Correction de l'interrogation n°1

Exercice 1 (questions de cours : 1+1 points)**.**

a) Donner la définition d'un espace complet.

b) Montrer que si (X, d) est complet et $A \subseteq X$ est un sous-ensemble, alors : $(A, d_{|A})$ est complet ssi A est fermé dans X.

Solution.

a) Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

b) On suppose $(A, d_{|A})$ complet ; montrons que A est fermé dans X. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A^{\mathbb{N}}$ dont on suppose qu'elle converge dans X ; soit $\ell = \lim a_n$; montrons que $\ell \in A$. La suite (a_n) étant convergente dans (X, d), y est de Cauchy. Elle est donc de Cauchy dans $(A, d_{|A})$. Ce dernier étant complet, elle converge dans $(A, d_{|A})$ vers un point $\ell' \in A$. Par unicité de la limite dans X, $\ell = \ell' \in A$. On vient d'établir que A est fermé dans X par une caractérisation séquentielle.

Supposons réciproquement A fermé dans X ; soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(A, d_{|A})$. Alors (a_n) vue comme suite de (X, d) est encore de Cauchy ; comme (X, d) est complet, elle converge vers un $\ell \in X$. Mais comme A est fermé, on a en fait $\ell \in A$. Comme $a_n \to \ell$ au sens de d et que tout est dans A, on a aussi $a_n \to \ell$ au sens de $d_{|A}$. L'espace $(A, d_{|A})$ est donc complet.

Exercice 2 (1 point)**.** Soit $X = [-1, 0[\cup]0, 1]$ muni de la distance usuelle. Démontrer que $[-1, 0[$ est ouvert et fermé dans X.

Solution. On sait que les ouverts de X sont les intersections d'ouverts de $\mathbb{R}$ avec X. En particulier, $[-1, 0[= (] -2, 0[\cap X)$ est un ouvert de X, et $]0, 1] = (]0, 2[\cap X)$ aussi, si bien que $X\setminus]0, 1] = [-1, 0[$ est un fermé de X.

Exercice 3 (2+1 points)**.**

a) Soient (X, d) un espace compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de X. On suppose que (x_n) possède une et une seule valeur d'adhérence. Montrer que (x_n) converge.

b) Donner un contre-exemple à ce phénomène quand X n'est pas compact.

Solution.

a) On suppose que (x_n) a une unique valeur d'adhérence, notée ℓ ; montrons que $x_n \to \ell$.

> Il est normal de sécher un peu à ce point. « Le problème paraît suffisamment séquentiel pour qu'on fasse du Bolzano-Weierstraß » est la première chose qui vient à l'esprit. Assurément, mais il ne s'agit pas de démontrer la compacité, seulement de l'utiliser. Ce qu'il faut démontrer est qu'une suite donnée converge. On a même la limite. Mais toujours pas d'idée.
>
> La démonstration par l'absurde est faite pour ce genre de situation. Supposons en effet que la suite ne converge pas ; alors infiniment souvent, elle reste « loin » de ℓ. Mais une suite extraite qui reste au large de ℓ doit avoir une valeur d'adhérence, par compacité, contradiction ! Nous tenons notre démonstration.

Supposons que (x_n) ne converge pas vers ℓ. Alors $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, d(x_n, \ell) > \varepsilon$. Fixons un tel ε ; il existe alors une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_{\varphi(n)}, \ell) > \varepsilon$. Par compacité de X, $(x_{\varphi(n)})$ possède une valeur d'adhérence $a \in X$. Comme c'est aussi une valeur d'adhérence de (x_n), on a par l'hypothèse d'unicité $a = \ell$, contre le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, \ell) > \varepsilon$. Contradiction.

b) Il est facile de construire une suite non convergente qui possède une unique valeur d'adhérence : on prend l'archétype de la suite sans valeur d'adhérence (par exemple $v_n = n \in \mathbb{R}$) et l'on « mélange » avec une suite convergente (par exemple $w_n = 0$).

Il est clair que la suite $u_n = (n$ si n est pair, 0 si n est impair$)$ possède une unique valeur d'adhérence mais ne converge pas.