4M232 2014/2015 — Travaux dirigés 12

1. Exercices sur le cours 12

1. La prouvabilité et retour sur la septième variation —

1– Soit φ et ψ deux formules. Montrer que $\mathbb{N} \models \Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$.

2– Montrer $\mathrm{PA}_1 \vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$.

3– Soit G une formule telle que $\mathrm{PA}_1 \vdash G \leftrightarrow \neg\Box G$ et $\mathrm{PA}_1 \vdash \neg G \leftrightarrow \neg\Box\neg G$. Montrer que $\mathrm{PA}_1 \vdash \Box G \to \neg\mathrm{Coh}$.

4– Montrer le premier théorème d'incomplétude de Gödel.

2. Des questions pièges — Les conséquences suivantes sont-elles correctes : (1) $\mathrm{PA}_1 \models \mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1)$? (2) $\mathrm{PA}_1 \vdash \neg\mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1)$? (3) $\mathrm{PA}_1 \vdash \mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1) \to \neg\mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1)$? (4) $\mathrm{PA}_1 \vdash \Box\mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1) \to \Box\neg\mathrm{Coh}(\mathrm{PA}_1)$?

2. Quelques révisions

3. — Montrer qu'il existe une extension élémentaire $(\mathbb{N}^*, <)$ de $(\mathbb{N}, <)$ avec une chaîne descendante infinie, i.e. une suite (u_n) de $\mathbb{N}^*$ indexée par les entiers intuitifs et vérifiant $u_{n+1} < u_n$.

4. — On fixe un langage dénombrable $\mathcal{L}$.

Soient $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre *non-principal* sur $\mathbb{N}$. On note $\mathcal{M}^*$ l'ultraproduit des $\mathcal{M}_n$ par rapport à $\mathcal{U}$.

Soit $A \subseteq M^*$ un ensemble *dénombrable* de paramètres. Soit $p = p(x)$ un ensemble de formules à une variable libre x et à paramètres dans A. On suppose p finiment satisfaisable dans $\mathcal{M}^*$. On va montrer qu'il existe $\mu \in M^*$ satisfaisant p.

(1) Montrer que p est dénombrable, puis construire un ensemble $q = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{L}_A \cup \{x\}$-formules tel que : $\varphi_{n+1} \vdash \varphi_n$ et tel que toute réalisation de p soit une réalisation de q (et réciproquement).

(2) On pose $I_k = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{M}_n \models \exists x\ \varphi_k(x)\}$ et $I'_k = I_k \setminus \{1, \ldots, k\}$. Montrer que $I'_k \in \mathcal{U}$.

(3) On pose $J_k = I'_k \setminus I'_{k+1}$. Montrer que les J_k sont disjoints et que $I'_k = \cup_{\ell \geqslant k} J_\ell$.

(4) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit k tel que $n \in J_k$. Soit alors $a_n \in \mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{M}_n \models \varphi_k(a_n)$. Montrer que $a^* = [(a_n)] \in M^*$ réalise p.

Comme c'est vrai pour tout type sur un ensemble au plus dénombrable de paramètres, on dit que $\mathcal{M}^*$ est ω_1-saturé.

5. — On considère le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est un symbole de relation binaire.

(1) Écrire une théorie T affirmant que R est une relation d'équivalence qui, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a exactement une classe contenant exactement n éléments.

(2) Donner deux modèles dénombrables et isomorphes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de T tels que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$, mais pas une sous-structure élémentaire (un dessin fait l'affaire).

(3) Montrer que chaque modèle de T a une extension élémentaire qui contient une infinité de classes infinies.

(4) Montrer que deux modèles ayant une infinité de classes infinies sont ∞-isomorphes.

(5) Déduire que la théorie est complète. Élimine-t-elle les quanteurs ?

(6) Soit $C_n(x)$ une formule affirmant que la classe de x a exactement n éléments. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que T élimine les quanteurs dans $\mathcal{L}'$.

(7) Déduire que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles de T avec $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ *en tant que $\mathcal{L}'$-structures*, alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ *en tant que $\mathcal{L}$-structures.*

(8) Montrer qu'un modèle est ω-saturé ss'il a une infinité de classes infinies.

3. Pour aller plus loin : corps réels clos, d'après Poizat 6.6

On se place dans le langage des corps auquel on rajoute un symbole de relation binaire $<$.

On note CO la théorie des corps ordonnés : l'ordre est compatible aux opérations, -1 est négatif, pour tout x, x ou $-x$ est positif, la somme et le produit de deux éléments positifs sont positives et si x positif, $y < z$, $x + y < x + z$.

On note CRC la théorie des corps réels clos. Ses axiomes sont les axiomes d'un corps ordonné dans lequel tout polynôme vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

6. Familiarisation —

1– Ecrire ces axiomes. Définir la valeur absolue. Montrer l'inégalité triangulaire.

2– Soit P un polynôme unitaire $x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$ dans un corps ordonné et m un majorant des a_i. Montrer que les zéros de P sont dans l'intervalle $[-m-1, m+1]$.

3– Montrer que la continuité des polynômes dans un corps ordonné : s'ils sont > 0 en un a, ils le sont sur un petit voisinage.

4– On suppose le corps réel clos. Montrer qu'un polynôme est croissant sur tout intervalle où sa dérivée est $\geqslant 0$.

7. Clôture réelle close — On montre ici que tout corps ordonnée admet une clôture réelle close, unique à isomorphisme près. On fixe donc un corps ordonné k. On considère un polynôme P de degré minimal qui ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $a < b$ dans k tel que $P(a) < 0$, $P(b) > 0$ mais P n'a pas de zéro sur l'intervale $[a, b]$.

1– Montrer que $K = k[X]/P$ est un corps.

2– Montrer pour tout polynôme Q de degré inférieur à celui de P qu'il existe $a < x < y < b$ tels que $P(x) < 0$ et $P(y) > 0$, et Q est de signe constant sur $[x, y]$.

3– En déduire un ordre sur K étendant celui de k.

4– Conclure qu'il existe une clôture réelle close, unique à isomorphisme près

5– Soit k_1 et k_2 deux corps ordonnés, K_1 et K_2 leur clôture réelle close. Notons L_1 et L_2 le corps des éléments de K_1, respectivement K_2, algébrique sur k_1, respectivement k_2. Montrer que tout isomorphisme de corps ordonnés entre k_1 et k_2 s'étend de manière unique en un isomorphisme de corps ordonnés entre L_1 et L_2.

Remarque. Le corps L_1 de la question précédente est appelé clôture algébrique relative de k_1 dans K_1.

8. Complétude et élimination des quanteurs — On fixe deux corps réels clos ω-saturés k_1 et k_2.

1– Montrer qu'ils sont 0-isomorphes.

On fixe maintenant $a_1, \ldots, a_n$ dans k_1 et $b_1, \ldots, b_n$ dans k_2 avec un isomorphisme local envoyant a_i sur b_i. Soit a dans k_1

2– On suppose que a est dans la clôture algébrique relative L_1 de $\mathbb{Q}(a_i)$. Montrer qu'on peut étendre l'isomorphisme local en a.

3– On suppose maintenant que a n'est pas dans cette clôture. Montrer qu'il est transcendant sur $\mathbb{Q}(a_i)$.

4– Soit L_2 la clôture algébrique relative de $\mathbb{Q}(b_i)$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de corps ordonnés de L_1 sur L_2.

5– Montrer que l'ordre sur L_1 (ou L_2) est un ordre linéaire dense sans extrémités.

6– Considérons $G_1(a)$ l'ensemble des éléments de L_1 inférieurs à a et $D_1(a)$ ceux supérieurs. On note $G_2(a)$ et $D_2(a)$ l'image dans L_2. Montrer, par ω-saturation, qu'il existe $b \in k_2$ supérieur à tous les élements de $G_2(a)$ et inférieurs à ceux de $D_2(a)$.

7– Montrer que les polynômes irréductibles de $L_2(x)$ ont un signe constant sur L_2.

8– En déduire que $L_1(a)$ et $L_2(b)$ sont isomorphes comme corps ordonnés.

9– Montrer que la famille des isomorphismes locaux forme un ∞-isomorphisme.

10– Conclure : La théorie des corps réels clos est complète et admet l'élimination des quanteurs sur le langage des corps ordonnés.