y l'ensemble des couples $(F,(P_1,\dots,P_n))$ où F est une partie finie de X, et $(P_1,\dots,P_n)$ est une suite finie de parties de F. Si $A\subset X$, on construit une partie A' de $X\cup Y$ en posant :
- $A'\cap X = A$,
- $A'\cap Y$ est composé des couples $(F,(P_1,\dots,P_n))$ tels que $F\cap A$ est l'un des P_i.

Soit $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(X\cup Y)$. On dit que $\mathcal{F}$ est *libre* si toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ ou de complémentaires d'éléments de $\mathcal{F}$ est non vide.

1– Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(X\cup Y)$ formé des A' pour $A\subset X$ est un ensemble libre.

2– Quel est le cardinal de $\mathcal{F}$?

3– En déduire que $X\cup Y$ possède $2^{(2^\kappa)}$ ultrafiltres distincts.

4– Quel est le cardinal de $X\cup Y$? Démontrer le théorème de Hausdorff.