4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 8

1. Exercices sur le cours 8

1. Formules existentielles — Soit T une théorie et $\varphi(\underline{x})$ une formule.

Montrer que $\varphi(\underline{x})$ équivaut (sous T) à une formule existentielle si et seulement si :
Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ sont deux modèles de T et $\underline{a} \in \mathcal{M}$, alors $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{a})$ implique $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{a})$.

2. Inclusions existentiellement closes — Une inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ est existentiellement close si chaque fois que $\mathcal{N} \models \exists \underline{y} \varphi_0(\underline{a}, \underline{y})$ avec $\underline{a} \in M$ et φ_0 sans quanteurs, alors $\mathcal{M} \models \exists \underline{y} \varphi_0(\underline{a}, \underline{y})$.

1– L'inclusion d'anneaux $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[X]$ est-elle existentiellement close ? Les deux structures sont-elles élémentairements équivalentes ?

2– Montrer que l'inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ est existentiellement close si et seulement s'il existe une structure $\mathcal{M}'$ dans laquelle $\mathcal{M}$ se plonge élémentairement et qui contient $\mathcal{N}$.

3– Soient T une théorie et $T_{\forall\exists}$ la théorie des énoncés $\forall\exists$ démontrés par T. Montrer que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $T_{\forall\exists}$ il existe un modèle $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \models T$ où l'inclusion est existentiellement close.

4– Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $T_{\forall\exists}$. Montrer qu'il existe une union croissante $\mathcal{M}^*$ de modèles de T dans laquelle $\mathcal{M}$ est élémentairement incluse.

5– Montrer que T est équivalente à $T_{\forall\exists}$ si et seulement si toute union croissante de modèles de T est encore un modèle.

3. — Soit $\mathcal{C}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. On note $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$ l'intersection des $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ pour $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{C}$. On fixe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$. On veut montrer l'équivalence des affirmations suivantes :

(A) $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$.

(B) $\mathcal{M}$ est élémentairement équivalent à un ultraproduit d'éléments de $\mathcal{C}$.

(C) $\mathcal{M}$ se plonge élémentairement dans un tel ultraproduit.

1– Montrer (C)⇒(B)⇒(A).

2– En adaptant la preuve d'un théorème de cours, montrer la dernière implication.

4. — Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ trois $\mathcal{L}$-structures telles que $\mathcal{M}$ est élémentairement incluse dans $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$.

1– Montrer que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont élémentairement équivalentes.

2– Pour deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$, montrer qu'il y a équivalence entre : $\mathcal{P} \models \mathrm{Th}(\mathcal{N}, N)$ et : il existe un plongement élémentaire de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{P}$.

3– Montrer que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ ont un plongement élémentaire commun (i.e., il existe $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ se plongent élémentairement dans $\mathcal{P}$).

4– Généraliser à un ensemble arbitraire $\{\mathcal{N}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{L}$-structures dans lesquelles $\mathcal{M}$ se plonge élémentairement.

2. Exercices d'illustration du cours 9

5. Les ordres — Pour les ordres suivants, déterminer les hauteurs d'isomorphismes :

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+\omega, \mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \sqcup \{\infty\} \sqcup \mathbb{Q},\ \sqcup_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \sqcup \{\infty\} \sqcup \mathbb{R}$$

6. Isomorphismes locaux et ∞-isomorphismes — Pour les théories suivantes, montrer que la famille des isomorphismes locaux définit un ∞-isomorphisme entre deux modèles :

1– Les ensembles infinis,

2– Les ordres linéaires denses et sans extrémités,

3– Les corps algébriquement clos de caractéristique q et de degré de transcendance infini sur le corps premier.

7. Théories catégoriques —

1– Montrer que la théorie des espaces vectoriels sur un corps fini est catégorique en tout cardinal infini.

2– Montrer que la théorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ est $\aleph_1$-catégorique, mais pas $\aleph_0$-catégorique.

3– Montrer que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique q est $\aleph_1$-catégorique, mais pas $\aleph_0$-catégorique.

3. Pour aller plus loin

8. Une théorie complète à trois modèles dénombrables (Exemple d'Ehrenfeucht) — On se place dans le langage des ordres, auquel on ajoute des constantes $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On considère la théorie T composée des axiomes d'ordre linéaire dense sans extrémités et des formules $c_i < c_j$ pour tout $i < j$ dans $\mathbb{N}$.

Pour tout modèle $\mathcal{M}$ et $i < j$, on note $\mathcal{M}_{<i}$ l'ordre composé des éléments strictement inférieurs à c_i et de même on définit les notations $\mathcal{M}_{>i,<j}$, $\mathcal{M}_{>j}$. On appelle ces différents sous-ordres des intervalles distingués de $\mathcal{M}$.

1– On considère deux modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ dénombrables. Montrer que les intervalles distingués sont isomorphes. (Ce sont des ordres denses sans extrémités dénombrables.)

2– Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables à isomorphisme près. (Que se passe-t-il au-delà de tous les c_i ?)

3– Montrer que tout fragment fini de T est complet.

4– Montrer que T est complète.

Remarque. C'est un théorème de Vaught qu'une théorie complète (en langage dénombrable) a 1 ou plus de 3 modèles dénombrables. Cet exemple montre que 3 est optimal.