4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 10

1. Exercices sur le cours 10 : Étude des corps algébriquement clos

On note CAC (dans la littérature anglo-saxonne, c'est ACF) la théorie des corps algébriquement clos (dans le langage des anneaux), et pour q premier ou nul, CAC_q la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique q.

1. Complétude — Montrer que pour tout q, CAC_q est $\aleph_1$-catégorique. En déduire qu'elle est complète. Est-elle $\aleph_O$-catégorique ?

2. Élimination des quanteurs —

1– Montrer qu'il existe un isomorphisme local entre deux modèles de CAC si et seulement s'ils ont même caractéristique.

2– Montrer qu'un modèle saturé de CAC est exactement un corps algébriquement clos de degré de transcendance infini sur son corps premier.

3– Montrer que les isomorphismes locaux forment une famille d'∞-isomorphismes entre deux modèles saturés de même caractéristique.

4– En déduire que CAC_q est complète pour chaque q.

5– Montrer que CAC élimine les quanteurs.

3. $\mathbb{C}$ et les ultraproduits —

1– Montrer que $\mathbb{C}$ est isomorphe à tout ultraproduit non principal des $\overline{\mathbb{F}_p}$.

2– Soit φ une formule du langage des anneaux. Montrer que $\mathbb{C} \models \varphi$ si et seulement si $\overline{\mathbb{F}_p} \models \varphi$ pour tout p suffisamment grand.

2. Exercices d'illustration du cours 11 : Début de l'étude des réduits de PA_1

4. Des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ —

1– Montrer qu'il existe $\aleph_0$ parties de $\mathbb{N}$ de cardinal $\aleph_0$ deux-à-deux disjointes.

2– Montrer qu'il existe $2^{\aleph_0}$ parties de $\mathbb{N}$ deux-à-deux d'intersection finie.

3– Dans le langage $(0, s, +, \times)$, les parties du 1 sont définissables, mais pas celles du 2. Pourquoi ?

4– Montrer que l'ensemble des puissances de 6 est définissable.

5. Le successeur — On se place dans le langage $\{0, s\}$. On note T la théorie :

– $\forall v_1 \forall v_2\ s(v_1) = s(v_2) \to v_1 = v_2$;
– $\forall v_1\ s(v_1) \neq 0$;
– $\forall v_1 \exists v_2\ v_1 \neq 0 \to v_1 = s(v_2)$;
– pour chaque n entier (et avec des notations évidentes), $\forall v_1\ s^n(v_1) \neq v_1$.

1– Montrer que la théorie n'est pas $\aleph_0$-catégorique.

2– Montrer qu'en tout cardinal $\kappa > \aleph_0$, la théorie est catégorique.

3– Décrire tous les modèles de la théorie et donner une condition nécessaire d'ω-saturation.

4– Montrer que les isomorphismes locaux forment une famille d'∞-isomorphismes entre modèles ω-saturés.

5– Montrer que la théorie est complète et élimine les quanteurs.

6– Montrer que $\mathbb{N}$ est élémentairement inclus dans tout modèle.

6. — Montrer que l'ensemble des puissances de 2 est définissable dans $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$. Que dire de l'ensemble des puissances de 6 ?

3. Pour aller plus loin

Nous donnons ici deux applications de l'étude des corps algébriquement clos.

7. Première application : Théorème d'Ax — On veut montrer que si une application polynomiale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est injective, elle est surjective.

1– Montrer que c'est vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par un corps fini.

2– Montrer que c'est vrai pour tous les $\overline{\mathbb{F}_p}$ (indication : tout sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_p}$ engendré par une partie finie est fini).

3– Conclure.

8. Deuxième application : Théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz) — On veut montrer que dans un corps algébriquement clos k, un idéal propre de $k[X_1, \ldots, X_n]$ a une solution : il existe $(x_1, \ldots x_n) \in k^n$ tel que pour tout P dans I, $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Soit donc I un idéal propre. On sait (admet) que $k[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien : il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_k$ tel que I est engendré par les P_j.

On fixe $\mathfrak{m}$ un idéal maximal contenant I et l'on note L la clôture algébrique du corps $k[X]/\mathfrak{m}$.

1– Montrer que k s'inclut élémentairement dans L.

2– Montrer que les polynômes P_j ont une solution commune dans L.

3– Conclure.