4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 11

1. Exercices sur le cours 11 : poursuite de l'étude des réduits de PA_1

1. L'ordre — On se place dans le langage $\mathcal{L} = \{0, <\}$. On note S la théorie exprimant que $<$ est un ordre total avec les axiomes suivants (on se permet d'utiliser à loisir les notations $\leqslant$ et $<$ pour l'ordre strict ou large) :
– $\forall v_1\ 0 \leqslant v_1$;
– $\forall v_1\ (\forall v_2\ v_1 \leqslant v_2) \to v_1 = 0$;
– $\forall v_1 \exists v_2 \forall v_3\ (v_3 \leqslant v_1 \vee v_2 \leqslant v_3)$;
– $\forall v_1\ v_1 \neq 0 \to \exists v_2\ (v_2 \leqslant v_1 \wedge \forall v_3\ (v_3 < v_1 \to v_3 \leqslant v_2))$.

1– Montrer qu'il existe une formule qui définit dans tout modèle de S une fonction "successeur" qui vérifie les axiomes de la théorie T du successeur vue sur la feuille 10, exercice 5.

2– Montrer que S n'est pas $\aleph_0$-catégorique.

3– Décrire les modèles de S.

4– Donner une condition nécessaire pour qu'un modèle soit ω-saturé.

5– On admet que la condition de la question précédente est suffisante. Montrer que deux modèles ω-saturés de S et dénombrables sont isomorphes (on pourra utiliser l'$\aleph_0$-catégoricité de la théorie des ordres linéaires denses sans extrémités). En déduire la complétude de S.

6– Montrer que le prédicat binaire « x et y sont à distance au moins n » est définissable.

7– Montrer que la $\mathcal{L}$-théorie S n'élimine pas les quanteurs.

8– Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nouvelles relations binaires, $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\widehat{S} = S \cup \{\forall v_1 \forall v_2\ d_n(v_1, v_2) \leftrightarrow \varphi_n(v_1, v_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que les isomorphismes locaux forment une famille d'∞-isomorphismes entre deux modèles ω-saturés de $\widehat{S}$.

9– Montrer que la $\widehat{\mathcal{L}}$-théorie $\widehat{S}$ élimine les quanteurs.

10– En déduire à nouveau que S est complète (indication : la théorie sans quanteurs est complète).

11– Montrer que $\mathbb{N}$ est élémentairement inclus dans tout modèle de S.

2. L'addition — On se place dans le langage $\{0, 1, +\}$ et l'on considère la théorie R disant que $+$ est commutative et additive, que 0 est neutre pour $+$ et :
– $\forall v_1\ v_1 + 1 \neq v_1$;
– $\forall v_1 \forall v_2\ v_1 + v_2 = 1 \to (v_1 = 0 \vee v_2 = 0)$;
– $\forall v_1 \forall v_2 \exists v_3\ (v_1 + v_3 = v_2 \vee v_2 + v_3 = v_1)$;
– $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4\ (v_1 = v_2 + v_3 \wedge v_2 = v_1 + v_4) \to v_1 = v_2$.

1– Montrer qu'il existe une formule qui définit dans tout modèle de R une relation binaire qui vérifie les axiomes de S (on notera dorénavant $<$ ou $\leqslant$ cet ordre).

2– Montrer que tout modèle de S ne provient pas d'un modèle de R.

On note maintenant n le terme $1 + \ldots + 1$, et pour t un terme du langage, $n \cdot t$ le terme $t + \ldots + t$ (on sait multiplier par les vrais entiers). On note Q la théorie composée de R et du schéma d'axiomes (division euclidienne) :

$$\forall v_1 \forall v_2 \exists v_3\ (v_1 = n \cdot v_2 + v_3 \wedge v_3 < n)$$

3– Montrer que Q démontre l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne par n.

On note dorénavant $[x/n]$ le quotient dans la division euclidienne, et l'on ajoute les fonctions $[\cdot/n]$ au langage (et à Q les axiomes qui décrivent ces fonctions).

4– Soient $\mathcal{M}$ un modèle et $\mathcal{A}$ une sous-structure. Montrer, pour tout m dans $\mathcal{M}$, que la sous-structure B engendrée par $\mathcal{A}$ et m est l'ensemble des $a + k[m/n]$ pour $a \in \mathcal{A}$, k et n deux entiers.

5– Montrer plus précisément que la somme de deux éléments de B est déterminée par la suite des restes des divisions euclidiennes de m par les entiers. De même pour les quotients $[x/n]$.

6– Montrer de plus que l'ordre sur la sous-structure engendrée par $\mathcal{A}$ et m est entièrement décrite par l'ensemble des paires a, a' de $\mathcal{A}$ qui vérifient $a \leqslant m + a'$.

7– En déduire que les isomorphismes locaux forment une famille d'∞-isomorphismes entre modèles ω-saturés.

8– En déduire que Q est complète et admet l'élimination des quanteurs (dans le langage étendu).

Remarque : La fin de cet exercice est difficile. On pourra aller lire chapitre 7 (notamment 7.3) du livre de B. Poizat, dont il est tiré.

3. Le modèle d'Ackermann — On considère la relation ε entre deux entiers : $k\varepsilon n$ si et seulement si le k-ème chiffre de n dans son développement binaire est 1.

1– Montrer que la relation ε est définissable dans le langage de l'arithmétique.

2– Montrer que $(\mathbb{N}, \varepsilon)$ est un modèle de ZF sauf l'axiome de l'infini.

2. Pour aller plus loin : un peu de hiérarchie des ensembles arithmétiques

Une formule de l'arithmétique est dite « à quantification bornée », notée Δ_0, si toutes les variables liées sont bornées par une variable libre ou un successeur de 0. Par exemple :

$$\exists y\ y \leqslant x \to x = y$$

ou

$$\exists y\ y \leqslant s(s(s \ldots s(0) \ldots)) \to x = y$$

Pour ces formules, on utilise l'abréviation $\exists y \leqslant x\ \ldots$ ou $\exists y \leqslant s(s \ldots (0) \ldots)\ \ldots$

On définit ensuite une hiérarchie des formules de l'arithmétique :
– Une formule est Σ_1 si elle est de la forme $\exists x \varphi$, où φ est Δ_0,
– Une formule est Π_1 si elle est de la forme $\forall x \varphi$, où φ est Δ_0,
– Une formule est Σ_n si elle est de la forme $\exists x \varphi$, où φ est Π_{n-1},
– Une formule est Π_n si elle est de la forme $\forall x \varphi$, où φ est Σ_{n-1},
Plus généralement, on dit qu'une formule est d'un de ces types si elle est (évidemment) équivalente à une formule de la forme corespondante. De même, on considère Σ_n et Π_n inclus dans Σ_{n+1} et Π_{n+1}.

4. Des vérifications — Vérifier que ces ensembles de formules sont stables (modulo équivalence) par :

1– conjonction et disjonction,

2– quantification bornée

3– quantification existentielle pour Σ_n, universelle pour Π_n.

Montrer enfin que la négation échange (modulo équivalence) Σ_n et Π_n.

Un ensemble est dit Σ_n ou Π_n s'il est définissable par une telle formule. Il est dit Δ_n s'il est Σ_n et Π_n. Une fonction est Σ_n, Π_n ou Δ_n si son graphe l'est.

5. De la persuasion — Persuadez-vous que toutes les fonctions et les ensembles utilisés pour les théorèmes de Tarski et Gödel sont Σ_1.

Notamment, montrer qu'une fonction $f(\underline{x}, y)$ définie par récurrence : $f(\underline{x}, 0) = g(\underline{x})$ et $f(\underline{x}, y+1) = h(\underline{x}, f(\underline{x}, y), y)$, où g et h sont Σ_n, est encore Σ_n.

6. Et les ensembles de formules ? — On adopte le codage du cours (ou un autre aux mêmes propriétés).

1– Montrer que l'ensemble des formules Δ_0 qui sont vraies dans $\mathbb{N}$ est Δ_1.

2– Montrer que l'ensemble des formules Σ_1 qui sont vraies dans $\mathbb{N}$ est Σ_1.

3– Montrer qu'il n'est pas Π_1.

4– Montrer que PA_1 est Δ_0-complète : les énoncés vrais dans $\mathbb{N}$ sont démontrables dans PA_1.

5– Montrer que l'ensemble des formules Σ_n qui sont vraies dans $\mathbb{N}$ est Σ_n.

6– Montrer qu'il n'est pas Π_n.

7– Montrer que la hiérarchie des formules est stricte.

8– Montrer le théorème de Tarski (variation numéro 4).